

Sujet de thèse en mathématiques appliquées

# Détection d'Objets à partir de Mesures de champs Électromagnétiques basée sur des Méthodes d'Optimisation De forme (DOMEMOD)

Thomas Bonnafont <sup>\*</sup> et Fabien Caubet <sup>†</sup> et Jordan Ninin <sup>‡</sup>

*Lab-STICC, UMR CNRS 6285, ENSTA Bretagne,  
29806 Brest, France*

*Université de Pau et des Pays de l'Adour, E2S-UPPA, LMAP, CNRS, UMR 5142,  
64000 Pau, France*

## 1 Présentation de la thèse

### 1.1 Contexte et principaux objectifs

Cette thèse porte sur la détection d'objets à partir de mesures partielles de champs électromagnétiques (comme la Surface Équivalente Radar – SER), voir l'exemple de la figure 1. Le but est de répondre à la question suivante :

- *comment retrouver la position et la forme d'un objet à partir des mesures de champs ?*

Les applications sous-jacentes touchent de nombreux domaines comme **la défense**, avec la détection de cible, **la santé**, avec l'Imagerie par Résonance Magnétique, et la **géoscience**, avec la détection d'objets enfouis.

Nous considérerons principalement les *Équations aux Dérivées Partielles* (EDP) liées à la propagation des ondes électromagnétiques en domaine fréquentiel, ou *équation de Helmholtz*, en étudiant dans un premier temps le cas d'un domaine borné avec des conditions aux limites mixtes. Pour se ramener à un domaine borné, la *condition de Sommerfeld* sera approchée par une condition de Robin (modélisant l'absorption). L'étude du cas non borné pourra naturellement être une extension des premiers résultats obtenus.

Dans un premier temps, nous étudierons l'approximation numérique de ce problème à l'aide de la méthode des éléments finis, et la mise en œuvre numérique s'appuiera sur un code existant pour le problème direct. Ce code sera développé et enrichi au cours de la thèse, en optimisant par exemple la

---

<sup>\*</sup>thomas.bonnafont@ensta-bretagne.fr    <https://www.ensta-bretagne/bonnafont>

<sup>†</sup>fabien.caubet@univ-pau.fr    <http://fcaubet001.perso.univ-pau.fr>

<sup>‡</sup>jordan.ninin@ensta-bretagne.fr

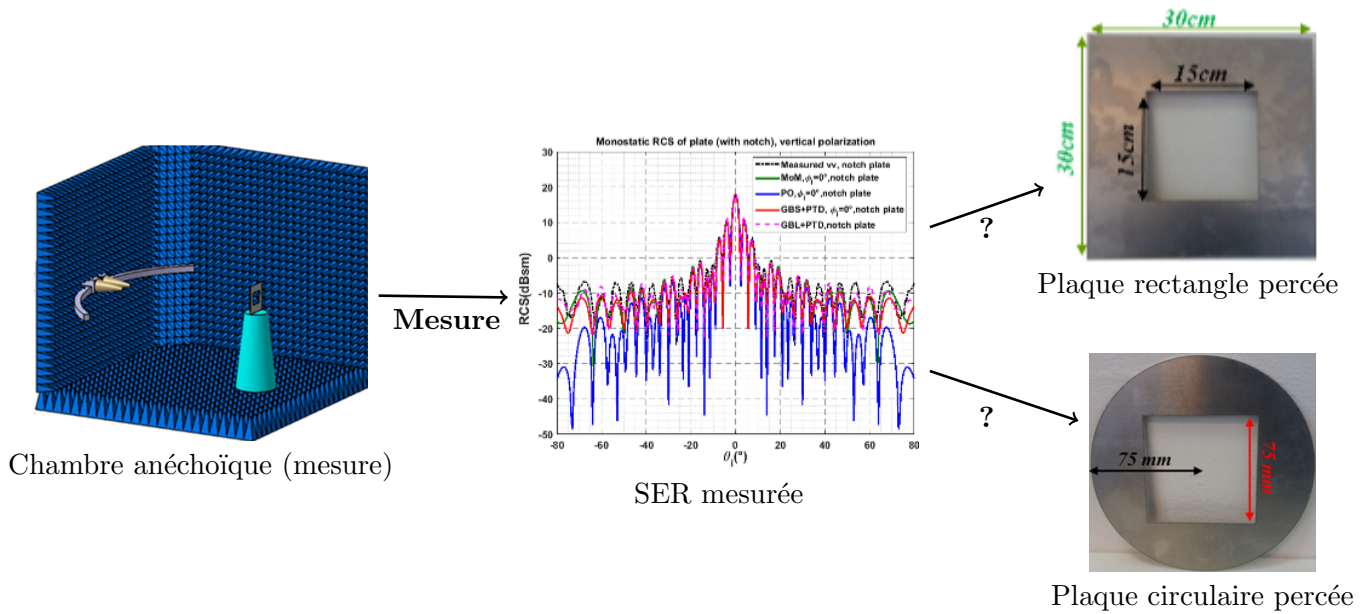


FIGURE 1 – Quel objet a donné la SER mesurée ?

rapidité et l'efficacité de la résolution numérique du problème direct. L'enjeu principal de la thèse sera ensuite la résolution du *problème inverse* visant à reconstruire l'obstacle à partir des mesures de champs. Pour cela, nous utiliserons une méthode d'*optimisation de forme robuste* permettant de reconstruire le (ou les) objets à l'aide de mesures aléatoires ou bruitées.

Les objectifs sont ainsi à la fois numériques et théoriques : dans une situation physique difficile, à savoir la détection et la reconstruction d'objets à partir de mesures de champs bruitées, nous chercherons à mettre en œuvre des méthodes numériques efficaces pour résoudre un problème inverse en utilisant des méthodes d'optimisation de forme.

## 1.2 Pré-requis

Plusieurs outils et techniques de mathématiques appliquées et de physique (électromagnétisme en particulier) seront nécessaires pour cette thèse, notamment l'étude des phénomènes ondulatoires, l'analyse théorique et numérique des EDP, la méthode des éléments finis, l'optimisation de forme, et la programmation. Il n'est pas demandé une parfaite maîtrise de l'intégralité de ces sujets, mais il est indispensable que le·la candidat·e soit familier·ère avec certaines de ces notions.

## 1.3 Environnement scientifique

La thèse sera encadrée par Thomas Bonnafont de l'équipe PIM du Laboratoire STICC (Lab-STICC), Fabien Caubet du Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau (LMAP) et Jordan Ninin de l'équipe MATRIX du Lab-STICC et aura lieu au sein de l'ENSTA Bretagne. Des séjours réguliers, de quelques jours à quelques semaines, à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA) sont à prévoir au cours de la thèse afin que le·la doctorant·e puisse pleinement bénéficier des compétences des chercheurs·euses des deux sites.

## 2 Sujet de thèse

### 2.1 Introduction succincte aux deux principaux domaines scientifiques investis

D'un côté, la **propagation des ondes électromagnétiques** décrit la façon dont ces ondes se propagent et interagissent avec l'environnement. Par exemple, lorsque le champ électromagnétique interagit avec un objet, une partie du champ incident est transmise, et l'autre est réfléchi. Selon, la forme et la composition de l'objet, ces deux composantes peuvent être différentes et permettent donc, par la mesure du champ, de caractériser l'objet. Il est à noter que d'autres phénomènes physiques peuvent également modifier le comportement des ondes électromagnétiques, comme la réfraction, la diffraction, ou encore la diffusion. En termes de modélisation, ces phénomènes peuvent être étudiés par la résolution de l'équation de Helmholtz en domaine fréquentiel sous condition de Sommerfeld. Cette dernière est en général approchée par une condition d'absorption. L'objectif principal est d'obtenir une méthode numérique précise et efficace pour la résolution du problème direct. En effet, cette étape est cruciale afin de pouvoir résoudre correctement le problème inverse.

De l'autre côté, l'**optimisation de forme** - ou "comment trouver la meilleure conception au regard d'un critère donné" - est une discipline au confluent des mathématiques, de l'informatique et des sciences physiques et mécaniques qui a récemment connu de profonds développements (voir [11, 1] pour une présentation de cette discipline). La formulation mathématique générale d'un problème d'optimisation de forme s'écrit

$$\min_{\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(\Omega), \quad \text{tel que } G(\Omega) \leq 0,$$

où le critère  $J(\Omega)$  et la contrainte  $G(\Omega)$  sont fonctions du domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  des formes admissibles (en pratique on considérera une dimension  $d = 2$  ou  $d = 3$ ). Dans les applications concrètes, le critère d'optimisation  $J(\Omega)$  et la contrainte  $G(\Omega)$  contiennent une description de la physique en jeu dans le domaine recherché  $\Omega$ , par exemple, dans le contexte mentionné ci-dessus,

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \|\tilde{u}(\Omega) - u_{\text{mes}}\|^2,$$

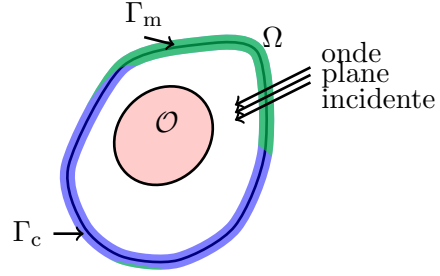
où  $\tilde{u}$  correspond au champ calculé pour le domaine (objet)  $\Omega$  et  $u_{\text{mes}}$  est le champ mesuré (SER) sur une partie du bord du domaine de calcul (la norme étant ainsi une norme  $L^2$  de cette partie du bord). Cette représentation correspond au formalisme des moindres-carrés. Le but est ainsi de modifier la forme de l'objet pour obtenir la SER mesurée en minimisant cette fonctionnelle par des méthodes d'optimisation (typiquement des méthodes de gradient).

### 2.2 Résumé du sujet de thèse

Cette thèse vise à étudier le problème inverse de détection et reconstruction de forme à partir de mesures de champs électromagnétiques en utilisant des méthodes d'optimisation de forme. Dans le cadre de la collaboration entre le LMAP et l'ENSTA Bretagne, des premiers travaux ont été entrepris sur ce sujet dans le cas d'un objet parfaitement métallique (PEC)  $\mathcal{O}$  dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose alors que le bord du domaine  $\partial\Omega$  est composé de deux parties non vides :  $\Gamma_m$  où les mesures sont effectuées, et  $\Gamma_c$  son complémentaire (avec  $\overline{\Gamma_m \cup \Gamma_c} = \partial\Omega$  et  $\Gamma_m \cap \Gamma_c = \emptyset$ ). La modélisation de la propagation est faite dans le domaine fréquentiel, en supposant une onde plane incidente (hypothèse de champ lointain). Ainsi, le problème inverse s'écrit sous la forme suivante :

Trouver  $\mathcal{O}$  et la solution  $u \in H^1(\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}})$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}, \\ \partial_n u + jku = h & \text{sur } \Gamma_c, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\ \partial_n u = h - jkg & \text{sur } \Gamma_m, \\ u = g & \text{sur } \Gamma_m, \end{cases}$$



où  $k$  correspond au nombre d'onde,  $j$  à l'unité imaginaire,  $g$  à la mesure du champ (donné),  $h$  une fonction permettant de modéliser la condition de Sommerfeld en domaine borné (condition d'absorption), et  $\partial_n u$  la dérivée normale de  $u$ .

Ce problème soulève plusieurs types de questions, tant théoriques (résultat d'identifiabilité, comme par exemple dans [12], de stabilité, comme dans [3]) mais aussi numériques (principalement la mise en place et l'implémentation de la méthode de reconstruction, ainsi que la méthode de résolution du problème direct).

Pour la reconstruction numérique, les premiers travaux développés entre l'ENSTA Bretagne et le LMAP ont permis de mettre en place une méthode basée sur l'optimisation de forme et l'utilisation de **la fonctionnelle de Kohn-Vogelius** (utilisée par exemple dans [6] dans un autre contexte). En effet, cette dernière est plus robuste et stable numériquement que la fonctionnelle classique des moindres carrés, même si elle nécessite la résolution numérique de davantage de problèmes (qui sont cependant du même type). Les simulations pourront être réalisées à l'aide du logiciel FreeFem++ [10].

Des premiers résultats dans le cas d'une mesure continue sur une partie du domaine ont été obtenus pour la reconstruction d'un objet avec une convexité : voir la figure 2. Le problème d'optimisation sous-jacent a été résolu numériquement à l'aide d'une méthode de descente de gradient. Cependant, ce problème étant naturellement mal posé, une méthode d'accélération de Nesterov (voir par exemple [8] ou [2]) a été utilisée, en plus d'une méthode de régularisation, pour améliorer la vitesse de convergence. Ici le domaine de mesure est supposé continu. Dans une première partie le candidat s'intéressera au cas de plusieurs émetteurs et récepteurs, ce qui permettrait d'améliorer la reconstruction de la cible et de se placer dans un cas plus réaliste au vu des applications. Le candidat pourra également s'intéresser à d'autres méthodes d'optimisation pour résoudre le problème sous-jacent, comme les méthodes de quasi-Newton.

La méthode proposée ici est basée sur une paramétrisation des bords de l'objet  $\mathcal{O}$  par série de Fourier. Cette dernière a l'avantage d'être simple et permet de retrouver des formes présentant des convexités. Cependant, cette paramétrisation ne permet pas de changer la topologie de la forme, ou de retrouver plusieurs objets. C'est pourquoi dans un second temps le candidat s'intéressera à une paramétrisation par courbes de Bézier associée à une procédure flip, décrite dans [4], ce qui permettra de changer la topologie de l'objet pendant la reconstruction et de détecter et reconstruire plusieurs objets. Le candidat pourra également s'intéresser aux méthodes d'optimisation de forme "level-set" largement utilisées dans le domaine [14, 9].

Ensuite, le candidat s'intéressera à la mise en place et à l'implémentation d'une méthode de reconstruction robuste, en se basant sur [8]. En effet, de façon générale les données mesurées sont entachées de bruit, il est donc important de prendre en compte cette incertitude lors de la reconstruction, pour proposer une reconstruction fiable. Cela repose sur un changement de la fonctionnelle à minimiser en étudiant les moments statistiques d'ordre 1 et 2 : l'espérance et la variance. Cette question pose également des problèmes numériques, et le candidat pourra améliorer la méthode de résolution du problème direct, soit en développant une méthode efficace basée sur les éléments finis, soit en utilisant d'autres

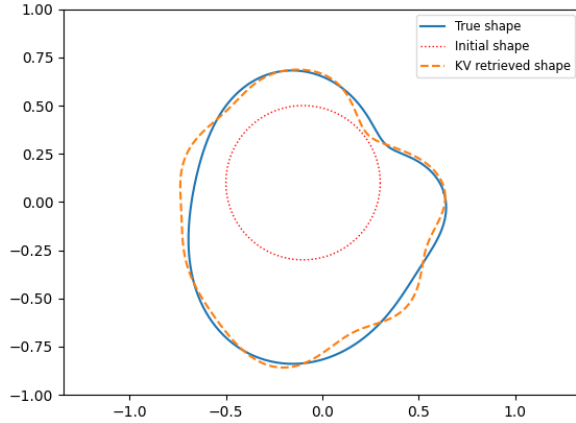


FIGURE 2 – Comparaison de la forme réelle et celle obtenue avec l’algorithme de reconstruction.

méthodes numériques, comme les *méthodes asymptotiques* [5, 13].

Enfin, le-la candidat-e s’intéressera à la problématique de prise en compte de différents milieux. Tout d’abord, nous nous intéresserons à un objet PEC flottant entre deux milieux (par exemple l’air et la mer). Ensuite, la problématique d’un objet  $\mathcal{O}$  constitué de différents matériaux (dont une partie métallique) sera traitée. Nous considérerons dans un premier temps des matériaux connus, avant de nous consacrer à une problématique plus difficile, où le but sera de retrouver à la fois la forme de l’objet mais aussi les matériaux le constituant. Dans ce cadre, nous supposerons une cible constituée de deux matériaux, dont l’un est du métal, et nous essayerons de détecter et de reconstruire  $\mathcal{O}$  tout en retrouvant ses caractéristiques électromagnétiques (permittivité  $\varepsilon$  par exemple).

Il est à noter, que des comparaisons avec d’autres méthodes comme l’imagerie SAR (Synthetic Aperture Radar [15, 7]) et/ou avec des mesures concrètes en chambre anéchoïque pourront également être effectuées pour valider la méthode. Les questions d’identifiabilité et de stabilité évoquées plus haut pourront également être étudiées selon les avancées et les aspirations du-de la candidat-e.

## Références

- [1] G. Allaire and M. Schoenauer. *Conception optimale de structures*, volume 58. Springer, 2007.
- [2] L. Audibert, H. Haddar, and X. Liu. An accelerated level-set method for inverse scattering problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 15(3) :1576–1600, 2022.
- [3] E. Beretta, M. V. de Hoop, F. Faucher, and O. Scherzer. Inverse boundary value problem for the Helmholtz equation : quantitative conditional Lipschitz stability estimates. *SIAM J. Math. Anal.*, 48(6) :3962–3983, 2016.
- [4] P. Bonnelie, L. Bourdin, F. Caubet, and O. Ruatta. Flip procedure in geometric approximation of multiple-component shapes – Application to multiple-inclusion detection. *The SMAI journal of computational mathematics*, 2 :255–276, 2016. Publisher : Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles.
- [5] D. Bouche, F. Molinet, and R. Mittra. *Asymptotic methods in electromagnetics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [6] F. Caubet, M. Dambrine, D. Kateb, and C. Z. Timimoun. A Kohn-Vogelius formulation to detect an obstacle immersed in a fluid. *Inverse Problems & Imaging*, 7(1) :123, 2013.
- [7] F. Comblet, A. Khenchaf, A. Baussard, and F. Pellen. Bistatic synthetic aperture radar imaging : Theory, simulations, and validations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 54(11) :3529–3540, 2006.
- [8] M. Dambrine and K. Vyacheslav. Robust obstacle reconstruction in an elastic medium, 2022.
- [9] O. Dorn and D. Lesselier. Level set methods for inverse scattering. *Inverse Problems*, 22(4) :R67–R131, Aug. 2006.
- [10] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, and K. Ohtsuka. Freefem++ manual, 2005.
- [11] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes : une analyse géométrique*. Number 48 in Mathématiques & applications. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [12] R. Kress and W. Rundell. Inverse scattering for shape and impedance. volume 17, pages 1075–1085. 2001. Special issue to celebrate Pierre Sabatier’s 65th birthday (Montpellier, 2000).
- [13] P. O. Leye, A. Khenchaf, P. Pouliguen, et al. The gaussian beam summation and the gaussian launching methods in scattering problem. *Journal of Electromagnetic Analysis and Applications*, 8(10) :219, 2016.
- [14] A. Litman, D. Lesselier, and F. Santosa. Reconstruction of a two-dimensional binary obstacle by controlled evolution of a level-set. *Inverse Problems*, 14(3) :685–706, June 1998.
- [15] M. Prickett and C. Chen. Principles of inverse synthetic aperture radar/isar/imaging. In *EAS-CON’80 ; Electronics and Aerospace Systems Conference*, pages 340–345, 1980.