ENSIETA
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS

[Analyse par intervalles pour le lancé de rayon et pour l'analyse de stabilité]

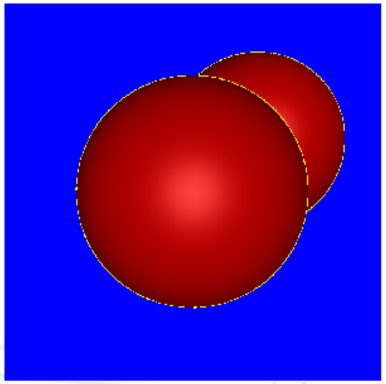
Fabrice LE BARS

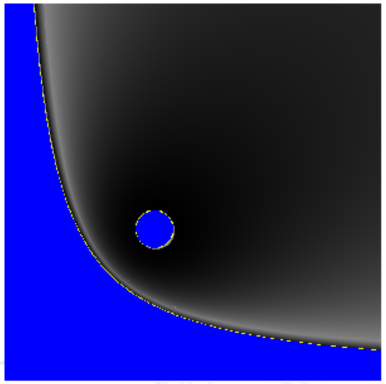
> Sommaire

Introduction

Introduction

- But : Mise en parallèle de deux problèmes a priori différents : lancé de rayon et analyse de stabilité d’un polynôme paramétrique





- Approche : calcul par intervalles

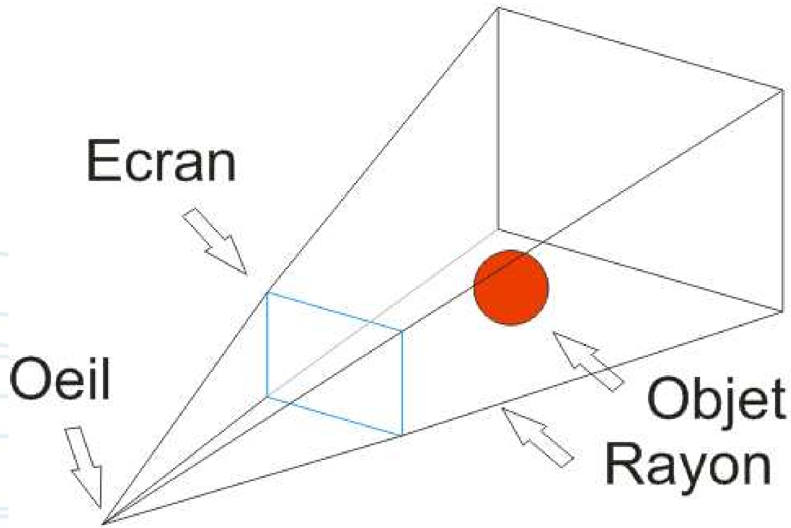
Lancé de rayon

Lancé de rayon

- Description
  - Lancé de rayon = ray tracing ≈ ray casting
  - Affichage d'une scène 3D
  - Principe : reconstituer le trajet inverse de la lumière en partant de l'écran vers l'objet

Lancé de rayon

- Hypothèses
  - Objets décrits par des fonctions implicites
  - Œil placé à l'origine du repère R(O,i,j,k) et écran placé en z=1
  - L’écran n’est pas dans l’objet



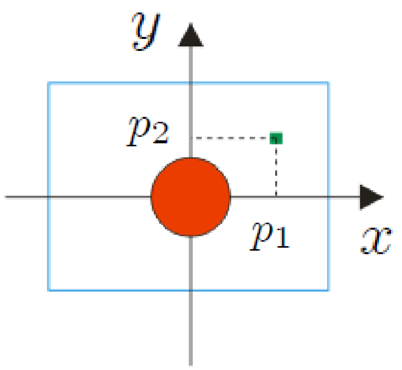
Lancé de rayon

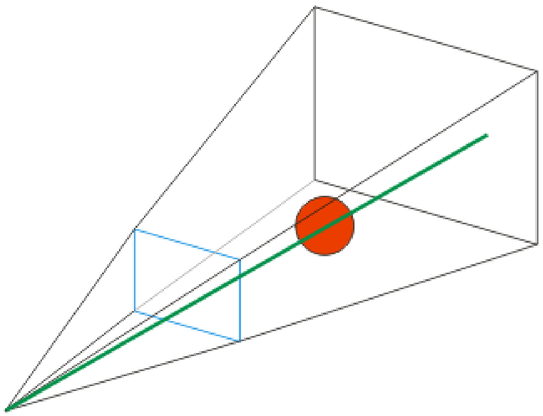
- Position du problème
  - Un rayon passant par le pixel

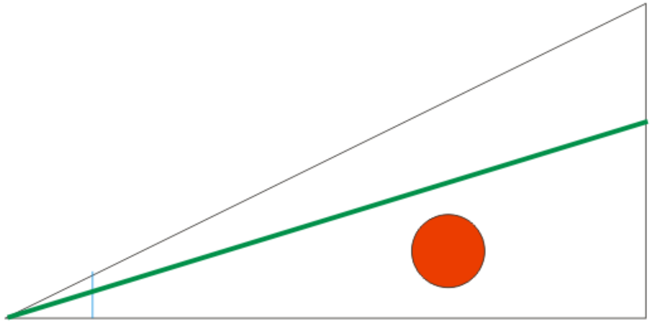
$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in [\mathbf{p}]$$

sera donc décrit par les équations

$$x = p_1.d$$
$$y = p_2.d$$
$$z = d$$





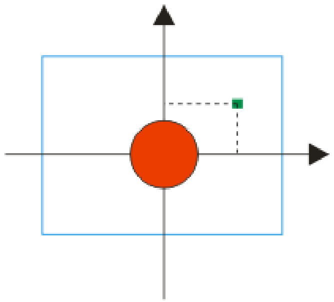
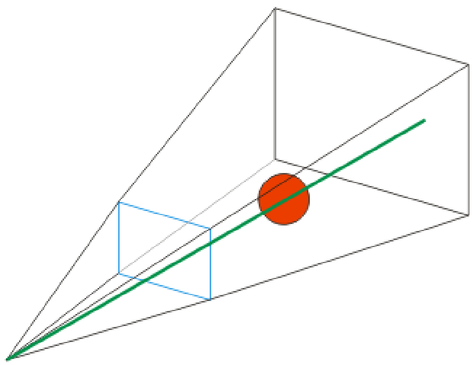
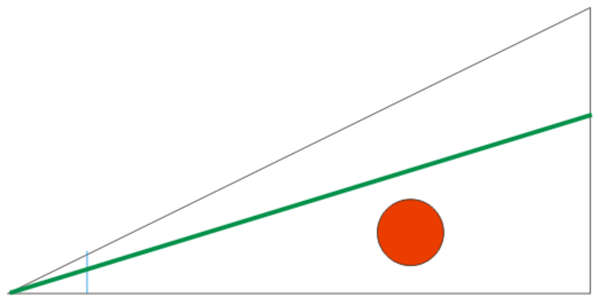


Lancé de rayon

- Position du problème
  - Le point (x, y, z) est dans l'objet si

$$f(x, y, z) \leq 0$$

  - Un pixel affiche un point de l'objet si le rayon associé traverse l'objet

Lancé de rayon

Le rayon associé à un pixel $\mathbf{p}$ intersecte l'objet si

$$\exists d \geq 0, g(\mathbf{p}, d) \leq 0$$

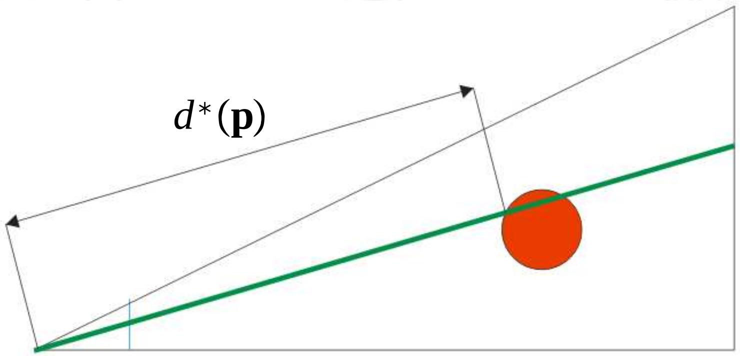
avec

$$g(\mathbf{p}, d) = f(p_1.d, p_2.d, d)$$

Lancé de rayon

- Gestion des effets de lumière
  - Réalisme => modèle d'illumination
  - Phong : nécessite la distance à l'œil de la surface de l'objet à afficher
  - Il nous faut donc évaluer pour chaque pixel **p** :

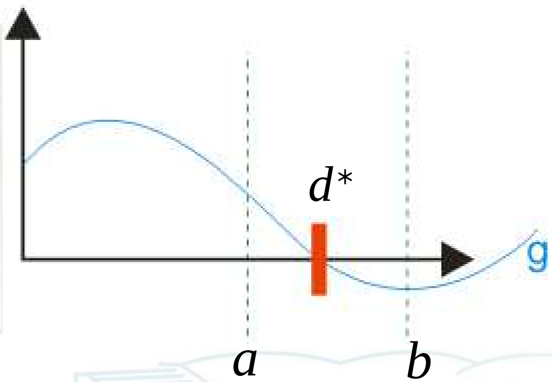
$$d^*(\mathbf{p}) = \min_{\substack{d \geq 0 \\ g(\mathbf{p},d) \leq 0}} d$$



Lancé de rayon

- Calcul de la plus petite racine d^* positive d'une fonction

$$\begin{cases} g([0,a]) \subset [0,\infty[\\ g(b) < 0 \\ g'([a,b]) \subset]-\infty,0] \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad d^* \in [a,b]$$



Lancé de rayon

- Calcul de la plus petite racine d^* positive d'une fonction
  - Une méthode par intervalles nous donne $[a,b]$
  - Une dichotomie nous calcule d^*

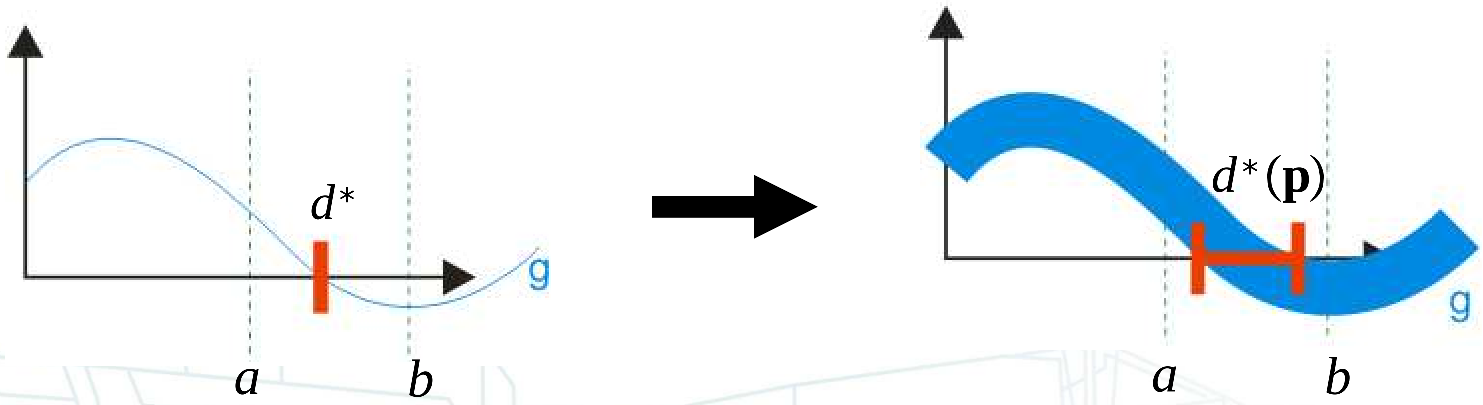
Lancé de rayon

- Version paramétrique
  - $g(\mathbf{p},d)$ dépend maintenant d'un vecteur de paramètre $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$

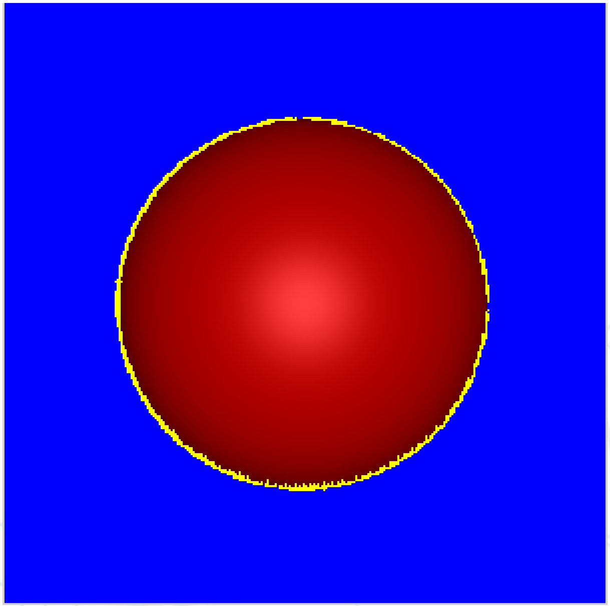
$$\left\{\begin{array}{l} g([\mathbf{p}],[0,a]) \subset [0,\infty[\\ g([\mathbf{p}],b) \subset]-\infty,0] \\ \frac{\partial g}{\partial d}([\mathbf{p}],[a,b]) \subset]-\infty,0] \end{array}\right. \Longrightarrow d^*([\mathbf{p}]) \subset [a,b]$$

Lancé de rayon

- Passage de d^* à $d^*(\mathbf{p})$



Lancé de rayon



Analyse de la stabilité d'un système paramétrique

Analyse de la stabilité d'un système paramétrique

- Stabilité

$$P(s,\mathbf{p}) \text{ stable} \Leftrightarrow \text{toutes ses racines sont à partie réelle} \leq 0$$

$$\overset{\text{(Routh)}}{\Leftrightarrow} \; r(\mathbf{p}) \leq 0$$

où r est obtenu par la table de Routh

Analyse de la stabilité d'un système paramétrique

- δ stabilité

$$P(s,\mathbf{p}) \text{ est } \delta \text{ stable} \Leftrightarrow \text{toutes ses racines sont à partie réelle} \leq \delta$$

$$\overset{\text{(Routh)}}{\Leftrightarrow} \; r(\mathbf{p},\delta) \leq 0$$

Analyse de la stabilité d'un système paramétrique

- Exemple : Ackermann

  Le polynôme

$$\begin{aligned} P(s,\mathbf{p}) &= s^3 + (p_1 + p_2 + 2)s^2 + (p_1 + p_2 + 2)s \\ &\quad +2p_1p_2 + 6p_1 + 6p_2 + 2.25. \end{aligned}$$

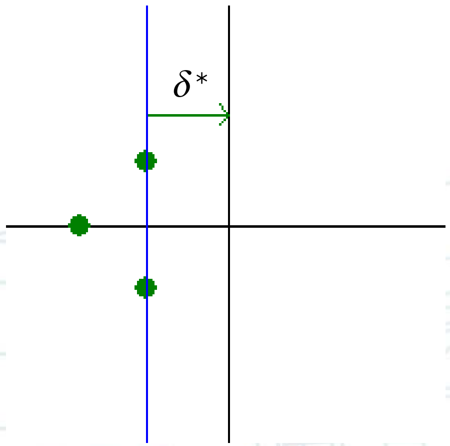
  est δ stable si

$$r(\mathbf{p},\delta) = \min\begin{pmatrix} p_1 + p_2 + 2 - 3\delta \\ (p_1-1)^2 + (p_2-1)^2 - 0.25 - 2\delta((p_1+p_2+2)(p_1+p_2+3-4\delta)+4\delta^2) \\ 2(p_1+3)(p_2+3) - 15.75 - \delta((p_1+p_2+2)(1+\delta)-\delta^2) \end{pmatrix} \leq 0$$

Analyse de la stabilité d’un système paramétrique

- Degré de stabilité

$$\delta^*(\mathbf{p}) = \min_{\substack{\delta\geq 0\\ r(\mathbf{p},\delta)\leq 0}} \delta$$

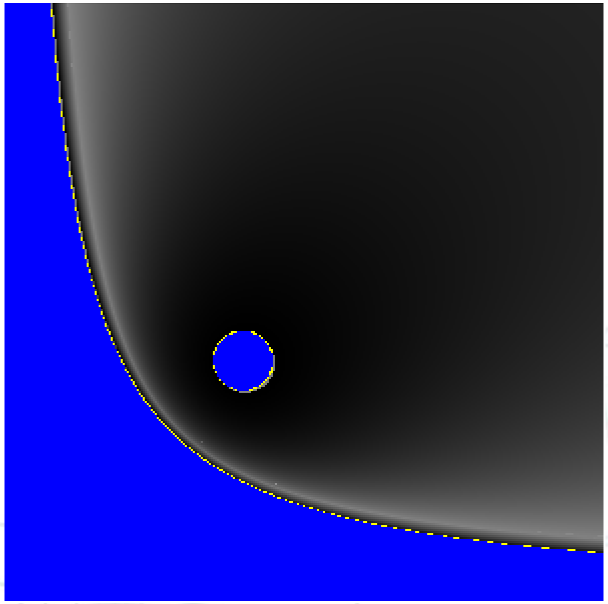


Analyse de la stabilité d'un système paramétrique

- Correspondance avec le lancé de rayon

Lancé de rayon		Degré de stabilité
d	$\longleftrightarrow$	δ
g	$\longleftrightarrow$	r
$d^*(\mathbf{p}) = \min\limits_{\substack{d\geq 0 \\ g(\mathbf{p},d)\leq 0}} d$	$\longleftrightarrow$	$\delta^*(\mathbf{p}) = \min\limits_{\substack{\delta\geq 0 \\ r(\mathbf{p},\delta)\leq 0}} \delta$

Analyse de la stabilité d'un système paramétrique



Conclusion

Conclusion

- Le lancé de rayon et le tracé du degré de stabilité d'un système linéaire sont des problèmes similaires

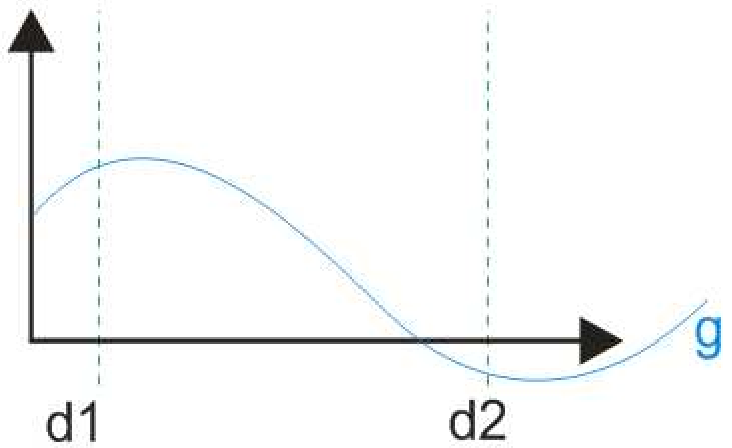
- Un algorithme commun combinant calcul par intervalles et dichotomie a été proposé

Références

- L. Jaulin. *Solution globale et garantie de problèmes ensemblistes; Application à l'estimation non linéaire et à la commande robuste.* PhD thesis, Université Paris XI Orsay, 1994.
- S. Bazeille. *Vision sous-marine monoculaire pour la reconnaissance d'objets.* PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale, 2008.
- J. Flórez. Improvements in the ray tracing of implicit surfaces based on interval arithmetic. PhD thesis, Universitat de Girona, 2008.
- L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit et E. Walter, *Applied interval analysis*, Springer-Verlag, London, Great Britain, 2001.
- L. Jaulin, E. Walter, O. Lévêque et D. Meizel, "Set inversion for chi-algorithms, with application to guaranteed robot localization", *Math. Comput Simulation*, 52, pp. 197-210, 2000.
- J. Ackermann, "Does it suffice to check a subset of multilinear parameters in robustness analysis?", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(4), pp. 487-488, 1992.
- J. Ackermann, H. Hu et D. Kaesbauer, "Robustness analysis: a case study", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(3), pp. 352-356, 1990.

Lancé de rayon

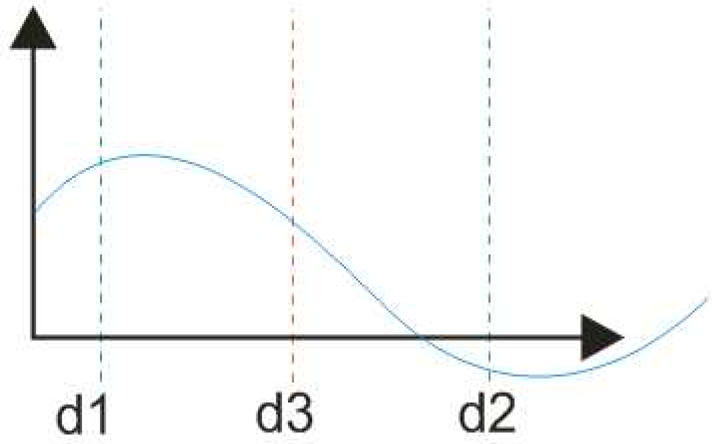
$$\mathcal{L} = \{[d_1, d_2]\} \longrightarrow \begin{array}{l} d = [d_1, d_2] \\ \mathcal{L} = \{\} \end{array}$$



$$[g]\,([d]) \not\subset [0, \infty[$$
$$[g']\,([d]) \not\subset]-\infty, 0]$$

Lancé de rayon

$$\mathcal{L} = \{[d_1, d_3], [d_3, d_2]\} \longrightarrow \begin{array}{l} d = [d_1, d_3] \\ \mathcal{L} = \{[d_3, d_2]\} \end{array}$$

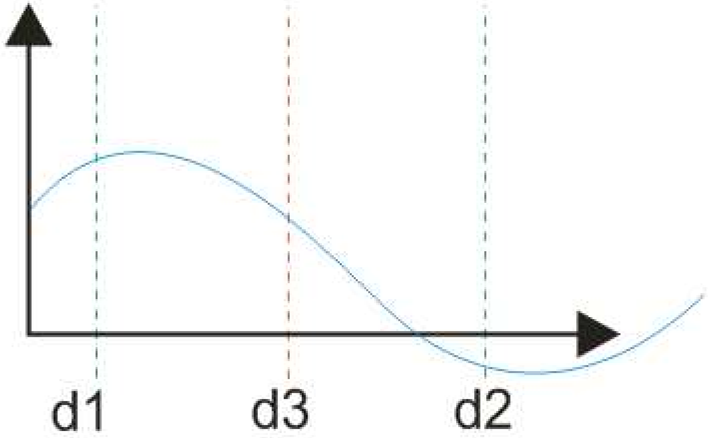


$$[g]([d]) \subset [0, \infty[$$

=> a = d3

Lancé de rayon

$$\mathcal{L} = \{[d_3, d_2]\} \longrightarrow \begin{array}{l} d = [d_3, d_2] \\ \mathcal{L} = \{\} \end{array}$$



$$[g]([d]) \not\subset [0, \infty[$$

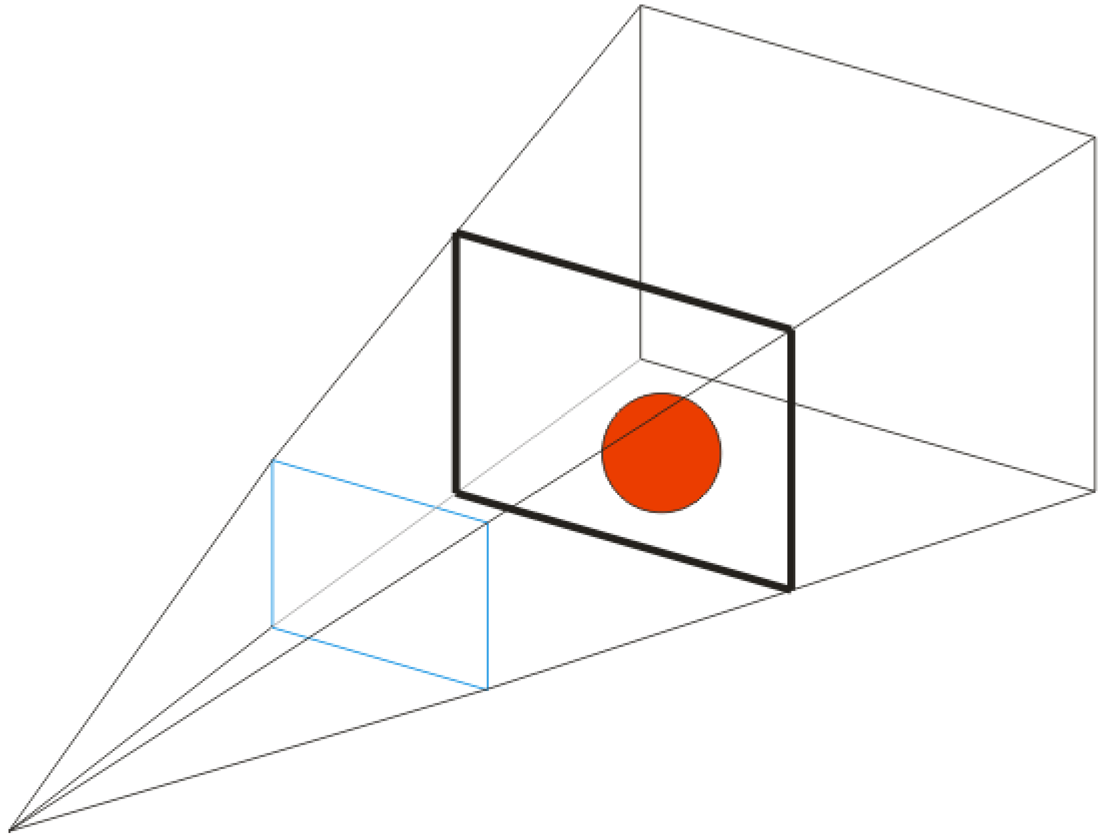
$$[g']([d]) \subset]-\infty, 0]$$

$$[g]([d^+]) < 0$$

=> b = d2

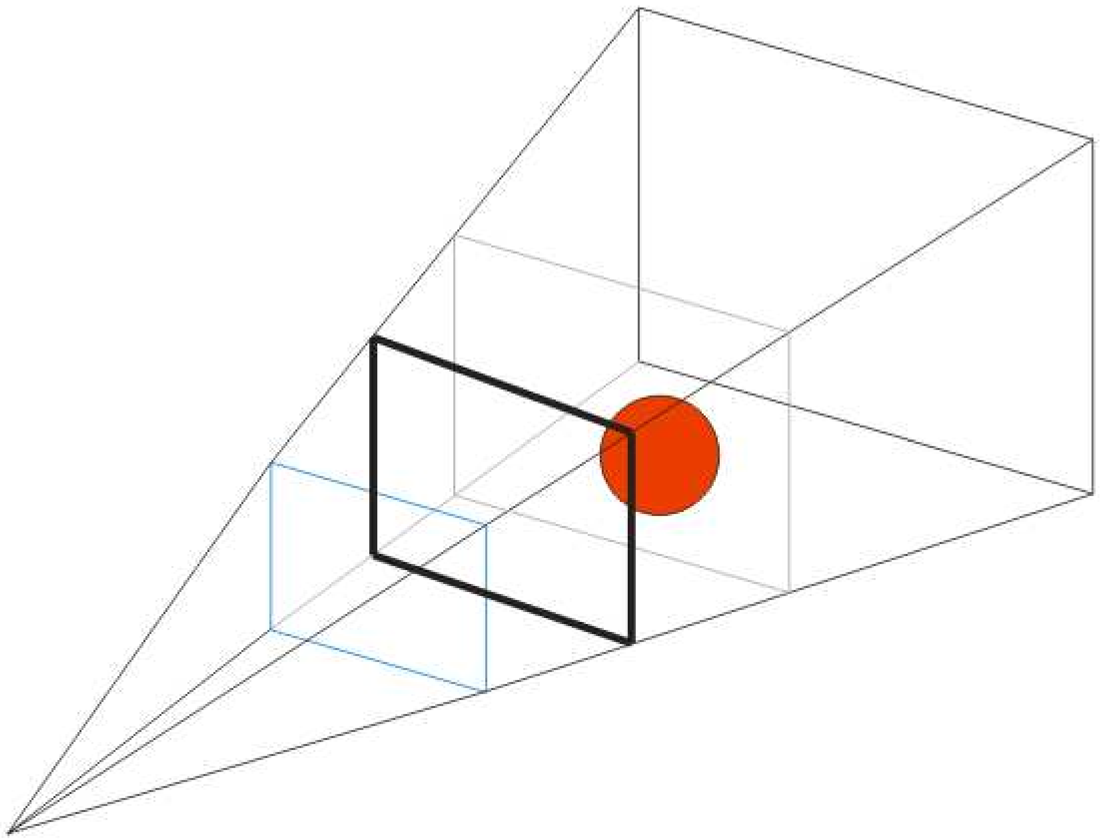
Lancé de rayon

- Découpage en d



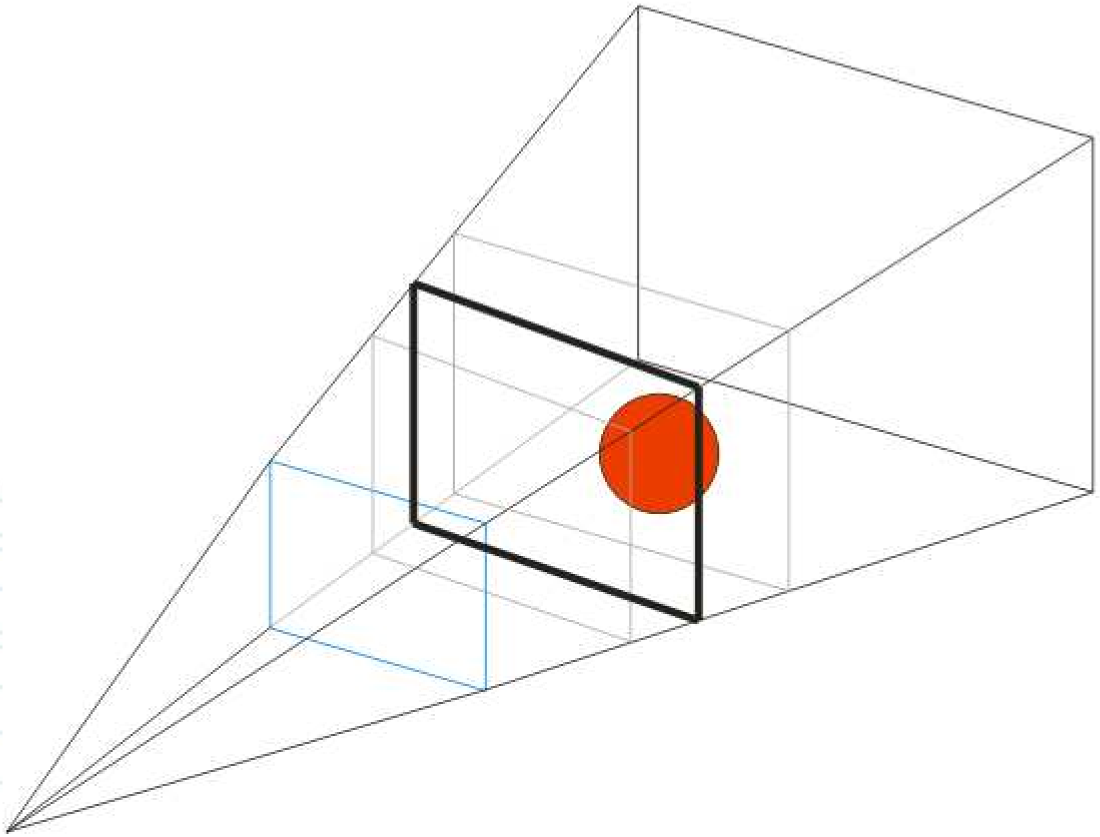
Lancé de rayon

- Découpage en d



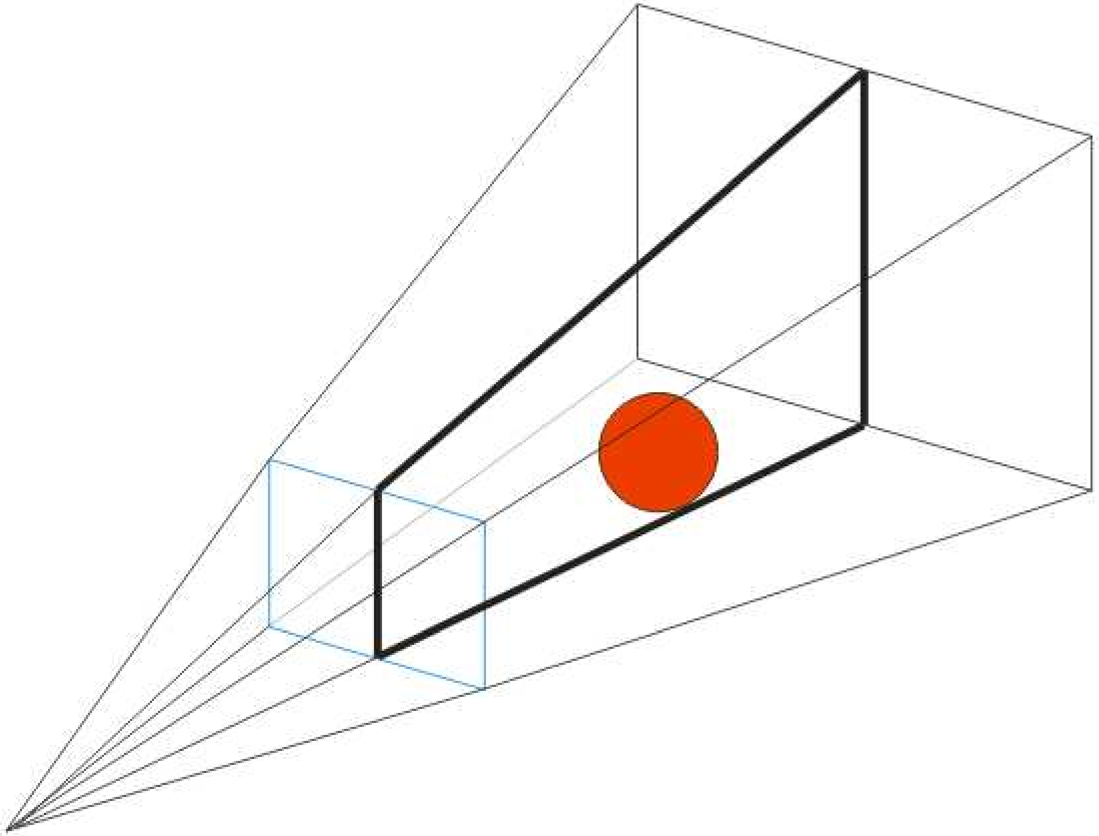
Lancé de rayon

- Découpage en d



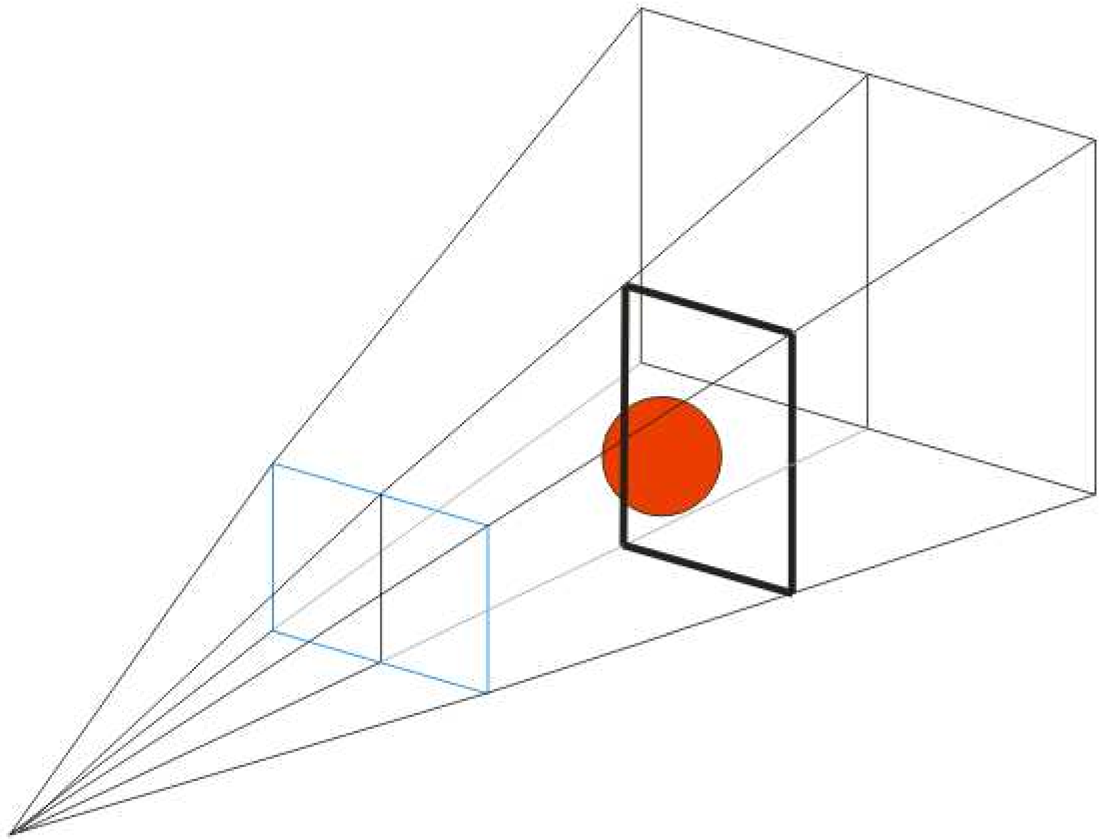
Lancé de rayon

- Découpage en **p**



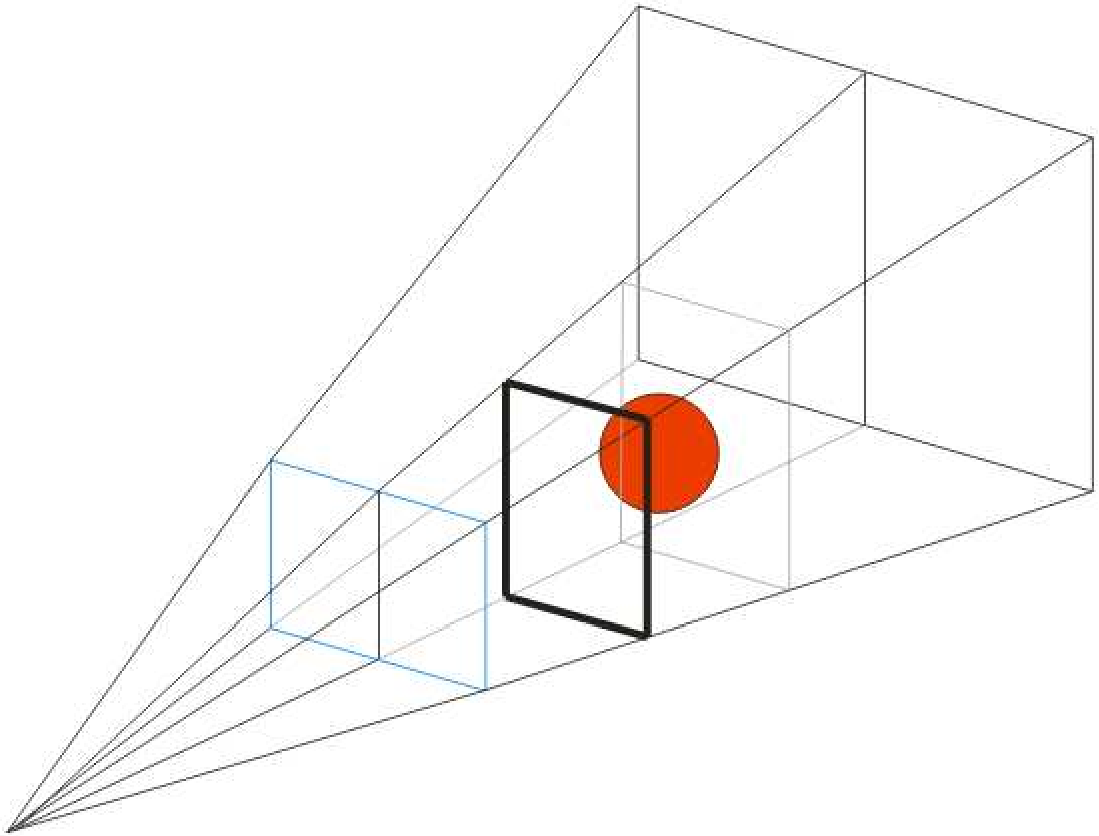
Lancé de rayon

- Découpage en **p**



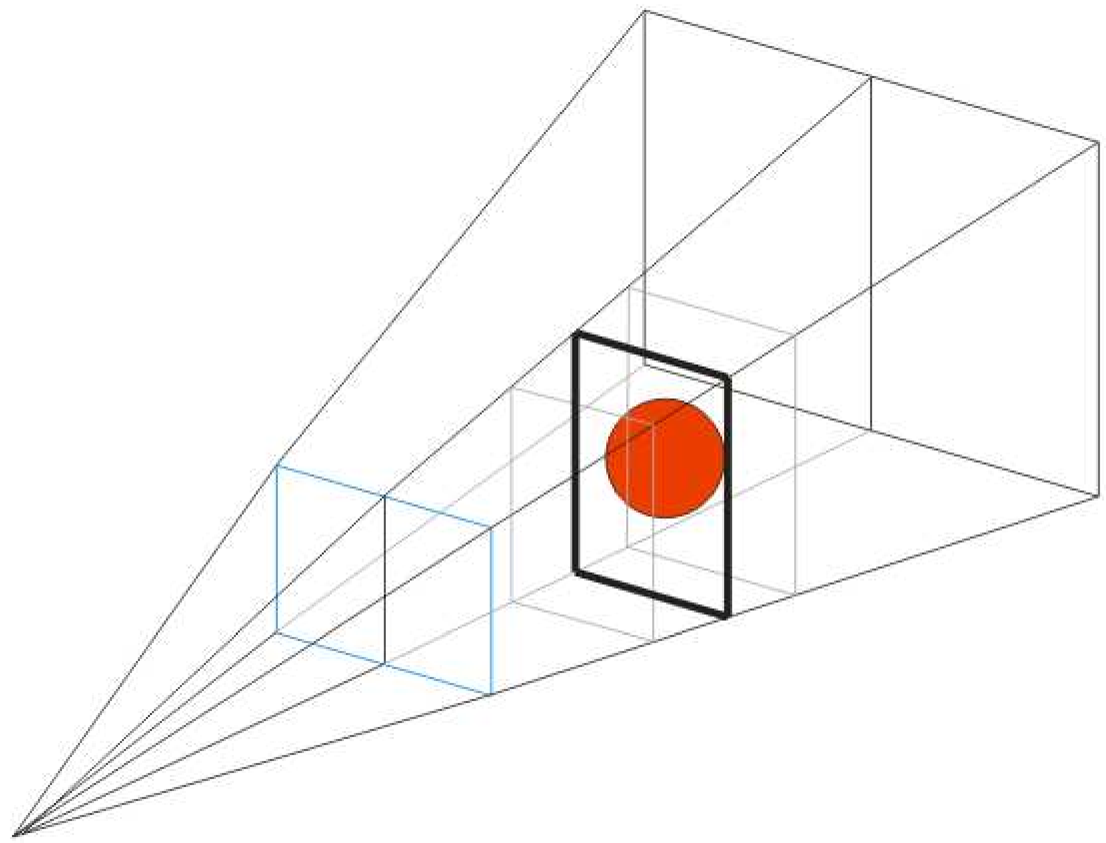
Lancé de rayon

- Découpage en **p**



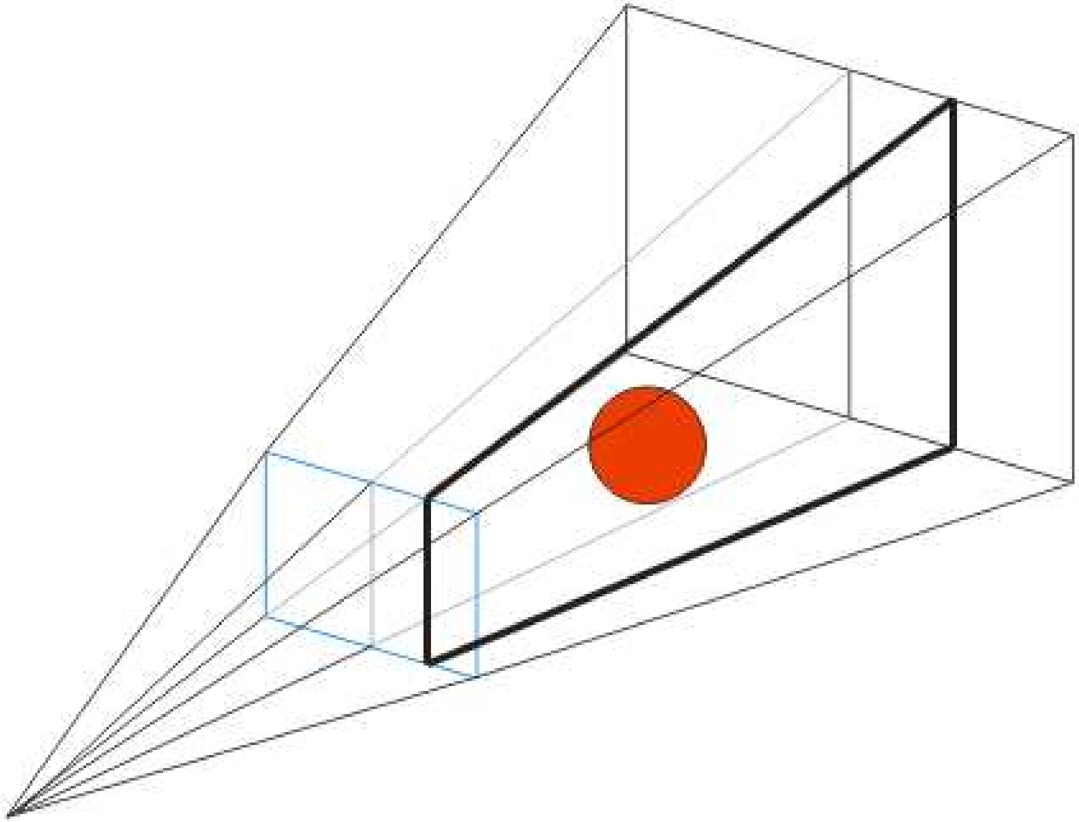
Lancé de rayon

- Découpage en **p**



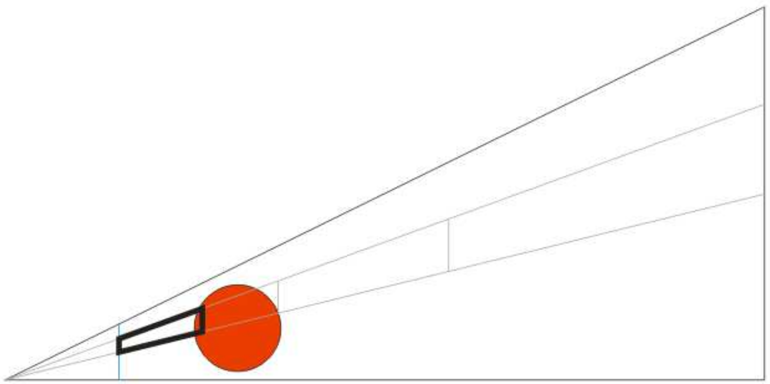
Lancé de rayon

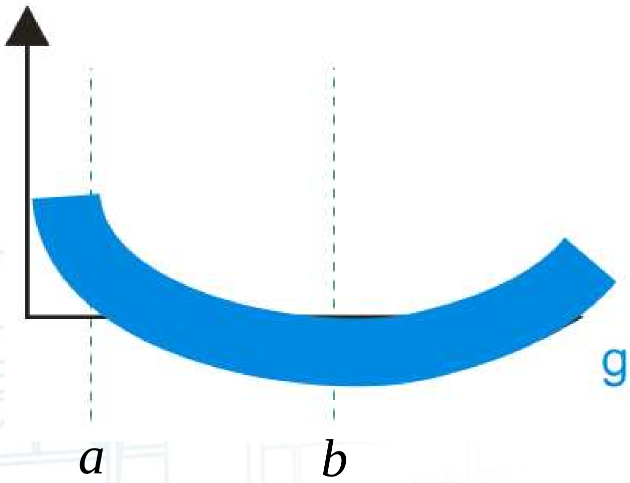
- Découpage en **p**



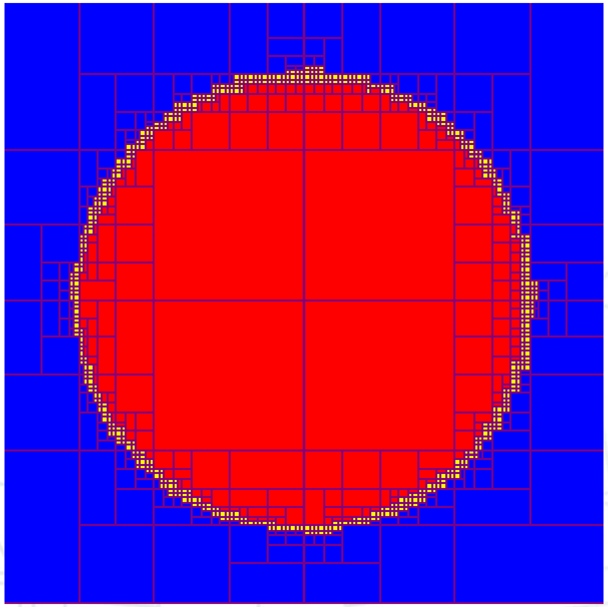
Lancé de rayon

- Découpage en **p** et en d





Lancé de rayon

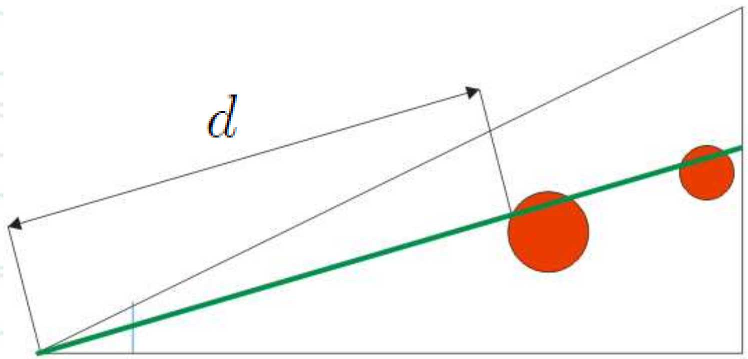


Lancé de rayon

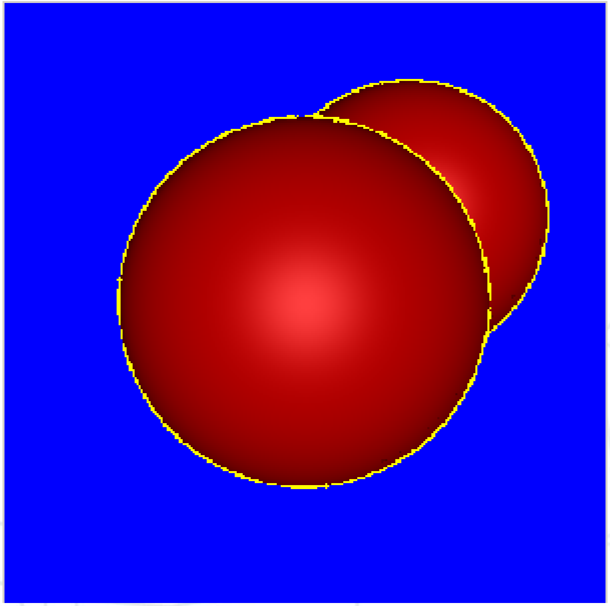
- Gestion de l'affichage de plusieurs objets
  - On reprend l'algorithme précédent sans modifications en l'appliquant pour la fonction :

$$g_{\min} : (\mathbf{p}, d) \to \min_i g_i(\mathbf{p}, d)$$

  - En effet, seul le premier objet traversé par le rayon nous intéresse



Lancé de rayon



Analyse de la stabilité d'un système paramétrique

– Degré de stabilité d'un système linéaire invariant de polynôme caractéristique P(s) :

$$\delta^* = \min_{P(s-\delta)\ \mathtt{instable}} \delta$$

– On considère un système linéaire invariant paramétré par un vecteur de paramètre **p** :

$$\begin{aligned} P(s,\mathbf{p}) \quad &= \quad s^3 + (p_1 + p_2 + 2)s^2 + (p_1 + p_2 + 2)s \\ &\qquad + 2p_1 p_2 + 6p_1 + 6p_2 + 2.25. \end{aligned}$$

Analyse de la stabilité d'un système paramétrique

– Le degré de stabilité devient :

$$\delta^*(\mathbf{p}) = \min_{P(s-\delta,\mathbf{p}) \text{ instable}} \delta$$

– En écrivant

$$P(s-\delta,\mathbf{p}) \quad = \quad s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

le polynôme est stable si (Routh) :

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 b_2 - b_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Analyse de la stabilité d'un système paramétrique

– En notant

$$r_{\min}(\mathbf{p},\delta) = \min\left(b_2, b_1 b_2 - b_0, b_0\right)$$

On obtient

$$P(s-\delta,\mathbf{p}) \text{ instable } \Leftrightarrow r_{\min}(\mathbf{p},\delta) \leq 0$$

– Le degré de stabilité s'écrit alors :

$$\delta^*(\mathbf{p}) = \min_{\substack{\delta \geq 0 \\ r_{\min}(\mathbf{p},\delta) \leq 0}} \delta$$

Analyse de la stabilité d'un système paramétrique

– On peut donc réutiliser les algorithmes de ray tracing en considérant ces correspondances :

Lancé de rayon		Degré de stabilité
d	$\longleftrightarrow$	δ
g	$\longleftrightarrow$	r