Version tropicale du théorème de Putinar.

Applications à l'optimisation globale.

Nicolas Delanoue

LARIS - Universite d'Angers - France

5 juillet 2022

Outline

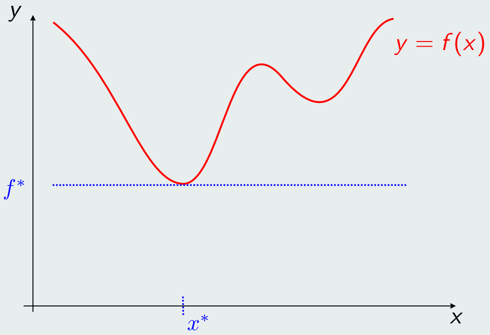
Problème d'optimisation

Soit f une fonction continue à valeur réelle. Considérons le problème

$$f^* = \inf_{x \in K} f(x) \tag{1}$$

où $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0, j = 1, \ldots, m\}$ est compact.

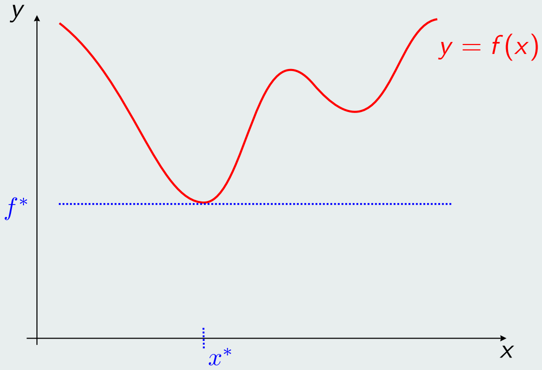
Illustration - Exemple en dimension 1



Proposition

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \ \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0,\ \forall x \in K\}. \qquad (2)$$

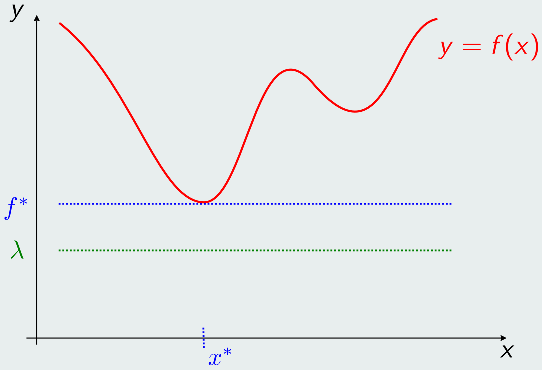
Illustration - Exemple en dimension 1



Proposition

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \ \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0,\ \forall x \in K\}. \tag{2}$$

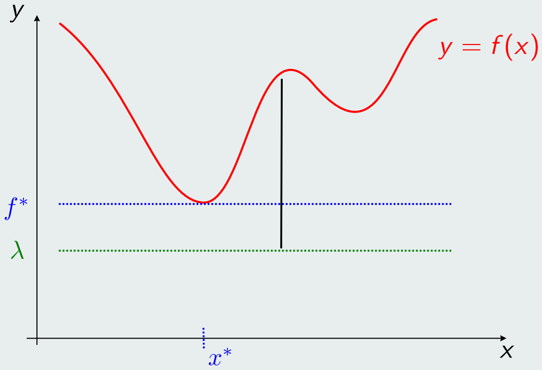
Illustration - Exemple en dimension 1



Proposition

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \ \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0, \ \forall x \in K\}. \qquad (2)$$

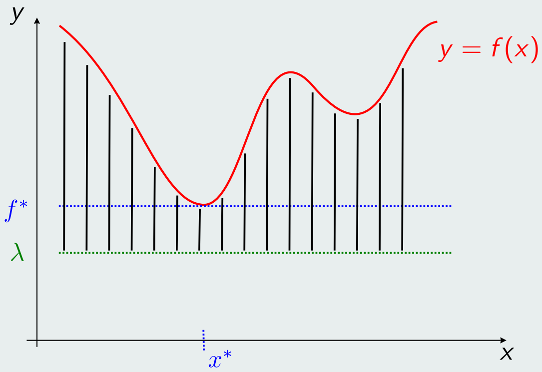
Illustration - Exemple en dimension 1



Proposition

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \ \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0,\ \forall x \in K\}. \tag{2}$$

Illustration - Exemple en dimension 1



Proposition

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \ \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0, \ \forall x \in K\}. \tag{2}$$

Illustration - Exemple en dimension 1

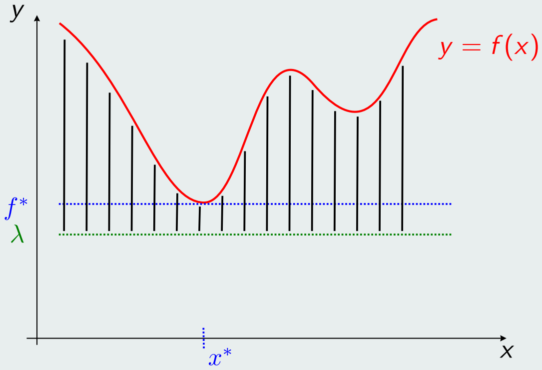
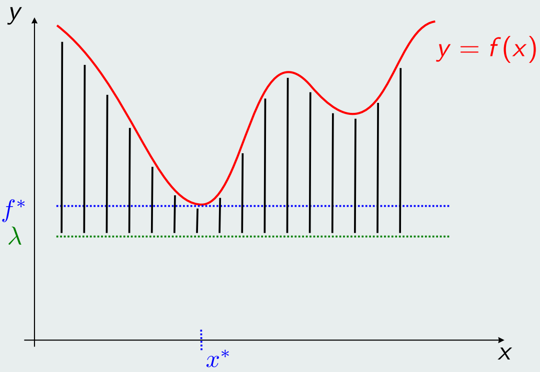


Illustration - Exemple en dimension 1



Remarques

- (2) est un problème linéaire avec une infinité de contraintes.
- (2) est le dual d'un autre (fin de la présentation).
- Décider si une fonction f est positive sur un ensemble K est fondamental.

Définition

Un certificat de positivité est une manière d'écrire une fonction de sorte que sa positivité devienne évidente.

Exemple

Soit

$$f(x, y) = 4x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2 + 10y^4,$$

Définition

Un certificat de positivité est une manière d'écrire une fonction de sorte que sa positivité devienne évidente.

Exemple

Soit

$$f(x,y) = 4x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2 + 10y^4,$$

f s'écrit aussi

$$f(x,y) = (2x^2 - 3y^2 + xy)^2 + (y^2 + 3xy)^2.$$

Définition

Un certificat de positivité est une manière d'écrire une fonction de sorte que sa positivité devienne évidente.

Exemple

Soit
$$f(x,y) = 4x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2 + 10y^4,$$
f s'écrit aussi
$$f(x,y) = (2x^2 - 3y^2 + xy)^2 + (y^2 + 3xy)^2.$$
f est une somme de carrés, donc f est positive.

Définition

On note par $\Sigma[x]$ l'ensemble des polynomes qui s'écrivent comme une somme de carrés.

Remarque

Un élément f de $\Sigma[x]$ est qualifié de SOS pour *Sum Of Squares*.

Définition

En géométrie algébrique réelle, un Positivstellensatz est une caractérisation les polynômes *positifs* sur un ensemble K.

Théorème (Positivstellensatz dimension 1)

Un polynome $p \in \mathbb{R}[x]$ est positif sur $\mathbb{R}$ si et seulement

$$f = \sigma_0 \text{ avec } \sigma_0 \in \Sigma[x].$$

Remarques

Le théorème précédent se généralise de plusieurs manières :

- pour certaines dimensions et degrés,
- avec des contraintes sur x (i.e. $x \in K$).

Théorème (Positivstellensatz dimension 1 avec contrainte)

Soit $p \in \mathbb{R}[x]$, p est positif sur $K = [-1, 1]$ si et seulement si

$$p = \sigma_0 + (1 - x^2)\sigma_1 \text{ avec } \sigma_0, \sigma_1 \in \Sigma[x].$$

Remarque

$K = [-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0\}$

Exemple

$f(x) = -x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ est positif sur $[-1, 1]$ car
$f(x) = \sigma_0 + (1 - x^2)\sigma_1$ avec $\sigma_0 = x^2, \sigma_1 = (1 + x)^2$

Définition

Un ensemble K est semi-algébrique basique s'il s'écrit

$$K = \bigcap_{j=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n ; g_j(x) \geq 0\} \tag{3}$$

avec $g_j \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Exemples

1. $K_1 = [-1, 1]$ est semi-algébrique basique car $K_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0\}$.
2. Les polyèdres sont des semi-algébriques basiques,
3. $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \text{ ou } x \geq 0\}$ est semi-algébrique mais pas basique.

Théorème de Putinar

Soit K un semi-algébrique basique vérifiant une hypothèse de compacité α. $\forall x \in K, f(x) > 0$ si seulement si

$$f = \sigma_0 + \sum_j \sigma_j g_j \text{ avec } \sigma_i \in \Sigma[x].$$

Schmüdgen's Positivstellensatz

Soit K un semi-algébrique basique. $\forall x \in K, f(x) > 0$ si et seulement si

$$f = \sigma_0 + \sum_{J \subset \{1,\ldots,m\}} \sigma_J g_J \text{ avec } \sigma_J \in \Sigma[x].$$

où chaque g_J est défini par

$$g_J = \prod_{j \in J} g_j.$$

Remarque

Comme $\sigma \in \Sigma[x] \Leftrightarrow Q(\sigma) \succeq 0$, décider qu'un polynome f est positif sur K s'écrit sous la forme d'un problème convexe.

Remarques : Bornes sur le degré des σ_j

$$\deg(\sigma_j g_j) \leq c \exp\left(\left(d^2 n^d \frac{\|f_0\|}{f^*}\right)^c\right)$$

Définition

Le semi anneau tropical $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ est le semi anneau muni des lois de compositions internes :

- $x \oplus y = \max\{x, y\}$,
- $x \otimes y = x + y$.

Définition

Le semi anneau tropical $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ est le semi anneau muni des lois de compositions internes :

- $x \oplus y = \max\{x, y\}$,
- $x \otimes y = x + y$.

Exemple

- $2 \oplus 3 = 3$,

Définition

Le semi anneau tropical $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ est le semi anneau muni des lois de compositions internes :

- $x \oplus y = \max\{x, y\}$,
- $x \otimes y = x + y$.

Exemple

- $2 \oplus 3 = 3$,
- $2 \otimes 3 = 5$.

Remarques

- Les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont nommées respectivement addition et multiplication tropicales,
- L'élément de neutre pour $\oplus$ est $-\infty$,
- L'élément de neutre $\otimes$ est 0.

Remarques

- Une fonction à valeur réelle s'étend naturellement en une fonction à valeur dans $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$.
- On peut donc munir l'ensemble des fonctions à valeur réelle d'une structure tropicale.
- On peut donc écrire $f_1 \oplus f_2$ ou encore $f_1 \otimes f_2$.

Putinar tropical

Soient $(g_i)_{i=1}^m$ une famille de fonctions continues et $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$ compact.
$\forall x \in X, f(x) > 0$ si et seulement si

$$f \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} -(\sigma_j \otimes g_j) \geq \sigma_0, \text{ avec } \sigma_i \in \mathcal{C}^+, \tag{4}$$

où $\mathcal{C}^+$ est l'ensemble des fonctions constantes par morceaux.

Comparaison avec Putinar "classique"

$$f = \sigma_0 + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j g_j \text{ avec } \sigma_i \in \Sigma[x].$$

Putinar tropical

Soient $(g_i)_{i=1}^m$ une famille de fonctions continues et $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ compact.
$\forall x \in X, f(x) > 0$ si et seulement si

$$f \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} -(\sigma_j \otimes g_j) \geq \sigma_0, \text{ avec } \sigma_i \in \mathcal{C}^+, \tag{4}$$

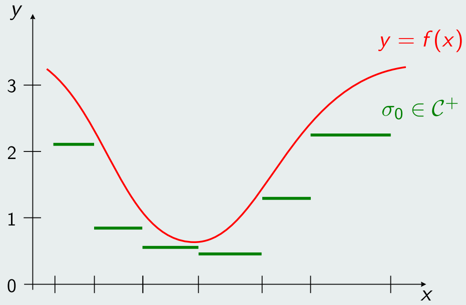
où $\mathcal{C}^+$ est l'ensemble des fonctions constantes par morceaux.

Comparaison avec Putinar "classique"

$$f = \sigma_0 + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j g_j \text{ avec } \sigma_i \in \Sigma[x].$$

$$f + \sum_{j=1}^{m} -\sigma_j g_j = \sigma_0 \text{ avec } \sigma_i \in \Sigma[x].$$

Illustration - Exemple en dimension 1



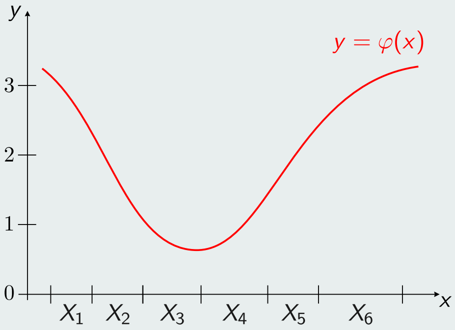
Exemple

$$f \geq \sigma_0 \text{ et } \sigma_0 \in \mathcal{C}^+, \text{ donc } f \text{ est positive.}$$

Remarques

- D'un point de vue effectif et algorithmique, les fonctions σ_j peuvent être obtenues grâce aux calculs par intervalles.
- Cela converge génériquement.
- Le temps de calcul dépend de f et de la qualité de fonction d'inclusion.

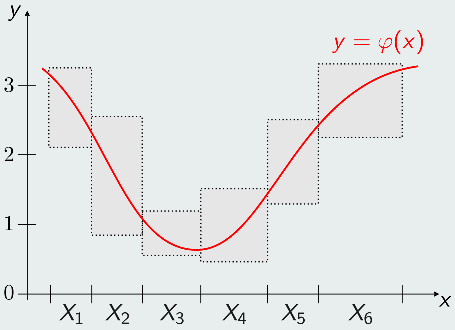
Illustration



Remarques

- D'un point de vue effectif et algorithmique, les fonctions σ_j peuvent être obtenues grâce aux calculs par intervalles.
- Cela converge génériquement.
- Le temps de calcul dépend de f et de la qualité de fonction d'inclusion.

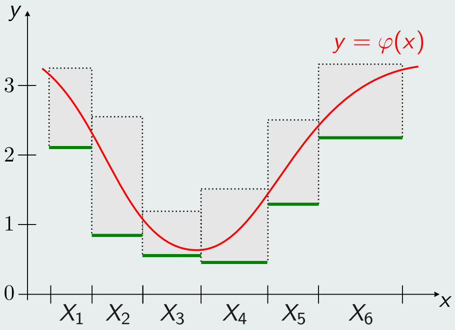
Illustration



Remarques

- D'un point de vue effectif et algorithmique, les fonctions σ_j peuvent être obtenues grâce aux calculs par intervalles.
- Cela converge génériquement.
- Le temps de calcul dépend de f et de la qualité de fonction d'inclusion.

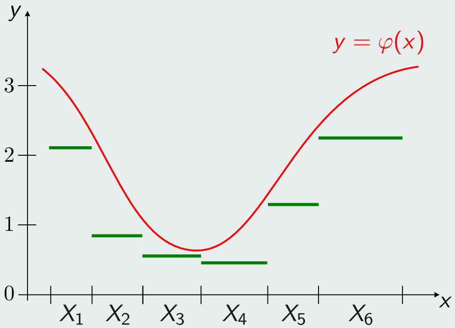
Illustration



Remarques

- D'un point de vue effectif et algorithmique, les fonctions σ_j peuvent être obtenues grâce aux calculs par intervalles.
- Cela converge génériquement.
- Le temps de calcul dépend de f et de la qualité de fonction d'inclusion.

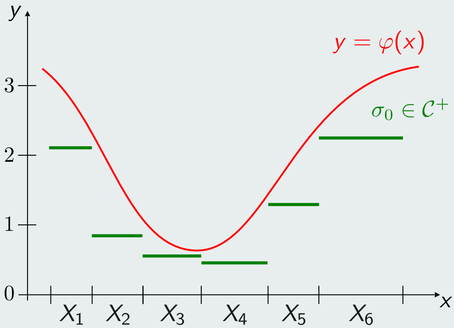
Illustration



Remarques

- D'un point de vue effectif et algorithmique, les fonctions σ_j peuvent être obtenues grâce aux calculs par intervalles.
- Cela converge génériquement.
- Le temps de calcul dépend de f et de la qualité de fonction d'inclusion.

Illustration



Comme présenter en introduction,

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \;\text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0,\ \forall x \in K\}. \tag{5}$$

Dualité

Le problème (5) est le dual du problème primal suivant

$$\begin{aligned} \inf_{\mu \in \mathcal{M}(K)} \quad & \int_K f \mathrm{d}\mu \\ \text{tel que} \quad & \int_K \mathrm{d}\mu = 1 \text{ et } \mu \geq 0 \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}(K)$ désigne l'ensemble des mesures signées avec K comme support.

Remarques

- Les théorèmes Positivstellensatz précédemment présentés peut être "transportés" par cette dualité et faire apparaitre de contraintes sur les mesures (et leurs moments),
- Inversement, des problèmes d'optimisation convexes portant sur les mesures peuvent être "naturellement" relacher et discrétiser à partir de cette dualité, on parle de hiérarchie de Lasserre.

Problème des moments généralisés

$$\begin{array}{ll} \inf\limits_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} & \displaystyle\int_X \varphi(x) d\mu \\ \text{tel que} & \displaystyle\int_X \psi(x) d\mu \leqq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma. \end{array}$$

Ces techniques permettent de résoudre des problèmes tels que :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$,
- calculer une borne supérieure à $\mu(S)$ parmi toutes les mesures μ vérifiant certaines conditions sur ses moments,
- évaluer le critère ergodique associé à une chaîne de Markov,
- ...

Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Problème des moments généralisés

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \quad \int_X \varphi(x) d\mu$$

$$\text{tel que} \quad \int_X \psi(x) d\mu \leqq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$$

Ces techniques permettent de résoudre des problèmes tels que :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$,
- calculer une borne supérieure à $\mu(S)$ parmi toutes les mesures μ vérifiant certaines conditions sur ses moments,
- évaluer le critère ergodique associé à une chaîne de Markov,
- ...

Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Problème des moments généralisés

$$
\begin{aligned}
\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \quad & \int_X \varphi(x) d\mu \\
\text{tel que} \quad & \int_X \psi(x) d\mu \leqq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.
\end{aligned}
$$

Ces techniques permettent de résoudre des problèmes tels que :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$,
- calculer une borne supérieure à $\mu(S)$ parmi toutes les mesures μ vérifiant certaines conditions sur ses moments,
- évaluer le critère ergodique associé à une chaîne de Markov,
- ...

Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Hiérarchie - Transport optimal Kantorovitch

$$\mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \inf_{\pi \in \mathcal{M}^+(X\times Y)} \int_{X\times Y} c(x,y)\mathrm{d}\pi$$

$$\text{tel que} \qquad \pi_X = \mu, \text{ et } \pi_Y = \nu.$$

- $\{X_i\}_i$, $\{Y_j\}_j$ deux partitions de X et Y,
- $\mu(X_i) \in [\underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i]$, $\nu(Y_j) \in [\underline{\nu}_j, \overline{\nu}_j]$,
- $\forall (x,y) \in X_i \times Y_j, \underline{c}_{ij} \leq c(x,y)$,

$$\underline{\mathcal{T}} = \min_{\pi_{ij} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m} \sum_{i,j} \underline{c}_{ij} \pi_{ij}$$

$$\text{tel que} \qquad \forall i,\ \underline{\mu}_i \leq \sum_j \pi_{ij} \leq \overline{\mu}_i,$$

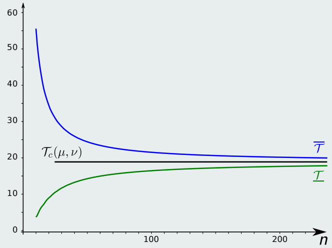
$$\forall j,\ \underline{\nu}_j \leq \sum_i \pi_{ij} \leq \overline{\nu}_j,$$

$$\forall i, \forall j,\ \pi_{ij} \geq 0.$$

alors

$$\underline{\mathcal{T}} \leq \mathcal{T}_c(\mu,\nu).$$

Bornes inférieures garanties



N. Delanoue et al. Numerical enclosures of the optimal cost of the Kantorovitch's mass transportation problem. *Computational Optimization and Applications*, 63(3) :855-873, 2016.

Hiérarchie - Control optimal

$$
\begin{aligned}
J^* = \min_{\mu,\nu \in \mathcal{M}_+} \quad & \langle \mu, h \rangle + \langle \nu, H \rangle \\
\text{tel que} \quad & \mathcal{L}'(\mu, \nu) = \delta_{(0,x_0)}
\end{aligned}
$$

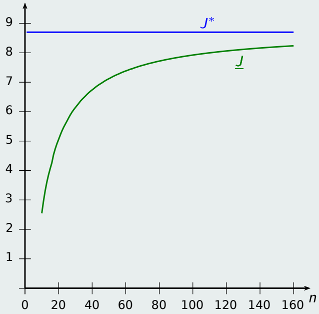
$\{X_i\}$ une partition de $[0, T] \times X \times U$,
$\{Y_k\}$ une partition de K,
$\mathcal{P} = \{\varphi\}$ une famille finie de fonctions de t, x.

$$
\begin{aligned}
\underline{J} = \min_{\mu_i, \nu_k \in \mathbb{R}^+} \quad & \sum_{i \in I} \mu_i \underline{h}_i + \sum_{k \in K} \nu_k \underline{H}_k \\
\text{tel que } \forall \varphi \in \mathcal{P} \quad & \sum_{i \in I} \mu_i \underline{\psi}_i + \sum_{k \in K} \nu_k \underline{\varphi}_k \leq \varphi(0, x_0) \\
& \varphi(0, x_0) \leq \sum_{i \in I} \mu_i \overline{\psi}_i + \sum_{k \in K} \nu_k \overline{\varphi}_k, \\
& \text{avec } \psi = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(t, x, u),
\end{aligned}
$$

alors

$$\underline{J} \leq J^*.$$

Bornes inférieures garanties



Publication - Preuves et convergence

Nicolas Delanoue, Mehdi Lhommeau, and Sébastien Lagrange. Nonlinear optimal control : A numerical scheme based on occupation measures and interval analysis. *Computational Optimization and Applications, Springer Verlag*, volume 77, pages 307-334, 2020, 10.1007/s10589-020-00198-8

Conclusion

- Nous avons présenté un Positivstellensatz qui s'appuie sur l'algèbre tropicale.
- Le calcul par intervalles rend effectif ce théorème en construisant algorithmiquement les fonctions σ_j.

Perspective

- Proposer une approche générale permettant de résoudre tous les problèmes présentés dans :
  Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Conclusion

- Nous avons présenté un Positivstellensatz qui s'appuie sur l'algèbre tropicale.
- Le calcul par intervalles rend effectif ce théorème en construisant algorithmiquement les fonctions σ_j.

Perspective

- Proposer une approche générale permettant de résoudre tous les problèmes présentés dans :
  Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Merci pour votre attention.