

## Rapport sur le manuscrit intitulé

### Lie Groups applied to localization of mobile robots

présenté par M. Julien Damers pour obtenir

le titre de Docteur de l'Université de Bretagne Occidentale

Le travail de thèse de Julien Damers a pour contexte et motivation la localisation de robots sous-marins autonomes utilisés, par exemple pour l'inspection de champs d'éoliennes off-shore, de plate-formes pétrolières, de câbles sous-marins... Ce problème est difficile car, lorsqu'il est en plongée, un sous-marin ne peut disposer d'une mesure directe de sa position fournie par un capteur GPS. Lorsque des contraintes additionnelles de coûts sont imposées sur le système de mesure proprioceptif du sous-marin, l'imprécision des capteurs conduit à des dérives importantes des estimées et rend le problème de localisation encore plus difficile.

Julien Damers a considéré un système de localisation développé par la société Kopadia (avec laquelle cette thèse a été préparée) reposant sur des bouées équipées d'un capteur GPS et d'un sonar. Lorsqu'elle reçoit un signal sonar de requête émis par un sous-marin, une telle bouée répond par un signal contenant sa position. L'intervalle de temps entre l'émission de la requête et la réception du signal de la bouée permet au sous-marin de déterminer la distance et la position de la bouée. Cependant, les mesures sont entachées de bruit et l'estimation de la position du sous-marin reste incertaine. Julien Damers a adopté une approche ensembliste pour décrire les bruits de mesures et les incertitudes d'estimation. La principale contribution de cette thèse repose sur le développement d'une nouvelle approche pour l'intégration numérique d'équations différentielles lorsque les conditions initiales sont incertaines. Pour cela, Julien Damers utilise les groupes de Lie et introduit un outil, la *fonction de transport*, permettant de déduire un ensemble de solutions d'une équation différentielle pour diverses conditions initiales à partir d'une solution de référence connue pour une condition initiale donnée. Cet outil permet également de prolonger une solution obtenue numériquement sur un intervalle de temps limité à un intervalle de temps plus grand.

Bien que Julien Damers se soit concentré sur un problème de localisation en robotique sous-marine, les outils qu'il a développés pour la résolution d'équations différentielles ont une portée applicative très importante dans le domaine de la robotique en général.

Le document de Julien Dames est composé de cinq chapitres principaux, ainsi que d'une introduction, d'une conclusion présentant quelques perspectives de recherche et de deux annexes.

Le chapitre introductif donne un aperçu de l'importance du développement des sous-marins autonomes et illustre différentes méthodes de localisation en l'absence de signaux GPS. Le dispositif constitué d'un ensemble des bouées équipées d'un GPS et d'un sonar y est détaillé. Le problème de localisation est introduit avant de décrire brièvement le point de vue ensembliste considéré dans la thèse et de présenter l'organisation du manuscrit.

*La mise en contexte est bien faite. Les différentes techniques permettant à un sous-marin de se localiser sont bien décrites et illustrées. Julien Damers aurait pu donner plus de détails sur les caractéristiques du dispositif de mesure considéré, par exemple la fréquence à laquelle des mesures peuvent être réalisées ou la distribution de l'incertitude de mesure. Le panorama des techniques de localisation classiques aurait également pu être plus développé.*

Le chapitre 2 introduit les modèles dynamiques constitués de systèmes d'équations différentielles ordinaires utilisés pour représenter l'évolution dans le temps de l'état de systèmes robotiques. Différents outils exploitant l'analyse par intervalles sont ensuite décrits. Julien Damers rappelle en particulier les notions de contracteurs et de séparateurs permettant d'obtenir des approximations intérieures et extérieures d'un ensemble caractérisé par des contraintes. La notion de tube, pour décrire l'évolution d'un ensemble de trajectoires d'un système au cours du temps, est également introduite en présentant des exemples issus de la bibliothèque codac.

*Ce chapitre est très bien écrit et illustré avec des exemples pertinents liés au problème de localisation considéré. Le paragraphe sur les tubes est pédagogique et permet d'appréhender la puissance de ce concept.*

*L'illustration du propos avec des éléments de code C++ permet de démythifier les tubes dont la manipulation pourrait sembler complexe.*

Le chapitre 3 est consacré à un rappel sur les outils de résolution garantie de systèmes d'équations différentielles ordinaires à l'aide de l'analyse par intervalles. La méthode de Löhner est détaillée. L'interfaçage des outils de résolution d'équations différentielles développés par le groupe de chercheurs Polonais CAPD (Computer Assisted Proofs in Dynamics) avec la bibliothèque codac est également décrit.

*Ce chapitre est également bien écrit et met bien en avant les limites des approches classiques d'intégration numériques lorsque les conditions initiales sont mal connues.*

Le chapitre 4 rappelle dans un premier temps les concepts de groupes de Lie, d'action de groupe de Lie, d'orbite et de stabilisateur. Julien Damers considère ensuite le groupe  $G(\text{diff}(\mathbb{R}^n), \circ)$  des difféomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  équipé de la loi de composition et l'action de groupe  $\mathbf{g} \bullet \mathbf{f}$  permettant de transformer un champ de vecteur  $\mathbf{f}$  en le champ de vecteur

$$\mathbf{g} \bullet \mathbf{f} = \left( \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}} \circ \mathbf{g}^{-1} \right) \cdot (\mathbf{f} \circ \mathbf{g}^{-1})$$

où  $\mathbf{g} \in \text{diff}(\mathbb{R}^n)$ . La notion de sous-groupe de  $G$  des stabilisateurs d'un champ de vecteur  $\mathbf{f}$ , c'est-à-dire laissant ce champ de vecteur invariant, est ensuite introduite. Le sous-groupe de Lie des symétries  $G_{\mathbf{p}}(\text{diff}(\mathbb{R}^n), \circ)$  paramétré par un vecteur  $\mathbf{p}$  appartenant à une variété  $\mathbb{P}$ , laissant le champ de vecteur  $\mathbf{f}$  invariant est enfin considéré. Lorsque  $G_{\mathbf{p}}(\text{diff}(\mathbb{R}^n), \circ)$  est suffisamment riche, il est possible de trouver un difféomorphisme  $\mathbf{g}_{\mathbf{p}}$  transformant de relier deux points choisis arbitrairement dans le champ de vecteurs  $\mathbf{f}$ . La difficulté consiste à trouver la valeur du vecteur de paramètres permettant de réaliser cette transformation. Pour résoudre ce problème, Julien Damers introduit la notion de fonction de transport qui permet, connaissant les points de départ et d'arrivée dans le champ  $\mathbf{f}$ , de déduire la valeur du vecteur de paramètres  $\mathbf{p}$  de  $\mathbf{g}_{\mathbf{p}}$ . Cet outil permet de déduire l'évolution temporelle à partir d'une condition initiale quelconque d'un système décrit par des équations différentielles ordinaires, lorsqu'une solution de référence des équations différentielles est déjà connue.

*Ce chapitre constitue la première contribution majeure de cette thèse. Les notions abstraites sont introduites progressivement, tout en proposant des interprétations intuitives et des illustrations permettant d'établir le lien avec l'objectif qui est de généraliser une solution d'un système d'équations différentielles pour des conditions initiales différentes.*

Le chapitre 5 décrit plusieurs applications des fonctions de transport. La résolution d'un systèmes d'équations différentielles avec une condition initiale incertaine est formulé comme un problème d'inversion ensembliste. Une fonction d'inclusion pour le flot permettant d'évaluer une approximation extérieure de l'ensemble des valeurs de la solution à un instant donné, partant de la condition initiale incertaine est ensuite construite. Une approche en trois étapes est ensuite proposée pour résoudre un système d'équations différentielles avec conditions initiales incertaines. La première étape consiste à trouver une solution (analytique ou numérique) pour une condition initiale fixée. La seconde étape consiste à trouver un sous-groupe de Lie des symétries associé au champ des vecteurs du système d'équations différentielles qui soit suffisamment riche et la fonction de transport associée. Enfin, grâce à la fonction de transport, il est possible de construire une fonction d'inclusion du flot. Cette approche est utilisée pour évaluer l'ensemble des valeurs prises par le flot à un instant donné, sur un ensemble discret d'instant, et sur un intervalle de temps. L'obtention d'un tube permettant de contenir l'ensemble des trajectoires solutions est également présenté. Une comparaison avec les algorithmes de résolution garantie de l'état de l'art montre que l'approche proposée permet d'obtenir d'excellents encadrement des solutions, avec un temps de calcul inférieur, en particulier lorsque la valeur initiale est très incertaine.

*Ce chapitre contient la seconde contribution majeure de cette thèse. Grâce aux fonctions de transport, la technique proposée (intégration de Lie) permet de généraliser une solution donnée d'une équation différentielle pour des ensembles des valeurs initiales. Elle permet également d'étendre temporellement une solution numérique. Les codes C++ accompagnant les exemples sont à nouveau appréciables. Dans l'un des exemples, le flot fait apparaître des occurrences multiples des conditions initiales, ce qui conduit à un ensemble solution plus grand que celui obtenu par la méthode CAPD. On ne sait pas si cela vient directement du flot ou de la fonction de transport. Cette difficulté aurait pu être largement plus développée afin de déterminer plus précisément l'origine de cette surestimation et les solutions éventuellement envisageables.*

Le chapitre 6 présente des applications de l'intégration de Lie en robotique. La notion de réseau de contraintes est introduite afin de résoudre le problème de localisation d'un sous-marin. Un problème d'analyse d'atteignabilité est ensuite résolu en tenant compte des contraintes liées à la dynamique du sous-marin. Enfin, les problèmes de détermination de la localisation initiale et de la localisation à différents instants sont résolus à l'aide de différents réseaux de contraintes et d'un algorithme d'inversion ensembliste.

*Ce chapitre montre la puissance des outils développés dans le cadre de cette thèse. L'intégration de Lie permet d'implanter des estimateurs d'état ainsi que des lisseurs permettant de propager l'information acquise à temps croissant et à temps décroissant.*

Enfin, une conclusion résumé les différentes contributions de la thèse et propose quelques directions de recherche, en lien en particulier avec une approche systématique de construction du sous-groupe de Lie des symétries associé à un champ de vecteur. Cet aspect faciliterait l'utilisation de l'intégration de Lie.

*Le document préparé par Julien Damers contient de nombreuses contributions originales sur la caractérisation de l'ensemble des solutions d'un systèmes d'équations différentielles avec conditions initiales incertaines et ses applications en robotique. Julien Damers a su exploiter un concept théorique puissant (le sous-groupe de Lie des symétries associé à un champ de vecteur) avec des outils algorithmiques élaborés (tubes, réseaux de contraintes, inversion ensembliste). La technique d'intégration de Lie qu'il a proposée permet d'obtenir des solutions de systèmes d'équations différentielles avec une excellente précision en un temps très inférieur à celui des techniques de l'état de l'art. Ce résultat est tout à fait remarquable.*

*La présentation des concepts théoriques est progressive et très pédagogique. Julien Damers a émaillé son document de nombreuses illustrations et a pris le soin de décrire la démarche adoptée. Enfin, Julien Damers a fourni un travail significatif d'intégration des outils qu'il a développés au sein de la bibliothèque codac. Ce travail a été illustré tout au long du manuscrit par le traitement d'exemples et la présentation de codes C++ très compacts. Ceci illustre l'efficacité de l'implantation proposée.*

*Les aspects qui auraient pu être améliorés dans ce travail de thèse concernent l'état de l'art, qui est parfois très succinct, ainsi que la caractérisation et le traitement de mesures réelles fournies par le système de bouées développé par Kopadia. Les dynamiques considérées pour les sous-marins apparaissent également un peu simplistes. Au niveau de la présentation, des conclusions partielles à la fin de chaque chapitre amélioreraient le lien entre les différentes parties de la thèse.*

*En résumé, Julien Damers a produit un travail très original, avec des contributions théoriques et appliquées importantes. L'approche d'intégration de Lie qu'il a développé présente un potentiel applicatif allant au-delà de l'intégration numérique garantie. Il a obtenu une contribution dans une conférence et un article dans Automatica qui aura un impact significatif dans la communauté. L'implantation de ses résultats au sein de la bibliothèque codac contribuera à cet impact.*

*Compte-tenu de l'originalité des résultats présentés et de la qualité de leur description, je donne un avis très favorable à M. Julien Damers pour une soutenance de thèse en vue de l'obtention de titre de Docteur de l'université de Bretagne Occidentale.*

Fait à Bourg-la-Reine, le 21 juin 2022



Michel Kieffer  
Professeur à l'Université Paris-Saclay