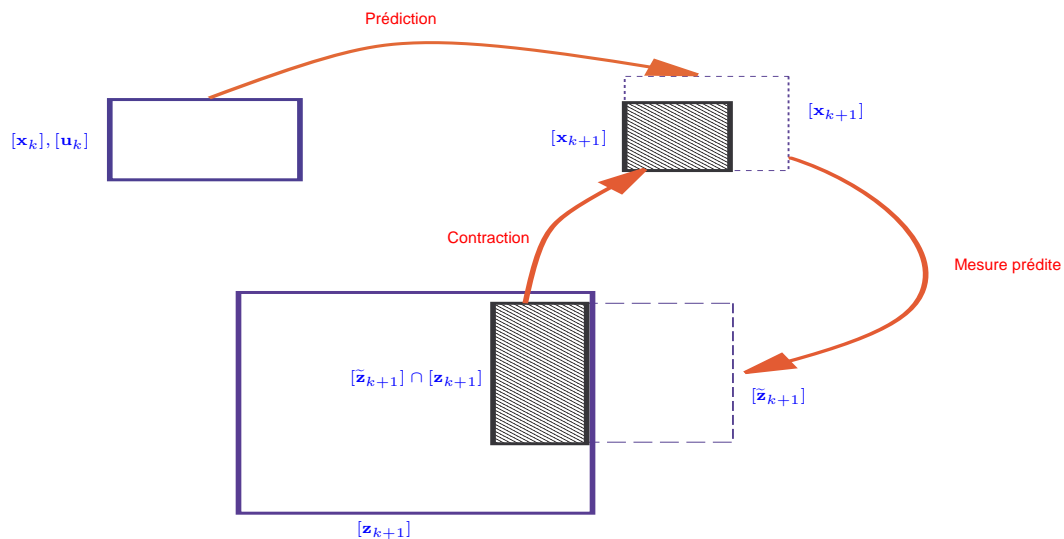


par Ghalia NASSREDDINE

***Estimation d'état par la théorie des fonctions de croyance : Application à la localisation routière***

Thèse présentée  
pour l'obtention du grade  
de Docteur de l'UTC.



Soutenue le : 2009  
Spécialité : Technologies de l'information et des systèmes



---

# Estimation d'état par la théorie des fonctions de croyance : Application à la localisation routière

Thèse soutenue le 2009 devant le jury composé de :

M.	Luc JAULIN	Professeur, ENSIETA	Rapporteur
Mme	Michèle ROMBAUT	Professeur, Université Joseph Fourier	Rapporteur
M.	Philippe BONNIFAIT	Professeur, UTC, compiègne	Examineur
M.	Emmanuel RAMASSO	Maitre de conférences, ENSMM	Examineur
M.	Fahed Abdallah	Maître des conférences, UTC, compiègne	Directeur de thèse
M.	Thierry Denœux	Professeur, UTC, compiègne	(Co-directeur de thèse)







---

# *Glossaire*

---

ABS	Anti-lock Brake System
AEB	Approche à Erreurs Bornées
AMM	Autonomous Multiple Model
BIMM	Belief Interacting Multiple Model
BMM	Belief Map Matching
BSE	Belief State Estimation
BSMM	Belief State Map Matching
CMM	Cooperative Multiple Model
CRC	Conjunctive Rule of Combination
DGPS	GPS Différentiel
DRC	Disjunctive Rule of Combination
EEB	Estimation à Erreurs Bornées
ESP	Electronic Stability Program
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
FK	Filtre de Kalman
FKE	Filtre de Kalman Etendu
FM	Fonction de masse
FP	Filtre Particulaire
GBT	Generalized Bayes Theorem
GDOP	Geometrical Dilution Of Precision
GIS	Geographic Information System
GPB	Generalized Pseudo-Bayesian
GPS	Global Positioning System
IMM	Interacting Multiple Model
MC	Modèle Candidat
MM	Map Matching
MQ	Moyenne Quadratique
NMEA	National Marine Electronics Association
PEM	Principe d'Engagement Minimal
PPK	Post-Processed Kinematic
PRP	méthode de Propagation et Rétro-Propagation
PSC	Problème de Satisfaction de Contrainte
RC	Route Candidate
TBM	Transferable Belief Model
TFC	Théorie des fonctions de croyance
WGS84	World Geodetic System de 1984





---

# *Table des matières*

---

<b>Glossaire</b>	<b>7</b>
<b>Table des matières</b>	<b>9</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>13</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>15</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>17</b>
0.1 Contexte et problématique du travail . . . . .	17
0.2 Plan du manuscrit . . . . .	19
<b>1 Estimation d'état des systèmes dynamiques</b>	<b>21</b>
1.1 Introduction . . . . .	21
1.2 Approches bayésiennes . . . . .	22
1.2.1 Filtrage bayésien . . . . .	22
1.2.2 Filtrage de Kalman . . . . .	23
1.2.3 Filtrage de Kalman étendu . . . . .	25
1.2.4 Filtrage particulière . . . . .	26
1.3 Approche à erreurs bornées . . . . .	28
1.3.1 Théorie des intervalles . . . . .	29
1.3.2 Utilisation de l'algorithme PRP pour l'estimation d'état . . . . .	39
1.4 Conclusion . . . . .	41
<b>2 Localisation routière d'un véhicule</b>	<b>43</b>
2.1 Introduction . . . . .	43
2.2 Système de localisation routière . . . . .	44
2.2.1 Capteurs utilisés . . . . .	44
2.2.2 Structure du système de localisation routière . . . . .	51
2.3 Système de localisation couplé à la cartographie . . . . .	52
2.3.1 Base de données cartographiques . . . . .	53
2.3.2 Méthodes de Map Matching . . . . .	55
2.4 Conclusion . . . . .	60
<b>3 Extension crédibiliste de l'approche à erreurs bornées</b>	<b>63</b>
3.1 Introduction . . . . .	63
3.2 Rappel sur la TFC . . . . .	63

3.2.1	Représentation des informations dans le TBM . . . . .	64
3.2.2	Application multivaluée . . . . .	67
3.2.3	Le principe d'engagement minimal . . . . .	68
3.2.4	Règles de combinaison . . . . .	69
3.2.5	Théorème de Bayes généralisé . . . . .	74
3.2.6	Prise de décision dans le TBM . . . . .	74
3.2.7	Espérances d'une fonction de croyance . . . . .	75
3.2.8	Simplification d'une fonction de masse . . . . .	76
3.3	Méthode crédibiliste d'estimation d'état . . . . .	77
3.3.1	Construction des fonctions de croyance . . . . .	78
3.3.2	Extension du calcul d'intervalles à la TFC . . . . .	81
3.3.3	Extension de l'AEB par la TFC . . . . .	82
3.3.4	Exemple illustratif . . . . .	84
3.4	Application au problème de localisation routière . . . . .	86
3.4.1	Cadre expérimental . . . . .	86
3.4.2	Résultats . . . . .	88
3.5	Conclusion . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Approche crédibiliste de l'estimation d'état d'un système multi-modèles</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	95
4.2	Rappel sur l'approche multi-modèles . . . . .	96
4.2.1	Introduction . . . . .	96
4.2.2	Interacting multiple model . . . . .	98
4.3	Approche crédibiliste pour le filtrage d'un système multi-modèles . .	103
4.3.1	Introduction . . . . .	103
4.3.2	Construction des fonctions de masse . . . . .	105
4.3.3	Principales étapes de la méthode BIMM . . . . .	106
4.4	Application . . . . .	109
4.4.1	Description du problème . . . . .	109
4.4.2	Résultats . . . . .	110
4.5	Conclusion . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Algorithmes de Map Matching pour la localisation</b>	<b>117</b>
5.1	Introduction . . . . .	117
5.2	Approche crédibiliste pour le MM . . . . .	118
5.2.1	Construction rectangulaire des routes . . . . .	119
5.2.2	Modèle d'état du véhicule . . . . .	120
5.2.3	Construction des fonctions des masses . . . . .	121
5.2.4	Étapes principales de la méthode BMM . . . . .	124
5.2.5	Intégrité de la méthode BMM . . . . .	127
5.2.6	Application de la méthode BMM . . . . .	127
5.3	Extension de la méthode BMM . . . . .	137
5.3.1	Sélection de RCs et mise à jour de l'état . . . . .	138
5.3.2	Construction des fonctions de masse . . . . .	139
5.3.3	Algorithme de la méthode BSMM . . . . .	141

---

5.3.4 Application . . . . .	142
5.4 Conclusion . . . . .	146
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>147</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>



---

# *Liste des figures*

---

1.1	Calcul de $\sin([x])$ . . . . .	32
1.2	Pavé de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	33
1.3	L'image d'un pavé $[\mathbf{x}]$ par la fonction $\mathbf{f}$ . . . . .	33
1.4	Comparaison des fonctions d'inclusion naturelles d'une même fonction .	34
1.5	Réduction d'un pavé $[\mathbf{x}]$ en un pavé $[\mathbf{q}]$ en utilisant une seule contrainte $\mathbb{S}$ . . . . .	36
1.6	Les deux premières étapes de l'algorithme de <i>PRP</i> . . . . .	38
1.7	Illustration du principe de la EEB. . . . .	41
2.1	Composantes d'un capteur odométrique. . . . .	45
2.2	Constellation des satellites du système GPS. . . . .	46
2.3	Principe de positionnement tridimensionnel à partir de trois satellites. .	48
2.4	Exemples d'une bonne et faible géométries de la repartition des satellites utilisés. . . . .	49
2.5	Le système de GPS différentiel. . . . .	49
2.6	Les trajets multiples de signal GPS. . . . .	50
2.7	Modèle du véhicule utilisé. . . . .	51
2.8	Structure du système de fusion de données utilisé dans le problème de localisation du véhicule. . . . .	51
2.9	Exemple du problème de MM. . . . .	53
2.10	Représentation planaire d'une route $r$ . . . . .	53
2.11	Exemples de problèmes de la méthode de <i>point à point</i> . . . . .	56
2.12	Illustration de la méthode <i>point à point</i> . . . . .	56
2.13	Exemple de problème rencontré dans les méthodes <i>point à arc</i> . . . . .	57
2.14	Exemple d'une méthode de type topologique. . . . .	58
2.15	Comparaison entre la vraie position du véhicule et la position fournie .	59
2.16	Quelques problèmes des méthodes avancées. . . . .	60
3.1	Structure du Modèle des Croyances Transférables. . . . .	64
3.2	Principe de conditionnement par un sous-ensemble $A \subseteq \Omega$ . La masse initialement allouée à $B$ est transférée à $A \cap B$ . . . . .	70
3.3	Raffinement du cadre de discernement . . . . .	71
3.4	Organigramme de la méthode BSE. . . . .	77
3.5	Approximation d'une distribution de possibilité triangulaire par une FM consonante. . . . .	79
3.6	Trajectoire du véhicule dans un repère local. . . . .	87
3.7	Ecart-type des mesures GPS suivant $x$ , en fonction de temps. . . . .	87
3.8	Ecart-type des mesures GPS suivant $y$ , en fonction de temps. . . . .	87
3.9	Cap du véhicule. . . . .	88

3.10	Éléments focaux associés à $m^{\mathbf{x}_k}$ aux instants $k = 10$ et $k = 100$ . . . . .	89
3.11	Éléments focaux de $\mathbf{x}_k$ avant (gauche) et après (droite) l'application de la méthode de <i>simplification</i> . . . . .	89
3.12	Distances entre les valeurs estimées et les positions exactes . . . . .	91
3.13	Intervalles d'erreurs sur $x$ et $y$ . . . . .	92
3.14	Distances en mètres entre les valeurs estimées et la position exacte . . . . .	93
4.1	Structure générale de l'approche multi-modèles dans le cas de deux MCs. . . . .	97
4.2	Système à commutation markovienne avec trois MCs. . . . .	98
4.3	Structure générale de la méthode IMM. . . . .	100
4.4	Structure générale de la méthode BIMM. . . . .	104
4.5	Représentation des commutations entre $S_{k-1}$ et $S_k$ dans la TFC. . . . .	105
4.6	Trajectoire du véhicule. Le temps de départ est $t_0 = 0$ . . . . .	110
4.7	Fonction de masse sur $S_k$ . . . . .	111
4.8	Exemples de positions estimées par la méthode BIMM. . . . .	112
4.9	Fonction de masse sur $S_k = \{M^1, M^3\}$ . . . . .	112
4.10	Distances entre les valeurs estimées et exactes . . . . .	113
4.11	Vecteur de probabilités $\pi = (\pi^1, \pi^2)^T$ . . . . .	115
4.12	Distances entre les positions estimées et exactes : BIMM et IMM . . . . .	116
5.1	Structure de la méthode crédibiliste de MM. . . . .	118
5.2	Construction de la route rectangulaire associée à une route linéaire ( $A^1, A^2$ ). . . . .	119
5.3	Représentation rectangulaire associée à une route $r_1 = (A^1, A^2, A^3)$ . . . . .	120
5.4	Mise à jour de l'état . . . . .	121
5.5	Exemple d'une situation d'intersection et des routes parallèles. . . . .	123
5.6	Exemple de déplacement au voisinage d'une intersection. . . . .	126
5.7	Carte routière simulée. . . . .	129
5.8	Application de la méthode BMM . . . . .	130
5.9	Résultats de la méthode BMM au voisinage d'une intersection . . . . .	131
5.10	Résultats de la méthode BMM et de la méthode de référence au voisinage d'une intersection . . . . .	132
5.11	Exemple d'une donnée cartographique manquante . . . . .	133
5.12	Cas d'une route non répertoriée sur la carte. . . . .	134
5.13	Comparaison entre la méthode BMM et la méthode de référence : une route manquante dans la carte . . . . .	135
5.14	Sous-carte routière. . . . .	135
5.15	Résultats expérimentaux au voisinage d'une intersection. . . . .	136
5.16	Structure de la méthode BSMM. . . . .	137
5.17	Calcul de $m_s^{\mathbf{x}_k}$ . . . . .	138
5.18	Carte routière simulée . . . . .	142
5.19	Résultats de la méthode BSMM au voisinage d'une intersection. . . . .	144
5.20	Résultats détaillés de la méthode BSMM au voisinage d'une intersection. . . . .	145

---

## *Liste des tableaux*

---

2.1	Attributs associés aux routes dans une base de données routière. . . . .	54
3.1	Exemple d'une FM exprimée sur $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ . . . . .	66
3.2	Résultats de la transformation de la FM $m_5$ du tableau 3.1 en plausibilité, crédibilité, implicabilité et communalité. . . . .	67
3.3	$m_{ab}^{\Omega \times \Theta}$ . . . . .	73
3.4	$m_{12}^{\Omega \times \Theta}$ . . . . .	73
3.5	$m^{\Omega}$ . . . . .	74
3.6	Erreurs quadratiques moyennes sur $x$ et $y$ . . . . .	90
3.7	Erreurs quadratiques moyennes (EQM) sur $x$ et $y$ . . . . .	92
4.1	Moyennes quadratiques (MQ) pour le GPS, la méthode FKE avec les modèles $M^1$ et $M^2$ , la méthode IMM et la méthode BIMM. . . . .	114
5.1	Erreurs quadratiques moyennes sur $x$ et $y$ pour la méthode BMM et la méthode référence . . . . .	129
5.2	Pourcentage d'identification de la route par la méthode BMM et la méthode de référence . . . . .	135
5.3	Erreurs quadratiques moyennes pour le GPS, les méthodes BMM, BSE, BSMM, et la méthode de référence. . . . .	144





---

# *Introduction générale*

---

## 0.1 Contexte et problématique du travail

Un système physique est généralement décrit par un ensemble de variables constituant un vecteur d'état. Un système dynamique est ainsi défini comme étant un système physique qui évolue au cours du temps et qui peut être modélisé par un modèle mathématique, appelé modèle d'évolution, représentant le comportement dynamique du système au cours du temps.

Le travail présenté dans ce manuscrit de thèse se situe dans le cadre de l'estimation d'état d'un système dynamique. Le problème d'estimation d'état est un problème commun dans diverses applications comme la navigation, la localisation, le suivi de cibles, etc. Il consiste à combiner les informations fournies par différentes sources d'informations afin de calculer à chaque instant une estimation du vecteur d'état, et ceci en utilisant une méthode de fusion de données. La méthode d'estimation ou de fusion utilisée dépend bien évidemment de la nature de l'information disponible sur le problème en question.

On peut faire la différence entre deux types d'approches pour l'estimation d'état :

- L'approche *bayésienne* dans laquelle on adopte une modélisation probabiliste des informations disponibles et on utilise la théorie de probabilité pour la gestion des incertitudes. Des exemples très connus sont le filtrage de Kalman et le filtrage particulaire. Cependant, une modélisation probabiliste des quantités incertaines paraît inadaptée dans certains cas.
- L'approche à *erreurs bornées* dans laquelle on utilise une représentation ensembliste de différentes quantités. Les mesures, par exemple, sont supposées incluses dans des ensembles de forme connue (ellipse, pavé, cercle, etc.) contenant toutes les valeurs possibles. On doit supposer dans cette approche que les bornes d'erreurs associées aux différentes variables sont connues. Les observateurs d'état générés fournissent en sortie une estimation garantie sous la forme d'un ensemble particulier. Le problème majeur est ici la détermination des bornes d'erreurs qui a un effet important sur la convergence des algorithmes et sur la précision des résultats.

La théorie des fonctions de croyance, connue également sous le nom de théorie de Dempster-Shafer, ou théorie de l'évidence, est une théorie relativement récente, et qui a fait depuis plusieurs années l'objet d'un intérêt croissant du fait de sa capacité à mieux modéliser et gérer plusieurs types de connaissance telles que les informations incertaines, imprécises ou incomplètes. Contrairement à la théorie bayésienne, elle ne repose pas sur une quantification probabiliste des incertitudes, mais sur un modèle plus général basé sur les fonctions de croyance. Dans le cadre

de ce travail de thèse, nous avons développé une méthode crédibiliste d'estimation d'état d'un système dynamique dans laquelle nous utilisons une modélisation crédibiliste des modèles et des incertitudes. Nous associons ainsi à chaque variable réelle une fonction de masse dont les éléments focaux sont des intervalles. L'utilisation d'une telle modélisation a pour avantage de remédier au problème des approches à erreurs bornées concernant la détermination des intervalles d'erreurs. Cette méthode présente l'avantage d'estimer l'état du système d'une manière plus précise que les méthodes des approches à erreurs bornées, tout en conservant la propriété de garantie.

En présence d'incertitude sur le modèle d'évolution, on a l'habitude de considérer plusieurs modèles d'évolution possibles, et d'utiliser un algorithme d'estimation incluant une étape de sélection de modèle. On dit que l'on a alors un système *multi-modèles*. Les approches multi-modèles sont utilisées, par exemple, dans le domaine du suivi de cibles ou encore pour décomposer un système complexe en systèmes plus simples afin de rendre son étude plus facile. Classiquement, la théorie des probabilités est utilisée afin de modéliser l'incertitude associée au modèle d'évolution ainsi que pour choisir le meilleur modèle du système à chaque instant. La performance des ces approches dépend de l'ensemble des modèles possibles considéré ainsi que de la méthode de sélection de modèle. Si le modèle suivant lequel le système évolue n'appartient pas à l'ensemble de modèles possibles, l'approche multi-modèles peut d'autre part donner des résultats aberrants, ce qui peut conduire à une divergence de la méthode. Dans ce travail de thèse, nous proposons une méthode crédibiliste d'estimation multi-modèles, qui constitue une alternative aux méthodes existantes. Dans cette méthode on adopte une modélisation crédibiliste de l'incertitude sur le modèle ainsi que sur la commutation entre les modèles possibles. Ceci permet de modéliser plus facilement les données manquantes et de résoudre le problème dit *du monde ouvert* dans lequel le vrai modèle n'appartient pas nécessairement à l'ensemble des modèles possibles.

Un problème d'estimation d'état étudié dans le cadre de cette thèse est la localisation routière d'un véhicule. Localiser un véhicule signifie déterminer sa position (coordonnées géographiques ou cartésiennes) et son attitude (les différents angles par rapport à un référentiel ou par rapport à des amers caractérisant le système), en se basant sur les mesures fournies par différents capteurs. Généralement, on intègre les données GPS avec celles d'autres capteurs d'inertie afin d'estimer la position du véhicule. Si on dispose en plus d'une carte routière de l'environnement, alors on doit pouvoir l'utiliser afin de déterminer la route empruntée par le véhicule et afin de calculer une estimation plus précise de sa position sur cette route. Ceci se fait généralement en utilisant une technique de *map matching* (MM). Le problème de map matching se résume par l'identification de la route suivie par le véhicule et le calcul d'une estimation de sa position sur la route identifiée. Nous avons développé dans ce travail une méthode crédibiliste de map matching qui combine une estimation de l'état de type ensembliste ou crédibiliste, avec la représentation garantie des routes construite à partir de la carte routière. Elle gère aussi des hypothèses multiples dans certaines situations telles que celles des intersections ou des routes parallèles, en utilisant la théorie des fonctions de croyance. L'utilisation de cette théorie permet de détecter le cas des

données cartographiques manquantes, qui constitue un problème connu lors de l'utilisation des cartes numériques.

## 0.2 Plan du manuscrit

Le manuscrit s'articule autour de cinq chapitres principaux.

Le premier chapitre présente un état de l'art sur les méthodes existantes pour l'estimation d'état d'un système dynamique. Il est divisé en deux grandes parties correspondant aux approches bayésienne et ensembliste. Dans la seconde partie, nous commençons par décrire les outils principaux de l'analyse par intervalles qui seront utilisés dans ce travail de thèse. Des exemples sont présentés afin d'illustrer les différents outils de l'analyse par intervalles. Nous décrivons ensuite une méthode simple basée sur une approche à erreurs bornées.

Dans le deuxième chapitre nous exposons le problème de la localisation routière. Nous présentons un système de localisation basé sur l'intégration des données fournies par un récepteur GPS et des capteurs proprioceptifs. Nous décrivons ensuite la structure générale d'une base de données cartographiques et nous présentons quelques méthodes existantes de map matching en évoquant leurs limites.

Dans le troisième chapitre, nous commençons tout d'abord par introduire la théorie des fonctions de croyance en décrivant les différents outils utilisés dans ce travail de thèse. Nous décrivons ensuite une méthode crédibiliste originale pour l'estimation d'état d'un système dynamique, avant de présenter les résultats obtenus sur un problème réel de localisation routière.

Le quatrième chapitre aborde le problème de l'estimation d'état d'un système multi-modèles. Nous commençons par un état de l'art sur les méthodes multi-modèles existantes. Nous présentons ensuite une approche crédibiliste d'estimation d'état d'un système multi-modèles et les résultats obtenus par cette méthode pour le problème de localisation de véhicule sont présentés.

Dans le dernier chapitre nous attaquons au problème de la localisation routière couplée à la cartographie. Nous décrivons tout d'abord la représentation garantie des routes utilisée dans la suite du chapitre. Nous présentons ensuite une nouvelle approche de *map matching* basée sur un algorithme multi-critères de sélection des routes candidates utilisant la théorie des fonctions de croyance. Nous appliquons finalement la méthode sur des problèmes réel et simulé.

Nous terminerons ce manuscrit par une conclusion générale, dans laquelle nous évoquons en particulier les perspectives engendrées par ces travaux.



# *Estimation d'état des systèmes dynamiques*

---

## 1.1 Introduction

Un système dynamique est un système physique qui évolue au cours du temps et qui peut être décrit par un ensemble de variables, appelé vecteur d'état. L'étude d'un système dynamique consiste à calculer, à chaque instant, une estimation de son vecteur d'état, en adoptant une représentation mathématique de son comportement, appelée modèle d'état.

Le problème d'estimation d'état est un problème commun à diverses applications telles que la navigation, la localisation, le suivi de cibles, etc. Les méthodes d'estimation d'état combinent les informations fournies par des capteurs différents pour calculer une estimation à chaque instant considéré. Afin de combiner les différentes informations disponibles, on utilise souvent un algorithme de fusion de données. Les méthodes de fusion des données ont pour but d'exploiter au mieux la complémentarité des informations pour donner une estimation de l'état. Le problème majeur de ces méthodes est de trouver une représentation fiable des données disponibles en fonction des erreurs et des perturbations associées au système. Ainsi, selon la représentation des données, on peut distinguer a priori deux types d'approches. La première, dite *bayésienne*, utilise des distributions de probabilité pour représenter les données afin de les combiner dans le cadre de la théorie de probabilités. La seconde est dite *à erreurs bornées* ; elle utilise la théorie des ensembles pour représenter et combiner les données disponibles.

Ce chapitre est composé de deux parties principales. La première partie expose les notions fondamentales de l'approche bayésienne pour l'estimation d'état et présente les méthodes les plus utilisées pour la mise en œuvre de cette approche.

La deuxième partie présente l'approche *à erreurs bornées* (AEB). Dans ce travail de thèse nous nous intéresserons aux méthodes de l'AEB basées sur l'analyse par intervalles. Nous commencerons par présenter les outils de base de l'analyse par intervalle. Nous décrirons ensuite la méthode d'estimation à erreurs bornées introduite dans [36].

## 1.2 Approches bayésiennes

Les approches bayésiennes sont souvent utilisées pour les problèmes d'estimation d'état et ont été mises en œuvre dans des applications relevant de la robotique, de l'automatique, de la navigation, etc. Elles reposent sur une modélisation probabiliste des informations et utilisent la théorie des probabilités pour la gestion des incertitudes. L'avantage de ces approches provient de la richesse des outils de la théorie des probabilités et des algorithmes avancés qui y sont développés ainsi que des propriétés statistiques des sorties de ces algorithmes.

### 1.2.1 Filtrage bayésien

Considérons un système dynamique, décrit par les équations suivantes :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{z}_k$  représentent l'état du système et la mesure à l'instant  $k$ ,  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont les modèles d'évolution et d'observation,  $\mathbf{u}_{k-1}$  est un vecteur d'entrée et  $\mathbf{v}_{k-1}$  et  $\mathbf{w}_k$  sont les bruits de modèle et de mesure.

Soit  $Z_k = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$  l'ensemble des vecteurs de mesure jusqu'à l'instant  $k$ . Le filtrage bayésien consiste à estimer, à chaque instant  $k$ , la densité de probabilité  $p(\mathbf{x}_k/Z_k)$  caractérisant la distribution de l'état  $\mathbf{x}_k$  dans l'espace d'état connaissant les mesures  $Z_k$ . Cette densité est, en général, difficile à caractériser alors que la loi de probabilité inverse  $p(\mathbf{z}_k/\mathbf{x}_k)$  est facile à calculer en utilisant le modèle d'observation.

Un filtre bayésien est composé de trois parties principales correspondant aux étapes de *prédiction*, de *correction* et d'*estimation* [4, 86].

#### 1.2.1.1 Prédiction

À l'instant  $k$ , nous supposons connu  $p(\mathbf{x}_{k-1}/Z_{k-1})$ . Dans cette partie, nous cherchons à calculer la distribution de probabilité a posteriori  $p(\mathbf{x}_k/Z_{k-1})$ . En utilisant la règle de *Chapman-Kolmogorov*, cette distribution peut s'écrire sous la forme suivante [4, 86] :

$$p(\mathbf{x}_k/Z_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}/Z_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (1.3)$$

En utilisant  $p(x, y) = p(x/y) \cdot p(y)$ , on peut écrire :

$$p(\mathbf{x}_k/Z_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1}, Z_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1}/Z_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (1.4)$$

En supposant que le modèle d'état est un processus markovien d'ordre 1,  $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1}, Z_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$  et l'équation (1.4) devient :

$$p(\mathbf{x}_k/Z_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1}/Z_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (1.5)$$

où  $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$  est calculée en utilisant le modèle d'évolution du système et la distribution probabiliste du bruit  $\mathbf{v}_k$ .

### 1.2.1.2 Correction

Dans cette partie, on cherche à calculer  $p(\mathbf{x}_k/Z_k)$  en utilisant  $p(\mathbf{x}_k/Z_{k-1})$ . La règle de Bayes nous donne :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k/Z_k) &= p(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_k, Z_{k-1}) \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_k/\mathbf{x}_k, Z_{k-1}) \cdot p(\mathbf{x}_k/Z_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k/Z_{k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_k/\mathbf{x}_k) \cdot p(\mathbf{x}_k/Z_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k/Z_{k-1})}, \end{aligned}$$

où  $p(\mathbf{z}_k/\mathbf{x}_k)$  est calculée en utilisant le modèle d'observation et la distribution probabiliste du bruit  $\mathbf{w}_k$ . Le terme  $p(\mathbf{z}_k/Z_{k-1})$  est considéré comme un facteur de normalisation. Il est donné par :

$$p(\mathbf{z}_k/Z_{k-1}) = \int p(\mathbf{z}_k/\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k/Z_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (1.6)$$

### 1.2.1.3 Estimation

Connaissant la distribution de probabilité a posteriori  $p(\mathbf{x}_k/Z_k)$ , une estimation ponctuelle de l'état peut être obtenue en considérant son espérance conditionnellement aux observations :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k/Z_k) d\mathbf{x}_k. \quad (1.7)$$

La matrice de covariance de  $\mathbf{x}_k$  sachant  $Z_k$  est alors :

$$\hat{P}_k = \int (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T p(\mathbf{x}_k/Z_k) d\mathbf{x}_k. \quad (1.8)$$

Cette estimation permet la minimisation de l'erreur quadratique moyenne. Dans le cas linéaire, le filtre de Kalman représente une solution optimale du filtrage bayésien avec des bruits gaussiens centrés et additifs. Cependant, la mise en œuvre de la solution analytique s'avère impossible dans beaucoup d'autres cas.

## 1.2.2 Filtrage de Kalman

Dans le cas particulier des systèmes linéaires avec des bruits additifs gaussiens, le filtrage bayésien possède une solution explicite, connue sous le nom de *filtre de Kalman* (FK). Le filtre de Kalman est un estimateur récursif de l'état. Cela signifie que, pour estimer l'état courant, seuls l'état précédent et les mesures actuelles sont nécessaires. L'historique des observations et des estimations n'est ainsi pas requis [2, 50].

Considérons un système dynamique linéaire représenté par le modèle d'évolution suivant :

$$\mathbf{x}_k = F_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + G_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{z}_k = H_k\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{x}_{k-1}$  et  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  sont les vecteurs d'état du système aux instants  $k-1$  et  $k$ ,  $\mathbf{u}_{k-1} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée du système à l'instant  $k-1$ ,  $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des mesures fournies par les capteurs,  $F_{k-1}$  est une matrice  $(n \times n)$  de transition de l'état de l'instant  $k-1$  à l'instant  $k$ ,  $G_{k-1}$  est une matrice  $(m \times m)$  de commande représentant l'effet de l'entrée sur l'état à l'instant  $k-1$ ,  $H_k$  est une matrice  $(p \times n)$  d'observation représentant la relation entre l'état du système et les mesures observées et  $\mathbf{v}_{k-1}$  et  $\mathbf{w}_k$  représentent, respectivement, les bruits d'état et de mesure.

Les bruits  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_{k-1}$  sont supposés suivre des distributions gaussiennes, connues a priori, telles que :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{k-1} & \sim N(0, Q_{k-1}), \\ \mathbf{w}_k & \sim N(0, R_k), \\ E[w_k^i v_{k-1}^j] & 0 \quad \forall i, j, \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $Q_{k-1}$  et  $R_k$  sont les matrices de covariance des bruits d'état et de mesure.

Le filtrage de Kalman consiste essentiellement à appliquer une étape de prédiction et une étape de correction ou de mise à jour. La phase de prédiction utilise l'état estimé de l'instant précédent ainsi que le modèle d'évolution pour produire une estimation de l'état courant. Dans l'étape de mise à jour, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise.

L'état du filtre est représenté à chaque instant par deux variables :  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_{k/k}$ . En supposant qu'on part d'un état gaussien représenté par :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{0/0} & = E(\mathbf{x}_0), \\ \hat{\mathbf{P}}_{0/0} = \text{var}(x_0) & = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0/0})(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0/0})^T], \end{cases} \quad (1.12)$$

l'algorithme du filtre de Kalman est donné ci-après [50, 86].

### 1.2.2.1 Prédiction

Cette étape permet la prédiction de l'état et de sa matrice de covariance à l'instant  $k+1$  à partir de l'état et de l'entrée à l'instant  $k$ , en utilisant le modèle d'évolution du système. On pose :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} & = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1} + G_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \\ \hat{\mathbf{P}}_{k/k-1} & = F_k \hat{\mathbf{P}}_{k-1/k-1} F_k^T + Q_{k-1}, \\ \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} & = H_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}, \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$  est le vecteur d'état prédit,  $\hat{\mathbf{P}}_{k/k-1}$  est la matrice de covariance associée et  $\hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}$  est le vecteur de mesure prédit.

### 1.2.2.2 Correction

Une fois la mesure  $\mathbf{z}_k$  disponible, l'état prédit et sa matrice de covariance peuvent être corrigés en se basant sur l'innovation de l'observation. L'innovation, notée



$\widehat{s}_{k/k-1}$ , reflète l'écart entre la mesure prédite et la mesure réelle. Elle est donnée par :

$$\begin{cases} \widehat{s}_{k/k-1} &= \mathbf{z}_k - \widehat{\mathbf{z}}_{k/k-1}, \\ S_{k/k-1} &= H_k \widehat{\mathbf{P}}_{k/k-1} H_k^T + R_k, \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $S_{k/k-1}$  est la matrice de covariance associée à  $\widehat{s}_{k/k-1}$ .

En se basant sur l'innovation, l'état estimé du système est donné par

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}_{k/k} &= \widehat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + K_k \widehat{s}_{k/k-1}, \\ \widehat{\mathbf{P}}_{k/k} &= (I - K_k H_k) \widehat{\mathbf{P}}_{k/k-1}, \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $K_k$  est le gain du filtre :

$$K_k = \widehat{\mathbf{P}}_{k/k-1} H_k^T (S_{k/k-1})^{-1}. \quad (1.16)$$

Si la mesure est plus précise que le modèle d'évolution du système, alors le gain est grand et le poids de la mesure dans l'estimation d'état est important. Au contraire, si le modèle est plus précis que la mesure, alors le gain est petit et la correction due à la mesure doit être très faible.

La formulation du FK est basée sur un modèle linéaire du système dynamique étudié ainsi que sur des bruits gaussiens additifs. Souvent, cette hypothèse n'est pas vérifiée. Dans la plupart des problèmes réels, les modèles d'évolution sont non linéaires. Il est donc nécessaire de généraliser l'algorithme du filtre de Kalman pour traiter de tels cas. Le filtre de Kalman Étendu (FKE) présenté dans la section suivante est l'une des solutions à ce problème.

### 1.2.3 Filtrage de Kalman étendu

Considérons de nouveau le système non-linéaire décrit par les équations (1.1) et (1.2). Nous supposons que l'état initial  $\mathbf{x}_0$  du système et sa matrice associée  $P_0$  sont connus et que les bruits de modèle et d'observation  $\mathbf{v}_{k-1}$  et  $\mathbf{w}_k$  sont gaussiens, centrés et indépendants de l'état.

L'idée principale sur laquelle se base le filtre de Kalman étendu est la linéarisation, qui permet d'approcher une fonction non-linéaire  $\mathbf{f}$  par une fonction linéaire. Il existe plusieurs techniques pour linéariser des fonctions. Le FKE utilise un développement de Taylor au premier ordre de la fonction non-linéaire autour de la valeur prédite de l'état,  $\widehat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}$  [2]. En utilisant les matrices jacobiennes  $F_k$  et  $H_k$  :

$$F_k = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}, \mathbf{u}_{k-1}),$$

$$H_k = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\widehat{\mathbf{x}}_{k/k-1}),$$

les modèles d'évolution et d'observation peuvent être écrits sous la forme approchée suivante :

$$\mathbf{x}_k = F_k \mathbf{x}_{k-1} + \alpha_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{y}_k = H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (1.18)$$

avec  $\alpha_k = \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) - F_k \widehat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}$  et  $\mathbf{y}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) + H_k \widehat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ . Le filtre de Kalman classique peut maintenant être appliqué au modèle linéarisé du système (équations (1.17) et (1.18)). L'étape de prédiction devient :

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}, \mathbf{u}_k), \quad (1.19)$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_{k/k-1} = F_k \widehat{\mathbf{P}}_{k-1/k-1} F_k^T + Q_{k-1}, \quad (1.20)$$

et l'étape de correction s'écrit :

$$K_k = \widehat{\mathbf{P}}_{k/k-1} H_k^T (H_k \widehat{\mathbf{P}}_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1}, \quad (1.21)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k/k} = \widehat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}_{k/k-1})), \quad (1.22)$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_{k/k} = (I - K_k H_k) \widehat{\mathbf{P}}_{k/k-1}, \quad (1.23)$$

où  $I$  est la matrice d'identité.

La non-linéarité du modèle d'évolution peut entraîner une multi-modalité de la loi conditionnelle de l'état, alors que le filtre de Kalman approche la densité a posteriori par une densité gaussienne, donc unimodale. Ainsi, lorsque les équations du système sont fortement non-linéaires ou lorsque les bruits ne sont pas gaussiens, les extensions du filtre de Kalman peuvent être inadaptées. Le filtrage particulaire (FP) qui repose sur la méthode de Monte Carlo, constitue alors une alternative intéressante. Dans la section suivante, nous introduisons brièvement le principe de ce type de filtrage.

## 1.2.4 Filtrage particulaire

Les filtres particuliers (FP), aussi connus sous le nom de *Méthodes séquentielles de Monte-Carlo*, sont des techniques statistiques d'estimation d'état basées sur des approximations de type Monte-Carlo [39]. Actuellement, le filtrage particulaire suscite de plus en plus d'intérêt, grâce aux avancées technologiques rendant possible leur mise en oeuvre en *temps réel* dans de nombreux domaines relevant des sciences et techniques de l'information et de la communication, ou des sciences de l'ingénieur. Le FP permet d'estimer séquentiellement l'état d'un système dynamique non linéaire. Il constitue une approximation du filtrage Bayésien, la densité a posteriori étant approchée grâce à un ensemble de points appelés *particules*. Chacune de ces particules représente un état probable du système auquel on affecte un coefficient de pondération (ou *poids*) [4, 20, 86].

Considérons de nouveau le système décrit par les équations (1.1) et (1.2). Les méthodes *séquentielles de Monte-Carlo* consistent à utiliser des échantillons  $\{x_k^i\}_{i=1}^N$ , d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi a posteriori pour calculer des moyennes empiriques et pour évaluer l'intégrale (1.7). Cette approche est intéressante dès que l'on sait échantillonner selon la loi a posteriori. Malheureusement, ceci est rarement le cas, et la technique d'échantillonnage d'importance est un remède intéressant. Cette technique utilise une densité auxiliaire  $q(\mathbf{x}_k/Z_k)$ , à partir de laquelle on peut générer des échantillons. Dans ce

cas l'équation (1.7) devient :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{x}}_k &= \int \mathbf{x}_k \frac{p(\mathbf{x}_k/Z_k)}{q(\mathbf{x}_k/Z_k)} q(\mathbf{x}_k/Z_k) d\mathbf{x}_k \\
&= \int \mathbf{x}_k \frac{p(Z_k/\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k)}{p(Z_k)q(\mathbf{x}_k/Z_k)} q(\mathbf{x}_k/Z_k) d\mathbf{x}_k \\
&= \int \mathbf{x}_k \frac{w_k}{p(Z_k)} q(\mathbf{x}_k/Z_k) d\mathbf{x}_k \\
&= \frac{1}{p(Z_k)} \int \mathbf{x}_k w_k q(\mathbf{x}_k/Z_k) d\mathbf{x}_k \\
&= \frac{\int \mathbf{x}_k w_k q(\mathbf{x}_k/Z_k) d\mathbf{x}_k}{\int p(Z_k/\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k) \frac{q(\mathbf{x}_k/Z_k)}{q(\mathbf{x}_k/Z_k)} d\mathbf{x}_k} \\
&= \frac{\int \mathbf{x}_k w_k q(\mathbf{x}_k/Z_k) d\mathbf{x}_k}{\int w_k q(\mathbf{x}_k/Z_k) d\mathbf{x}_k} \\
&= \frac{E_{q(\mathbf{x}_k/Z_k)}(\mathbf{x}_k w_k)}{E_{q(\mathbf{x}_k/Z_k)}(w_k)},
\end{aligned}$$

où  $w_k = \frac{p(Z_k/\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k)}{q(\mathbf{x}_k/Z_k)}$  et  $E_{q(\mathbf{x}_k/Z_k)}$  représente l'espérance associée à la loi  $q(\mathbf{x}_k/Z_k)$ . Ainsi, en générant les échantillons suivant  $q(\mathbf{x}_k/Z_k)$ ,  $\widehat{\mathbf{x}}_k$  peut être approchée par :

$$\widehat{\mathbf{x}}_k = \frac{\frac{1}{N} \sum_i w_k^i x_k^i}{\frac{1}{N} \sum_i w_k^i} = \frac{\sum_i w_k^i x_k^i}{\sum_i w_k^i}, \quad (1.24)$$

où  $w_k^i$  est le poids associé à  $x_k^i$ . En supposant que le modèle d'état est un processus markovien d'ordre 1, les poids peuvent être estimés de façon récurrente par la formule suivante [30] :

$$w_k^i = w_{k-1}^i \frac{p(Z_k/x_k^i)p(x_k^i/x_{k-1}^i)}{q(x_k^i/x_{k-1}^i, Z_k)}. \quad (1.25)$$

Cette équation permet d'estimer séquentiellement les poids des particules. Ces poids dépendent de la loi  $q(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1}, Z_k)$ . Le choix le plus simple consiste à poser  $q(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1}, Z_k) = p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$ . Il conduit à une formulation simple des poids dont la mise à jour se fait en multipliant le poids précédant de chaque particule par la vraisemblance correspondante :

$$w_k^i = w_{k-1}^i p(Z_k/x_k^i). \quad (1.26)$$

La méthode du FP est résumée par l'Algorithme 1. Un concept important dans le filtrage particulaire réside dans le ré-échantillonnage, nécessaire pour éviter la dégénérescence. L'algorithme de ré-échantillonnage effectue un tirage avec remise parmi les  $N$  particules prédites par le modèle d'évolution. La probabilité de tirer une particule est donnée par son poids. L'échantillonnage transforme un ensemble de particules en un autre de même taille [4]. En incorporant le poids dans le processus de ré-échantillonnage, la distribution des particules change. Le ré-échantillonnage peut se faire à chaque étape (on obtient alors un filtre particulaire SIR - *Sequential Importance Resampling*) ou lorsque ceci est jugé

**Algorithm 1** Algorithme de filtre particulaire

- 
- 1: Générer un ensemble des particules et les poids associés,  $\{x_0^i, w_0^i\}_{i=1}^n$  selon la probabilité a priori de l'état du système.
  - 2: **Pour**  $i = 1$  à  $n$
  - 3:    % *Prédiction* %
  - 4:    Propager les particules suivant le modèle d'évolution du système :  $x_{k/k-1}^i = \mathbf{f}(x_{k-1/k-1}^i, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_{k-1}$ .
  - 5:    % *Correction* %
  - 6:    Mise à jour des poids :  $w_k^i = w_{k-1}^i p(Z_k/x_k^i)$ .
  - 7:    Normalisation :  $w_k^i = w_k^i / \sum_{i=1}^N w_k^i$ .
  - 8:    % *Estimation* %
  - 9:     $\hat{\mathbf{x}}_k = \frac{\sum_i w_k^i x_k^i}{\sum_i w_k^i}$ .
  - 10: **Fin Pour**
- 

nécessaire compte tenu du pourcentage de particules significatives (filtre SIS - *Sequential Importance Sampling*). Pour évaluer le nombre de particules significatives, on utilise la formule suivante [4] :

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_k^i)^2}.$$

Le nombre de particules significatives  $N_{eff}$  est maximisé lorsque tous les poids sont égaux. Il est minimum lorsqu'un seul poids est non nul. Ainsi, quand  $N_{eff}$  est plus petit qu'un seuil choisi on procède à un ré-échantillonnage.

Généralement, l'efficacité et la pertinence du FP dépendent du nombre de particules utilisées dans l'approximation de la densité de probabilité de l'état [4, 20]. Ces méthodes nécessitent un temps d'exécution important dans la plupart des cas. Ainsi, elles sont rarement utilisées dans les applications en temps réel.

### 1.3 Approche à erreurs bornées

A l'opposé des approches Bayésiennes, sont apparues des approches dites à erreurs bornées (AEB). Dans ces approches, les valeurs des différentes variables sont supposées appartenir à des ensembles de forme particulière (ellipses, pavés, etc.). On cherche une estimation garantie de l'état sous forme d'un ensemble qui contient toutes les valeurs possibles cohérentes avec les contraintes données, représentées par les équations d'évolution et d'observation [13, 21, 38, 47, 48, 62, 89]. Des travaux sur la notion d'estimation garantie sont apparus à la fin des années 1960. Ceux-ci concernaient le cas des systèmes linéaires [88]. Récemment, plusieurs travaux abordent le problème de l'estimation garantie avec des contraintes non-linéaires [6, 47, 51, 59]. Dans [36], une méthode basée sur l'analyse par intervalle a été développée pour des applications de localisation routière. Le problème majeur de l'AEB est la détermination des bornes d'erreurs associées aux différentes variables [48]. En effet si ces bornes sont sous-estimées, on peut obtenir un ensemble vide pour l'état.

Au contraire, si elles sont surestimées, l'ensemble des valeurs possibles pour l'état devient grand et la méthode perd de sa précision.

Nous nous intéressons dans le cadre de ce travail aux méthodes d'estimation à erreurs bornées basées sur l'analyse par intervalles [36, 37, 48]. Dans la section suivante, nous présentons les notions principales de cette théorie.

### 1.3.1 Théorie des intervalles

La théorie des intervalles a été proposée pour la première fois par Moore en 1966 dans son livre *Analyse par intervalle* [64]. Elle est basée sur une idée assez simple, consistant à remplacer les nombres réels ou entiers par des intervalles auxquels ils appartiennent (ou, plus généralement dans  $\mathbb{R}^n$ , à remplacer des vecteurs réels par de pavés). Cette théorie considère les intervalles comme un type de donnée qui peut avoir une double nature, celle de nombre et celle d'ensemble. Ainsi, le calcul par intervalles exploite cette dualité et combine les opérations ensemblistes (par exemple, l'union et l'intersection) avec les opérations arithmétiques sur des nombres réels (par exemple, l'addition et la soustraction), ceci afin de créer de nouveaux opérateurs adaptés aux intervalles.

Dans cette section, nous décrivons les notions de base de la théorie des intervalles ainsi que les outils qui seront utilisés dans la suite de ce mémoire. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [48] et aux références incluses.

#### 1.3.1.1 Définitions d'un intervalle

**Définition 1.** *Un intervalle réel fermé, noté généralement par  $[x]$ , est caractérisé par la paire ordonnée des réels représentant ces bornes :*

$$[x] = [\bar{x}, \underline{x}],$$

où,  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  sont les bornes inférieures et supérieures de  $[x]$ . L'intervalle  $[x]$  est une partie connexe, bornée et fermée de  $\mathbb{R}$ . Il est défini par :

$$[x] = \{x \in \mathbb{R} / \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}. \quad (1.27)$$

Les ensembles suivants sont également des intervalles fermés de  $\mathbb{R}$  :  $\emptyset, ]-\infty, +\infty[$ . L'ensemble des tous les intervalles possibles est noté souvent par  $\mathbb{I}\mathbb{R}$ .

**Définition 2.** *Le centre de l'intervalle  $[x]$ , noté  $x_0$ , est donné par :*

$$x_0 = \frac{(\underline{x} + \bar{x})}{2}. \quad (1.28)$$

**Définition 3.** *La taille de  $[x]$ , notée  $w([x])$ , est définie par :*

$$w([x]) = \frac{(\bar{x} - \underline{x})}{2}. \quad (1.29)$$

La taille  $w([x])$  de  $[x]$  caractérise l'imprécision avec laquelle  $x$  est connu.

### 1.3.1.2 Arithmétique des intervalles

L'arithmétique des intervalles est le premier outil du calcul ensembliste. Le calcul par intervalles manipule les intervalles en utilisant des opérations ensemblistes et arithmétiques. Les opérateurs ensemblistes sont appliqués directement sur les intervalles. Par exemple, l'intersection des deux intervalles  $[x]$  et  $[y]$  est définie par :

$$[x] \cap [y] = \{z \in \mathbb{R} | z \in [x] \text{ et } z \in [y]\}. \quad (1.30)$$

L'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle, mais ce n'est pas toujours le cas pour l'union. Pour cette raison, on définit l'union de deux intervalles  $[x]$  et  $[y]$  comme étant le plus petit intervalle contenant  $[x]$  et  $[y]$  :

$$[x] \sqcup [y] = [[x] \cup [y]], \quad (1.31)$$

La notion  $[A]$  désignant l'enveloppe convexe de  $A$ , pour tout  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

#### Exemple 1.

$$\begin{aligned} [1, 2] \cup [5, 7] &= [1, 7], \\ [1, 5] \cap [3, 7] &= [3, 5]. \end{aligned}$$

L'arithmétique classique des réels est fondée sur quatre opérations de base : l'addition, la soustraction, la multiplication, et la division. L'arithmétique des intervalles généralise ces opérations. Si  $\circ$  représente un des opérateurs usuels  $\{+, -, *, /\}$ , on définit son extension de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  vers  $\mathbb{IR} \times \mathbb{IR}$  de la manière suivante :

$$[x] \circ [y] = [\{x \circ y \in \mathbb{R} | x \in [x], y \in [y]\}], \quad (1.32)$$

Les opérations arithmétiques considérées ici sont des lois de composition interne dans  $\mathbb{IR}$ . Ainsi, les résultats de ces opérations sont de même type que leurs arguments (par exemple, le résultat d'une *addition* ou d'un *produit* de deux intervalles est aussi un intervalle). Pour caractériser le résultat de l'opération  $[x] \circ [y]$  pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division on peut se servir des formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [x] + [y] = \{x + y | x \in [x] \text{ et } y \in [y]\} = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \\ [x] - [y] = \{x - y | x \in [x] \text{ et } y \in [y]\} = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \\ [x] \cdot [y] = \{x \cdot y | x \in [x] \text{ et } y \in [y]\} \\ \quad = [\min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}), \max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y})], \\ -[x] = \{-x | x \in [x]\} = [-\bar{x}, -\underline{x}], \\ [x]^2 = \{x^2 | x \in [x]\}. \end{array} \right.$$

Si les bornes de  $[x]$  et  $[y]$  sont strictement positives, alors :

$$[x]/[y] = [\underline{x}/\bar{y}, \bar{x}/\underline{y}],$$

et

$$[x]^2 = [\underline{x}^2, \bar{x}^2].$$

**Exemple 2.**

$$\begin{aligned}
[1, 3] + [0, 4] &= [1, 7], \\
[1, 3] - [0, 4] &= [-3, 3], \\
[1, 3] \cdot [0, 4] &= [0, 12], \\
[3, 4]/[0, 0] &= \emptyset.
\end{aligned}$$

Il est à noter ici que  $[x]^2 \neq [x] \cdot [x]$ . Par exemple, si  $[x] = [-1, 1]$ , alors  $[x]^2 = [0, 1]$ , tandis que  $[x] \cdot [x] = [-1, 1]$ .

Certaines propriétés des opérations sur les intervalles se déduisent directement des opérations correspondantes sur les réels. Il est facile de montrer que l'*addition* et la *multiplication* sont associatives et commutatives. En revanche, la multiplication est sous-distributive par rapport à l'addition :

$$[x] \cdot ([y] + [z]) \subseteq [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z].$$

Tous les opérateurs sur les intervalles vérifient la propriété d'*inclusion minimale* définie par :

$$[x_1] \subseteq [x_2] \text{ et } [y_1] \subseteq [y_2] \Rightarrow [x_1] \circ [y_1] \subseteq [x_2] \circ [y_2].$$

Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction élémentaire définie de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{F}$ . Dans le cadre de la théorie des intervalles, une fonction d'inclusion pour  $f$  est une fonction de  $\mathbb{IR}$  dans  $\mathbb{IR}$  vérifiant :

$$[f]([x]) \supseteq \{f(x)/x \in [x]\}, \forall [x] \in \mathbb{IR} \quad (1.33)$$

La fonction d'inclusion minimale pour  $f$  associe à tout  $[x]$  le plus petit interval contenant  $f([x])$ . Elle est généralement notée par  $[f]^*$ .

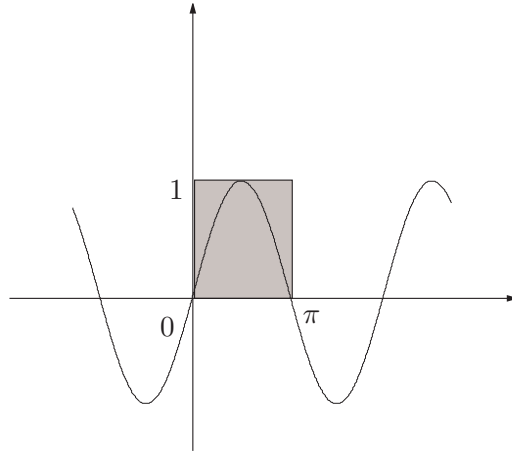
Toute fonction élémentaire  $f$ , continue et monotone, a comme fonction d'inclusion minimale :

$$[f]^*([x]) = [\min(f(\underline{x}), f(\bar{x})), \max(f(\underline{x}), f(\bar{x}))]. \quad (1.34)$$

**Exemple 3.** Les fonctions d'inclusion minimales associées à  $\exp$ ,  $\ln$  et  $\arccos$ , appliquées sur  $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ , sont données par :

$$\begin{aligned}
[\exp]([x]) &= [\exp(\underline{x}), \exp(\bar{x})], \\
[\ln]([x]) &= [\ln(\underline{x}), \ln(\bar{x})], \\
[\arccos]([x]) &= [\arccos(\bar{x}), \arccos(\underline{x})] \text{ pour } [x] \subseteq [-1, 1].
\end{aligned}$$

Si la fonction  $f$  n'est pas monotone, le calcul de la fonction d'inclusion minimale devient plus compliqué. On peut dans certains cas exploiter la monotonie par morceaux de la fonction  $f$ . Soit  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels. Le domaine  $\mathbb{E}$  peut être décomposé en sous-domaines  $\mathbb{E}_k$  tel que  $\mathbb{E} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_k$ , dans lesquels  $f$  est continue et monotone (strictement croissante ou décroissante). Le calcul de la fonction d'inclusion minimale de  $f$  sur  $\mathbb{E}$  revient à déterminer la fonction

Figure 1.1 – Calcul de  $\sin([x])$ .

d'inclusion minimale de  $f$  sur tous les sous domaines  $\mathbb{E}_k$ . Ainsi,  $[f]^*$  est donnée par :

$$[f]^*([x]) = [f]^*(\cup_{k=r}^s [x_k]) = [\cup_{k=r}^s [f]^*([x_k])], \quad (1.35)$$

où  $[x] \subseteq \mathbb{E}$ ,  $[x_k] \subseteq \mathbb{E}_k$ ,  $[x] = \cup_{k=r}^s [x_k]$  et  $s$  et  $r$  sont deux réels tel que  $r \leq s$ . Comme  $f$  est monotone sur  $[x_k]$ , alors :

$$[f]^*([x]) = [\cup_{k=r}^s [\min(f(\underline{x}_k), f(\overline{x}_k)), \max(f(\underline{x}_k), f(\overline{x}_k))]]. \quad (1.36)$$

En développant, on obtient :

$$[f]^*([x]) = [\underline{y}, \overline{y}], \quad (1.37)$$

avec

$$\underline{y} = \min(f(\underline{x}_r), f(\underline{x}_{r+1}), \dots, f(\underline{x}_s), f(\overline{x}_r), \dots, f(\overline{x}_s))$$

et

$$\overline{y} = \max(f(\underline{x}_r), f(\underline{x}_{r+1}), \dots, f(\underline{x}_s), f(\overline{x}_r), \dots, f(\overline{x}_s)).$$

**Exemple 4.** Prenons le cas de la fonction élémentaire  $f(x) = \sin(x)$  (cf. Figure 1.1). Nous cherchons à calculer  $[\sin]^*([0, \pi])$ . Le domaine  $[0, \pi]$  peut être décomposé en deux sous-domaines  $E_1 = [0, \pi/2]$  et  $E_2 = [\pi/2, \pi]$  où la fonction  $\sin$  est monotone. La fonction d'inclusion minimale de  $f(x)$  en  $[0, \pi]$  est donc donnée par :

$$[\sin]^*([0, \pi]) = [\underline{y}, \overline{y}],$$

où

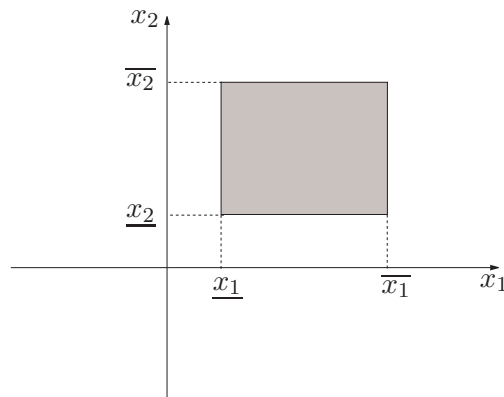
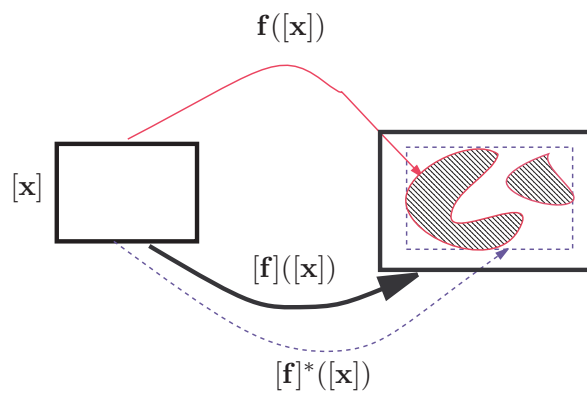
$$\underline{y} = \min(\sin(0), \sin(\pi/2), \sin(\pi)) = 0,$$

et

$$\overline{y} = \max(\sin(0), \sin(\pi/2), \sin(\pi)) = 1.$$

Par conséquent,  $[\sin]^*([0, \pi]) = [0, 1]$ .



Figure 1.2 – Pavé de  $\mathbb{R}^2$ .Figure 1.3 – L'image d'un pavé  $[\mathbf{x}]$  par la fonction  $\mathbf{f}$ .

### 1.3.1.3 Définition d'un pavé

**Définition 4.** Un pavé  $[\mathbf{x}]$ , appelé aussi un vecteur d'intervalles, est défini comme le produit cartésien de  $m$  intervalles :

$$[\mathbf{x}] = [x_1] \times \cdots \times [x_m]. \quad (1.38)$$

L'ensemble de tous les pavés de dimension  $m$  est noté  $\mathbb{IR}^m$ . La Figure 1.2, montre le cas d'un pavé  $[\mathbf{x}] = [x_1] \times [x_2]$  de  $\mathbb{IR}^2$ .

Les opérateurs ensemblistes et arithmétiques définis dans le paragraphe précédent peuvent être étendus aux pavés. Par exemple, la somme de deux pavés  $[\mathbf{x}]$  et  $[\mathbf{y}]$  de  $\mathbb{IR}^m$  est définie par :

$$[\mathbf{x}] + [\mathbf{y}] = ([x_1] + [y_1]) \times \cdots \times ([x_m] + [y_m]). \quad (1.39)$$

### 1.3.1.4 Fonction d'inclusion sur un pavé

Soit  $\mathbf{f}$  une fonction définie de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^m$ . L'image d'un pavé  $[\mathbf{x}]$  par  $\mathbf{f}$ , définie par  $\mathbf{f}([\mathbf{x}]) = \{\mathbf{y} / \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ et } \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]\}$ , n'est pas nécessairement un pavé, comme

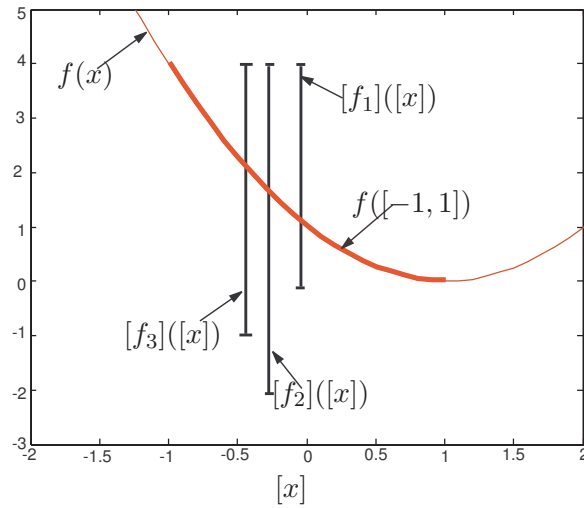


Figure 1.4 – Comparaison des fonctions d’inclusion naturelles d’une même fonction analytique  $f(x) = (x - 1)^2$ .

le montre la Figure 1.3. On définit la fonction d’inclusion sur un pavé  $[\mathbf{x}]$  par une extension de la notion de fonction d’inclusion sur les intervalles.

**Définition 5.** Une fonction  $[\mathbf{f}]$  de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{I}\mathbb{R}^m$  est une fonction d’inclusion de  $\mathbf{f}$  si :

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n, \mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subseteq [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]). \quad (1.40)$$

Le but de la fonction d’inclusion est ainsi de chercher un pavé englobant l’image de  $[\mathbf{x}]$  par  $\mathbf{f}$ . Lors de l’utilisation des fonctions d’inclusion, la solution trouvée est souvent pessimiste comme le montre la Figure 1.3.

La fonction qui associe à  $[\mathbf{x}]$  l’espace  $\mathbb{I}\mathbb{R}^m$  est une fonction d’inclusion pour toutes les fonctions  $\mathbf{f}$  de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{I}\mathbb{R}^m$ , mais elle est si pessimiste qu’on n’a aucun intérêt à l’utiliser. L’une des problématiques de l’analyse par intervalles est de trouver des fonctions d’inclusion précises et rapides à évaluer. Comme on le voit sur la Figure 1.3, la fonction d’inclusion minimale  $[\mathbf{f}^*]$  est plus précise que toute autre fonction d’inclusion  $[\mathbf{f}]$ . Il est souvent difficile de calculer la fonction d’inclusion minimale. Pour construire une fonction d’inclusion pour une fonction  $\mathbf{f}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , il suffit de calculer une fonction d’inclusion pour chacune de ses composantes  $\{f_i\}_{i=1}^m$  :

$$[\mathbf{f}] = [f_1] \times [f_2] \times \cdots \times [f_m].$$

Dans la suite nous nous focalisons sur le calcul de fonctions d’inclusion pour des fonctions analytiques à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Une fonction analytique est une fonction qui peut être construite par compositions des fonctions élémentaires usuelles (cos, sin, log, exp, max,  $\dots$ ) et des opérateurs arithmétiques (+, -, \*, /).

Il existe plusieurs méthodes pour calculer une fonction d’inclusion d’une fonction analytique. Dans ce travail, nous avons utilisé les fonctions d’inclusion naturelles.

Une fonction d’inclusion naturelle est obtenue en remplaçant chaque variable scalaire de  $f$  par l’intervalle correspondant, et toutes les fonctions élémentaires par leurs extensions aux intervalles. Cependant, une telle fonction est rarement

minimale au sens de l'inclusion. Elle ne l'est que lorsque tous les opérateurs et les fonctions élémentaires de  $f$  sont continus, et à condition que toutes les variables  $x_i$  n'apparaissent qu'une seule fois dans l'expression de  $f$ . Il est donc essentiel d'effectuer une étape de pré-traitement symbolique sur l'expression de  $f$ , afin de diminuer le nombre d'occurrences de chaque variable avant de calculer la fonction d'inclusion naturelle.

**Exemple 5.** *Considérons la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $f(x_1, x_2) = \ln(\exp(x_1) + \cos(x_2))$ . Une fonction d'inclusion naturelle est donnée par :*

$$[f]([x_1], [x_2]) = [\ln](([\exp]([x_1]) + [\cos]([x_2]))).$$

*L'image par  $[f]$  d'un pavé  $\mathbf{x} = ([x_1], [x_2])^T$  tel que  $[x_1] = [0, 1]$  et  $[x_2] = [0, \pi/6]$ , est calculée comme suit :*

$$\begin{aligned} [f]([x_1], [x_2]) &= [\ln](([\exp]([0, 1]) + [\cos]([0, \pi/6]))) \\ &= [\ln]([1, e] + [1/2, 1]) \\ &= [\ln]([3/2, 1 + e]) \\ &= [\ln(3/2), \ln(1 + e)]. \end{aligned}$$

**Exemple 6.** *Considérons la fonction  $f(x) = (x-1)^2$ . Cette fonction peut être écrite d'au moins trois manières différentes :*

$$\begin{aligned} f_1(x) &: (x-1)^2 \\ f_2(x) &: (x-1)(x-1) \\ f_3(x) &: x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

*Afin de montrer l'effet de la forme de l'expression de  $f$  sur l'efficacité de la fonction d'inclusion naturelle correspondante, on peut calculer l'image de l'intervalle  $[x] = [1, 1]$  par  $[f_1]$ ,  $[f_2]$  et  $[f_3]$ , définies de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} [f_1]([x]) &= ([-1, 1] - 1)^2 = ([-2, 0])^2 = [0, 4], \\ [f_2]([x]) &= ([-1, 1] - 1)([-1, 1] - 1) = ([-2, 1])([-2, 1]) = [-2, 4], \\ [f_3]([x]) &= [-1, 1]^2 - 2[-1, 1] + 1 = [0, 1] - [-2, 2] + 1 = [-1, 4]. \end{aligned}$$

*Selon la formulation de la fonction  $f$ , la fonction d'inclusion naturelle est donc plus ou moins précise. La fonction d'inclusion  $[f_1]$  ne contenant qu'une seule occurrence de la variable  $x$  est plus précise que les deux autres dans lesquelles la variable  $x$  apparaît deux fois (voir la Figure 1.4).*

Parmi les stratégies utilisées pour construire les fonctions d'inclusion, la fonction d'inclusion naturelle reste la plus facile à mettre en oeuvre [11, 46, 48]. Afin de réduire le problème de pessimisme de ce type des fonctions d'inclusion, il est utile de procéder à des manipulations algébriques sur les expressions des fonctions afin de minimiser les occurrences des différentes variables. Cependant, cette réduction n'est pas toujours faisable. Ainsi, pour remédier au problème du pessimisme des fonctions d'inclusions, on doit avoir recours à d'autres opérations que les manipulations algébriques usuelles [48].

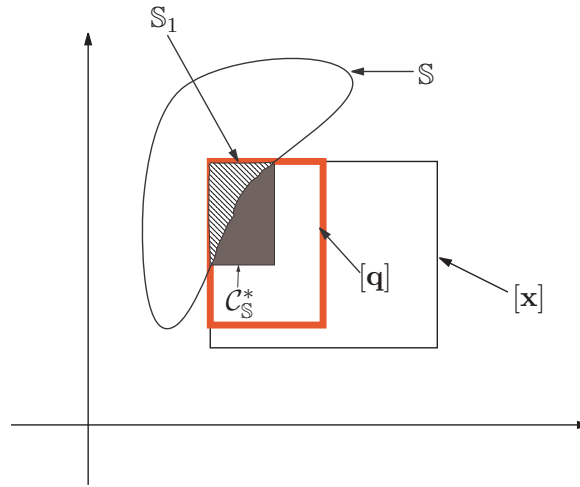


Figure 1.5 – Réduction d'un pavé  $[\mathbf{x}]$  en un pavé  $[\mathbf{q}]$  en utilisant une seule contrainte  $\mathbb{S}$ .

### 1.3.1.5 Réduction d'un pavé sous contrainte

**Définition 6.** *Étant donné un vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  de  $\mathbb{R}^m$ , une contrainte  $\mathcal{C}$  est une relation définie entre les différentes composantes de  $\mathbf{x}$ . Cette relation spécifie un ensemble de vecteurs compatibles avec la contrainte dans  $\mathbb{R}^m$ .*

Nous considérons dans ce paragraphe une contrainte de la forme  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]$ , où  $\mathbf{f}$  est une fonction définie de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$  et  $[\mathbf{y}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ . Soit  $[\mathbf{x}]$  le domaine initial de  $\mathbf{x}$ . La contrainte  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]$  est souvent assimilée à un sous-ensemble  $\mathbb{S}$  de  $\mathbb{R}^m$  donné par :

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m / \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]\} = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}]). \quad (1.41)$$

La réduction du pavé  $[\mathbf{x}]$  sous la contrainte  $\mathbf{f}$  consiste à trouver un pavé  $[\mathbf{q}] \subset [\mathbf{x}]$ , englobant  $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S} \cap [\mathbf{x}]$ .

Ce problème est souvent appelé «problème de Satisfaction de Contrainte : PSC» (pour CSP : *Constraint satisfaction problem*, en anglais). Il peut être reformulé de la manière suivante :

$$\mathcal{H} : (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}], \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]). \quad (1.42)$$

La Figure 1.5, issue de [46], illustre le principe de réduction d'un pavé  $[\mathbf{x}]$  par la contrainte  $\mathbf{f}$ . Une réduction est dite minimale si le pavé  $[\mathbf{q}]$  est égal au pavé minimal englobant  $\mathbb{S}_1$ , noté  $\mathcal{C}_{\mathbb{S}}^*$ .

### 1.3.1.6 Le contracteur de Waltz

**Définition 7.** *Considérons le PSC défini par l'équation (1.42). Soit  $\mathbb{S}$  l'ensemble défini par l'équation (1.41) et  $[\mathbf{x}]$  un pavé de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^m$ . Un contracteur  $\mathcal{C}_{\mathbb{S}}$  pour  $\mathbb{S}$ , est une application*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbb{S}} : \mathbb{I}\mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^m \\ [\mathbf{x}] &\rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{S}}([\mathbf{x}]) \supseteq [[\mathbf{x}] \cap \mathbb{S}]^*, \end{aligned} \quad (1.43)$$

où  $[[\mathbf{x}] \cap \mathbf{S}]^*$  est le plus petit pavé englobant  $[\mathbf{x}] \cap \mathbf{S}$ . La Figure 1.5 illustre un exemple de la contraction d'un pavé  $[\mathbf{x}]$  de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^2$  par rapport à  $\mathbf{S}$ . Après avoir défini les contracteurs, on peut énoncer quelques définitions [48] :

- $\mathcal{C}_{\mathbf{S}}^*$  est dit optimal si  $\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m, \mathcal{C}_{\mathbf{S}}^* = [[\mathbf{x}] \cap \mathbf{S}]^*$ ,
- $\mathcal{C}_{\mathbf{S}}$  est dit monotone si  $[\mathbf{x}] \subseteq [\mathbf{y}]$  implique  $\mathcal{C}_{\mathbf{S}}([\mathbf{x}]) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbf{S}}([\mathbf{y}])$ ,
- $\mathcal{C}_{\mathbf{S}}$  est dit idempotent si  $\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m, \mathcal{C}_{\mathbf{S}}(\mathcal{C}_{\mathbf{S}}([\mathbf{x}])) = \mathcal{C}_{\mathbf{S}}([\mathbf{x}])$ ,
- $\mathcal{C}_{\mathbf{S}}$  est plus efficace que  $\mathcal{C}'_{\mathbf{S}}$  si pour  $[x] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m, \mathcal{C}_{\mathbf{S}}([\mathbf{x}]) \subset \mathcal{C}'_{\mathbf{S}}([\mathbf{x}])$ .

Il n'existe pas une méthode générale pour trouver le contracteur optimal. Plusieurs méthodes permettent la réduction de la taille des pavés en utilisant des contraintes [11, 48]. Nous nous intéressons dans le cadre de ce travail à une méthode relativement simple pour la contraction des pavés utilisant le principe de contraction par propagation des contraintes. Cette méthode est connue sous le nom d'*algorithme de Waltz* ou *méthode de propagation et rétro-propagation* (PRP) [23, 24, 46, 48]. Elle est particulièrement avantageuse pour plusieurs raisons, parmi lesquelles :

- son indépendance par rapport à la linéarité ou la non linéarité des contraintes utilisées ;
- son indépendance par rapport à la taille des intervalles ;
- son temps d'exécution raisonnable ;
- sa facilité de mise en oeuvre.

Enfin, cette méthode donne des résultats fiables pour des problèmes présentant beaucoup de redondances de données et de contraintes. Elle est donc bien adaptée aux problèmes de fusion de données présentant souvent de telles redondances. L'algorithme de PRP est basé sur la décomposition des contraintes initiales en contraintes primitives et sur leur propagation sur les domaines initiaux [23, 24, 48]. Une contrainte est dite primitive si elle implique un seul opérateur  $\diamond \in \{+, -, *, /\}$  ou une seule fonction usuelle ( $\cos, \ln, \log, \sin, \exp, \log, \dots$ ).

Considérons un pavé  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m$  et un PSC défini par :

$$\mathcal{H} : (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}], \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]).$$

L'algorithme de Waltz permet de réduire le pavé  $[\mathbf{x}]$  sous la contrainte  $\mathbf{f}$ , c'est-à-dire, de trouver un pavé de taille réduite englobant la solution  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}]) \cap [\mathbf{x}]$ . Cet algorithme est composé de deux sous-routines : *Propagation* et *Rétropropagation*. Il consiste à contracter  $[\mathbf{x}]$  en respectant les contraintes primitives de  $\mathbf{f}$ , sans ordre a priori, jusqu'à ce que la contraction devienne inefficace. Le principe de l'algorithme de Waltz est représenté dans l'Algorithme 2 [46]. Dans cet algorithme,  $\mathcal{C}_j$  représente la  $j^{\text{ième}}$  contrainte primitive de  $\mathbf{f}$  et  $n$  est le nombre total de contraintes primitives. La procédure *REDUIT* consiste à réduire le pavé  $[\mathbf{x}](k+1)$  en utilisant la contrainte  $\mathcal{C}_j$  et  $[\mathbf{x}](k)$ .

Illustrons l'algorithme de *Propagation-Rétropropagation* par l'exemple suivant :

**Exemple 7.** *Considérons un pavé  $[x] = [x_1] \times [x_2] \in [-10, 10] \times [-10, 10]$ , qu'on cherche à réduire en utilisant les contraintes  $\mathcal{C}_1 : y_1 = x_1 - 3x_2 \in [-2, 1]$  et  $\mathcal{C}_2 : y_2 = x_1 + x_2 \in [-1, 1]$ . L'application d'une étape de l'algorithme de PRP est décrite ci-dessous.*

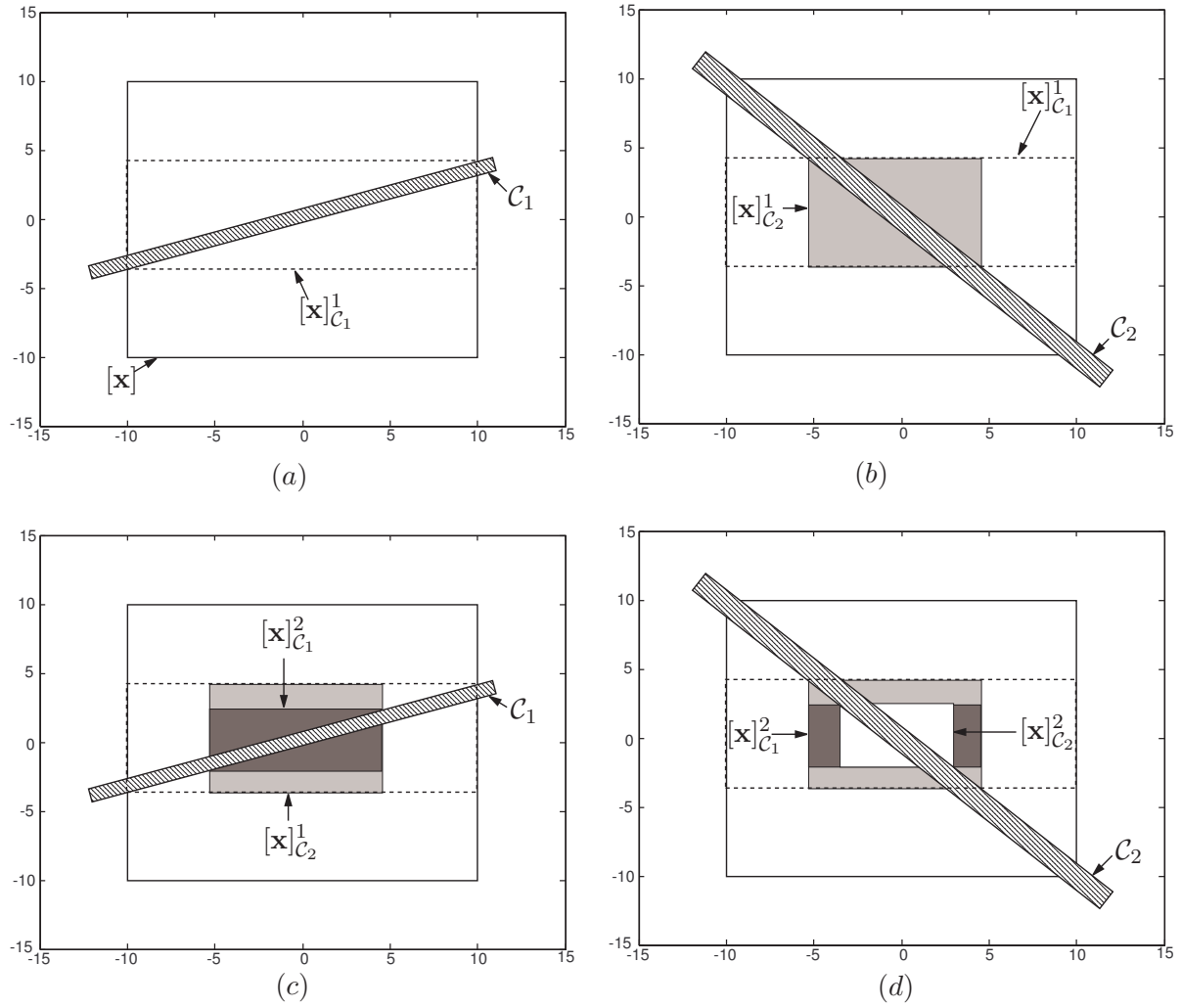


Figure 1.6 – Les deux premières étapes de l’algorithme de *PRP*.

---

**Algorithm 2** L’algorithme de Waltz :  $WALTZ([\mathbf{x}], [\mathbf{y}])$ .

---

**Entrée :**  $k = 0$ ,  $[\mathbf{x}](0) = [\mathbf{x}]$

**Répéter**

**Pour**  $j = 1$  jusqu’à  $n$ ,

$[\mathbf{x}](k+1) = REDUIT([\mathbf{x}](k), \mathcal{C}_j)$ ;

$k = k + 1$ ;

**Fin Pour**

**Tant que** la réduction est suffisante

**Sortie :**  $[\mathbf{x}](k)$ ;

---

– *Propagation* :

$$[y_1] = [y_1] \cap ([x_1] - 3 * [x_2]) = [-2, 1] \cap ([-10, 10] - 3 * [-10, 10]) = [-2, 1],$$

$$[y_2] = [y_2] \cap ([x_1] + [x_2]) = [-1, 1] \cap ([-10, 10] + [-10, 10]) = [-1, 1].$$

– *Rétropropagation* :

$$[x_1] = ([y_1] + 3 * [x_2]) \cap [x_1] = ([-2, 1] + 3[10, 10]) \cap [-10, 10] = [-10, 10],$$

$$[x_2] = \frac{1}{3}([x_1] - [y_1]) \cap [x_2] = \frac{1}{3}([-10, 10] - [-2, 1]) \cap [-10, 10] = [-11/3, 4],$$

$$[x_1] = ([y_2] - [x_2]) \cap [x_1] = ([-1, 1] - [11/3, 4]) \cap [-10, 10] = [-5, 14/3],$$

$$[x_2] = ([y_2] - [x_1]) \cap [x_2] = ([-5, 14/3] - [-1, 1]) \cap [-11/3, 4] = [-11/3, 4].$$

La Figure 1.6 montre les résultats des deux premières étapes de la PRP. Sur cette figure, les deux contraintes sont représentées par des zone hachurées. La Figure 1.6-a illustre en rectangle pointillé la réduction du pavé  $[\mathbf{x}]$  en utilisant la première contrainte  $\mathcal{C}_1$ . Après avoir utilisé la contrainte  $\mathcal{C}_1$ , la Figure 1.6-b montre le résultat de réduction de  $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}_1}^1$  par la deuxième contrainte  $\mathcal{C}_2$  (rectangle gris). Le rectangle gris foncé de la Figure 1.6-c représente le résultat de la contraction de  $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}_2}^1$  par  $\mathcal{C}_1$ . Enfin, le rectangle blanc de la Figure 1.6-d montre le résultat de la contraction de  $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}_1}^2$  par  $\mathcal{C}_2$ .

### 1.3.2 Utilisation de l'algorithme PRP pour l'estimation d'état

Dans cette partie, on présente un algorithme simple développé dans [36] pour résoudre des problèmes d'estimation d'état en utilisant certaines notions introduites auparavant. Pour cela, considérons le système non linéaire décrit par les équations suivantes :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (1.44)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}), \quad (1.45)$$

où  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  est une fonction, généralement non linéaire, qui définit la relation entre l'état  $\mathbf{x}_{k+1}$  à l'instant  $k+1$ , l'état  $\mathbf{x}_k$  et l'entrée  $\mathbf{u}_k$  à l'instant  $k$ , et où la fonction  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{n_x} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_z}$  représente la relation entre l'observation  $\mathbf{z}_{k+1}$  et l'état  $\mathbf{x}_{k+1}$ .

L'état initial  $\mathbf{x}_0$  est supposé inclus dans un pavé  $[\mathbf{x}_0] \subset \mathbb{I}\mathbb{R}^{n_x}$ . À l'instant  $k$ , l'entrée  $\mathbf{u}_k$  et la mesure  $\mathbf{z}_k$  sont représentées par les pavés  $[\mathbf{u}_k]$  et  $[\mathbf{z}_k]$ . La solution du problème d'estimation proposée dans [36] consiste à déterminer à chaque instant  $k+1$  une estimation garantie de l'état  $\mathbf{x}_{k+1}$  sous la forme d'un pavé  $[\mathbf{x}_{k+1}]$  contenant la vraie valeur de  $\mathbf{x}_{k+1}$  sous l'hypothèse que les équations (1.44) et (1.45) sont correctes et en tenant compte de toutes les informations disponibles à l'instant  $k+1$ . Tout type d'erreur dans les modèles (1.44) et (1.45) peut être pris en compte en ajoutant un bruit borné. L'adaptation de la méthode que nous allons présenter dans ce dernier cas est simple et facile à mettre en œuvre. Le problème d'estimation en question peut être vu comme un PSC :

$$\mathcal{H}_{0:k+1} : (\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_{0:k+1}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}_{0:k+1} \in [\boldsymbol{\xi}_{0:k+1}]), \quad (1.46)$$

avec  $\xi_{0:k+1} = (\mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_0, \mathbf{z}_{k+1}, \dots, \mathbf{z}_1)$  et

$$\mathbf{F} : \xi_{0:k+1} \rightarrow (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \dots, \mathbf{x}_1 - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0), \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}), \dots, \mathbf{z}_1 - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)). \quad (1.47)$$

L'algorithme de Waltz décrit dans la Section 1.3.1.6 peut être utilisé pour résoudre ce PSC. Pour cela, les contraintes  $\mathcal{H}_{0:k+1}$  doivent être décomposées en contraintes primitives. L'algorithme de Waltz sera ensuite appliqué en se servant de toutes les équations jusqu'à ce que la contraction devienne inutile.

En pratique, on ne considère le problème [36] que dans une fenêtre temporelle limitée par des raisons de temps de calcul. Dans ce travail de thèse, on n'utilise qu'une fenêtre temporelle de taille deux comme dans les méthodes bayésiennes où on considère habituellement des modèles de Markov d'ordre 1. Ainsi, le PSC défini par l'équation 1.46 peut être écrit sous la forme :

$$\mathcal{H}_{k+1} : (\mathbf{F}(\xi_{k+1}) = \mathbf{0}, \xi_{k+1} \in [\xi_{k+1}]), \quad (1.48)$$

avec  $\xi_{k+1} = (\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{z}_{k+1})$  et

$$\mathbf{F} : \xi_{k+1} \rightarrow (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1})). \quad (1.49)$$

---

**Algorithm 3** Algorithme EEB :  $[\mathbf{x}_{k+1}] = \text{EEB}([\mathbf{x}_k], \mathbf{u}_k, \mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ .

---

**Entrée :**  $[\mathbf{x}_k], \mathbf{u}_k, \mathbf{z}_{k+1}$

**Sortie :**  $[\mathbf{x}_{k+1}]$

- 1: Lecture des entrées  $\mathbf{u}_k$  et l'erreur associée. Déduire  $[\mathbf{u}_k]$ .
  - 2: Lecture des mesures  $\mathbf{z}_{k+1}$  et l'erreur associée. Déduire  $[\mathbf{z}_{k+1}]$ .
  - 3:  $[\mathbf{x}_{k+1}] \leftarrow (-\infty, +\infty)^{n_x}$
  - 4: **Tant que** au moins une variable est contractée
  - 5:    % Propagation %
  - 6:     $[\mathbf{x}_{k+1}] \leftarrow [\mathbf{x}_{k+1}] \cap [\mathbf{f}]([\mathbf{x}_k], [\mathbf{u}_k])$
  - 7:     $[\mathbf{z}_{k+1}] \leftarrow [\mathbf{z}_{k+1}] \cap [\mathbf{g}]([\mathbf{x}_{k+1}])$
  - 8:    % Rétro-propagation %
  - 9:    Rétro-propagation de la contrainte  $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = 0$
  - 10:   Rétro-propagation de la contrainte  $\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}) = 0$
  - 11: **Fin Tant que**
- 

La méthode d'estimation à erreurs bornées (EEB) est résumée dans l'Algorithme 3. Dans les étapes 1 et 2, des intervalles sont déterminés autour de l'entrée  $\mathbf{u}_k$  et de la mesure  $\mathbf{z}_{k+1}$  en utilisant les bornes des erreurs associées. Ces bornes dépendent des capteurs utilisés et sont supposées connues. Elles sont parfois données par les constructeurs ou dérivées d'une estimation de l'imprécision en temps réel [36].

À l'instant  $k = 0$ , on ne connaît rien de l'état  $\mathbf{x}_{k+1}$  :  $[\mathbf{x}_{k+1}]$  est donc initialisée par le plus grand pavé possible (étape 3). Les pavés  $[\mathbf{x}_{k+1}]$ ,  $[\mathbf{x}_k]$ ,  $[\mathbf{u}_k]$  et  $[\mathbf{z}_{k+1}]$  sont ensuite contractés en utilisant l'algorithme de Waltz. L'étape 6 correspond à l'étape de prédiction dans laquelle un pavé prédit  $[\mathbf{x}_{k+1}]$  est calculé en utilisant  $[\mathbf{x}_k]$ ,  $[\mathbf{u}_k]$  et l'équation (1.44). On peut remarquer qu'une fonction d'inclusion  $[\mathbf{f}]$  doit être utilisée



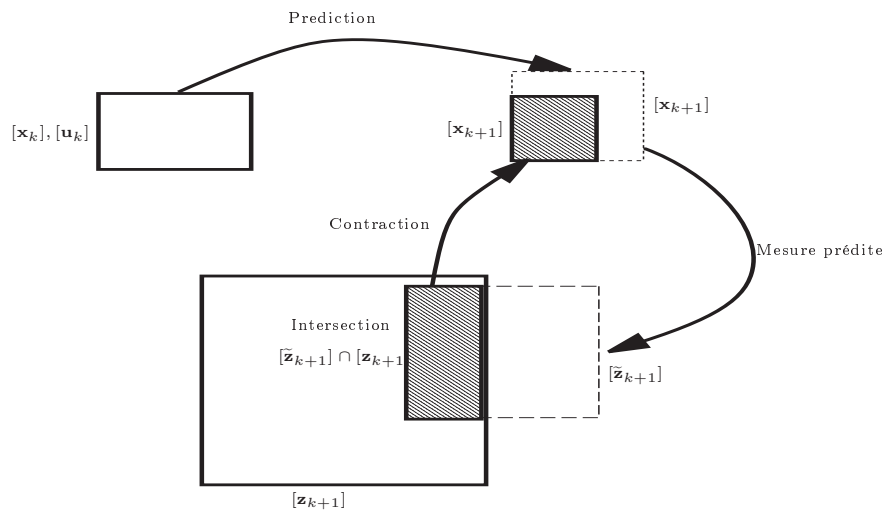


Figure 1.7 – Illustration du principe de la EEB.

afin de garantir que l'image par  $\mathbf{f}$  de  $[\mathbf{x}_k]$  et  $[\mathbf{u}]$  soit un pavé. Rappelons ici le caractère pessimiste de l'estimation résultant de l'utilisation des fonctions d'inclusion. L'étape 7, quant à elle, permet de calculer l'intersection entre la sortie prédite  $[\mathbf{g}]([\mathbf{x}_{k+1}])$  calculée à partir de l'état prédit  $[\mathbf{x}_{k+1}]$  en utilisant la fonction d'inclusion  $[\mathbf{g}]$ , et la sortie mesurée  $[\mathbf{z}_{k+1}]$ .

Les étapes 9 et 10 correspondent à la phase de rétro-propagation de l'algorithme de Waltz. Elles consistent à contracter tous les pavés, y compris  $[\mathbf{x}_k]$  et  $[\mathbf{u}_k]$ . Comme indiqué dans la Section 1.3.1.6, l'algorithme de Waltz nécessite que toutes les contraintes soient décomposées en contraintes primitives. L'algorithme s'arrête lorsque la contraction devient très petite ou inférieure à un seuil donné. La fonction calculée par cet algorithme est notée comme suit :

$$[\mathbf{x}_{k+1}] = \mathcal{C}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{x}_k], [\mathbf{u}_k], [\mathbf{z}_{k+1}]). \quad (1.50)$$

Le principe de l'algorithme de la EEB est illustré par la figure 1.7. Dans cette figure, les pavés  $[\mathbf{x}_k]$  et  $[\mathbf{u}_k]$  représentant l'état et l'entrée sont combinés en utilisant le modèle d'évolution pour fournir un pavé prédit  $[\mathbf{x}_{k+1}]$ . Ensuite,  $[\mathbf{x}_{k+1}]$  est utilisé pour calculer la sortie prédite  $[\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}]$ . L'intersection de  $[\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}]$  avec la mesure observée  $[\mathbf{z}_{k+1}]$  est utilisée pour contracter  $[\mathbf{x}_{k+1}]$  en utilisant la méthode PRP.

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté d'une manière résumée plusieurs méthodes permettant de résoudre les problèmes d'estimation d'état. Nous avons décrit l'approche bayésienne et expliqué le principe de filtre de Kalman, ainsi que du filtre de Kalman étendu et du filtre particulière. Nous nous sommes ensuite intéressés aux méthodes ensemblistes pour l'estimation d'état, en nous focalisant sur une méthode simple basée sur la notion de satisfaction de contraintes.

Nous proposerons dans le chapitre 3 une extension crédibiliste des approches à erreurs bornées. Cette extension sera basée sur une représentation crédibiliste

des erreurs associées aux différentes variables. Auparavant, nous proposons dans le prochain chapitre une introduction au problème de localisation routière.

---

# *Localisation routière d'un véhicule*

---

## 2.1 Introduction

L'évolution récente du monde de l'automobile exige de plus en plus l'utilisation de systèmes d'aide à la conduite. Ces systèmes ont pour rôle d'assister l'automobiliste dans sa tâche de conduite. Ils utilisent différents types de capteurs pour fournir au conducteur ou au véhicule des informations sur son environnement afin de répondre aux nouveaux défis de sécurité et de confort.

Une localisation fiable et précise est une fonctionnalité essentielle pour tout véhicule autonome afin de pouvoir le commander le long d'un chemin planifié. Le terme *localisation* renvoie à la connaissance de la pose du véhicule dans un système de référence explicite. La pose est définie par le couple position et attitude du véhicule. La position est décrite par un ensemble de coordonnées géographiques ou cartésiennes, alors que l'attitude désigne les différents angles par rapport à un référentiel ou par rapport à des amers.

Un système de localisation typiquement installé dans un véhicule est basé sur différents types de capteurs. Dans ce travail de thèse, nous utilisons trois systèmes de mesure : un système ABS (*Anti-lock Braking System*) qui dispose des informations odométriques (déplacement et rotation élémentaire), un système ESP (*Electronic Stability Program*) qui dispose d'un gyromètre fournissant la vitesse de lacet (rotation autour d'un axe vertical) et un récepteur GPS (*Global Positioning System*) qui offre une estimation de la position de véhicule dans un référentiel global. Les informations fournies par ces capteurs sont combinées en utilisant une méthode de fusion de données afin d'offrir une estimation fiable de la position du véhicule. Pour pouvoir associer cette position à une route, nous utilisons un système de localisation couplé à la cartographie. Ce système utilise une base de données cartographique (GIS : *Geographic Information System*) pour déterminer la route empruntée par le véhicule et calculer une estimation de sa position sur cette route.

Ce chapitre est divisé en deux parties principales. Nous commencerons d'abord par une description détaillée d'un système de localisation basé sur l'intégration du GPS avec des capteurs d'inertie, tout en décrivant les capteurs utilisés durant ce travail de thèse. Puis nous passerons à la présentation du système de localisation couplé à la cartographie.

## 2.2 Système de localisation routière

Un système de localisation routière est basé sur l'utilisation de différents types de capteurs comme les odomètres, les gyromètres, les récepteurs GPS, etc. Selon leurs utilisations, ces capteurs peuvent être classés en deux catégories. Les capteurs de la première catégorie sont connus sous le nom de capteurs *extéroceptifs*. Ils fournissent des informations sur l'environnement du véhicule (distance par rapport à un amer, angles, etc.). Les capteurs de la seconde catégorie, appelés capteurs *proprioceptifs*, donnent des informations sur le véhicule lui-même (distance parcourue par les roues, angle de volant, etc.).

En se basant sur ces deux catégories, on peut distinguer trois types de localisation : *absolue*, à *l'estime* et *dynamique*.

La localisation *absolue* consiste à déterminer la position du véhicule dans un repère global lié à l'environnement. Ceci nécessite l'utilisation de capteurs extéroceptifs. Parmi les capteurs les plus utilisés dans ce type de localisation, on peut citer : les *télémetres à ultrasons* qui sont utilisés pour la localisation des robots et les *compas* qui fournissent des angles par rapport au nord magnétique et à la gravité terrestre. On peut citer aussi les systèmes optiques (caméras, lasers, etc.) et les systèmes hyperfréquences (radars, GPS, etc.). Notons que le GPS est le système le plus utilisé pour la localisation absolue des véhicules terrestres.

Dans la localisation à *l'estime*, appelée aussi *localisation relative*, on combine les mesures des capteurs proprioceptifs afin de calculer la pose du véhicule au cours du temps, en supposant connue la configuration initiale. Pour cette raison, on utilise des capteurs de type proprioceptif tels que les codeurs optiques d'odométrie disposés sur les roues du véhicule, les radars à effet Doppler et les gyromètres.

La localisation à *l'estime* permet de fournir des estimations de la position du véhicule à des fréquences très élevées mais elle nécessite toujours une initialisation. A contrario, la localisation *absolue* ne nécessite aucune initialisation, mais elle souffre de problèmes de disponibilité et de latence. D'autre part, elle donne des résultats à des fréquences souvent insuffisantes pour certaines applications. Pour résoudre ces problèmes, la localisation *dynamique* combine les deux types de capteurs afin d'offrir des résultats plus fiables au sens de la disponibilité et de la précision. Cette combinaison est faite en utilisant une méthode de fusion de données.

Nous nous intéressons dans ce travail de thèse à la localisation *dynamique* et nous utilisons trois types de capteurs : ABS, ESP et GPS. Dans la suite de cette section, nous décrivons ces différents types de capteurs. Nous présenterons ensuite l'architecture générale de notre système de localisation dynamique.

### 2.2.1 Capteurs utilisés

Afin de mettre en évidence le fonctionnement du système de localisation de véhicule routière, nous commençons par une description des capteurs utilisés dans ce travail.

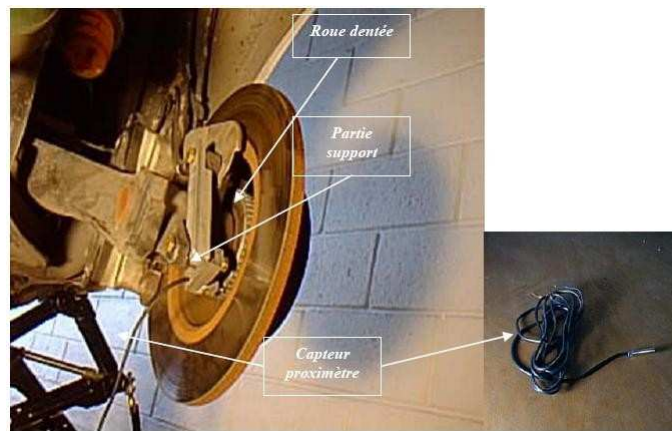


Figure 2.1 – Composantes d'un capteur odométrique.

### 2.2.1.1 L'odomètre

Un odomètre est un appareil mécanique ou électronique permettant de mesurer la distance parcourue par un mobile. Il est très utilisé en robotique mobile du fait de sa mise en œuvre facile et surtout de son coût raisonnable. Dans un véhicule automobile on peut utiliser le capteur ABS<sup>1</sup> en tant qu'odomètre dans le but d'éviter l'installation d'un nouveau capteur.

Le système ABS est composé de roues dentées et de capteurs proxymètres ou solénoïdes (voir la Figure 2.1, extraite de [36]). La voiture est équipée de roues dentées, fixées derrière les disques de freins. Le capteur placé à proximité de chaque roue dentée délivre un signal numérique de forme carrée, avec une fréquence proportionnelle à la rotation de la roue. En utilisant un compteur à  $n$  bits, on obtient le nombre de tops des signaux. Ainsi, on peut calculer la distance parcourue par chaque roue en utilisant son périmètre. Notons que la précision de cette distance calculée dépend du nombre de dents des roues.

### 2.2.1.2 Le gyromètre

Un gyromètre permet de mesurer la vitesse de rotation angulaire. Il constitue un complément idéal de l'odomètre. Les gyromètres peuvent être fabriqués sur la base de plusieurs principes technologiques. Les premiers utilisaient des composants mécaniques vibrants. Ensuite, ils ont été nettement améliorés en utilisant des composants optiques. Le gyromètre à fibre optique est basé sur l'utilisation d'une diode laser qui émet deux faisceaux lumineux, chacun étant introduit dans une fibre optique. Ces deux fibres optiques sont enroulées sur elles-mêmes. Lorsque le gyromètre est en rotation, une différence entre les temps de parcours de deux faisceaux est mesurée et fournit une estimation de la vitesse de rotation.

---

<sup>1</sup>L'ABS est un dispositif d'assistance à la conduite. On peut le définir comme un système de régulation qui module automatiquement la pression du circuit de freinage des roues d'un véhicule en fonction de l'adhérence rencontrée par les roues.

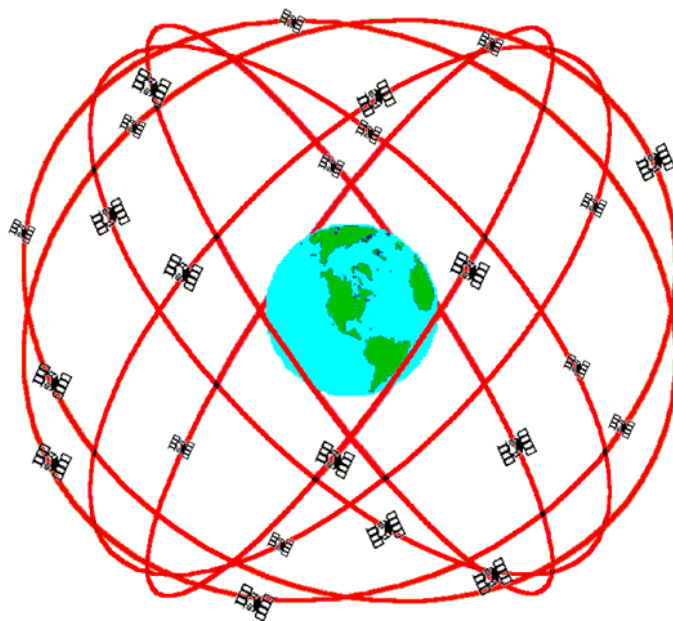


Figure 2.2 – Constellation des satellites du système GPS.

### 2.2.1.3 Le système GPS

Le GPS (Global Positioning System), qu'on traduit en français par «système de positionnement mondial» ou encore «Géo-Positionnement par Satellite», est le principal système mondial de positionnement par satellites. Ce système est issu d'un projet de recherche de l'armée Américaine lancé dans les années 1960. En 1978, les premiers satellites GPS sont envoyés dans l'espace. La seconde série de satellites est lancée en 1989 afin de constituer une flotte suffisante pour rendre le système GPS opérationnel en permanence sur Terre. Au début, la précision du GPS était limitée à une centaine de mètres pour un usage civil et à 10 m pour l'usage militaire. Jusqu'à 2000, les récepteurs GPS civils étaient soumis à une dégradation de performance pour des raisons de sécurité militaire. Cette dégradation a été supprimée ultérieurement par le gouvernement américain, afin d'améliorer la compétitivité du système GPS face aux constellations de satellites concurrentes comme Galileo en Europe. Les États-Unis continuent le développement du système GPS par le remplacement et l'ajout de satellites ainsi que par la mise à disposition de signaux GPS complémentaires, plus précis et demandant moins de puissance aux appareils de réception. Un accord d'interopérabilité a également été confirmé entre les systèmes GPS et Galileo afin que les deux systèmes puissent utiliser les mêmes fréquences et assurer une compatibilité entre eux.

**Description du système GPS.** Le système GPS a pour rôle de calculer la position tridimensionnelle <sup>2</sup> d'un utilisateur d'une manière continue et instantanée. Si l'utilisateur se déplace, sa vitesse et la direction de son mouvement peuvent être également déterminées. Ce système est composé de trois composants principaux :

---

<sup>2</sup>Latitude, longitude et altitude.

- Les satellites en orbite autour de la Terre : le système GPS comprend au moins 24 satellites orbitant à 20200 km d'altitude (soit trois fois le rayon de la Terre). Ces satellites sont répartis sur six plans orbitaux (quatre satellites par plan) dont l'inclinaison est de  $55^\circ$  par rapport à l'équateur terrestre (voir la Figure 2.2, issue de [101]). Ils voyagent à une vitesse de 11600 km par heure. Cette altitude permet aux utilisateurs situés à plusieurs centaines de kilomètres de capter simultanément les signaux des mêmes satellites. Généralement quatre satellites au minimum sont toujours disponibles 24 heures par jour, indépendamment des conditions météorologiques. Les satellites disponibles émettent en permanence deux ondes ( $L_1$  et  $L_2$ ) à deux fréquences de 1575,42 MHz et 1227,60 MHz. Ces deux ondes sont constituées de données numériques qui contiennent en particulier des éphémérides permettant le calcul de la position des satellites, ainsi que des informations sur leurs horloges internes.
- Les stations de poursuite terrestre qui ont pour rôle principale de déterminer la trajectoire des satellites GPS. Elles sont équipées de récepteurs GPS stationnés sur des points géodésiques dont les coordonnées sont connues. En utilisant les observations recueillies, les positions des satellites sont calculées. Ces informations sont communiquées aux satellites qui les sauvegardent à leur tour dans les mémoires de leur ordinateur pour être transmises prochainement aux utilisateurs via les signaux émis par les satellites eux-mêmes.
- Les récepteurs des utilisateurs qui sont des composants passifs. Ils reçoivent seulement de signaux transmis par les satellites. Leur rôle est de décoder ses signaux afin de calculer la position tridimensionnelle de l'utilisateur. Mentionnons qu'il n'y a pas de frais inhérent à l'utilisation des signaux GPS.

**Observation GPS.** Les trois types d'observations émises par les satellites sont :

- La mesure de *pseudo-distance* : c'est une mesure du temps de propagation nécessaire pour qu'un signal transmis par un satellite atteigne le récepteur sur Terre. Ce temps est calculé avec une très grande précision par les oscillateurs des satellites qui fournissent une précision de  $10^{-14}$  secondes. Afin qu'un récepteur puisse reconnaître le satellite observé, chaque satellite transmet un code qui lui est propre. Une réplique de la séquence du code est générée par le récepteur en même temps qu'un satellite. Le décalage que doit subir la réplique afin de coïncider avec le code reçu correspond au temps de propagation du signal. Ce temps est multiplié par la vitesse de lumière afin de calculer la distance entre le satellite et le récepteur. La distance calculée est cependant faussée par deux sources d'erreurs. La première erreur est due à la désynchronisation entre les horloges des satellites et du récepteur. La deuxième source d'erreur est due à la variation de la vitesse de propagation du signal émis par le satellite causé par le passage de la couche l'ionosphérique<sup>3</sup> de l'atmosphère terrestre.
- La mesure de *phase* de l'onde porteuse : cette mesure est plus difficile à mettre en œuvre et ne peut pas être exploitée par les récepteurs de bas de gamme. Elle

---

<sup>3</sup>Partie haute de l'atmosphère terrestre.

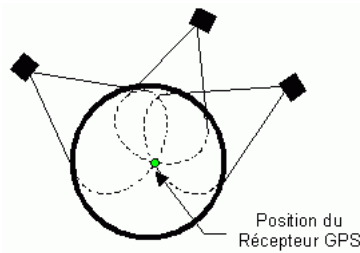


Figure 2.3 – Principe de positionnement tridimensionnel à partir de trois satellites.

consiste à calculer la différence de phase entre l'onde reçue par le récepteur et une onde générée par lui. Cette différence de phase peut être convertie en mètre puisqu'on connaît la longueur de l'onde porteuse.

- La mesure de *fréquence Doppler* : c'est la différence entre la fréquence reçue et la fréquence nominale de transmission causée par le mouvement relatif entre le satellite et le récepteur. Cette mesure est surtout utilisée pour déterminer la vitesse instantanée de récepteurs mobiles et pour détecter et corriger les sauts de cycle potentiellement présents dans les mesures de phase.

**Le positionnement par GPS.** La position fournie par le système GPS est celle de l'antenne du récepteur. Le positionnement par GPS repose sur le principe de la *trilatération spatiale* : pour déterminer la position d'un récepteur dans l'espace tridimensionnel, nous devons connaître sa distance à un certain nombre de satellites. En théorie, comme la position du récepteur est définie par trois variables, trois satellites suffisent pour déterminer cette position, comme le montre la Figure 2.3, extraite de [67]. L'éphéméride des satellites étant disponible à tout instant, on connaît donc précisément la position des satellites. Il ne reste alors plus qu'à déterminer les trois distances séparant le récepteur de chacun des satellites utilisés. Ainsi, on est capable de définir trois sphères, chacune centrée sur un satellite et de rayon égale à sa distance au récepteur. L'intersection de ces sphères est formée de deux points distincts, dont un seul est cohérent avec la surface de la Terre. Dans la pratique, les mesures de distance obtenues par le récepteur GPS sont ainsi affectées par plusieurs types d'erreur. Une méthode de détermination de ces erreurs consiste à les considérer comme un quatrième paramètre, noté  $\Delta_T$ , à estimer. On a alors besoin d'un quatrième satellite. Après le calcul de  $\Delta_T$ , le récepteur sera capable de régler son horloge et le résultat du système GPS sera plus fiable. Notons que les coordonnées tridimensionnelles obtenues sont exprimées dans le système de coordonnées utilisé pour le calcul des positions des satellites : le WGS84 (World Geodetic System de 1984).

Géométriquement parlant, si les intersections des sphères se font à angles trop aigus ou trop obtus, la qualité du positionnement sera compromise. En d'autres termes, il ne suffit pas de mesurer des distances à un minimum de trois satellites, mais aussi, il faut que la distribution des satellites par rapport au site d'observation soit favorable. Comme l'illustre la Figure 2.4, issue de [67], la situation où les satellites sont bien répartis dans le ciel (bonne géométrie) est préférable à celle où les satellites se retrouvent tous dans une même portion du ciel (faible géométrie).



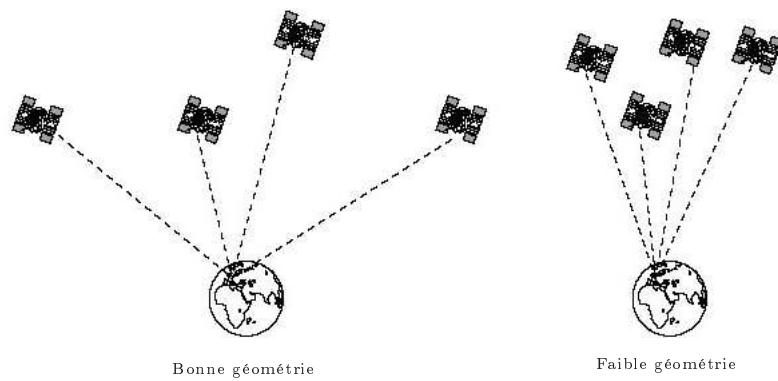


Figure 2.4 – Exemples d’une bonne et faible géométries de la repartition des satellites utilisés.

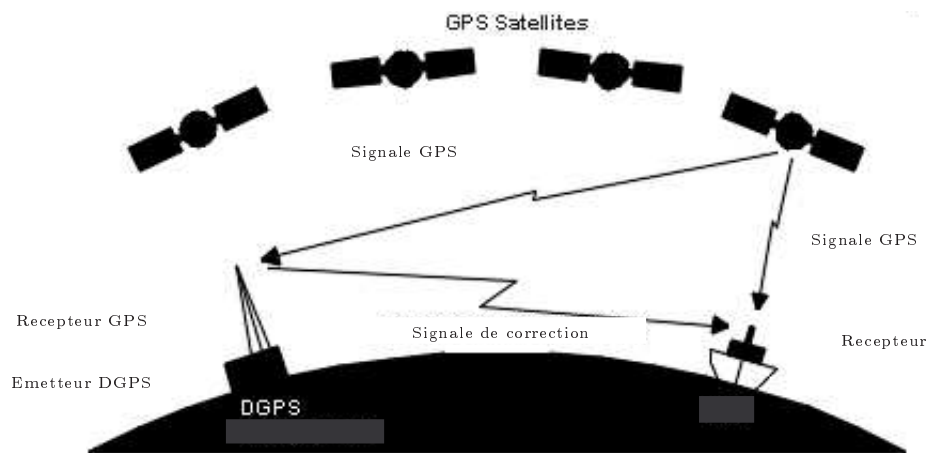


Figure 2.5 – Le système de GPS différentiel.

La constellation des satellites GPS a été conçue de manière à répondre à ce critère. Cependant, si des obstructions au-dessus du site d’observation ne permettent pas la réception des signaux de satellites dans certaines directions du ciel, la géométrie de la trilatération peut causer des problèmes. La dégradation de précision géométrique GDOP (*Geometrical Dilution Of Precision*) est un paramètre qui permet de quantifier l’impact de la configuration des satellites. Il indique l’effet de celle-ci sur la précision du positionnement instantané [29].

**Le système DGPS.** La position fournie par un seul récepteur GPS est appelée *position absolue*. La précision théorique d’une telle position est de l’ordre de 10 m. Un moyen efficace permettant de réduire l’effet des erreurs inhérentes au GPS est le *positionnement relatif*. Le calcul de ce type de positionnement nécessite l’utilisation d’une version améliorée du système GPS appelée DGPS (GPS Différentiel). Son

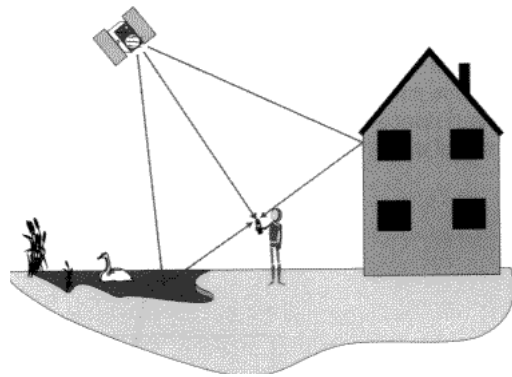


Figure 2.6 – Les trajets multiples de signal GPS.

principe est basé sur l'idée que deux positions mesurées à un instant donné par deux récepteurs GPS situés à une centaine de kilomètres doivent présenter les mêmes erreurs. Si on effectue régulièrement une mesure d'un point dont on connaît la position exacte, on peut donc calculer toutes les erreurs du système GPS et les transmettre à tous les utilisateurs dans une rayon d'une centaine de kilomètres (voir la Figure 2.5, issue de [78]). Ces erreurs deviennent des termes correctifs (encore appelés corrections différentielles) appliqués aux mesures de distance recueillies par le récepteur mobile. Ainsi, les erreurs d'observation communes de la station de référence et du récepteur mobile sont éliminées. Les erreurs sont d'autant plus identiques que les deux récepteurs sont plus rapprochés.

**Caractéristiques de système GPS.** Le système GPS a pour avantage de toujours fournir une position absolue qui ne dépend pas des conditions initiales du mobile ou du véhicule terrestre. D'autre part, la précision de cette position ne se dégrade pas en fonction du temps. L'information est disponible 7 jours sur 7, 24 heures sur 24, indépendamment des conditions climatiques. Les prix des récepteurs GPS sont acceptables et en constante diminution.

Le principal point faible du GPS réside dans l'accessibilité aux données, qui peut être limitée. Pour les applications à l'automobile, les conditions de visibilité sont souvent dégradées en milieu urbain, à causes des bâtiments, des tunnels ou même parfois du feuillage dense qui peuvent bloquer la réception du signal et entraîner par la suite un arrêt temporaire du système. De plus, le système de navigation GPS ne fonctionne pas dans les environnements intérieurs, sous l'eau, sous terre et dans les tunnels. Il est à noter que la position fournie par le GPS est toujours faussée par plusieurs sources d'erreurs, parmi lesquelles : l'erreur due à la variation de vitesse lors du passage par les couches ionosphérique et la troposphérique de l'atmosphère terrestre et l'erreur causée par les trajet multiples. En effet, le signal émis par un satellite peut être bloqué ou réfléchi par des objets tels que les bâtiments ou les grandes surfaces de roche avant qu'il atteigne le récepteur. Ceci augmente le trajet parcouru par le signal comme le montre la Figure 2.6 [67], causant par conséquent une surévaluation du temps de vol et générant des erreurs sur la position calculée.

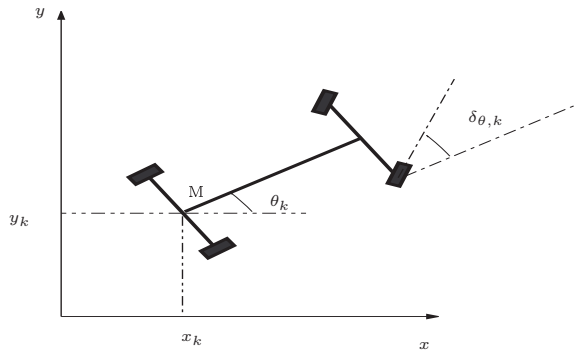


Figure 2.7 – Modèle du véhicule utilisé.

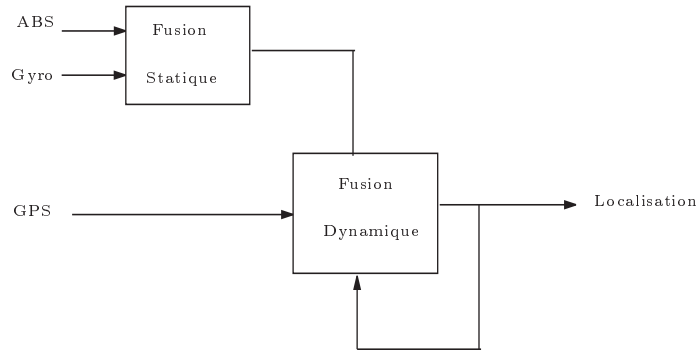


Figure 2.8 – Structure du système de fusion de données utilisé dans le problème de localisation du véhicule.

## 2.2.2 Structure du système de localisation routière

La localisation dynamique routière d'un véhicule est un problème commun à plusieurs applications. Elle consiste à déterminer, à chaque instant  $k$ , une estimation fiable de la position du véhicule à l'aide des mesures fournies par les capteurs utilisés. Comme nous l'avons mentionné auparavant, deux types de capteurs sont généralement utilisés dans ce type de problème : les capteurs d'inertie comme l'odomètre et le gyromètre, et les capteurs absolus comme le GPS, les caméras, etc. Le problème majeur de la localisation est d'exploiter la complémentarité et la redondance entre ces capteurs pour atteindre des niveaux élevés de précision, de disponibilité et d'intégrité.

On présente sur la Figure 2.7 le modèle général du véhicule. Dans le problème de localisation, on désire localiser la position du point  $M$  décrit par ses coordonnées cartésiennes  $(x_k, y_k)$  et par le cap  $\theta_k$  du véhicule. Le vecteur d'état représentant la position du véhicule est noté  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, \theta_k)^T$ .

La Figure 2.8 illustre la structure du système de localisation utilisé dans ce travail de thèse [36]. Ce système peut être divisé en deux parties principales correspondant à la *fusion statique* et à la *fusion dynamique*.

Les rotations élémentaires des deux roues arrières, entre deux instants consécutifs, sont intégrées par les compteurs pour calculer le déplacement et la

rotation élémentaires du point  $M$  :

$$\begin{cases} \delta_{s,k} &= \frac{\delta_{RR} + \delta_{RL}}{2} \\ \delta_{\theta,k} &= \frac{\delta_{RR} - \delta_{RL}}{e}, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\delta_{s,k}$  et  $\delta_{\theta,k}$  représentent le déplacement et la rotation élémentaires,  $\delta_{RR}$  et  $\delta_{RL}$  sont les déplacements élémentaires des roues droites et gauches et  $e$  la distance entre les axes appelés *voies*. L'utilisation de ces informations pour fournir une estimation de la position de véhicule est appelée « fusion statique ».

Les résultats de la fusion statique sont ensuite combinés à la mesure GPS afin de localiser le véhicule via une étape de fusion dynamique qui a pour sortie la pose du véhicule, représentée par le vecteur d'état  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, \theta_k)$ . L'estimation de l'état  $\mathbf{x}_k$  utilise le modèle d'évolution suivant [18] :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta_{S,k} \cos(\theta_k + \frac{\delta_{\theta,k}}{2}) \\ y_{k+1} = y_k + \delta_{S,k} \sin(\theta_k + \frac{\delta_{\theta,k}}{2}) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \delta_{\theta,k}, \end{cases} \quad (2.2)$$

et le modèle d'observation suivant :

$$\begin{cases} x_{k,GPS} = x_k \\ y_{k,GPS} = y_k, \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{z}_k = (x_{k,GPS}, y_{k,GPS})$  est la position fournie par le GPS à l'instant  $k$ , après conversion de la longitude et la latitude dans un repère cartésien.

### 2.3 Système de localisation couplé à la cartographie

Le système de localisation routière couplé à la cartographie utilise une base de données routières pour calculer la position du véhicule sur une route. Cette technique est connue sous le nom de *Map Matching* (MM). Les méthodes de MM reposent sur le fait que le véhicule se trouve toujours sur une route répertoriée dans la base de données cartographiques. Ce principe élimine la situation hors route du véhicule (véhicule en stationnement, garage, etc.). La Figure 2.15 illustre un exemple de problème de MM où  $P_k$  est l'estimation ponctuelle de la position du véhicule à l'instant  $k$  fournie par un système de localisation routière et  $Q_k$  est la vraie position du véhicule. Les techniques de MM visent à identifier la route suivie par le véhicule (route AB) et à calculer une estimation précise de sa position en prenant en considération les erreurs des capteurs ainsi que celles de la carte routière utilisée.

L'idée de base des méthodes de MM consiste à calculer, à partir de l'estimation de la position de véhicule, une zone de confiance (elliptique, circulaire, etc.) à partir de laquelle un ensemble de routes candidates (RCs) est sélectionné. La bonne route est choisie en utilisant plusieurs critères tels que la proximité, la direction, etc. Enfin, une estimation de la position du véhicule sur cette route est calculée. Le choix de la bonne route est effectué en se basant sur des formalismes tels que la logique floue, la théorie de probabilité, ou la théorie de l'évidence.

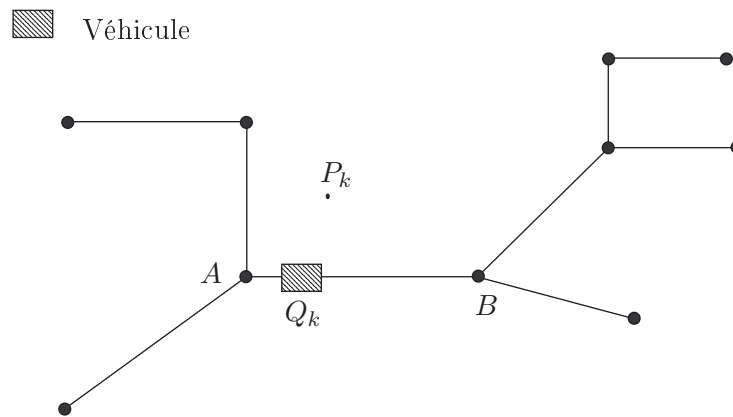


Figure 2.9 – Exemple du problème de MM. La position estimée du véhicule est  $P_k$  tandis que la vraie position est  $Q_k$ .  $AB$  est la route suivie par le véhicule.

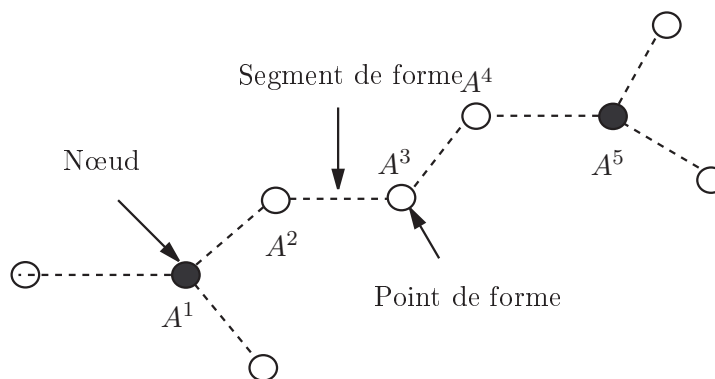


Figure 2.10 – Représentation *planaire* d'une route  $r = (A^1, A^2, A^3, A^4, A^5)$ . Les cercles blancs représentent les points de forme ( $A^2, A^3, A^4$ ) et les noirs représentent les nœuds ( $A^1, A^5$ ).

Dans cette section, nous commencerons par une description détaillée de la base de données routières, puis nous évoquerons les différentes sources d'erreurs avant de présenter les principaux types d'erreurs à prendre en compte lors du traitement d'un problème de MM. Enfin, nous ferons un rappel sur les méthodes de MM existantes et sur leurs limitations.

### 2.3.1 Base de données cartographiques

La base de données cartographiques est un composant important pour les applications de localisation routière ou d'assistance à la conduite. Il s'agit d'une représentation graphique des informations spatiales importantes qu'il est utile de fournir au conducteur pour lui permettre d'appréhender son environnement. Les cartes routière récentes sont le résultat d'études complexes. Dans le paragraphe suivant nous présenterons les différents composants d'une carte routière numérique.

### 2.3.1.1 Structure d'une base de données cartographiques

Le contenu d'une base de données routière peut être divisé en deux parties principales : la représentation numérique des routes, et les *attributs*. Les *attributs* sont les informations spatiales essentielles relatives à la route comme sa largeur, la vitesse maximale autorisée, les intersections etc. Les éléments classiques d'une base de données routière sont répertoriés dans le tableau 2.1 [44].

Une des représentations numériques des routes est la représentation planaire [78]. Dans cette représentation, chaque route  $r$  est représentée par un arc fini de  $\mathbb{R}^2$ . Chaque arc est un ensemble des segments linéaires connectés de  $\mathbb{R}^2$ , il est caractérisé par une séquence finie de points réels  $r = (A^1, A^2, \dots, A^n)$  où  $A^i \in \mathbb{R}^2$ , comme illustré sur la Figure 2.10. Les points  $A^1$  et  $A^n$  désignent les extrémités de la route  $r$ . Ces points sont considérés comme des *nœuds* tandis que  $(A^2, \dots, A^{n-1})$  sont considérés comme des *points de forme* où  $A^i$  est caractérisé par ses coordonnées cartésiennes.

Tableau 2.1 – Attributs associés aux routes dans une base de données routière.

Champ	Explication
Nom	Nom de la route
ID	identifiant unique pour chaque route : indispensable pour la navigation et le MM
Vitesse limite	Vitesse maximale autorisée sur la route
Nb voies	Information sur le sens de parcours. Ce champ indique si la route est à sens unique ou à double sens. Il indique aussi si la route est réservée aux piétons ou aux voitures
Nb des points de forme	Décrivent la géométrie de la route
Points de forme	Le vecteur des points de forme
Angles	Les angles d'orientation des segments définis par les points de forme
Largeur	La largeur de la route
Nb Origine	Nombre des segments connectés à l'origine de la route
Vecteur Origine	Vecteur contenant les ID de tous les segments liés à l'origine de la route
Nb fin	Nombre des segments connectés à la fin de la route
Vecteur fin	Vecteur contenant les ID de tous les segments liés à la fin de la route

### 2.3.1.2 Sources d'erreurs

Lors de la création d'une carte routière, plusieurs facteurs peuvent participer à l'introduction d'erreurs dans la base de données. Nous pouvons citer par exemple :

- Le choix de l'échelle : c'est la première étape de la création d'une carte. Elle définit le rapport entre la distance sur la carte et la distance réelle. Elle est souvent notée  $\frac{1}{M}$  (1 unité de la carte correspond à  $M$  unités de la route). Notons que plus l'échelle est grande, plus le volume d'informations associées à la carte est important. Cependant, la précision des points caractérisant les routes est inversement proportionnelle à l'échelle, c'est-à-dire, plus l'échelle est grande moins ces points sont précis.
- Le choix d'une technique de projection : cette technique permet de représenter des surfaces non plan sur une carte plan. Il existe plusieurs méthodes de projection, la plus utilisée est l'*Universal Transverse Mercator (UTM)* [78]. Le changement de technique de projection implique simultanément le changement de forme et de surface de la carte. Chacun de ces facteurs peut introduire des erreurs dans la représentation des nœuds et des segments de la carte.
- Le choix du système de coordonnées : afin de bien représenter une carte, il faut choisir un système de coordonnées dans lequel les routes sont numérisées. Or, la plupart des récepteurs GPS utilisent le système WGS84 tandis que les cartes utilisent des systèmes locaux ; la transformation entre ce deux systèmes peut induire une erreur sur l'estimation fournie par le système de localisation routière.

### 2.3.1.3 Principaux types d'erreur

La qualité de la carte dépend de la précision des points décrivant la ligne centrale de la route et de la fiabilité des attributs associés. Généralement, en utilisant une carte routière numérique, deux types d'erreurs doivent être considérés :

- les erreurs géométriques, qui correspondent à l'imprécision des nœuds représentant les routes ;
- les erreurs topologiques, due à l'absence de fiabilité des attributs associés aux routes, par exemple : mauvaise représentation des intersections, des largeurs de routes, etc.

Les erreurs géométriques et topologiques peuvent induire des erreurs significatives dans l'estimation fournie par les méthodes de MM. Notons que les erreurs géométriques peuvent être corrigées par des algorithmes numériques tandis que les erreurs topologiques ne sont pas corrigables [78].

## 2.3.2 Méthodes de Map Matching

Les méthodes de MM existantes peuvent être classées en trois grandes catégories : les méthodes géométriques, les méthodes topologiques et les méthodes avancées. Dans la suite de ce paragraphe, nous présentons chacune de ces catégories en décrivant leurs limites.

### 2.3.2.1 Méthodes géométriques

Ces méthodes sont les plus simples et les plus faciles à mettre en œuvre. Elles sont basées sur l'utilisation des informations géométriques des routes fournies par la carte sans considérer la façon dont les routes sont reliées (les informations topologiques).

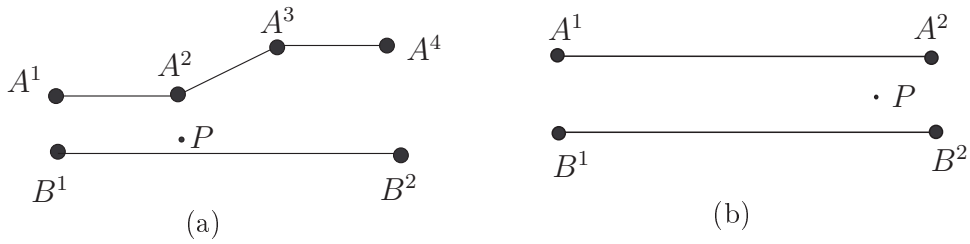


Figure 2.11 – Exemples de problèmes de la méthode de *point à point*.  $P$  est la position estimée du véhicule. Dans (a), la méthode *point à point* associe  $P$  à la route  $(A^1, A^2, A^3)$  tandis que la vraie route est  $(B^1, B^2)$ . Dans (b)  $P$  est à égale distance de  $A^2$  et  $B^2$ .

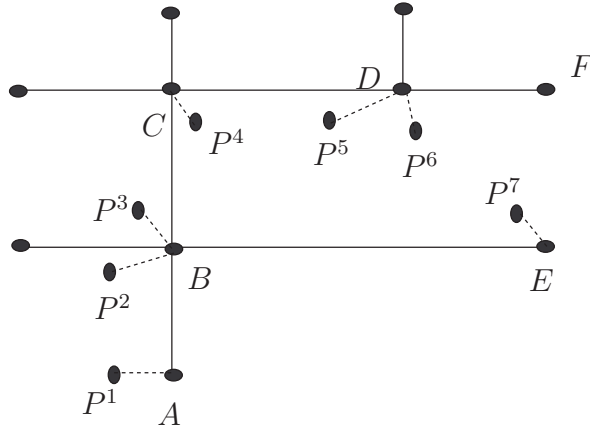


Figure 2.12 – Illustration de la méthode *point à point*.

Une méthode connue dans cette catégorie est la méthode *point à point*. Elle est basée sur un critère de proximité. Pour quantifier ce critère, on calcule la distance (le plus souvent euclidienne) entre la position estimée du véhicule et les nœuds décrivant les routes. On associe alors la position du véhicule au nœud le plus proche [12]. L'implémentation d'une telle méthode est très simple mais elle est très sensible à la façon dont la carte est numérisée. En effet, les routes qui sont représentées par un grand nombre de nœuds ont une chance plus grande d'être sélectionnées, comme le montre la Figure 2.11-a. L'utilisation de cette méthode peut aussi produire des problèmes en milieu urbain. On peut tomber, par exemple, sur des nœuds à égales distances de la position du véhicule comme illustré sur la Figure 2.11-b. De plus, le nœud le plus proche n'appartient pas toujours à la route suivie par le véhicule, comme c'est le cas pour le point  $P^7$  sur la Figure 2.12. La méthode *point à point* estime que le véhicule se déplace sur  $(AB, BC, CD, BE)$  alors qu'il n'y a pas de lien entre les routes  $CD$  et  $BE$  et que le vrai trajet est  $(AB, BC, CD, DF)$ .

Une autre méthode géométrique est la *point à arc*. Dans cette méthode, les distances entre la position estimée du véhicule,  $P^t$ , et les routes candidates sont calculées. La route la plus proche est sélectionnée. Chaque arc étant composé d'un ensemble de segments linéaires, les distances sont calculées entre  $P^t$  et les segments linéaires. Enfin, une projection de  $P^t$  sur cette route est calculée. Même si les résultats de cette méthode sont meilleurs que ceux de la méthode *point à point*,



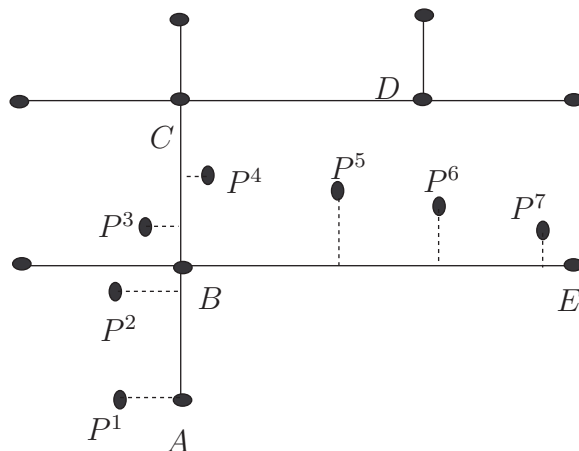


Figure 2.13 – Exemple de problème rencontré dans les méthodes *point à arc*.

elle reste instable surtout en milieu urbain où la densité de routes est importante. Dans ce cas, il est possible de rencontrer le cas où plusieurs segments sont à égale distance de  $P^t$ . En plus, comme le montre la Figure 2.13, la route la plus proche n'est pas toujours la route réellement suivie par le véhicule. Dans cette figure, la méthode *point à arc* choisit les routes  $(AB, BC, BE)$  tandis que le véhicule se déplace sur  $(AB, BC, CD, DF)$ .

Une troisième méthode de cette catégorie est la méthode *arc à arc*, qui est la plus robuste des méthodes de type géométrique. Elle consiste à sélectionner un ensemble de routes candidates (RCs) en utilisant la méthode *point à point*. Les distances entre la trajectoire du véhicule et les RCs sont ensuite calculées. La route ayant la distance minimale est supposée être celle suivie par le véhicule. Cette méthode est complexe à implémenter et, comme elle dépend de la distance *point à point*, elle peut donner également des résultats aberrants en milieu urbain.

### 2.3.2.2 Méthodes topologiques

La topologie de la carte routière représente les relations entre ses différents éléments. Elle décrit la façon dont les routes sont connectées et la forme de chaque route (orientation, largeur, etc.). Les méthodes topologiques combinent ces informations avec les informations géométriques des routes afin d'améliorer les résultats des méthodes de MM. Elles consistent à calculer un poids associé à chaque route en utilisant les informations topologies de la carte ainsi que les informations sur le trajet du véhicule. La route prédite est celle qui a le plus grand poids. Dans la littérature sur le MM, plusieurs méthodes topologiques sont décrites [40, 56, 63]. Dans ce paragraphe, nous présenterons la méthode proposée dans [40], où les auteurs utilisent une méthode de sélection de route, basée sur un algorithme de combinaison multi-critères. Cette méthode est divisée en deux parties : initialisation et matching. La position initiale du véhicule est tout d'abord associée au nœud le plus proche en utilisant la méthode *point à point*. Les routes liées à ce nœud sont sélectionnées comme routes candidates (RCs). Ensuite, la route suivie par le véhicule est recherchée dans l'ensemble des RCs en utilisant un

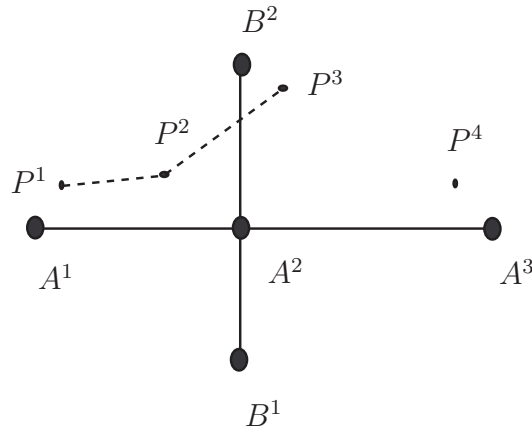


Figure 2.14 – Exemple d’une méthode de type topologique. Les  $P^i$  représentent les positions du véhicule aux instants  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

algorithme de recherche multi-critères. Cet algorithme est basé sur trois critères : proximité, orientation et intersection. À chaque route de l’ensemble de RCs est associé un poids calculé par la formule :

$$W = W_D + W_O + W_I$$

où

- $W$  est le poids final,
- $W_D$  est le poids associé au critère de proximité calculé à partir de la distance de la position du véhicule à la RC,
- $W_O$  est le poids associé au critère d’orientation calculé en se basant sur la différence entre la direction du véhicule et celle de la RC,
- $W_I$  est le poids associé au critère basé sur l’intersection entre le trajet du véhicule et la route.

La méthode sélectionne finalement la route ayant le poids le plus grand. La position prédite du véhicule est la projection orthogonale de la position GPS sur cette route. Cette méthode donne des résultats plus fiables que ceux obtenus par les méthodes géométriques mais elle souffre de plusieurs inconvénients. En effet, la sélection de la route de poids maximal n’est pas toujours fiable comme le montre la Figure 2.14. Dans cette figure, les  $P^i$  représentent les positions du véhicule. Les routes correctes sont  $(A^1, A^2, A^3)$  tandis que la méthode donne comme résultat  $(A^1, A^2, B^2)$ . Pour la position  $P^3$  la route  $(A^2, B^2)$  est affectée du poids le plus grand grâce au critère de proximité puisque  $d(P^3, A^2B^2) < d(P^3, A^2A^3)$  et au critère d’orientation (l’orientation de  $P^2P^3$  est plus proche de  $A^2B^2$  que de  $A^2A^3$ ).

Le problème majeur des méthodes topologiques réside dans le fait qu’elles retiennent à chaque instant une seule RC. Ainsi, si on prend une mauvaise décision à un instant  $k$ , la probabilité que les décisions suivantes soient fausses est grande. D’autre part, la plupart de ces méthodes déterminent l’estimation sur la route actuelle en utilisant une technique de projection orthogonale. Cette technique ne

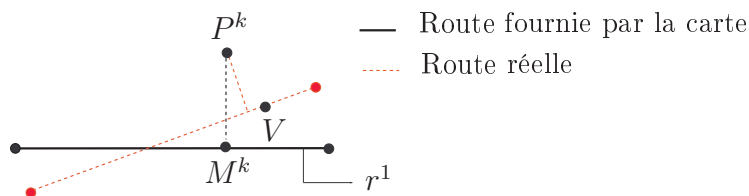


Figure 2.15 – Comparaison entre la vraie position  $V$  du véhicule et la position  $M^k$  fournie par la technique de projection sur une route  $r^1$ .

prend pas en considération l'erreur du système de localisation ni celle de la carte (voir la Figure 2.15). Afin de pallier cet inconvénient, on doit calculer cette estimation en prenant en considération :

- l'incertitude de la carte ;
- l'incertitude de la position du véhicule.

Pour remédier à ces problèmes on peut utiliser des méthodes avancées de MM telles que celles présentées dans le paragraphe suivant.

### 2.3.2.3 Méthodes avancées de MM

Nous désignons par « méthodes avancées » de MM, celles qui utilisent des concepts complexes tels que le filtre de Kalman, la théorie de l'évidence, la logique floue ou les techniques multi-hypothèses [45, 66, 79, 91, 97].

La référence [54] décrit un système de navigation basé sur l'intégration de données fournies par le GPS et les capteurs d'inertie, et sur l'utilisation d'une méthode avancée de MM. Dans cette approche, on utilise une méthode *point à arc* pour identifier la route correcte. Une projection orthogonale de la position GPS sur la route choisie est ensuite calculée, plus un filtre (tel que le FKE) est utilisé afin de minimiser l'erreur d'estimation. Cette méthode donne des résultats acceptables mais elle fonctionne mal dans les milieux urbains puisqu'elle est basée sur la méthode *point à arc*. En effet, si la route choisie est incorrecte, l'entrée du filtre est fautive et les résultats obtenus sont erronés. Cependant, la méthode peut être améliorée en choisissant une méthode plus fiable de sélection de routes.

Dans [104] une méthode de MM basée sur la théorie des fonctions de croyance est proposée. L'entrée de la méthode est une estimation de la position du véhicule obtenue par le FKE. Les RCs sont ensuite sélectionnées en utilisant la méthode de *point à arc*. Puis, une fonction de masse sur l'ensemble des RCs est calculée en se basant sur le critère de proximité. Enfin, la route correcte est choisie en utilisant une règle de décision de la théorie de Dempster-Shafer. Cette méthode présente le même problème que la précédente car elle est également basée sur le critère *point à arc*.

Dans [66], les auteurs présentent une autre méthode de MM basée sur la théorie des fonctions de croyance. Dans cette méthode, une région de confiance variable, construite autour de la position estimée, est utilisée afin de sélectionner un ensemble de RCs. Ensuite, un algorithme de sélection multi-critères est appliqué dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance afin de choisir la route suivie par le véhicule. Cet algorithme est basé sur les critères de proximité et d'orientation. Cependant,

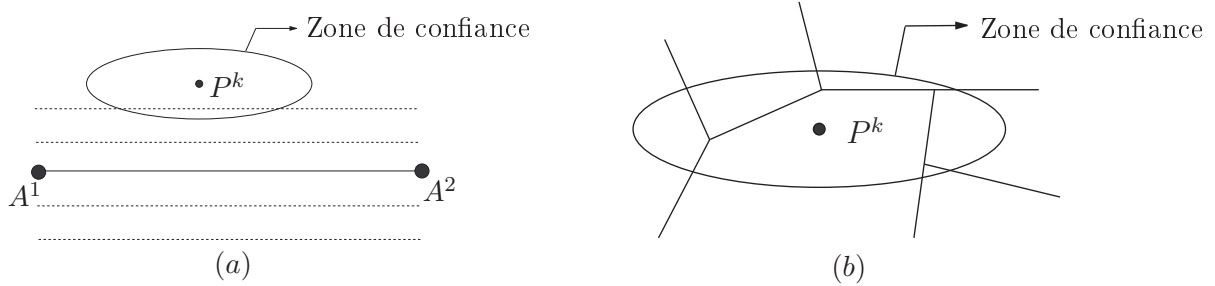


Figure 2.16 – Quelques problèmes des méthodes avancées. (a) Exemple d’une autoroute à 4 voies : la zone de confiance associée à  $P^k$  ne contient pas la ligne centrale de la route ( $A^1, A^2$ ) (b) Exemple d’un milieu urbain où la zone de confiance contient un grand nombre de RCs.

la méthode n’utilise pas la topologie de la carte : elle risque donc de donner de résultats imprécis dans certaines situations telles que celles des routes parallèles. D’autre part, la construction de la région de confiance est basée seulement sur les erreurs associées à la position du véhicule fournie par le système de navigation, et ne considère pas la largeur des routes. Ainsi, dans certaines situations, par exemple sur des routes à quatre voies ou plus, cette méthode paraît incapable de détecter la route suivie par le véhicule, comme le montre la Figure 2.16-a.

La technique des hypothèses multiples a été proposée par Reid en 1979 [84]. Elle a été appliquée dans un premier temps au problème de suivi de cibles. Dans [77], une méthode de MM basée sur cette technique a été proposée. Une zone de validation (confiance) fixe est choisie afin de sélectionner un ensemble de RCs. Ensuite, la distance à chaque RC est calculée. Cette distance est utilisée avec la topologie de la carte afin de créer un ensemble d’hypothèses avec des poids associés. Les hypothèses ayant des poids plus petits qu’un certain seuil sont éliminées, tandis que l’hypothèse qui a le plus grand poids est sélectionnée et la route associée est sélectionnée. Un filtre est finalement appliqué afin d’améliorer les résultats de l’estimation de la position du véhicule sur la route choisie. Cette méthode est très sensible au choix de la zone de confiance. Comme le montrent les Figures 2.16-a et b, si la zone de confiance est grande, elle peut contenir un grand nombre des RCs. Au contraire, si la zone est petite, la méthode sera incapable de détecter la vraie route, comme dans le cas d’une route à quatre voies, puisqu’elle ne considère pas la largeur des routes.

Dans le chapitre 5 nous présenterons une méthode qui apporte une solution aux problèmes évoqués ci-dessus en prenant en compte la largeur de la route et l’erreur associée dans l’algorithme de MM.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit le système de localisation routière utilisé dans le cadre de cette thèse ainsi que les différents capteurs associés. Nous avons également décrit brièvement la structure des bases de données routières et présenté un aperçu des méthodes existantes de map matching en mentionnant leurs limites.

Nous proposerons dans le chapitre suivant une méthode crédibiliste d’estimation

---

d'état d'un système dynamique et nous présenterons les résultats obtenus par cette méthode sur le problème de localisation routière.



---

# *Extension crédibiliste de l'approche à erreurs bornées*

---

## 3.1 Introduction

On ne peut négliger le rôle important joué par les méthodes stochastiques dans la modélisation des incertitudes et dans la résolution des problèmes d'estimation d'état. Cependant, il convient d'être prudent lors de l'utilisation de telles approches qui apparaissent parfois restrictives. En effet, une approche purement probabiliste peut être inadaptée dans certains cas, voire impossible selon le type d'informations disponibles. Ceci a entraîné la recherche d'autres voies de résolution des problèmes dont l'une, présentée dans le chapitre 1, consiste à adopter une stratégie à erreurs bornées, dans laquelle les bornes d'erreurs associées aux différentes variables sont supposées connues. Comme cela a été présenté dans le chapitre 1, les observateurs d'état développés peuvent fournir en sortie une estimation garantie sous la forme d'un ensemble particulier de  $\mathbb{R}^{n_x}$ . Le problème majeur de cette approche est la détermination des bornes d'erreurs associées à chaque variable. En effet, si ces bornes sont sous-estimées, on risque d'obtenir un ensemble vide pour l'état du système et la méthode diverge. Au contraire, si elles sont surestimées, la méthode perd de sa précision. Il est également à noter que les fonctions de croyance sont capables de représenter plusieurs types de connaissance et constituent de ce fait un cadre riche et flexible pour la représentation des informations incertaines.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode crédibiliste d'estimation d'état d'un système dynamique, notée BSE (*Belief State Estimation*) [70, 72, 74]. Cette méthode est une extension de l'AEB basée sur une modélisation crédibiliste des modèles et des incertitudes. L'utilisation d'une telle modélisation présente l'avantage de résoudre le problème évoqué précédemment concernant la détermination des intervalles sur les incertitudes.

Ce chapitre est divisé en deux parties principales. Dans la première partie, nous introduisons les notions et les outils de base de la théorie des fonctions de croyance (TFC). Dans la deuxième partie, nous décrivons en détail notre méthode et nous présenterons les résultats obtenus pour le problème de localisation d'un véhicule.

## 3.2 Rappel sur la TFC

La théorie des fonctions de croyance (TFC) a été proposée par Shafer [90], en 1976, sur la base des travaux de Dempster sur les intervalles de probabilité [25].

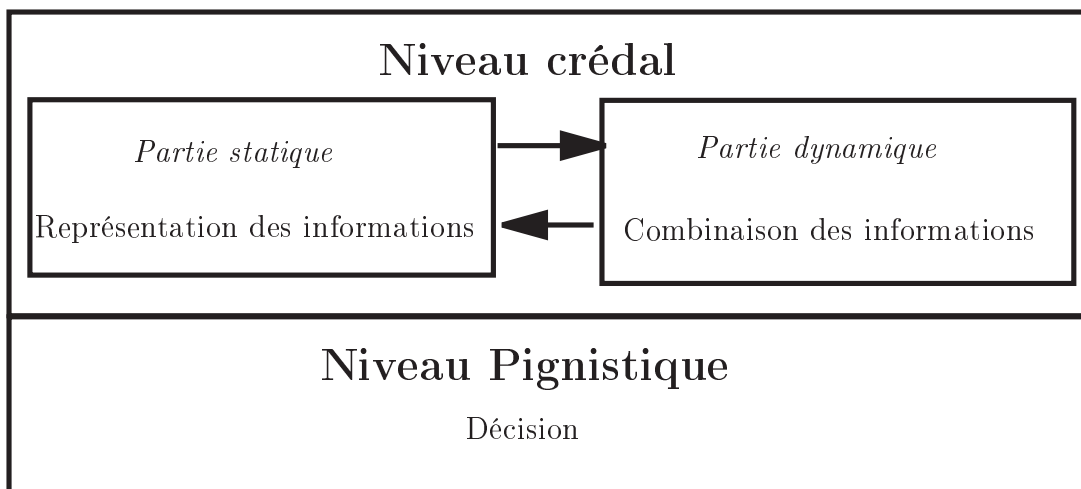


Figure 3.1 – Structure du Modèle des Croyances Transférables.

Ensuite, Smets a décrit dans [95] un cadre théorique pour les fonctions de croyance, indépendant des notions des probabilités. Ce cadre est connu sous le nom de Modèle des Croyances Transférables (TBM : *Transferable Belief Model*).

Le TBM est un modèle non probabiliste de raisonnement incertain qui diffère du modèle probabiliste par sa structure de raisonnement. On peut schématiser le mécanisme de raisonnement du TBM comme l'indique la Figure 3.1. Le niveau crédal est celui auquel les informations disponibles sont représentées et manipulées. La décision est prise au niveau pignistique.

L'utilisation de la TFC a été justifiée et son efficacité a été démontrée dans plusieurs travaux récents relevant de la classification, du traitement d'image, de la représentation des incertitudes, etc. [26, 87]. Dans le cadre de ce travail, la TFC est utilisée pour résoudre le problème d'estimation d'état d'un système dynamique. Ainsi, on utilise les fonctions de croyance pour représenter l'incertitude sur les données fournies par des capteurs (par exemple : récepteur GPS, odomètre, etc.) et pour propager cette incertitude dans les équations d'évolution et d'observation qui décrivent le système étudié.

On présentera par la suite les différentes notions utilisées dans le TBM pour la représentation des informations, étape nécessaire pour la mise en oeuvre de la méthode développée.

### 3.2.1 Représentation des informations dans le TBM

Considérons un système quelconque dont on cherche à déterminer l'état, noté  $\omega$ . Soient  $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n\}$  les différentes valeurs possibles de  $\omega$ . Les  $\{\omega_i\}_{i=1}^n$  sont des valeurs discrètes, connues parfois sous le nom d'*hypothèses*. L'ensemble de toutes les hypothèses possibles de  $\omega$  est connu sous le nom de *cadre de discernement* représenté par  $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n\}$ . On notera par  $2^\Omega$  l'ensemble des parties de  $\Omega$  :

$$2^\Omega = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \dots, \Omega\}.$$



La signification de l'ensemble  $\emptyset$  de  $2^\Omega$  diffère selon les hypothèses concernant le système à étudier. Si on considère le cas d'un monde fermé, c'est-à-dire, si on suppose que le cadre de discernement contient toutes les valeurs possibles de  $\omega$ ,  $\Omega$  désigne alors l'événement certain,  $\emptyset$  représente l'événement impossible et la croyance affectée à  $\emptyset$  doit être nulle. En revanche, si on considère le cas d'un monde ouvert,  $\emptyset$  peut être interprété comme représentant l'ensemble des valeurs possibles de  $\omega$  non répertoriées dans  $\Omega$ .

### 3.2.1.1 Fonction de masse

Dans la littérature sur la théorie des fonctions de croyance, plusieurs formulations des croyances ont été proposées. La formulation la plus utilisée est celle de la fonction de masse de croyance (FM), notée généralement par  $m_S^\Omega$ . Il s'agit d'une fonction :

$$\begin{aligned} m_S^\Omega : 2^\Omega &\longrightarrow [0, 1] \\ B &\longrightarrow m_S^\Omega(B), \end{aligned} \quad (3.1)$$

vérifiant la condition :

$$\sum_{B \subseteq \Omega} m_S^\Omega(B) = 1, \quad (3.2)$$

où  $S$  désigne la source d'information dont est issue  $m_S^\Omega$ . La masse  $m_S^\Omega(B)$  représente la part de croyance allouée par  $S$  à l'hypothèse selon laquelle l'état réel du système est dans  $B$ . Par la suite, on utilisera la notation simplifiée  $m^\Omega$  lorsque la source d'information n'a pas à être précisée.

**Définition 8.** *Toute partie  $B$  de  $\Omega$  dont la masse est non nulle ( $m^\Omega(B) > 0$ ) est appelé élément focal de  $m^\Omega$ .*

Une FM  $m^\Omega$  est dite normale si la masse associée à l'ensemble vide est nulle :  $m^\Omega(\emptyset) = 0$ . Dans le cas contraire  $m^\Omega$  est dite sous-normale. On peut passer d'une FM sous-normale  $m^\Omega$  à une FM normale  $m^{*\Omega}$  en appliquant une opération de *normalisation* définie par :

$$\begin{aligned} m^{*\Omega}(B) &= \frac{m^\Omega(B)}{1 - m^\Omega(\emptyset)}, \quad \forall B \subseteq \Omega, B \neq \emptyset, \\ m^{*\Omega}(\emptyset) &= 0. \end{aligned}$$

**Définition 9.** *Une FM est dite catégorique si un et un seul sous-ensemble  $B \subseteq \Omega$  est un élément focal, c'est-à-dire si  $m^\Omega(B) = 1$  et  $m^\Omega(C) = 0$  pour tout  $C \neq B$ .*

**Définition 10.** *Une FM est dite bayésienne si les éléments focaux sont tous des singletons.*

**Définition 11.** *Une FM est dite consonante si les éléments focaux sont emboîtés.*

**Définition 12.** *Une FM vide est une FM dont l'unique élément focal est le cadre de discernement  $\Omega$ . Cette FM représente l'ignorance totale.*

Tableau 3.1 – Exemple d’une FM exprimée sur  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 

$B \subseteq \Omega$	catégorique ( $m_1$ )	bayésienne ( $m_2$ )	consonante ( $m_3$ )	vide ( $m_4$ )	normale ( $m_5$ )
$\emptyset$	0	0	0	0	0
$\{\omega_1\}$	0	0.2	0.1	0	0.07
$\{\omega_2\}$	0	0.4	0	0	0.33
$\{\omega_1, \omega_2\}$	1	0	0.6	0	0.2
$\{\omega_3\}$	0	0.4	0	0	0.2
$\{\omega_1, \omega_3\}$	0	0	0	0	0.1
$\{\omega_2, \omega_3\}$	0	0	0	0	0.05
$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$	0	0	0.3	1	0.05

Le tableau 3.1, inspiré de [99], montre un exemple de cinq FMs, catégorique, bayésienne, consonante, vide et normale, définies sur un cadre de discernement contenant trois hypothèses différentes  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ .

Généralement, le cadre de discernement  $\Omega$  est supposé fini, mais la TFC peut être étendue au cas infini. Si  $\Omega = \mathbb{R}$ , les éléments focaux sont souvent choisis parmi les intervalles [76, 103]. Dans le cas multidimensionnel où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , les éléments focaux peuvent être pris égaux à des pavés de dimension  $n$ .

### 3.2.1.2 Autres formulations des croyances

À partir de la FM, on peut déduire d’autres formulations équivalentes des croyances. Ce sont toutes des fonctions définies de  $2^\Omega$  à  $[0, 1]$  :

**Définition 13.** *La fonction de crédibilité (appelée aussi fonction de croyance), notée  $bel$ , associe à toute proposition  $B \subseteq \Omega$  le degré de croyance en  $B$ . Elle est définie par :*

$$bel^\Omega(B) = \sum_{\emptyset \neq C \subseteq B} m^\Omega(C), \quad \forall B \subseteq \Omega. \quad (3.3)$$

Réciproquement,  $m^\Omega$  peut être obtenue à partir de  $bel^\Omega$  par la formule suivante :

$$m^\Omega(B) = \sum_{C \subseteq B} (-1)^{|B|-|C|} bel^\Omega(C), \quad \forall B \subseteq \Omega. \quad (3.4)$$

**Définition 14.** *La fonction de plausibilité, notée  $pl$ , associe à toute proposition  $B$  le degré maximal de croyance qui pourrait être alloué à  $B$ , après intégration de nouvelles informations. Elle est calculée par :*

$$pl^\Omega(B) = \sum_{C \cap B \neq \emptyset} m^\Omega(C), \quad \forall B \subseteq \Omega. \quad (3.5)$$

Réciproquement,  $m^\Omega$  peut être retrouvée à partir de  $pl^\Omega$  par la formule suivante :

$$m^\Omega(B) = \sum_{C \subseteq B} (-1)^{|B|-|C|+1} pl^\Omega(\overline{C}), \quad \forall B \subseteq \Omega. \quad (3.6)$$

**Définition 15.** L'implicabilité de  $B \subseteq \Omega$  est la somme des masses associées aux sous-ensembles de  $B$ . Elle est donnée par :

$$b^\Omega(B) = \sum_{C \subseteq B} m^\Omega(C) = bel^\Omega(B) + m^\Omega(\emptyset). \quad (3.7)$$

**Définition 16.** La communalité d'un élément  $B \subseteq \Omega$  est la somme des masses associées aux surensembles de  $B$  :

$$q^\Omega(B) = \sum_{C \supseteq B} m^\Omega(C). \quad (3.8)$$

Le tableau 3.2 montre les fonctions de croyance, plausibilité, implicabilité et communalité associées à la FM normale  $m_5$  du tableau 3.1.

Tableau 3.2 – Résultats de la transformation de la FM  $m_5$  du tableau 3.1 en plausibilité, crédibilité, implicabilité et communalité.

$B \subseteq \Omega$	$m$	$pl$	$bel$	$b$	$q$
$\emptyset$	0	0	0	0	1
$\{\omega_1\}$	0.07	0.42	0.07	0.07	0.42
$\{\omega_2\}$	0.33	0.63	0.33	0.33	0.63
$\{\omega_1, \omega_2\}$	0.2	0.8	0.6	0.6	0.25
$\{\omega_3\}$	0.2	0.4	0.2	0.2	0.4
$\{\omega_1, \omega_3\}$	0.1	0.67	0.37	0.37	0.15
$\{\omega_2, \omega_3\}$	0.05	0.93	0.58	0.58	0.1
$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$	0.05	1	1	1	0.05

### 3.2.2 Application multivaluée

Les FM sont généralement utilisées pour modéliser les incertitudes associées aux différentes variables décrivant un problème donné. Dans le modèle initialement proposé par Dempster [25], nous disposons d'un espace  $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_p\}$  et d'une application multivaluée définie par :

$$\Gamma : \begin{cases} \Psi & \rightarrow 2^\Omega \\ \psi_i & \rightarrow \Gamma(\psi_i) = A_i \subseteq \Omega, \text{ pour } i = 1, \dots, p, \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $A_i$  sont des sous-ensembles de  $\Omega$ . Pour de raison de simplicité nous supposons que les  $A_i$ s sont tous distincts.

Supposons que la croyance sur  $\Psi$  est modélisée par une mesure de probabilité  $P$ , définie par  $P(\psi_i) = m_i$ . Par exemple  $P$  peut représenter un mécanisme aléatoire de sélection d'un élément de  $\Psi$ . Si  $\psi_i$  est sélectionné, on sait que  $\omega$  appartient à  $A_i$ . La croyance sur  $\Omega$  peut être alors représentée par une FM  $m$ , déduite de  $P$  en utilisant  $\Gamma$ . Elle est donnée par la formule suivante :

$$m(\Gamma(\psi_i)) = P(\psi_i) = m_i \text{ pour } i \in \{1, \dots, p\}.$$

Les fonctions de croyance et de plausibilité associées sont données par :

$$bel(A) = P(\{\psi_i \in \Psi \mid \Gamma(\psi_i) \subseteq A\}), \quad (3.10)$$

$$pl(A) = P(\{\psi_i \in \Psi \mid \Gamma(\psi_i) \cap A \neq \emptyset\}), \quad (3.11)$$

pour tout  $A \subseteq \Omega$ .

Les éléments de  $\Psi$  peuvent être vus de plusieurs façons différentes afin d'expliquer ou d'interpréter la croyance dont on dispose pour un problème donné. Dans certains cas, ils peuvent correspondre à des interprétations physiques précises. Par exemple, supposons que  $\omega$  modélise l'erreur associée à une mesure issue d'un capteur quelconque et que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ . Le capteur étudié est en bon état ( $\psi_1$ ) ou en panne ( $\psi_2$ ). La connaissance a priori sur le capteur nous informe que pour le premier état  $|\omega| \leq b$ , alors que pour le deuxième  $\omega$  peut prendre n'importe quelle valeur dans  $\Omega$ . Si la probabilité que le capteur soit en bon état est  $m_1$ , alors la croyance sur  $\omega$  peut être représentée par une FM  $m$  définie par :

$$\begin{aligned} m([-b, b]) &= m_1, \\ m(\Omega) &= 1 - m_1. \end{aligned}$$

### 3.2.2.1 Affaiblissement d'une fonction de masse

Lorsque la source d'information dont la fonction de croyance est extraite n'est pas totalement fiable, il est possible d'introduire un coefficient d'affaiblissement  $1 - \alpha \in [0, 1]$  représentant un élément de métaconnaissance concernant la fiabilité de la source dont est issue la FM [95]. Ce coefficient permet de transférer une partie de la croyance vers l'ensemble  $\Omega$ . Ainsi une FM affaiblie  $m^{\alpha, \Omega}$  peut se déduire de  $m^\Omega$  via la relation :

$$m^{\alpha, \Omega}(A) = (1 - \alpha)m^\Omega(A), \quad \forall A \in \Omega, A \neq \Omega, \quad (3.12)$$

$$m^{\alpha, \Omega}(\Omega) = \alpha + (1 - \alpha)m^\Omega(\Omega). \quad (3.13)$$

### 3.2.3 Le principe d'engagement minimal

Lorsqu'il est nécessaire de choisir un élément parmi un ensemble des FMs compatibles aux certaines contraintes, on utilise souvent le principe d'engagement minimal (PEM). Celui-ci consiste à sélectionner la FM la moins spécifique, ou autrement dit, la moins informative, dans un ensemble donné. Une approche quantitative consiste à calculer une mesure d'incertitude pour toutes les FMs disponibles et à choisir celle d'incertitude maximale.

Plusieurs mesures d'incertitude ont été proposées. La plus utilisée, appelée non-spécificité, est basée sur la cardinalité des éléments focaux pondérée par la masse [32]. Formellement, la non-spécificité se définit pour une FM normale par :

$$N(m) = \sum_{A \subseteq \Omega} m(A) \cdot \log_2(|A|), \quad (3.14)$$

où  $A$  est un élément focal de  $m$  et  $|A|$  le cardinal de  $A$ . Le PEM joue le même rôle que le *principe du maximum d'entropie* dans la théorie des probabilités.

**Exemple 8.** Les non-spécificités associées aux FMs catégorique, bayésienne et normale sont respectivement,  $N(m_1^\Omega) = 1$ ,  $N(m_2^\Omega) = 0$  et  $N(m_5^\Omega) = 0.42$ . La FM catégorique est donc la moins spécifique et la FM bayésienne est la plus spécifique.

### 3.2.4 Règles de combinaison

Dans le cadre du TBM, Smets a développé plusieurs opérateurs de combinaison des FMs, qui permettent de combiner les informations issues de différentes sources et d'obtenir une information plus fiable sur l'état réel du système [93,95].

Dans la suite, nous nous intéresserons principalement aux opérateurs de combinaison utilisés dans le cadre de ce travail. Ces opérateurs considère que les sources d'informations utilisées sont toutes distinctes.

#### 3.2.4.1 Règle de combinaison conjonctive

Considérons deux FMs issues de deux sources d'informations fiables, distinctes et définies sur le même cadre de discernement  $\Omega$ . La règle de combinaison conjonctive (CRC : *Conjunctive Rule of Combination*), représentée par  $\odot$ , est donnée par l'équation suivante [95],

$$(m_1 \odot m_2)(C) = \sum_{\{i,j|A_i \cap B_j = C\}} m_1(A_i)m_2(B_j), \quad \forall C \subseteq \Omega. \quad (3.15)$$

La CRC est commutative, associative mais elle n'est pas idempotente ( $m_1^\Omega \odot m_1^\Omega \neq m_1^\Omega$ ). L'élément neutre est la FM vide et l'élément absorbant vérifie  $m(\emptyset) = 1$ . Cette règle transfère les masses des éléments focaux vers des ensembles de cardinalités plus petites et à ainsi un effet de spécialisation.

Si les sources d'informations sont conflictuelles, la fonction de masse résultant d'une CRC devient sous-normale. La règle de *Dempster*, notée  $\oplus$ , consiste à appliquer la CRC suivie d'une étape de normalisation. Elle est définie par la formule suivante :

$$(m_1^\Omega \oplus m_2^\Omega)(C) = \begin{cases} \frac{(m_1^\Omega \odot m_2^\Omega)(C)}{1 - (m_1^\Omega \odot m_2^\Omega)(\emptyset)} & \text{si } C \subseteq \Omega, C \neq \emptyset. \\ 0 & \text{si } C = \emptyset. \end{cases} \quad (3.16)$$

#### 3.2.4.2 Conditionnement

Conditionner une FM  $m$  par un élément  $A$  de  $\Omega$  consiste à transférer la masse affectée à chaque élément focal  $B \subseteq \Omega$  vers l'ensemble  $B \cap A$ , comme le montre la Figure 3.2. La FM résultante, notée  $m^\Omega[A]$ , est appelée fonction de masse conditionnelle. Elle peut être calculée en utilisant la CRC [95] :

$$m^\Omega[A] = m^\Omega \odot m_A^\Omega, \quad (3.17)$$

où  $m_A^\Omega$  est une FM catégorique définie par  $m_A^\Omega(A) = 1$ . Notons que la FM issue d'un conditionnement peut être sous-normale.

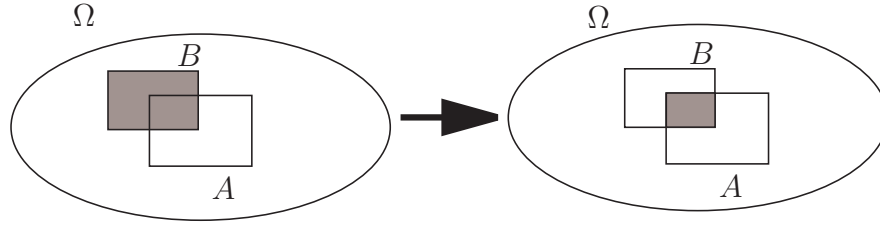


Figure 3.2 – Principe de conditionnement par un sous-ensemble  $A \subseteq \Omega$ . La masse initialement allouée à  $B$  est transférée à  $A \cap B$ .

### 3.2.4.3 Règle de combinaison disjonctive

Habituellement, si on veut combiner deux FM's issues de deux sources d'informations distinctes, dont l'une au moins est fiable sans que l'on sache laquelle, on utilise la règle de combinaison disjonctive (DRC : *Disjunctive Rule of Combination*), représentée par  $\odot$  [93] :

$$m_1^\Omega \odot m_2^\Omega(D) = \sum_{B \cup C = D} m_1^\Omega(B) m_2^\Omega(C). \quad (3.18)$$

Cette règle est associative, commutative mais non idempotente. L'élément neutre est la FM définie par  $m^\Omega(\emptyset) = 1$ , et l'élément absorbant est la FM vide. La FM résultant de la DRC possède en général des éléments focaux de cardinalité plus élevée. On dit alors que la FM résultante est moins spécialisée que les FM's initiales ou encore que la DRC est un opérateur de généralisation [92, 93].

### 3.2.4.4 Raffinement et extension vide

Deux FM's issues de deux sources d'informations distinctes peuvent être définies sur deux cadres de discernement différents. Pour combiner ces deux fonctions, il faut les redéfinir dans un même cadre de discernement. Ceci est possible grâce à aux opérations de raffinement et de grossissement que nous allons maintenant définir.

**Raffinement.** Considérons deux cadres de discernement  $\Omega$  et  $\Theta$ . Un raffinement est une fonction de  $2^\Omega$  dans  $2^\Theta$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- l'ensemble  $\{\rho(\{\omega_k\}), \omega_k \in \Omega\} \subseteq 2^\Theta$  est une partition de  $\Theta$ ,
- $\forall B \subseteq \Omega, \rho(B) = \bigcup_{\omega_k \in B} \rho(\{\omega_k\})$ .

La Figure 3.3 montre un raffinement  $\rho$  entre  $\Omega$  et  $\Theta$ . On dit que  $\Theta$  est un raffinement de  $\Omega$ .

**Extension vide.** L'opérateur d'*extension vide*, défini par Shafer [90, 93] permet d'exprimer dans  $\Theta$  une FM initialement définie sur  $\Omega$ . L'extension vide est un processus conservatif de réallocation des masses de croyance respectant le PEM. L'opérateur correspondant noté  $\uparrow$ , consiste à transférer la masse  $m(B)$  à  $\rho(B)$ , pour tout  $B \subseteq \Omega$  :

$$\forall A \subseteq \Theta, m^{\Omega \uparrow \Theta}(A) = \begin{cases} m(B) & \text{si } A = \rho(B), B \subseteq \Omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.19)$$

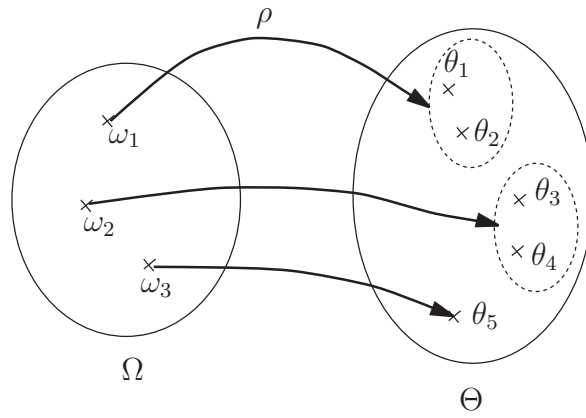


Figure 3.3 – Raffinement du cadre de discernement

**Exemple 9.** La masse  $m^\Omega(\{\omega_1\})$  de la Figure 3.3 est transférée à  $\{\theta_1, \theta_2\}$ ,  $m^\Omega(\{\omega_2\})$  est transférée à  $\{\theta_3, \theta_4\}$ , et  $m^\Omega(\{\omega_3\})$  est transférée à  $\{\theta_5\}$ . Après raffinement, la FM  $m^\Theta$  est définie par :

$$\begin{aligned} m^\Theta(\{\theta_1, \theta_2\}) &= m^\Omega(\{\omega_1\}), \\ m^\Theta(\{\theta_3, \theta_4\}) &= m^\Omega(\{\omega_2\}), \\ m^\Theta(\{\theta_5\}) &= m^\Omega(\{\omega_3\}), \\ m^\Theta(\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\}) &= m^\Omega(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}). \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pour deux FMs,  $m_1^\Omega$  et  $m_2^\Theta$ , définies sur deux cadres de discernement non compatibles, c'est-à-dire dont les éléments ne sont pas liés par une relation, l'extension vide nous permet de combiner ces deux FMs en les étendant sur un espace commun défini par l'espace produit et en combinant les FMs résultantes. La combinaison des  $m_1^\Omega$  et  $m_2^\Theta$  sera donnée par :

$$m_{12}^{\Omega \times \Theta}(D) = (m_1^{\Omega \times \Theta} \oplus m_2^{\Omega \times \Theta})(D) \quad (3.20)$$

$$= \begin{cases} m_1^\Omega(B)m_2^\Theta(C) & \text{si } D = B \times C, B \subseteq \Omega \text{ et } C \subseteq \Theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.21)$$

### 3.2.4.5 Grossissement et marginalisation

Le grossissement est l'opération duale du raffinement. Si  $\Theta$  est un raffinement de  $\Omega$ , on dit que  $\Omega$  est un grossissement de  $\Theta$ .

La marginalisation est un cas particulier du grossissement. Elle s'applique dans le cas où le cadre de discernement est défini sous la forme d'un espace produit  $\Omega \times \Theta$  et le cadre résultant du grossissement est un des cadres de l'espace produit. Par exemple, la marginalisation sur  $\Omega$  d'une FM définie sur l'espace produit  $\Omega \times \Theta$  est donnée par :

$$m^{\Omega \times \Theta \downarrow \Omega}(B) = \sum_{\{C \subseteq \Omega \times \Theta, \text{Proj}(C \downarrow \Omega) = B\}} m^{\Omega \times \Theta}(C), \quad \forall B \subseteq \Omega, \quad (3.22)$$

où  $Proj(C \downarrow \Omega)$  est la projection de  $C$  sur  $\Omega$ . L'opération de marginalisation affecte donc à un élément  $B$  de  $\Omega$  la somme des masses des éléments de  $\Omega \times \Theta$  dont la projection sur  $\Omega$  est égale à  $B$ .

### 3.2.4.6 Déconditionnement

Considérons une FM conditionnelle  $m^\Omega[B]$ ,  $B \subseteq \Omega$ . L'opérateur de déconditionnement noté  $\uparrow$  permet de calculer une FM  $m^\Omega$  sur  $\Omega$ , à partir de  $m^\Omega[B]$  en respectant le PEM. Cet opérateur est défini par [92] :

$$m^\Omega[B]^{\uparrow\Omega}(C \cup \overline{B}) = m^\Omega[B](C), \quad \forall C \subseteq B, \quad (3.23)$$

où  $\overline{B}$  est le complémentaire de  $B$  dans  $\Omega$ .

### 3.2.4.7 Règles implicatives dans le TBM

Considérons deux cadres de discernement  $\Theta$  et  $\Omega$  liés par une règle implicative  $R$ , écrite sous la forme suivante :

$$R : \text{si } A \text{ alors } B \text{ avec une croyance } \beta \in [0, 1],$$

où  $A$  et  $B$  sont deux hypothèses de  $\Theta$  et  $\Omega$ . La règle  $R$  peut être exprimée sous forme d'une FM conditionnelle sur  $\Omega$  [87] :

$$m_R^\Omega[A](B) = \beta, \quad (3.24)$$

$$m_R^\Omega[A](\Omega) = 1 - \beta. \quad (3.25)$$

Si nous souhaitons combiner la FM correspondant à  $R$  avec une autre FM, il est plus commode de l'exprimer sur l'espace produit  $\Omega \times \Theta$ . L'expression de  $m_R^\Omega[A]$  dans l'espace produit s'obtient en utilisant l'opération de déconditionnement présentée dans la section 3.2.4.6. La FM résultante est donnée par :

$$m_R^{\Omega \times \Theta}(D) = \begin{cases} \beta & \text{si } D = (B \times A) \cup (\Omega \times \overline{A}), \\ 1 - \beta & \text{si } D = (\Omega \times \Theta). \end{cases} \quad (3.26)$$

**Exemple 10.** Considérons le cas de deux cadres de discernement distincts  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$  et  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$  qui sont liés par deux règles d'implication :

- $R_a$  : si  $\{\theta_1\}$  alors  $\{\omega_2\}$  avec une masse  $\beta_a = 0.9$ ,
- $R_b$  : si  $\{\theta_2\}$  alors  $\{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$  avec une masse  $\beta_b = 0.8$ .

Nous disposons aussi de deux FMs  $m_1^\Omega$  et  $m_2^\Theta$  fournies par deux sources d'informations fiables et distinctes :

$$\begin{array}{ll} m_1^\Omega(\{\omega_1\}) = 0.7 & m_2^\Theta(\{\theta_1, \theta_3\}) = 0.6 \\ m_1^\Omega(\{\omega_2\}) = 0.1 & m_2^\Theta(\{\theta_2\}) = 0.2 \\ m_1^\Omega(\Omega) = 0.2 & m_2^\Theta(\Theta) = 0.2 \end{array}$$

Nous allons dans la suite combiner les différentes FMs afin de calculer une FM finale sur  $\Omega$ . On peut commencer par créer les FMs associées aux deux règles d'implication  $R_a$  et  $R_b$  en utilisant l'équation (3.26) :



– La FM associée à  $R_a$  est

$$m_a^{\Omega \times \Theta}(C) = \begin{cases} 0.9 & \text{si } C = \{(\omega_2, \theta_1)\} \cup (\Omega \times \overline{\{\theta_1\}}), \\ 0.1 & \text{si } C = \Omega \times \Theta. \end{cases}$$

– La FM associée à  $R_b$  est

$$m_b^{\Omega \times \Theta}(C) = \begin{cases} 0.8 & \text{si } C = (\{\omega_1, \omega_4, \omega_5\} \times \{\theta_2\}) \cup (\Omega \times \overline{\{\theta_2\}}), \\ 0.2 & \text{si } C = \Omega \times \Theta. \end{cases}$$

La combinaison de  $m_a^{\Omega \times \Theta}$  et  $m_b^{\Omega \times \Theta}$  par la CRC produit une FM à  $m_{ab}^{\Omega \times \Theta}$ , représentée dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3 –  $m_{ab}^{\Omega \times \Theta}$ 

Éléments focaux	masse
$\Omega \times \Theta$	0.02
$\{(\omega_2, \theta_1)\} \cup (\Omega \times \overline{\{\theta_1\}})$	0.18
$\{(\omega_2, \theta_1)\} \cup (\{\omega_1, \omega_4, \omega_5\} \times \{\theta_2\}) \cup (\Omega \times \overline{\{\theta_3\}})$	0.72
$(\{\omega_1, \omega_4, \omega_5\} \times \{\theta_2\}) \cup (\Omega \times \overline{\{\theta_1, \theta_3\}})$	0.08

D'autre part, afin de combiner  $m_1^\Omega$  et  $m_2^\Theta$  on applique d'abord une étape d'extension pour les redéfinir sur un même cadre de discernement, puis on applique la CRC. Le résultat de cette procédure est donnée dans le tableau 3.4.

Tableau 3.4 –  $m_{12}^{\Omega \times \Theta}$ 

Éléments focaux	masse
$\Omega \times \Theta$	0.04
$\{\omega_1\} \times \Theta$	0.14
$\{(\omega_1, \theta_2)\}$	0.14
$\{(\omega_1, \theta_1), (\omega_1, \theta_3)\}$	0.42
$\{\omega_2\} \times \Theta$	0.02
$\{(\omega_2, \theta_1), (\omega_2, \theta_3)\}$	0.06
$\{(\omega_2, \theta_2)\}$	0.02
$\Omega \times \{\theta_1, \theta_3\}$	0.12
$\Omega \times \{\theta_2\}$	0.04

La FM finale sur  $\Omega$  est obtenue en combinant conjonctivement  $m_{12}^{\Omega \times \Theta}$  et  $m_{ab}^{\Omega \times \Theta}$  et en marginalisant la FM résultante sur  $\Omega$  :

$$m^\Omega = (m_{12}^{\Omega \times \Theta} \odot m_{ab}^{\Omega \times \Theta}) \downarrow \Omega.$$

La FM résultante  $m^\Omega$  est donnée dans le tableau 3.5.

Tableau 3.5 –  $m^\Omega$ 

Éléments focaux	masse
$\emptyset$	0.019
$\Omega$	0.142
$\{\omega_1\}$	0.6748
$\{\omega_2\}$	0.094
$\{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$	0.0801

### 3.2.5 Théorème de Bayes généralisé

Soient  $\Theta$  et  $\Omega$  deux cadres de discernement. Si on connaît les FM sur  $\Omega$  sachant chaque élément  $\theta_k \in \Theta$ , on peut calculer la FM sur  $\Theta$  conditionnée à n'importe quel élément  $\omega \in \Omega$  en utilisant le théorème de Bayes Généralisé (GBT : *Generalized Bayes Theorem*). On peut exprimer ce théorème en utilisant les différentes formes d'une fonction de croyance, telles que la plausibilité, la communalité, la FM ou autres [93]. On montre ici après quelques exemples des différentes formes sous lesquelles le GBT peut s'exprimer :

$$pl^\Theta[\omega](\theta) = 1 - \prod_{\theta_k \in \theta} (1 - pl^\Omega[\theta_k](\{\omega\})), \quad (3.27)$$

$$q^\Theta[\omega](\theta) = \prod_{\theta_k \in \theta} pl^\Omega[\theta_k](\{\omega\}), \quad (3.28)$$

$$m^\Theta[\omega](\theta) = \prod_{\theta_k \in \theta} pl^\Omega[\theta_k](\{\omega\}) \cdot \prod_{\theta_k \in \bar{\theta}} (1 - pl^\Omega[\theta_k](\{\omega\})), \quad (3.29)$$

$\forall \theta \subseteq \Theta$  et  $\omega \in \Omega$ . Notons que le GBT peut être retrouvé par les opérations de déconditionnement, combinaison et marginalisation. Ceci est réalisé en quatre étapes [93] :

- déconditionnée les FM  $m^\Omega[\theta_k]$  sur  $\Omega \times \Theta$  pour obtenir  $m^\Omega[\theta_k]^{\uparrow\Omega \times \Theta}$ ,
- combiner conjonctivement les FM résultantes pour obtenir  $(\odot_k m^\Omega[\theta_k]^{\uparrow\Omega \times \Theta})$ ,
- conditionner la FM résultante par rapport à  $\{\omega\}$ , pour obtenir  $m^{\Omega \times \Theta}[\omega] = (\odot_k m^\Omega[\theta_k]^{\uparrow\Omega \times \Theta})[\omega]$
- marginaliser sur  $\Theta$ . Alors, la FM final est donnée par :

$$m^\Theta[\omega] = (\odot_k m^\Omega[\theta_k]^{\uparrow\Omega \times \Theta})[\omega]^{\downarrow\Theta}. \quad (3.30)$$

Contrairement au théorème de Bayes en théorie de probabilités, le GBT ne nécessite aucune information a priori sur  $\Theta$ . Cependant, si cette connaissance existe, alors elle peut être combinée conjonctivement avec la FM résultante du GBT.

### 3.2.6 Prise de décision dans le TBM

Dans la théorie des fonctions de croyance, plusieurs règles de décision sont utilisées, comme le maximum de probabilité pignistique, le maximum de plausibilité,

etc. [26]. Nous décrivons en détail la probabilité pignistique que nous utiliserons dans le cadre de ce travail.

Considérons un cadre de discernement  $\Omega$  et une FM associée  $m^\Omega$ . Une distribution de probabilité, appelée probabilité pignistique  $BetP$ , peut être calculée à partir de  $m^\Omega$  en utilisant la transformation pignistique introduite par Smets [95]. Cette transformation consiste à répartir uniformément la masse de chaque proposition  $B$  entre les hypothèses élémentaires qui le composent. Formellement,

$$BetP(\omega_k) = \sum_{B \subseteq \Omega, \omega_k \in B} \frac{m^\Omega(B)}{|B|}, \quad (3.31)$$

où  $|B|$  est le cardinal de  $B$ . Dans l'expression ci-dessus,  $m^\Omega$  est supposée normale. La transformation pignistique d'une FM sous-normale nécessite une première étape de normalisation.

**Exemple 11.** *La transformation pignistique de la FM normale du tableau 3.1 fournit la distribution de probabilité suivante :*

$$\begin{cases} BetP(\omega_1) &= \frac{0.07}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.05}{3} = 0.236 \\ BetP(\omega_2) &= \frac{0.33}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.05}{2} + \frac{0.05}{3} = 0.471 \\ BetP(\omega_3) &= \frac{0.2}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.05}{3} = 0.2917. \end{cases}$$

Dans l'équation (3.31),  $\Omega$  est supposé fini. Dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}$ , et où les éléments focaux sont des intervalles et la probabilité pignistique est caractérisée par la fonction de densité :

$$Betf(x) = \sum_{i=1}^p \mathbb{1}_{[x_i]}(x) \frac{m([x_i])}{|[x_i]|} \quad (3.32)$$

où  $|[x_i]|$  désigne la largeur de  $[x_i]$ . On remarque que  $Betf$  est un mélange de loi uniforme sur les intervalles  $[x_i]$ , avec les proportions  $m([x_i])$ .

### 3.2.7 Espérances d'une fonction de croyance

Dans cette section nous supposons que le cadre de discernement est l'ensemble des réels  $\Omega = \mathbb{R}$ , et que notre croyance sur une variable  $x$  est représentée par une FM  $m$ . Nous cherchons à calculer l'espérance de la variable  $x$  dans le contexte de la TFC. Cette espérance peut être définie en associant à  $m$  l'ensemble  $\mathcal{P}(m)$  de mesures de probabilité  $P$  compatibles vérifiant :

$$bel(A) \leq P(A) \leq pl(A),$$

pour tout sous-ensemble mesurable  $A$  de  $\mathbb{R}$ . Une mesure de probabilité vérifiant l'équation précédente est dite *compatible* avec  $m$ . Les bornes inférieure et supérieure de l'espérance de  $x$  sont définies par [25] :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_*(m) &= \inf_{P \in \mathcal{P}(m)} \mathbb{E}(P), \\ \mathbb{E}^*(m) &= \sup_{P \in \mathcal{P}(m)} \mathbb{E}(P). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que les éléments focaux de  $m$  sont  $p$  intervalles  $[x_i] = [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$  affectés de masses  $m_i = m([x_i])$  et  $i = 1, \dots, p$ . On montre que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_*(m) &= \sum_{i=1}^p m_i \underline{x}_i, \\ \mathbb{E}^*(m) &= \sum_{i=1}^p m_i \overline{x}_i.\end{aligned}$$

En utilisant les notations de l'arithmétique d'intervalles, l'espérance intervalle associée à  $m$  peut être écrite de la façon suivante [25] :

$$[\mathbb{E}](m) = \sum_{i=1}^p m_i \cdot [x_i]. \quad (3.33)$$

L'espérance pignistique associée à  $m$  (c'est-à-dire l'espérance au sens de la probabilité pignistique) peut être obtenue en utilisant les centres  $c_i$  des éléments focaux :

$$\mathbb{E}(m) = \sum_{i=1}^p m_i c_i. \quad (3.34)$$

Les équations (3.33) et (3.34) peuvent être facilement étendues au cas où  $\Omega = \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ . L'espérance intervalle de  $m$  devient alors un pavé  $n$ -dimensionnel, et son espérance pignistique devient un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.2.8 Simplification d'une fonction de masse

En pratique, on rencontre des situations où l'on dispose d'un grand nombre de sources d'information fournissant des fonctions de masse, définies sur des cadres de discernement identiques ou différents. Ceci peut provoquer une augmentation importante du nombre d'ensembles focaux lors de la combinaison des différentes FM [27]. Pour remédier à ce problème, on peut utiliser des algorithmes permettant de regrouper certains ensembles focaux afin de réduire leur nombre, selon un critère prédéfini dépendant de l'application considéré.

Dans ce travail de thèse, nous avons opté pour l'utilisation de la méthode de simplification (*summarization*) développée dans [60], du fait de sa simplicité et de son faible complexité adaptée aux applications en temps réel.

La méthode de simplification est basée sur l'idée d'éliminer les éléments focaux qui ont de masses faibles. La somme des masses est alors transférée à l'union [60].

Soit  $m$  une FM sur  $\Omega$  avec  $p$  éléments focaux  $A_1, \dots, A_p$ ,  $p > 1$ . Supposons que ces éléments sont ordonnés de telle sorte que  $m(A_1) \geq m(A_2) \geq \dots \geq m(A_p)$ . Soit  $q$  un nombre entier vérifiant  $1 \leq q < p$ . Une FM  $m_s$  avec  $q$  éléments focaux peut être construite à partir de  $m$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}m_s(A_i) &= m(A_i), \quad i = 1, \dots, q-1, \\ m_s(A_0) &= \sum_{i=q}^p m(A_i),\end{aligned}$$

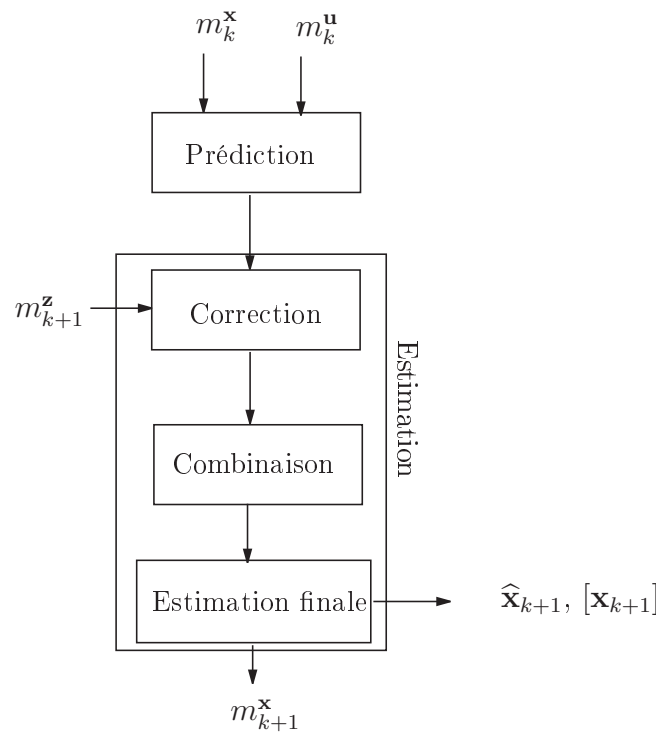


Figure 3.4 – Organigramme de la méthode BSE.

où  $A_0$  est défini par  $A_0 = \bigcup_{i=q}^p A_i$ . D'autres méthodes d'approximation plus sophistiquées, permettant une meilleure approximation au détriment du temps d'exécution sont décrites dans [27, 28].

### 3.3 Méthode crédibiliste d'estimation d'état

Nous présentons dans cette section une méthode évidentielle pour l'estimation d'état d'un système dynamique se basant conjointement sur la théorie des fonctions de croyance et sur certains outils de la théorie des intervalles [70, 72, 74]. Nous appelons cette méthode BSE pour « Belief State Estimation » en anglais. Nous adoptons une modélisation crédibiliste des bruits associées aux modèles et aux différentes variables du système dynamique. À chaque variable réelle, nous associons une FM dont les éléments focaux sont des intervalles. Ainsi, les intervalles modélisent l'imprécision alors que le poids associé à un intervalle (ou ensemble focal) représente la croyance dans l'hypothèse que la valeur exacte de la variable appartient à cet intervalle.

Plus formellement, le but de la méthode est de déterminer une estimation du vecteur d'état du système à chaque instant  $k + 1$ , sachant qu'on dispose des informations suivantes :

- les modèles d'évolution et d'observation qui décrivent le système dynamique considéré ;
- les FM associées aux modèles, aux entrées et aux mesures observées ;

– la FM sur l'état à l'instant  $k$ .

La Figure 3.4 illustre les différentes étapes de cette méthode où  $m_k^{\mathbf{x}}$ ,  $m_k^{\mathbf{u}}$ ,  $m_{k+1}^{\mathbf{z}}$  et  $m_{k+1}^{\mathbf{x}}$  représentent les FMs associées à  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{u}_k$ ,  $\mathbf{z}_{k+1}$  et  $\mathbf{x}_{k+1}$  respectivement. On peut voir que la méthode BSE, à l'image des méthodes d'estimations introduites dans le chapitre 1, comporte une étape de prédiction et une étape de correction de la prédiction par la mesure. Dans l'étape de prédiction,  $m_k^{\mathbf{x}}$  et  $m_k^{\mathbf{u}}$  sont combinées pour créer une FM prédite sur l'état du système en utilisant le modèle d'évolution. Dans l'étape de correction, la FM associée à la mesure est utilisée afin de corriger la croyance sur l'état. Le résultat final est une FM sur l'état à partir de laquelle on peut calculer une estimation ponctuelle. Avant d'introduire cette méthode, nous présentons une technique permettant de calculer des FMs à partir des variables réelles mesurées avec des bornes d'erreur associées.

### 3.3.1 Construction des fonctions de croyance

Considérons une variable aléatoire réelle  $X$  caractérisée par une distribution de probabilité  $P_X$  d'un support connu  $[a, b]$  et de mode  $c \in (a, b)$ . Soit  $\pi$  la distribution de possibilité triangulaire définie par :

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{c-a} & \text{si } a \leq x < c, \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{si } c \leq x < b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.35)$$

Comme cela a été démontré dans [10], l'inégalité suivante est vérifiée pour chaque sous-ensemble  $A$  mesurable de  $\mathbb{R}$  :

$$\Pi(A) \leq P_X(A) \leq 1 - \Pi(\bar{A}), \quad (3.36)$$

où  $\bar{A}$  est le complément de  $A$ , et  $\Pi$  est la mesure de possibilité associée à  $\pi$  :

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x). \quad (3.37)$$

La distribution de possibilité  $\pi$  peut donc être considérée comme une approximation de l'ensemble des mesures de probabilité ayant comme support  $[a, b]$  et comme mode  $c$ . Cette distribution de possibilité continue peut elle-même être approximée par une FM discrète  $m$  à  $p$  éléments focaux en utilisant des  $\alpha$ -coupes de  $\pi$ . Pour  $\alpha \in (0, 1]$ , la coupe de  $\pi$  de niveau  $\alpha$  est l'ensemble de valeurs  $x$  telles que  $\pi(x) \geq \alpha$ .

Considérons  $p - 1$  valeurs de  $\alpha$  :  $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1} < 1$ . Les  $\alpha$ -coupes des  $\pi$  correspondant aux différents  $\alpha_i$  sont données par :

$$[\pi^{\alpha_i}] = [\underline{\pi}^{\alpha_i}, \overline{\pi}^{\alpha_i}],$$

où :

$$\begin{cases} \underline{\pi}^{\alpha_i} &= a + \alpha_i(c - a) \\ \overline{\pi}^{\alpha_i} &= c + (1 - \alpha_i)(b - c). \end{cases} \quad (3.38)$$

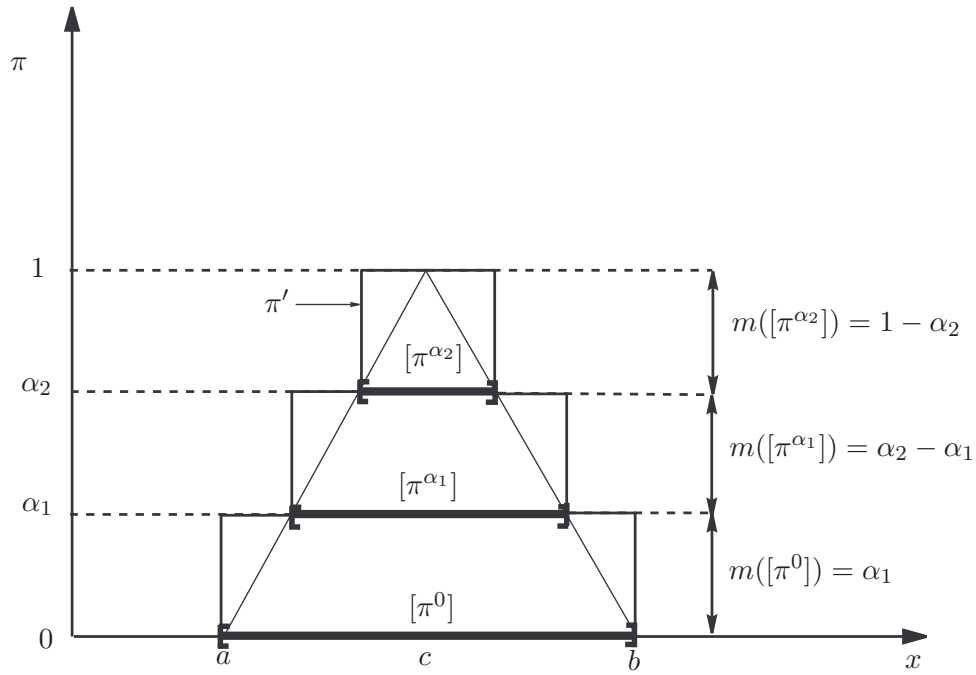


Figure 3.5 – Approximation d'une distribution de possibilité triangulaire par une FM consonante.

Par convention, posons  $[\pi^0] = [a, b]$ . Une FM  $m$  consonante associée à  $\pi$  peut être calculée en considérant les  $[\pi^{\alpha_i}]$  comme éléments focaux. La FM  $m$  est donnée par :

$$\begin{cases} m([\pi^0]) & = \alpha_1, \\ m([\pi^{\alpha_1}]) & = \alpha_2 - \alpha_1, \\ & \vdots \\ m([\pi^{\alpha_{p-1}}]) & = 1 - \alpha_{p-1}. \end{cases} \quad (3.39)$$

Le principe de cette transformation est illustré sur la Figure 3.5. Sur cette figure, deux  $\alpha$ -coupes  $\pi^{\alpha_1}$  et  $\pi^{\alpha_2}$  associées à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont représentées. En considérant ces deux  $\alpha$ -coupes, ainsi que  $[\pi_0] = [a, b]$ , nous pouvons construire une FM avec  $p = 3$  éléments focaux :  $m([\pi^0]) = \alpha_1$ ,  $m([\pi^{\alpha_1}]) = \alpha_2 - \alpha_1$  et  $m([\pi^{\alpha_2}]) = 1 - \alpha_2$ . Comme le montre la Figure 3.5,  $m$  correspond à une distribution de possibilité  $\pi'$  qui approxime  $\pi$  et qui vérifie  $\pi' \geq \pi$ . Par conséquent, si  $bel$  et  $pl$  représentent, respectivement, les fonctions de croyance et de plausibilité associées à  $m$ , l'inégalité suivante est vérifiée pour toute partie  $A$  mesurable :

$$bel(A) \leq P_X(A) \leq pl(A), \quad (3.40)$$

et  $m$  peut ainsi être considérée comme une approximation de l'ensemble des distributions de probabilités, ayant comme support  $[a, b]$  et comme mode  $c$ .

On peut remarquer que, dans le formalisme introduit, toutes les valeurs qui n'appartiennent pas à l'intervalle  $[a, b]$  sont considérées comme impossibles. Cette

hypothèse peut s'avérer trop restrictive dans certaines applications. On utilise pour l'atténuer la notion d'affaiblissement.

Par exemple, soit  $X$  une mesure fournie par un capteur. Supposons que les bornes  $a$  et  $b$  associées à l'erreur sur  $X$  soient connues ; soit  $m$  la FM représentant cette erreur et construite à partir des bornes  $a$  et  $b$ . L'utilisation de  $m$  est justifiée dans la plupart de cas, sauf dans certaines situations comme, par exemple, lors de la défaillance du capteur. Pour modéliser ce cas, nous supposons que les valeurs à l'extérieur de  $[a, b]$  sont possibles mais avec une faible plausibilité. La FM  $m$  est ainsi affaiblie avec un coefficient  $\varepsilon$ . L'affaiblissement de  $m$  signifie qu'une proportion  $\varepsilon$  de  $m(A)$  est transférée à  $\Omega$ . La FM résultante est alors donnée ainsi par :

$$\varepsilon m(A) = \begin{cases} (1 - \varepsilon)m(A) & \text{si } A \subset \Omega, \\ (1 - \varepsilon)m(\Omega) + \varepsilon & \text{si } A = \Omega. \end{cases} \quad (3.41)$$

Notons que  ${}^\varepsilon bel(A) = (1 - \varepsilon)bel(A) \leq bel(A)$  et  ${}^\varepsilon pl(A) = (1 - \varepsilon)pl(A) + \varepsilon \geq pl(A)$  pour tout sous-ensemble  $A$  strictement inclus dans  $\Omega$ . Par conséquent, l'affaiblissement a pour effet d'élargir l'intervalle  $[bel(A), pl(A)]$  et l'équation (3.40) reste vérifiée.

**Exemple 12.** Soit  $U$  une variable aléatoire représentant le bruit associé à une certaine mesure. Supposons que l'espérance de  $U$  est égale à zéro et que son écart-type  $\sigma$  est connu. Dans l'EEB, il est classique de prendre l'intervalle  $[-3\sigma, +3\sigma]$  comme support de  $U$ . Si on considère que le mode de  $U$  est égal à zéro, alors la distribution de probabilité associée à  $U$  peut être approximée par une distribution de possibilité  $\pi$  continue, symétrique et triangulaire. Cette distribution de possibilité peut à son tour être approximée, par exemple, par une FM discrète possédant  $p = 3$  éléments focaux correspondant aux  $\alpha$ -coupes de  $\pi$  de niveaux :  $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{3}$  et  $\alpha_0 = 0$  :

$$\begin{aligned} m([-3\sigma, 3\sigma]) &= 1/3, \\ m([-2\sigma, 2\sigma]) &= 1/3, \\ m([-σ, σ]) &= 1/3. \end{aligned}$$

Bien évidemment, une meilleure approximation de la distribution de possibilité  $\pi$  peut être obtenue en augmentant le nombre d'éléments focaux  $p$ , au prix d'une augmentation de la complexité calculatoire.

Supposons maintenant que  $\Omega = \mathbb{R}$ , la FM résultant de l'affaiblissement de  $m$  par un coefficient  $\varepsilon$  est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^\varepsilon m([-3\sigma, 3\sigma]) &= (1 - \varepsilon)/3, \\ {}^\varepsilon m([-2\sigma, 2\sigma]) &= (1 - \varepsilon)/3, \\ {}^\varepsilon m([-σ, σ]) &= (1 - \varepsilon)/3 \\ {}^\varepsilon m(\mathbb{R}) &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Notons que les éléments focaux résultants peuvent être manipulés par les outils de la théorie des intervalles présentés dans le chapitre 1. Dans la section suivante, nous présentons l'extension de ces outils au cas de la TFC.



### 3.3.2 Extension du calcul d'intervalles à la TFC

Dans [102], Yager a proposé un schéma simple pour étendre des opérations arithmétiques et d'autre type des opérations dans le cadre de la TFC. Cette approche va être introduite brièvement dans cette section. Notre but est de généraliser les outils de l'analyse par intervalles. Ainsi, on va considérer que les éléments focaux associés aux différentes FMs sont de type intervalle.

Supposons qu'on dispose de deux variables réelles  $x$  et  $y$  et que la croyance sur ces variables soit modélisée par deux FMs  $m^x$  et  $m^y$ . On s'intéresse à la valeur de  $z = x \diamond y$ , où  $\diamond$  est un opérateur binaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $m^x$  et  $m^y$  sont des fonctions de masse catégoriques, définies par  $m^x([x]) = 1$  et  $m^y([y]) = 1$ , où  $[x]$  et  $[y]$  sont des éléments de  $\mathbb{IR}$ , alors les outils de l'analyse par intervalles présentés dans le chapitre 1 peuvent être appliqués et la croyance sur  $z$  peuvent être représentée par une FM catégorique  $m^z$  ayant comme élément focal  $[x] \diamond [y]$  défini par :

$$[x] \diamond [y] = [\{x \diamond y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x \in [x], y \in [y]\}]. \quad (3.42)$$

Dans le cas général où  $m^x$  et  $m^y$  sont des FMs avec un nombre quelconque d'éléments focaux, alors des extensions de l'analyse par intervalle doivent être proposées.

Supposons que  $m^x$  et  $m^y$  soient définies par des applications multivaluées  $\Gamma^x$  et  $\Gamma^y$  associés à des espaces  $\Psi^x$  et  $\Psi^y$ , avec  $[x_i] = \Gamma^x(\psi_i^x)$  pour  $i = 1, \dots, p^x$  et  $[y_j] = \Gamma^y(\psi_j^y)$  pour  $j = 1, \dots, p^y$  (cf. Section 3.2.2). De plus, supposons que les croyances sur  $\Psi^x$  et  $\Psi^y$  soient modélisées par des mesures de probabilité  $P^x$  et  $P^y$ , et que la mesure de probabilité jointe  $P^{x,y}$  sur  $\Psi^x \times \Psi^y$  soit égale au produit de  $P^x$  et  $P^y$  :

$$P^{x,y}(\psi_i^x, \psi_j^y) = P^x(\psi_i^x)P^y(\psi_j^y) = m_i^x m_j^y, \quad (3.43)$$

pour  $i = 1, \dots, p^x$  et  $j = 1, \dots, p^y$ . Si  $P^x$  et  $P^y$  correspondent à des mécanismes aléatoires de sélection des éléments de  $\Psi^x$  et  $\Psi^y$ , alors l'équation (3.43) signifie simplement que ces deux mécanismes sont indépendants.

Si on sait que  $\psi_i^x$  et  $\psi_j^y$  sont sélectionnés, alors tout ce qu'on connaît sur  $x$ ,  $y$  et  $z$  est que  $x \in [x_i]$ ,  $y \in [y_j]$ , et  $z = x \diamond y \in [x_i] \diamond [y_j]$ . Comme ceci est vrai avec une probabilité  $m_i^x m_j^y$ , on peut en déduire que la croyance sur  $z$  peut être représentée par la fonction de masse  $m^z$  définie comme suit :

$$m^z([z]) = \sum_{\{i,j|[x_i] \diamond [y_j] = [z]\}} m_i^x m_j^y, \quad (3.44)$$

pour tous les  $[z] \in \mathbb{IR}$ , généralisant ainsi (3.42).

Cette approche peut être étendue facilement au cas d'une fonction de  $n$  variables. Soient  $\mathbf{f}$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}$ ,  $z = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)$  et  $[\mathbf{f}]$  la fonction d'inclusion correspondante. Supposons que la croyance sur chaque variable  $x_i$  est représentée par une FM  $m^{x_i}$ . Si  $m^{x_i}([x_i]) = 1$  pour un intervalle  $[x_i]$ , alors la croyance sur  $z$  peut être représentée par :

$$[z] = [\mathbf{f}]([x_1], \dots, [x_n]). \quad (3.45)$$

Dans le cas général et en utilisant le même raisonnement que précédemment, on peut calculer la FM  $m^z$  sur  $z$  sous l'hypothèse d'indépendance par la relation

suivante :

$$m^z([z]) = \sum_{\{i_1, \dots, i_n | z = \mathbf{f}([x_{i_1}], \dots, [x_{i_n}])\}} m_{i_1}^{x_1} \dots m_{i_n}^{x_n}. \quad (3.46)$$

**Exemple 13.** Supposons que  $m^x$  et  $m^y$  soient données par :

$$m^x([1, 2]) = 0.7, \quad m^x([0, 3]) = 0.3,$$

$$m^y([0, 1]) = 0.6, \quad m^y([0, 2]) = 0.4.$$

Soit  $z$  une variable liée à  $x$  et  $y$  via l'équation  $z = x \exp(y)$ . En utilisant (3.46), la FM  $m^z$  sur  $z$  est donnée par :

$$m^z([1, 2] \cdot [\exp]([0, 1])) = m^z([1, 2e]) = 0.7 \times 0.6 = 0.42$$

$$m^z([1, 2] \cdot [\exp]([0, 2])) = m^z([1, 2e^2]) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$$

$$m^z([0, 3] \cdot [\exp]([0, 1])) = m^z([0, 3e]) = 0.3 \times 0.6 = 0.18$$

$$m^z([0, 3] \cdot [\exp]([0, 2])) = m^z([0, 3e^2]) = 0.3 \times 0.4 = 0.12.$$

### 3.3.3 Extension de l'AEB par la TFC

Considérons le système dynamique décrit par les équations :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}). \quad (3.48)$$

À la différence de l'analyse par intervalles développée dans la section 1.3.2 du chapitre 1, nous supposons ici que l'état initial  $\mathbf{x}_0$ , l'entrée  $\mathbf{u}_k$  et la mesure  $\mathbf{z}_k$  à l'instant  $k$  sont décrits par des fonctions de masse, notées respectivement  $m_0^{\mathbf{x}}$ ,  $m_k^{\mathbf{u}}$  et  $m_k^{\mathbf{z}}$ . En utilisant les outils de l'analyse par intervalles présentés dans la section 3.3.2, et la TFC, la méthode EEB décrite dans le chapitre 1 peut être étendue sous le cadre de la TFC.

On rappelle que l'algorithme de la méthode EEB calcule un pavé estimé pour l'état  $[\mathbf{x}_{k+1}]$  à chaque instant  $k + 1$  à partir de l'entrée  $[\mathbf{u}_k]$  et la sortie  $[\mathbf{z}_{k+1}]$ , en utilisant l'équation que nous rappelons ici :

$$[\mathbf{x}_{k+1}] = \mathcal{C}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{x}_k], [\mathbf{u}_k], [\mathbf{z}_{k+1}]). \quad (3.49)$$

La théorie présentée dans la section 3.3.2 va nous permettre d'étendre la fonction  $\mathcal{C}$  du domaine des intervalles vers le domaine des fonctions de masse.

Soient  $p_k^{\mathbf{x}}$ ,  $p^{\mathbf{u}}$  et  $p^{\mathbf{z}}$  les nombres d'éléments focaux associés aux masses  $m_k^{\mathbf{x}}$ ,  $m_k^{\mathbf{u}}$  et  $m_k^{\mathbf{z}}$ , respectivement. Par souci de simplification, nous supposons que  $m_k^{\mathbf{u}}$  et  $m_k^{\mathbf{z}}$  sont construites en utilisant la procédure décrite dans la section 3.3.1 avec un nombre constant d'éléments focaux. Le  $i$ -ème élément focal de  $m_k^{\mathbf{x}}$  est noté  $[\mathbf{x}_k^i]$ . La notation est similaire pour les autres FMs. En utilisant l'équation (3.46), l'équation (3.49) peut être généralisée de la manière suivante :

$$m_{k+1}^{\mathbf{x}}([\mathbf{x}]) = \sum_{\{i,j,\ell | [\mathbf{x}] = \mathcal{C}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{x}_k^i], [\mathbf{u}_k^j], [\mathbf{z}_{k+1}^\ell])\}} m_k^{\mathbf{x}}([\mathbf{x}_k^i]) \cdot m_k^{\mathbf{u}}([\mathbf{u}_k^j]) \cdot m_{k+1}^{\mathbf{z}}([\mathbf{z}_{k+1}^\ell]). \quad (3.50)$$

---

**Algorithm 4** Algorithme de la méthode BSE.
 

---

**Entrée :**  $m_k^x, m_k^u, m_{k+1}^z, p^u, p^z, q$ 
**Sortie :**  $m_{k+1}^x, [\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}], \widehat{\mathbf{x}}_{k+1}$ 

- 1: Lire les entrées  $\mathbf{u}_k$  et les erreurs associées. Déduire  $m_k^u$  avec  $p^u$  éléments focaux
  - 2: Lire les mesures  $\mathbf{z}_{k+1}$  et les erreurs associées. Déduire  $m_{k+1}^z$  avec  $p^z$  éléments focaux
  - 3:  $r \leftarrow 0$
  - 4: **Pour**  $i = 1$  à  $p_k^x$
  - 5:     **Pour**  $j = 1$  to  $p^u$
  - 6:         **Pour**  $\ell = 1$  to  $p^z$
  - 7:              $r \leftarrow r + 1$
  - 8:              $[\mathbf{x}_{k+1}^r] \leftarrow \mathcal{C}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{x}_k^i], [\mathbf{u}_k^j], [\mathbf{z}_{k+1}^\ell])$ .
  - 9:              $m_{k+1}^x([\mathbf{x}_{k+1}^r]) \leftarrow m_k^x([\mathbf{x}_k^i]) \cdot m_k^u([\mathbf{u}_k^j]) \cdot m_{k+1}^z([\mathbf{z}_{k+1}^\ell])$
  - 10:         **Fin Pour**
  - 11:     **Fin Pour**
  - 12: **Fin Pour**
  - 13: Normalisation de  $m_{k+1}^x$
  - 14: Simplification de  $m_{k+1}^x$  afin de conserver  $q$  éléments focaux.
  - 15: % Calcul de l'espérance pignistique et des espérances haute et basse %
  - 16:  $[\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}] \leftarrow [\mathbb{E}](m_{k+1}^x)$
  - 17:  $\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} \leftarrow \mathbb{E}(m_{k+1}^x)$
- 

L'algorithme 4 présente les différentes parties de la méthode. Comme on peut le voir, la méthode BSE dépend de trois paramètres principaux qui sont les nombres  $p^u$  et  $p^z$  d'éléments focaux pour l'entrée et la mesure et  $q$ , le nombre maximal d'éléments focaux de  $m_{k+1}^x$  utilisé dans la méthode de simplification. Dans les étapes 1 et 2, les FMs sur l'entrée à l'instant  $k$  et la mesure à l'instant  $k + 1$  sont construites en utilisant la procédure décrite dans la section 3.3.1. La méthode EEB décrite dans l'Algorithme 3 du chapitre 1 est ensuite appliquée pour chaque choix de  $[\mathbf{x}_k^i]$  de  $m_k^x$ ,  $[\mathbf{u}_k^j]$  de  $m_k^u$  et  $[\mathbf{z}_{k+1}^\ell]$  de  $m_{k+1}^z$  (lignes 4-12). La masse associée à l'élément focal  $[\mathbf{x}_{k+1}^r]$  de  $m_{k+1}^x$  est le produit des masses associées à  $[\mathbf{x}_k^i]$ ,  $[\mathbf{u}_k^j]$  et  $[\mathbf{z}_{k+1}^\ell]$  (ligne 9). Une fois la fonction de masse  $m_{k+1}^x$  calculée, on applique l'étape de normalisation (ligne 13) et l'étape de simplification (ligne 14). L'étape de normalisation consiste à diviser la masse de croyance de chaque élément focal non vide par  $1 - m_{k+1}^x(\emptyset)$  et à annuler la masse de croyance  $m_{k+1}^x(\emptyset)$  de l'ensemble vide. Enfin, une estimation ponctuelle et un intervalle pignistique sont calculés en utilisant les équations (3.33) et (3.34).

Notons que la méthode BSE revient à appliquer la méthode EEB pour chaque combinaison possible des différents éléments focaux de l'état, de l'entrée et de la mesure. Le nombre maximal d'exécutions de l'algorithme EEB est donc égal à  $p^u p^z q$ . On voit que le choix de ces paramètres est critique pour le contrôle du temps d'exécution de la méthode BSE. Une étude expérimentale de l'influence de ces paramètres sur les résultats sera présentée dans la section 3.4.2.1.

Comme mentionné dans la section 3.3.2, l'équation (3.50) résulte de l'hypothèse d'indépendance entre  $m_k^x([\mathbf{x}_k^i])$ ,  $m_k^u([\mathbf{u}_k^j])$  et  $m_{k+1}^z$ . Cette hypothèse peut être

rapprochée de l'hypothèse d'indépendance stochastique, généralement retenue dans la conception des modèles avec perturbations aléatoires.

Enfin, notons que l'algorithme BSE risque d'échouer si, à un instant  $k$ , l'étape 8 de la procédure EEB ne donne que des pavés vides, la normalisation de l'étape 13 étant alors indéfinie. Pour éviter une telle situation, on peut affaiblir  $m_k^u$  et  $m_{k+1}^x$  par un coefficient  $\varepsilon$  en utilisant l'équation (3.41).

### 3.3.4 Exemple illustratif

Considérons un système dynamique représentant le déplacement linéaire d'un véhicule suivant l'axe  $x$ . La position du véhicule à chaque instant  $k$  peut être calculée en utilisant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + u_k \cdot T \\ z_{k+1} = x_{k+1}, \end{cases} \quad (3.51)$$

où  $u_k$  est la vitesse du véhicule mesurée par un capteur odométrique avec une incertitude de  $\pm 3m/s$ ,  $z_{k+1}$  est la position mesurée du véhicule obtenue par un récepteur GPS et  $T$  est la période d'échantillonnage, supposé égale à  $1s$ .

À chaque instant  $k$ , on reçoit les fonctions de masses  $m_k^u$  sur la vitesse du véhicule et  $m_k^z$  sur la position observée. L'état initial du véhicule est décrit par une FM notée  $m_0^x$ .

Supposons qu'initialement,  $m_0^x$ ,  $m_0^u$  et  $m_1^z$  soient données par les expressions suivantes :

$$m_0^x([-6, 6]) = 1/2, \quad m_0^x([-3, 3]) = 1/2$$

$$m_0^u([17, 23]) = 1,$$

$$m_1^z([27, 33]) = 1/2, \quad m_1^z([24, 39]) = 1/2.$$

Nous allons détailler le calcul de  $m_1^x$  représentant la position du véhicule à l'instant  $k = 1$ . Comme  $m_0^x$  et  $m_1^z$  ont deux éléments focaux et  $m_0^u$  en possède un seul, la méthode EEB doit être exécutée quatre fois, correspondant aux différentes façons de choisir les éléments focaux des trois FMs.

**Choix 1 :**  $[x_0^1] = [-6, 6]$ ,  $[z_1^1] = [27, 33]$ . L'étape de propagation de la PRP donne :

$$[x_1] \leftarrow (-\infty, +\infty) \cap ([-6, 6] + [17, 23]) = [11, 29],$$

$$[z_1] \leftarrow [27, 33] \cap [11, 29] = [27, 29],$$

$$[x_1^1] \leftarrow [27, 29].$$

On peut remarquer que cet intervalle ne peut plus être contracté. La masse correspondante est :

$$m_1^x([27, 29]) = 1/2 \times 1/2 = 1/4.$$

**Choix 2 :**  $[x_0^1] = [-6, 6]$ ,  $[z_1^2] = [24, 39]$ . L'étape de propagation de la PRP donne :

$$\begin{aligned} [x_1] &\leftarrow (-\infty, +\infty) \cap ([-6, 6] + [17, 23]) = [11, 29], \\ [z_1] &\leftarrow [24, 39] \cap [11, 29] = [24, 29], \\ [x_1^2] &\leftarrow [24, 29]. \end{aligned}$$

On peut remarquer que cet intervalle ne peut plus être contracté. La masse correspondante est :

$$m_1^x([24, 29]) = 1/2 \times 1/2 = 1/4.$$

**Choix 3 :**  $[x_0^2] = [-3, 3]$ ,  $[z_1^1] = [27, 33]$ . L'étape de propagation de la PRP donne :

$$\begin{aligned} [x_1] &\leftarrow (-\infty, +\infty) \cap ([-3, 3] + [17, 23]) = [11, 29], \\ [z_1] &\leftarrow [27, 33] \cap [14, 26] = \emptyset, \\ [x_1^3] &\leftarrow \emptyset. \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$[x_1^3] = \emptyset.$$

et

$$m_1^x(\emptyset) = 1/2 \times 1/2 = 1/4.$$

**Choix 4 :**  $[x_0^2] = [-3, 3]$ ,  $[z_1^2] = [24, 39]$ . L'état prédit est le même qu'auparavant :  $[x_1] = [14, 26]$ , et l'intersection avec  $[z_1^2]$  donne :

$$[z_1] \leftarrow [24, 39] \cap [14, 26] = [24, 26].$$

On a alors  $[x_1^4] = [24, 26]$ . De nouveau, cet intervalle ne peut plus être contracté par l'algorithme PRP. La masse correspondante est :

$$m_1^x([24, 26]) = 1/2 \times 1/2 = 1/4.$$

Nous obtenons ainsi une FM sur l'état avec quatre éléments focaux, dont l'un est vide. Après une étape de normalisation, nous obtenons :

$$m_1^x([27, 29]) = 1/3, \quad m_1^x([24, 29]) = 1/3 \text{ et } \quad m_1^x([24, 26]) = 1/3.$$

L'espérance intervalle associée à  $x_1$  est

$$[\mathbb{E}](m_1^x) = ([27, 29] + [24, 29] + [24, 26])/3 = [25, 28],$$

et l'espérance pignistique est donnée par :

$$\mathbb{E}(m_1^x) = (28 + 26.5 + 25)/3 = 26.5.$$

## 3.4 Application au problème de localisation routière

Dans cette section, nous appliquons la méthode BSE introduite précédemment au problème de localisation routière exposé dans le chapitre 2. La position du véhicule est représentée par un vecteur d'état  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, \theta_k)^T$ . Le modèle d'évolution est le suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta_{S,k} \cos(\theta_k + \frac{\delta_{\theta,k}}{2}) \\ y_{k+1} = y_k + \delta_{S,k} \sin(\theta_k + \frac{\delta_{\theta,k}}{2}) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \delta_{\theta,k}, \end{cases} \quad (3.52)$$

et le modèle d'observation :

$$\begin{cases} x_{GPS,k+1} = x_{k+1} \\ y_{GPS,k+1} = y_{k+1}, \end{cases} \quad (3.53)$$

où  $\delta_{S,k}$  et  $\delta_{\theta,k}$  sont le déplacement et la rotation élémentaires du véhicule. Ils sont fournis avec une grande précision par un gyromètre optique et un capteur ABS.  $x_{GPS,k+1}$  et  $y_{GPS,k+1}$  sont les coordonnées cartésiennes du véhicule fournies par le récepteur GPS après conversion de la longitude et la latitude du point en question. Notons ici que le cap de véhicule  $\theta_k$  n'est pas observé. En utilisant les mêmes notations que dans la section 3.3.3, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{u}_k = (\delta_{S,k}, \delta_{\theta,k})^T,$$

et

$$\mathbf{z}_k = (x_{GPS,k+1}, y_{GPS,k+1})^T.$$

### 3.4.1 Cadre expérimental

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus en utilisant des mesures réelles collectées à l'aide d'un véhicule expérimental [36]. Ce véhicule est équipé de deux récepteurs GPS : un *Trimble AgGPS 132* utilisé pour estimer la position du véhicule en temps réel et un *Thales Navigation* pour estimer les erreurs du positionnement. Le récepteur *Thales* est utilisé en mode post-traitement PPK<sup>1</sup> avec une base locale (Trimble 7400) afin de fournir des positions de référence à une fréquence de 1 Hz. Pour éviter toute confusion, les positions de référence sont notées PPK alors que le terme GPS est réservé aux positions fournies par le récepteur GPS *Trimble AgGPS 132*. La Figure 3.6 montre la trajectoire du véhicule dans un repère local, dont le centre est le point de départ de l'acquisition. Cet essai a été effectué avec le véhicule du laboratoire Heudiasyc sur une piste à Versailles avec une vitesse moyenne de 50 km/h. La longueur de la trajectoire est de 4.7 km. Les Figures 3.7 et 3.8 montrent les écart-types,  $\sigma_{x,k}$  et  $\sigma_{y,k}$ , associés aux coordonnées  $x_{GPS,k}$  et  $y_{GPS,k}$  fournies par le récepteur GPS.

---

<sup>1</sup>Post-Processed Kinematic.

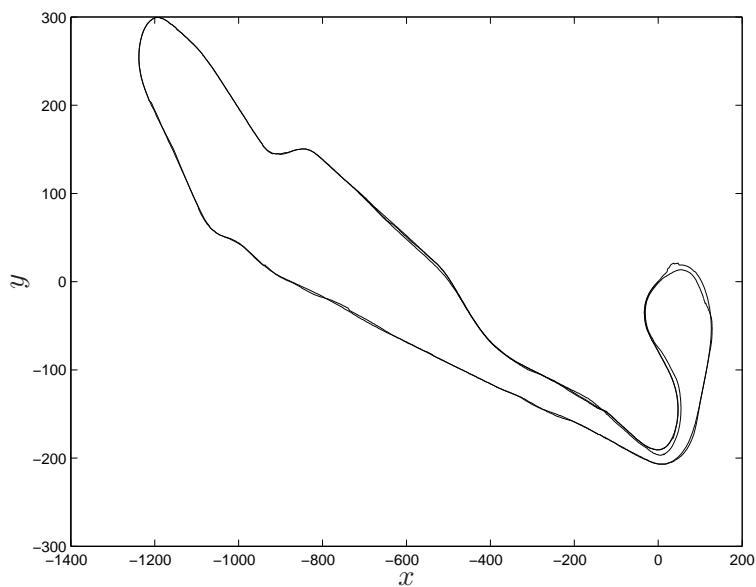
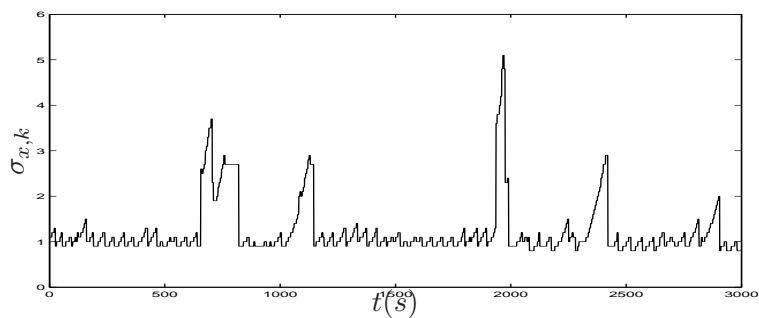
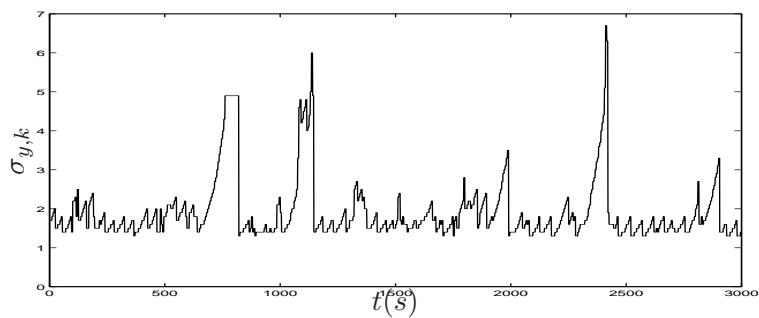


Figure 3.6 – Trajectoire du véhicule dans un repère local.

Figure 3.7 – Ecart-type des mesures GPS suivant  $x$ , en fonction de temps.Figure 3.8 – Ecart-type des mesures GPS suivant  $y$ , en fonction de temps.

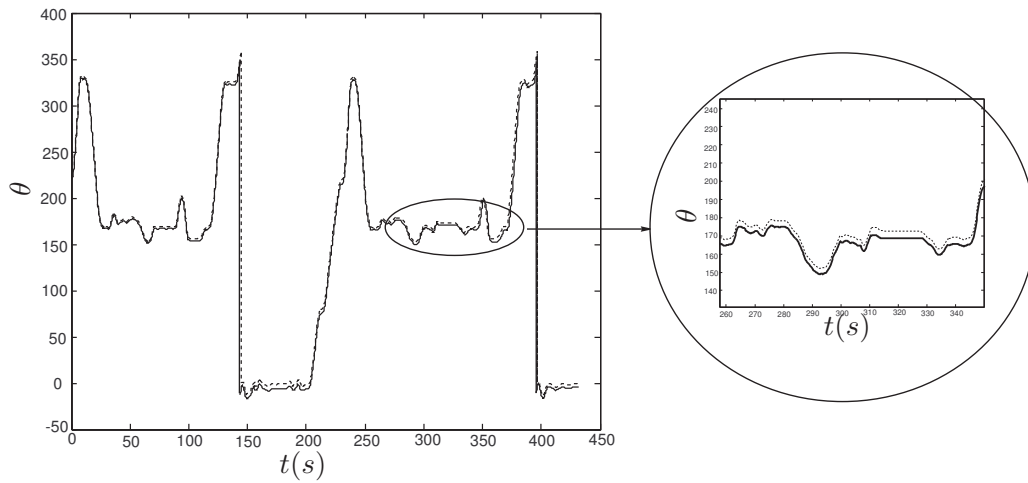


Figure 3.9 – Cap du véhicule. Le cap résultant de la méthode BSE est illustré par des lignes continues alors que la valeur exacte du cap est représentée par des lignes en pointillé.

### 3.4.2 Résultats

Comme dans [37] et [1], les bornes d'erreur sur le GPS sont prises égales à plus ou moins trois fois l'écart-type calculé en temps réel par le récepteur. Nous supposons que le mode de l'erreur sur le GPS est égal à zéro ; les FMs  $m_0^x$  et  $m_k^z$  sont construites pour approximer les distributions triangulaires de possibilité comme décrit dans la Section 3.3.1. Les bornes d'erreur sur le vecteur d'entrée  $\mathbf{u}_k$  sont calculées à partir de tests spécifiques en statique sur les capteurs ABS et gyromètre. Les distributions triangulaires de possibilité pour ce vecteur sont ainsi construites comme pour le GPS. Les FMs associées sont calculées avec  $p^z = 4$ ,  $p^u = 2$  et  $p^{x_0} = 6$ . Notons que, le cap du véhicule n'étant pas observé directement, le support de  $\theta_0$  est initialisé à l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et le mode est initialisé à  $\pi$ . Pour cette application, le nombre maximal d'éléments focaux associés à l'état a été fixé à  $q = 20$ .

La Figure 3.9 illustre le cap de véhicule obtenu par la BSE et sa valeur exacte. Comme le montre cette figure, notre méthode est capable d'estimer la variable  $\theta$  avec une bonne précision de l'ordre de 6 degrés.

La Figure 3.10 montre les éléments focaux associés à  $m_k^x$  aux deux instants  $k = 10$  et  $k = 100$ . Seuls les éléments focaux de masse supérieure à 0.05 sont représentés.

L'effet de la méthode de simplification est illustré sur la Figure 3.11, qui représente les éléments focaux de  $m_k^x$  avant et après l'application de la méthode de simplification.

#### 3.4.2.1 Sensibilité de la méthode BSE

Comme cela a été mentionné précédemment, la méthode BSE dépend de plusieurs paramètres qui sont : le nombre  $p^z$  d'éléments focaux associés aux mesures, le nombre  $p^u$  d'éléments focaux associés à l'entrée et le nombre maximal  $q$  d'éléments focaux associés à l'état.



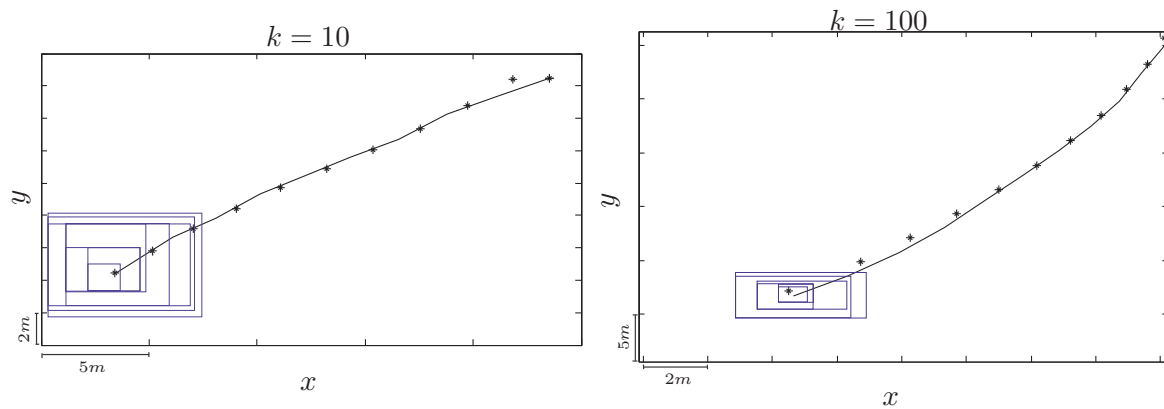


Figure 3.10 – Éléments focaux associés à  $m^{\mathbf{x}^k}$  aux instants  $k = 10$  et  $k = 100$ . La trajectoire du véhicule fournie par le GPS est représentée par un trait plein alors que les positions obtenues par la méthode BSE sont représentées par des étoiles (\*). Les éléments focaux ayant de masse supérieure à 0.05 sont représentés par des pavés.

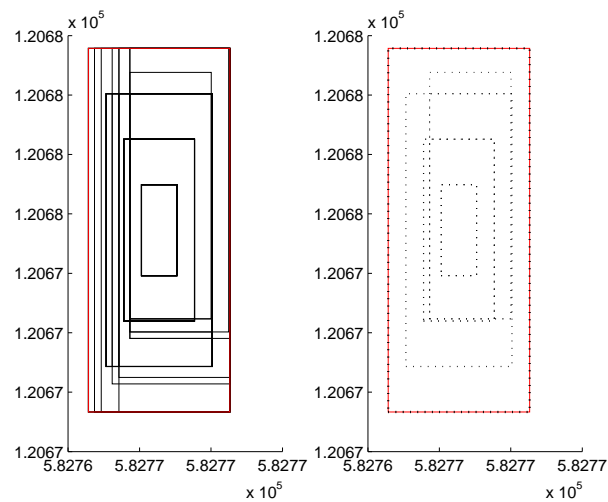


Figure 3.11 – Éléments focaux de  $\mathbf{x}_k$  avant (gauche) et après (droite) l'application de la méthode de *simplification*.

Le choix de ces paramètres dépend en premier lieu des caractérisations de l'application en cours (temps réels, complexité des modèles, etc.). Dans la suite de cette section, nous étudions l'influence de ces paramètres sur l'application de la localisation du véhicule. Cette influence est étudiée suivant deux critères : la *précision* et le *temps d'exécution*.

Tableau 3.6 – Erreurs quadratiques moyennes sur  $x$  et  $y$  (en  $m^2$ ), et le temps d'exécution d'une étape (en ms) pour la BSE.

$p^z$	$p^u$	$q$	Temps d'exécution	EQM sur $x$	EQM sur $y$
1	1	1	136	0.123	0.249
2	1	10	158	0.121	0.240
3	1	10	198	0.120	0.236
4	1	10	241	0.120	0.229
2	2	10	199	0.121	0.236
2	4	10	236	0.120	0.229
2	6	10	316	0.120	0.221
4	1	15	386	0.120	0.225
4	1	20	409	0.118	0.199
4	1	22	426	0.118	0.197
4	1	25	452	0.116	0.197

Le tableau 3.6 montre les temps d'exécution et les erreurs quadratiques moyennes suivant  $x$  et  $y$  associées aux différents choix de  $p^z$ ,  $p^u$  et  $q$ . Les valeurs  $p^z = 1$ ,  $p^u = 1$  et  $q = 1$  correspondent à la méthode EEB. Ces résultats montrent que le paramètre  $q$  a une grande influence sur le temps d'exécution de la méthode BSE et sur sa performance. Cependant, l'augmentation de  $q$  au-delà de 20 n'améliore pas significativement la précision de l'estimation.

### 3.4.2.2 Comparaison avec l'approche à erreurs bornées

La Figure 3.12 montre les distances en mètres entre les valeurs obtenues par le GPS, les méthodes EEB et BSE, et les positions exactes du véhicule. Comme le montre cette figure, les positions obtenues par la méthode BSE sont les plus précises. Ce résultat est confirmé par le tableau 3.7, qui donne les erreurs quadratiques moyennes sur  $x$  et  $y$  pour le GPS, la BSE et l'EEB.

La Figure 3.13 représente les intervalles d'erreurs des méthodes EEB et BSE. Comme le montre cette figure, la valeur 0 appartient toujours aux intervalles d'erreurs, ce qui confirme que les deux méthodes conservent la propriété de garantie (la solution appartient toujours aux pavés calculés). Notons que les intervalles d'erreurs de la méthode crédibiliste sont plus étroits, ce qui semble indiquer que la méthode BSE parvient à estimer plus précisément les positions du véhicule tout en garantissant la solution, propriété essentielle dans les approches de types à erreurs bornées.

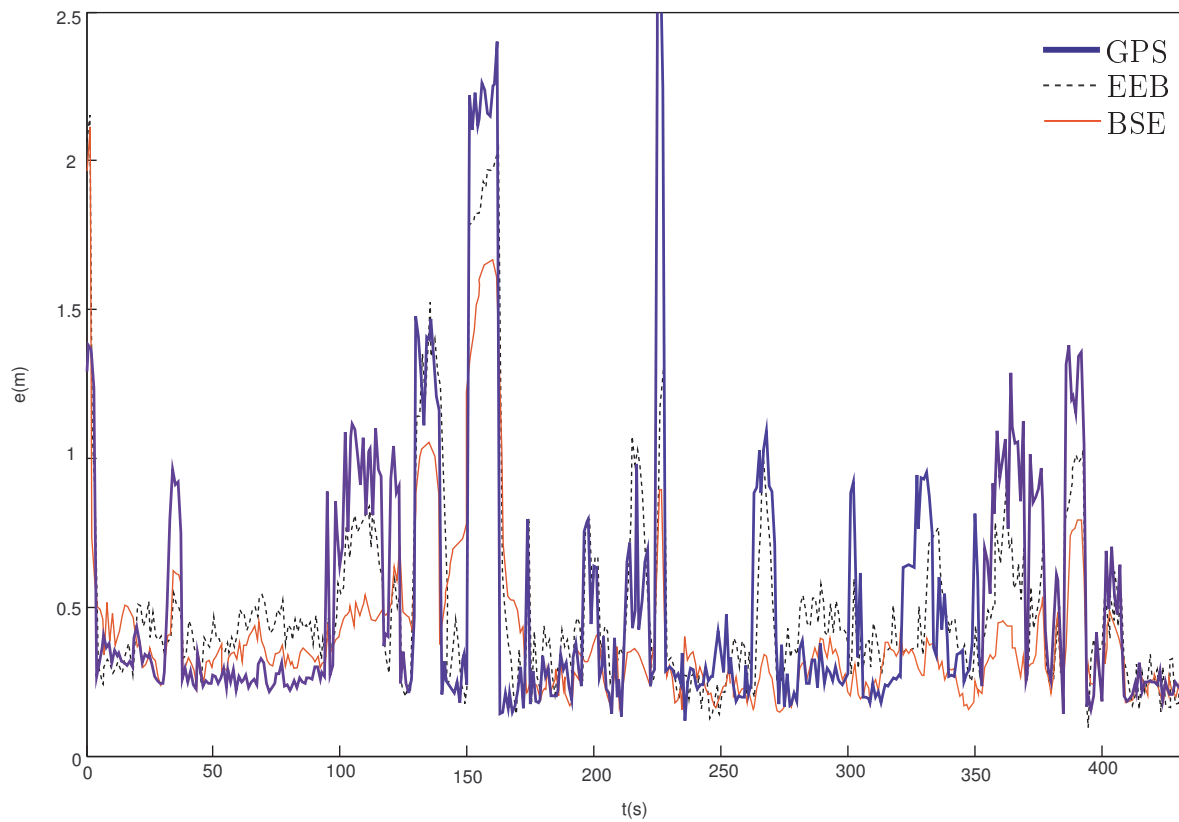


Figure 3.12 – Distances entre les valeurs estimées et les positions exactes du véhicule pour le GPS, l'EEB et la BSE.

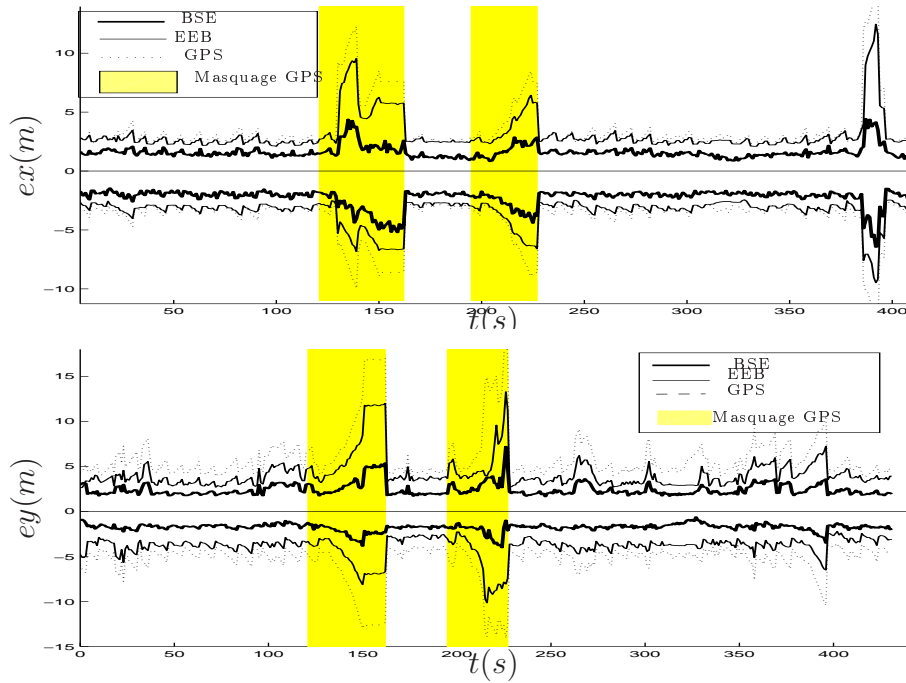


Figure 3.13 – Intervalles d’erreurs sur  $x$  et  $y$  pour le GPS (ligne en pointillé), la méthode BSE (ligne en gras) et la méthode EEB (traits pleins).

### 3.4.2.3 Comparaison avec la méthode de filtrage particulaire

Tableau 3.7 – Erreurs quadratiques moyennes (EQM) sur  $x$  et  $y$ , et temps d’exécution pour le GPS, le FP et la BSE

	GPS	PF(3000)	PF(2000)	PF(1000)	EEB	BSE (15)
EQM sur $x$ ( $m^2$ )	0.134	0.119	0.121	0.125	0.123	0.120
EQM sur $y$ ( $m^2$ )	0.374	0.215	0.232	0.243	0.249	0.225
Temps d’exécution pour une étape (ms)	-	639	526	401	136	386

Le tableau 3.7 présente une comparaison entre les erreurs quadratiques moyennes suivant  $x$  et  $y$ , entre le FP et la méthode BSE. Dans ce tableau nous indiquons les résultats du FP pour  $n = 3000, 2000$  et  $1000$  particules et de la méthode BSE pour  $p_z = 4, p_u = 1, p_{x_0} = 6$  et  $q = 15$ . On peut remarquer que la méthode crédibiliste présente une précision comparable à celle du FP mais avec un temps d’exécution plus faible.

Dans la Figure 3.14, nous montrons les distances entre les positions exactes du véhicule et celles obtenues par le GPS, le FP (2000 particules) et la BSE. Comme on le voit, les résultats sont comparables.

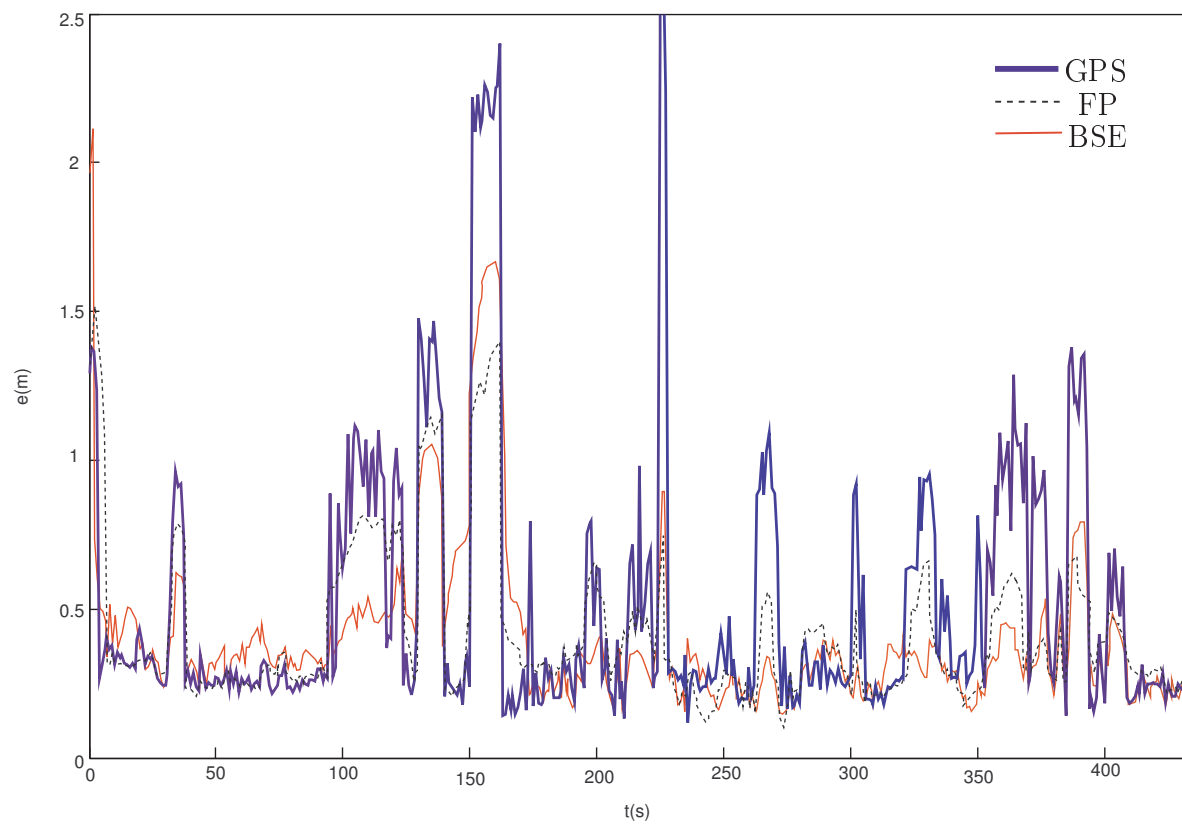


Figure 3.14 – Distances en mètres entre les valeurs estimées et la position exacte du véhicule pour le GPS, le FP et la BSE.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle méthode pour l'estimation d'état d'un système dynamique. Cette méthode est une extension de l'EEB dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance. Elle utilise des FMs pour modéliser les bruits associés à différentes entrées et mesures. Ces FMs sont constituées de pavés avec des masses associées. Cette méthode présente l'avantage d'estimer précisément le vecteur d'état du système dynamique tout en conservant la propriété de garantie de l'EEB. Elle est aussi indépendante de la non linéarité du système, et son temps d'exécution est adapté aux applications en temps réel.

Dans le chapitre suivant, nous allons aborder le problème d'estimation d'état d'un système multi-modèles en utilisant la TFC.

---

# *Approche crédibiliste de l'estimation d'état d'un système multi-modèles*

---

## 4.1 Introduction

Un système dynamique multi-modèles est un système dont le comportement peut évoluer selon différents modes. Par exemple, une voiture est un système dynamique dont le comportement peut être décrit par plusieurs modèles : en *arrêt*, en *déplacement à vitesse constante*, en *accélération*, en *freinage*, etc. Ces différents modèles d'évolution sont souvent liés par une *fonction de transition*, qui permet de décrire le changement du comportement du système au cours du temps. Par exemple, elle peut indiquer que la transition entre les modèles « véhicule en *déplacement à vitesse constante* » et « véhicule à l'*arrêt* » est impossible alors que la transition entre les modèles « véhicule en *freinage* » et « véhicule à l'*arrêt* » est probable.

L'analyse d'un système multi-modèles a pour objectif de déterminer son modèle d'évolution et de calculer son état à chaque instant en utilisant la fonction de transition entre deux instants consécutifs, ainsi que les états aux instants précédents et les mesures fournies par des capteurs.

L'estimation d'état d'un système multi-modèles est généralement traitée par des approches probabilistes connues sous le nom d'approches multi-modèles. Ces approches utilisent un ensemble de modèles candidats (MCs) et un banc de filtres élémentaires mis en oeuvre de manière parallèle. Chaque filtre est supposé être adapté à un MC. L'incertitude sur les modèles d'évolution est représentée par une distribution de probabilité, décrivant les probabilités d'activation des MCs. Dans les systèmes multi-modèles, la transition entre différents modèles est représentée classiquement par une chaîne de Markov. En utilisant les estimations fournies par les filtres élémentaires, les mesures fournies par les capteurs et la fonction de transition entre les MCs, une estimation finale de l'état du système peut être calculée.

Les méthodes d'estimation multi-modèles ont récemment fait l'objet d'une attention particulière du fait de leur capacité à modéliser et manipuler l'incertitude sur le modèle d'évolution. Ces méthodes sont basées sur la décomposition des systèmes complexes en sous-systèmes plus simples, ce qui facilite la modélisation [58]. Elles ont été initiées par Magill dans [61], puis améliorées par Ackerson dans [2] et utilisées dans de nombreux domaines tels que le suivi de cibles [9, 16], la détection de défauts, et bien d'autres.

Dans [82, 83], les auteurs ont traité le problème d'estimation d'état d'un système multi-modèles avec deux modèles candidats en utilisant la TFC. Ils ont développé une méthode de reconnaissance de séquences d'états basée sur un filtre temporel crédibiliste. Ce filtre utilise les modèles à sauts et exploite le conflit entre les modèles d'évolutions et les données disponibles afin de gérer la commutation entre les différents modèles possibles.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode crédibiliste d'estimation d'état d'un système multi-modèles, notée BIMM (*Belief Interacting Multiple Model*) [71]. Cette méthode est une alternative aux méthodes existantes, basée sur une modélisation crédibiliste de la transition entre les MCs. Ceci rend possible la modélisation des données manquantes ainsi que la résolution du problème du monde ouvert, dans lequel le vrai modèle n'appartient pas nécessairement à l'ensemble des MCs.

Ce chapitre est divisé en deux parties principales. Dans la première partie, nous faisons un rappel sur les approches multi-modèles, tout en présentant en détail la méthode *Interacting Multiple Model* qui est l'une des méthodes les plus utilisées. Dans la seconde partie, nous introduisons le principe de la méthode crédibiliste proposée et nous présentons les résultats obtenus pour le problème de localisation routière.

## 4.2 Rappel sur l'approche multi-modèles

### 4.2.1 Introduction

Les premiers travaux sur les approches multi-modèles, connus sous le terme de *autonomous multiple model* (AMM) [58], ont traité le cas d'un système multi-modèles sans commutation, c'est-à-dire, le cas où le modèle d'évolution est inconnu parmi un ensemble connu de MCs, mais invariant dans le temps. Dans l'AMM, les filtres élémentaires des MCs opèrent individuellement sans aucune interaction entre eux. Par conséquent, l'utilisation de ces méthodes n'est pas adaptée au cas des systèmes à commutations fréquentes. Afin de prendre en compte les commutations entre les modèles d'un système, une deuxième génération de méthodes multi-modèles, connue sous le nom de *Cooperative Multiple Models* (CMMs), a été développée. Les méthodes *Generalized Pseudo-Bayesian* (GPB) [58] et *Interacting Multiple Model* (IMM) s'inscrivent dans ce cadre [16]. Les CMMs rendent possible la commutation d'un MC à un autre via un processus markovien.

La structure générale des approches multi-modèles est illustrée sur la Figure 4.1, inspirée de [58]. Dans cette figure, l'ensemble des MCs est supposé contenir deux filtres. Comme le montre la figure, la structure générale des approches MM est composée de trois parties. La première partie consiste dans l'étape de *coopération*, encore appelée *étape d'interaction*, qui distingue les méthodes multi-modèles des méthodes d'estimation classiques. Dans cette étape, les filtres élémentaires doivent coopérer les uns avec les autres. L'entrée de chaque filtre à l'instant  $k$  dépend ainsi des comportements des autres filtres à l'instant précédent  $k - 1$  via une phase de réinitialisation. Cette phase sert à créer une interaction entre les différents MCs.



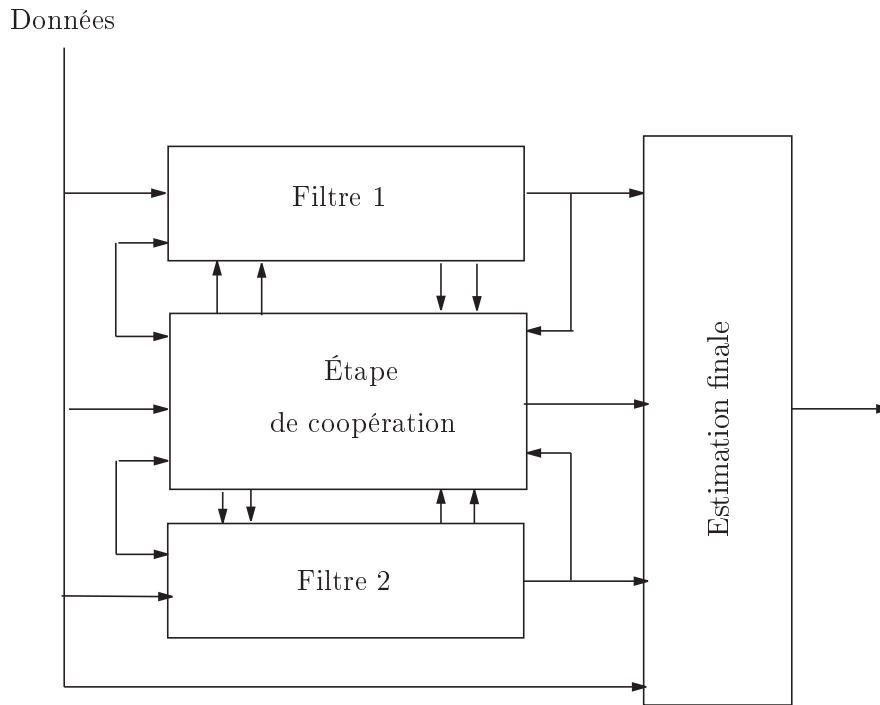


Figure 4.1 – Structure générale de l'approche multi-modèles dans le cas de deux MCs.

Plusieurs configurations de réinitialisation sont possibles ; certaines sont présentées dans [7, 8]. Notons que cette étape n'existe pas dans les estimateurs multi-modèles de type AMM.

La deuxième partie correspond à l'étape de *filtrage*. Dans cette étape, les filtres élémentaires sont appliqués indépendamment afin de fournir des estimations de l'état du système. Enfin, la troisième partie concerne l'estimation finale, dans laquelle on fusionne les états estimés issus des filtres élémentaires associés aux MCs.

Notons que la performance des méthodes multi-modèles dépend de l'ensemble des MCs utilisés ainsi que du choix des filtres élémentaires. Ceux-ci sont généralement basés sur l'observation du comportement physique du système. S'ils sont mal choisis, on risque d'obtenir une estimation aberrante et la méthode risque de diverger [7, 58]. Dans les méthodes d'estimation multi-modèles, les contraintes sur le choix des filtres élémentaires sont similaires à celles évoquées dans le chapitre 1. On peut les résumer en remarquant que le choix d'un filtre dépend de la nature de l'information disponible et des objectifs de l'application. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux systèmes à commutations fréquentes. Ces commutations sont souvent imprévisibles. Le comportement d'un tel système peut être modélisé par une chaîne de Markov sur l'ensemble des modèles possibles représentant le comportement du système. Dans la section suivante, nous choisissons de décrire l'une des méthodes les plus connues parmi les approches multi-modèles : la méthode *Interacting Multiple Model* (IMM).

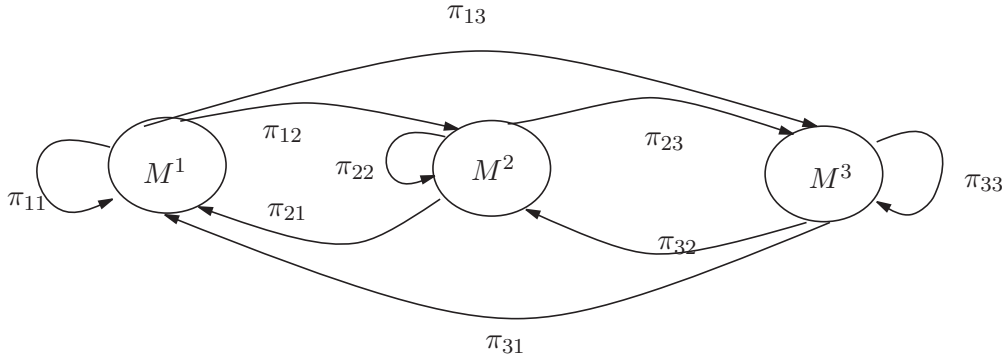


Figure 4.2 – Système à commutation markovienne avec trois MCs.

## 4.2.2 Interacting multiple model

L’IMM est un estimateur de type multi-modèles proposée par Blom en 1986 [15]. Cette méthode considère le cas d’un système multi-modèles dont les commutations entre modèles sont régies par un processus markovien.

L’IMM consiste à sélectionner un ensemble de modèles candidats (MCs) et à utiliser un banc de filtres élémentaires dont chaque filtre est adapté à un modèle particulier. L’évaluation des résidus des filtres permet de détecter le modèle actif et de calculer une estimation de l’état du système. La méthode IMM est basée sur les deux hypothèses suivantes :

1. On travaille toujours dans un monde fermé avec un nombre fini de MCs ;
2. Les probabilités de commutations entre les différents MCs sont connues, constantes et représentées par une chaîne de Markov.

Une chaîne de Markov est un processus stochastique dans lequel la prédiction d’un événement futur à partir de l’événement présent ne nécessite pas la connaissance du passé. Une chaîne de Markov à espace d’états discret est une séquence  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  de variables aléatoires pouvant prendre un nombre fini d’états  $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ . La distribution de probabilité de  $\mathbf{x}_{k+1}$  conditionnellement aux états passés est donnée par  $P(\mathbf{x}_{k+1} = A/\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = P(\mathbf{x}_{k+1} = A/\mathbf{x}_k)$  pour tout  $A \in S$ . Dans une chaîne de Markov le passage d’un état  $A_i$  à l’instant  $k$  à un état  $A_j$  à l’instant  $k+1$  se réalise avec une probabilité  $\pi_{ij} \in [0, 1]$  connue. Les différentes  $\pi_{ij}$  vérifient  $\sum_j \pi_{ij} = 1$  et forme une matrice appelée matrice de transition de terme général

$$\pi_{ij} = P(\mathbf{x}_{k+1} = A_j/\mathbf{x}_k = A_i).$$

La Figure 4.2, inspirée de [42], présente un exemple de système à commutation markovienne avec trois modèles possibles ( $M^1, M^2, M^3$ ). Dans cette figure, la commutation entre les modèles est régie par des probabilités  $\{\pi_{ij}\}_{i,j=1}^3$ .

Considérons un système multi-modèles à commutation markovienne dont le comportement physique peut être décrit par  $r$  MCs différents. L’ensemble de ces modèles est noté par  $S = \{M^1, M^2, \dots, M^r\}$ . Les probabilités de commutation entre les MCs  $M^i$  et  $M^j$  sont :  $\pi_{ij} = p(M_k = M^j/M_{k-1} = M^i)$ , où  $M_k$  est le vrai

modèle durant l'intervalle de temps  $(k-1, k]$ . Les différentes probabilités  $\pi_{ij}$  peuvent être représentées par une matrice de transition  $\Pi$  donnée par :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1r} \\ \vdots & & & \\ \pi_{i1} & \pi_{i2} & \cdots & \pi_{ir} \\ \vdots & & & \\ \pi_{r1} & \pi_{r2} & \cdots & \pi_{rr} \end{pmatrix}$$

La commutation entre les MCs peut se faire à n'importe quel instant dans  $(k-1, k]$ . Dans la modélisation de l'IMM, cette commutation se fait juste après la dernière mise à jour d'une mesure, c'est-à-dire à l'instant noté  $(k-1)^+$  [7]. L'incertitude sur les modèles d'évolution est décrite par les probabilités d'activation des MCs notées  $\mu_{k-1} = (\mu_{k-1}^1, \dots, \mu_{k-1}^r)^T$ . Le système dynamique, pour un MC  $M^j$ , est représenté entre  $(k-1, k]$  par les équations suivantes :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}^j(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}^j, \mathbf{v}_{k-1}^j) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{g}^j(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k^j), \quad (4.2)$$

où :

- $\mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{z}_k$  représentent l'état et la mesure à l'instant  $k$  ;
- $\mathbf{f}^j$  et  $\mathbf{g}^j$  sont les modèles d'évolution et d'observation associés à  $M^j$  ;
- $\mathbf{u}_k^j$  est le vecteur d'entrée associé à  $M^j$  ;
- $\mathbf{v}_{k-1}^j$  et  $\mathbf{w}_k^j$  sont les bruits de modèle et de mesure associés à  $M^j$ , supposés gaussiens, mutuellement indépendants, de moyenne nulle et de matrices de covariance respectives  $Q_{k-1}^j$  et  $R_k^j$ .

La structure générale de l'IMM est illustrée sur la Figure 4.3. Les états estimés et les matrices de covariance associés aux différents MCs à l'instant  $k-1$  sont représentés par  $\{\widehat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i, \widehat{P}_{k-1/k-1}^i\}_{i=1}^r$ . Dans la phase de coopération, les différents MCs communiquent afin de calculer les nouvelles entrées des filtres élémentaires  $\{\bar{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i, \bar{P}_{k-1/k-1}^i\}_{i=1}^r$ , sur la base des probabilités d'activation  $\mu_{k-1}$  et de la matrice de transition  $\Pi$ . Les différents filtres sont ensuite appliqués en utilisant la mesure  $\mathbf{z}_k$ , afin de calculer les états et les matrices de covariance  $\{\widehat{\mathbf{x}}_{k/k}^i, \widehat{P}_{k/k}^i\}_{i=1}^r$  correspondant aux MCs. Les probabilités  $\mu_{k-1}$  d'activation des MCs sont mises à jour à partir de  $\Pi$  et des vraisemblances des MCs  $\{\Lambda_k^i\}_{i=1}^r$ , pour former de nouvelles probabilités d'activation à l'instant  $k$ , notées  $\mu_k$ . En utilisant  $\mu_k$  et  $\{\widehat{\mathbf{x}}_{k/k}^i, \widehat{P}_{k/k}^i\}_{i=1}^r$ , des estimations finales de l'état du système  $\widehat{\mathbf{x}}_{k/k}$  et de la matrice de covariance associée  $\widehat{P}_{k/k}$  peuvent être calculées. Dans la suite, nous présentons plus en détail les différentes étapes de l'IMM.

#### 4.2.2.1 Initialisation

À l'instant  $k=0$ , l'état associé à chaque MC  $M^j$  est supposé gaussien, de moyenne  $\mathbf{x}_0^j$  et de covariance  $P_0^j$ . Ces valeurs a priori, ainsi que les probabilités d'activation  $\{\mu_0^j\}_{j=1}^r$ , sont supposées connues. Les probabilités de commutations sont définies par la matrice de transition  $\Pi$ , supposée invariante dans le temps.

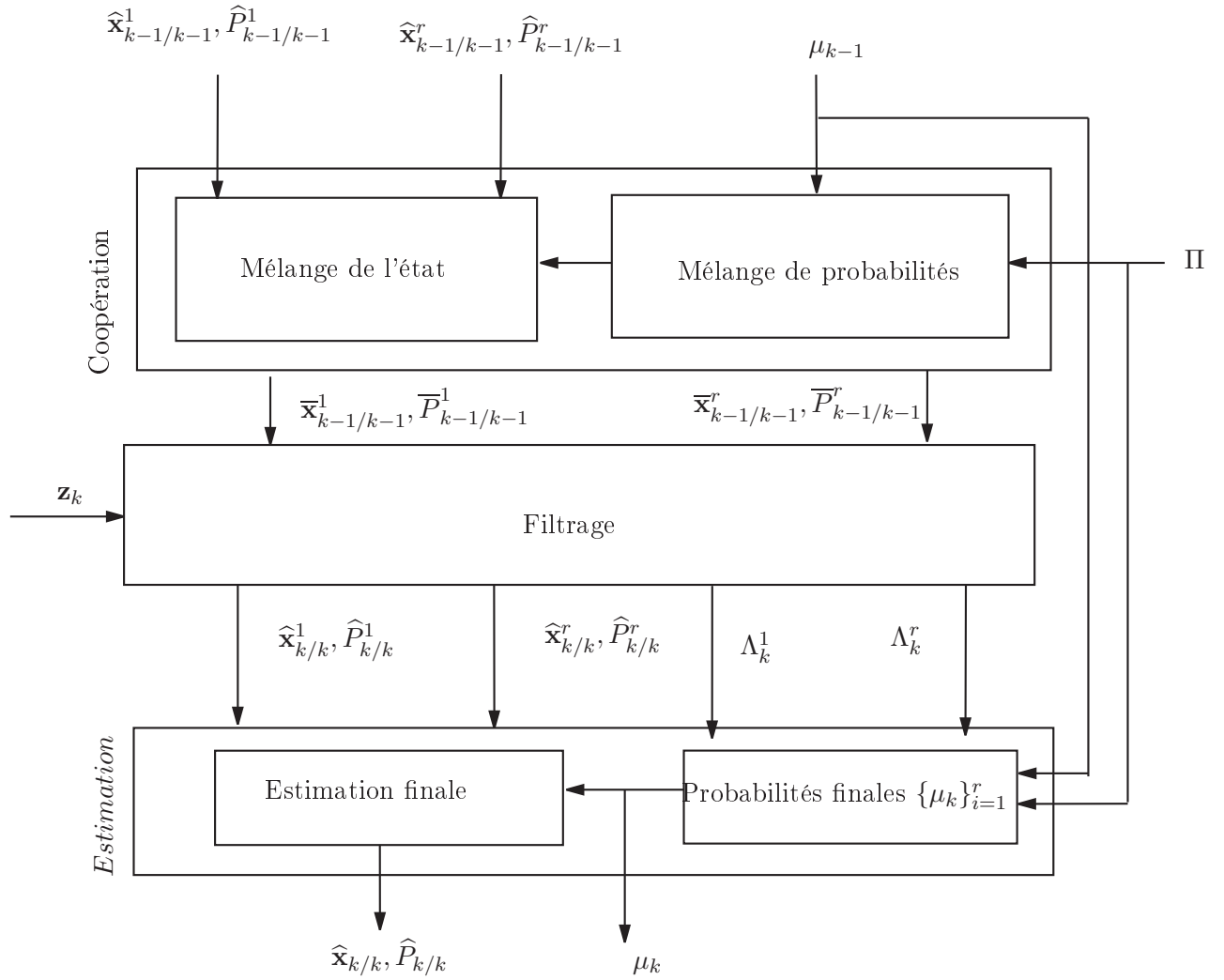


Figure 4.3 – Structure générale de la méthode IMM.

### 4.2.2.2 Phase de coopération

On cherche dans cette phase à calculer les moments du premier et du seconde ordre de la densité de probabilité de  $\mathbf{x}_k$  conditionnellement aux différents MCs et aux vecteurs des mesures cumulées  $Z_k = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$ . Pour le modèle  $M^j$ , cette densité de probabilité est donnée par :

$$P(\mathbf{x}_k/M_k = M^j, \mathbf{z}_k, Z_{k-1}) = \frac{p(\mathbf{z}_k/M_k = M^j, \mathbf{x}_k)}{p(\mathbf{z}_k/M_k = M^j, Z_{k-1})} P(\mathbf{x}_k/M_k = M^j, Z_{k-1}),$$

où  $M_k$  est le vrai modèle du système à l'instant  $k$ . Le dernier terme de cette équation représente cette même densité à l'instant  $k - 1$ . En le développant, on obtient :

$$P(\mathbf{x}_k/M_k = M^j, Z_{k-1}) = \sum_{i=1}^r P(\mathbf{x}_k/M_k = M^j, M_{k-1} = M^i, Z_{k-1}) P(M_{k-1} = M^i/M_k = M^j, Z_{k-1}). \quad (4.3)$$

Ce développement permet d'introduire la notion d'historique en prenant en considération le modèle actif à l'instant  $k - 1$ . En effectuant l'approximation consistant à supposer que les informations disponibles à l'instant  $k - 1$  peuvent être résumées par l'état estimé  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i$  et la matrice de covariance associée  $\hat{P}_{k-1/k-1}^i$ , on obtient :

$$P(\mathbf{x}_k/M_k = M^j, Z_{k-1}) \approx \sum_{i=1}^r P(\mathbf{x}_k/M_k = M^j, \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i, \hat{P}_{k-1/k-1}^i) \mu_{k-1}^{i/j},$$

où  $\mu_{k-1}^{i/j}$  est la probabilité que le modèle  $M^i$  était activé à l'instant  $k - 1$  sachant que le modèle  $M^j$  est activé à l'instant  $k$ , connaissant  $Z_{k-1}$ . La densité de probabilité  $P(\mathbf{x}_k/M_k = M^j, Z_{k-1})$  peut être représentée par un mélange de gaussiennes :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}_k/M_k = M^j, Z_{k-1}) &= \sum_{i=1}^r N[\mathbf{x}_k; E[\mathbf{x}_k/M_k = M^j, \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i], \hat{P}_{k-1/k-1}^i] \mu_{k-1}^{i/j} \\ &\approx N[\mathbf{x}_k; \sum_{i=1}^r E[\mathbf{x}_k/M_k = M^j, \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i] \mu_{k-1}^{i/j}, \bar{P}_{k-1/k-1}^i] \\ &= N[\mathbf{x}_k; E[\mathbf{x}_k/M_k = M^j, \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i] \mu_{k-1}^{i/j}, \bar{P}_{k-1/k-1}^i], \end{aligned}$$

et les nouvelles entrées du filtres élémentaires associées à  $M^j$  sont données par :

$$\bar{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^j = \sum_{i=1}^r \mu_{k-1}^{i/j} \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i, \quad (4.4)$$

$$\bar{P}_{k-1/k-1}^j = \sum_{i=1}^r \mu_{k-1}^{i/j} [\hat{P}_{k-1/k-1}^i + (\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i - \bar{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^j)(\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i - \bar{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^j)^T], \quad (4.5)$$

avec :

$$\mu_{k-1}^{i/j} = Pr\{M_{k-1} = M^i/M_k = M^j, Z_{k-1}\} = \frac{\pi_{ij} \cdot \mu_{k-1}^i}{\bar{c}_j}, \quad (4.6)$$

où  $\bar{c}_j = \sum_{i=1}^r \pi_{ij} \mu_{k-1}^i$ . Les  $\{\mu_{k-1}^{i/j}\}_{i,j=1}^r$  sont appelées probabilités de mélange.

### 4.2.2.3 Filtrage

Dans cette étape, on utilise le vecteur de mesure  $\mathbf{z}_k$  ainsi qu'un algorithme de filtrage approprié pour calculer plusieurs estimations de l'état associées aux différents MCs. Aussi, pour chaque MC  $M^j$ , on calcule la vraisemblance associée :

$$\begin{aligned}\Lambda_k^j &= P(\mathbf{z}_k/M_k = M^j, Z_{k-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(I_k^j)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\nu_k^j]^T [I_k^j]^{-1} [\nu_k^j]\right\}\end{aligned}\quad (4.7)$$

où  $\nu_k^j$  est l'innovation du filtre  $M^j$  à l'instant  $k$  et  $I_k^j$  la matrice de covariance associée. Ces vraisemblances sont utilisées dans la partie suivante pour la mise à jour des probabilités d'activation des MCs.

### 4.2.2.4 Estimation finale

L'estimateur IMM fournit à chaque instant  $k$  une estimation « finale » du système  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$  en utilisant les estimations issues des filtres élémentaires associés aux MCs. On calcule à chaque instant  $k$  les moments du premier et du deuxième ordres associés à la densité de probabilité  $P(\mathbf{x}_k/Z_k)$ .

En appliquant le théorème des probabilités totales, cette densité peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}P(\mathbf{x}_k/Z_k) &= \sum_{j=1}^r P(\mathbf{x}_k/M_k = M^j, Z_k) P(M_k = M^j/Z_k) \\ &= \sum_{j=1}^r P(\mathbf{x}_k/M_k = M^j, Z_k) \mu_k^j.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \sum_{j=1}^r \hat{\mathbf{x}}_{k/k}^j \mu_k^j, \quad (4.8)$$

et

$$\hat{P}_{k/k} = \sum_{j=1}^r \mu_k^j \left\{ \hat{P}_{k/k}^j + [\hat{\mathbf{x}}_{k/k}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k/k}] [\hat{\mathbf{x}}_{k/k}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k/k}]^T \right\}, \quad (4.9)$$

où  $\mu_k^j$  est la probabilité d'activation du  $M^j$  à l'instant  $k$ , donnée par :

$$\begin{aligned}\mu_k^j &= P(M_k = M^j/Z_k) \\ &= \frac{1}{c} P(\mathbf{z}_k/M_k = M^j, Z_{k-1}) P(M_k = M^j/Z_{k-1}) \\ &= \frac{1}{c} \Lambda_k^j \sum_{i=1}^r P(M_k = M^j/M_{k-1} = M^i, Z_{k-1}) P(M_{k-1} = M^i/Z_{k-1}) \\ &= \frac{1}{c} \Lambda_k^j \sum_{i=1}^r \pi_{ij} \mu_{k-1}^i,\end{aligned}$$

où

$$c = \sum_{j=1}^r \Lambda_k^j \sum_{i=1}^r \pi_{ij} \mu_{k-1}^i.$$

L'estimation finale donnée par les équations (4.8) et (4.9) est la sortie de l'IMM. Cette sortie ne sert qu'à décrire l'état du système à un instant  $k$  et ne sera pas réutilisée pendant le cycle suivant.

## 4.3 Approche crédibiliste pour le filtrage d'un système multi-modèles

### 4.3.1 Introduction

La méthode présentée dans cette section s'inscrit dans le cadre de la génération CMM des méthodes multi-modèles. Elle résout le problème de l'estimation d'état d'un système multi-modèles en utilisant un ensemble  $S_k$  de MCs et un banc de filtres élémentaires dont chacun est adapté à un MC. Elle a beaucoup de ressemblance au niveau structurel avec l'IMM et elle est basée sur les mêmes hypothèses (monde fermé, commutations Markovienne, etc.). La différence principale réside dans l'utilisation de la TFC pour la modélisation des commutations entre les différents MCs et pour la combinaison des différentes estimations. D'autre part, cette méthode n'est pas liée à l'utilisation de filtres élémentaires de type Bayésien pour le calcul de  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_{k/k}$ . Cette méthode est facilement utilisable avec une méthode d'estimation à erreurs bornées, dans laquelle la vraisemblance devient géométrique [38, 47, 59].

Considérons de nouveau le système décrit par les équations (4.1) et (4.2), supposé régi par  $r$  modèles d'évolution différents parmi l'ensemble  $S_k = \{M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^r\}$ , où  $M_k^i$  est le modèle  $i$  à l'instant  $k$ . Comme dans la section précédente, on désigne par  $M_k$  le vrai modèle du système à l'instant  $k$  (modèle actif durant la période  $(k-1, k]$ ). La croyance sur  $S_k$  est représentée par une fonction de masse notée  $m^{S_k}$ . Cette méthode suppose la connaissance :

- de la croyance sur le modèle du système à l'instant  $k-1$  ;
- des FMs représentant les commutations des MCs entre  $k-1$  et  $k$  ;
- des estimations de l'état du système associées aux différents MCs à l'instant  $k-1$  ;
- des vecteurs d'entrée et de mesure aux instants  $k-1$  et  $k$ .

Dans le cadre de la TFC, les commutations entre les MCs peuvent être représentées par des règles d'implication de la forme :

$$R_i : \text{Si } M_{k-1} = M_{k-1}^i \text{ alors } M_k = M_k^i \text{ avec un coefficient de croyance } \beta_i \in [0, 1],$$

où  $R_i$  est la règle d'implication associée à  $M_{k-1}^i$ . Cette règle peut être traduite par une FM conditionnelle conformément aux équations (1.24) et (1.25) du chapitre 3 :

$$\begin{cases} m^{S_k}[\{M_{k-1}^i\}](\{M_k^i\}) & = \beta_i, \\ m^{S_k}[\{M_{k-1}^i\}](S_k) & = 1 - \beta_i, \end{cases}$$

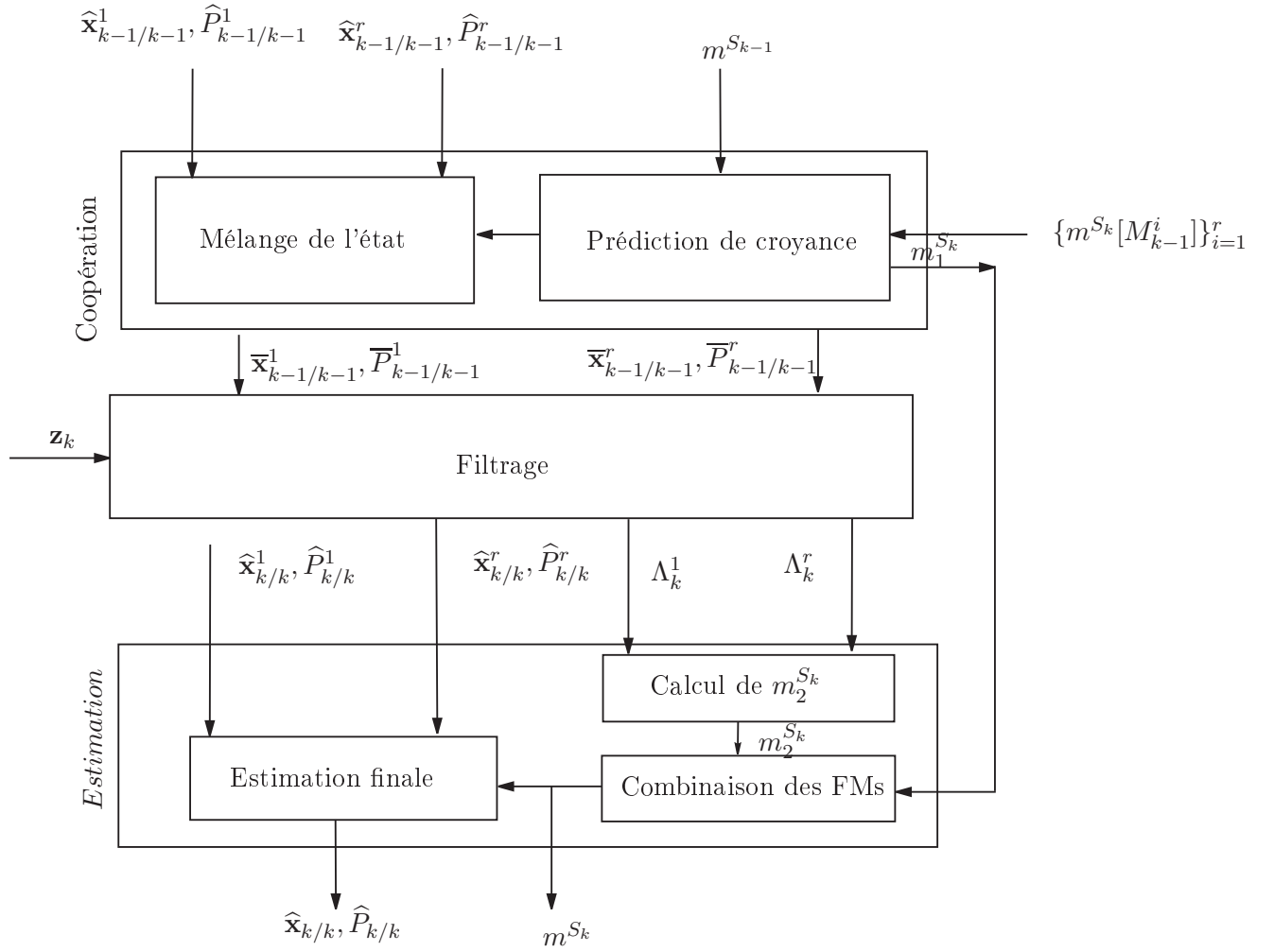
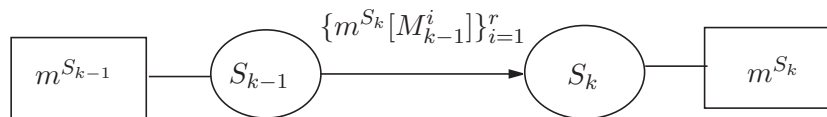


Figure 4.4 – Structure générale de la méthode BIMM.

où  $m^{S_k}[M_{k-1}^i](\{M_k^j\})$  représente la part de croyance allouée à l'hypothèse selon laquelle  $M_k = M_k^j$ , sachant que  $M_k = M_k^i$ .

La Figure 4.4 illustre la structure générale de la méthode BIMM (*Belief Interacting Multiple Model*). Les états estimés et les matrices de covariance associées aux différents MCs sont représentés, à l'instant  $k - 1$ , par  $\{\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i, \hat{P}_{k-1/k-1}^i\}_{i=1}^r$ . Dans la phase de coopération, les différents MCs communiquent afin de calculer les nouvelles entrées des filtres élémentaires  $\{\bar{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i, \bar{P}_{k-1/k-1}^i\}_{i=1}^r$  sur la base des FMs conditionnelles  $\{m^{S_k}[M_{k-1}^i]\}_{i=1}^r$ . Ces FMs conditionnelles sont utilisées avec la FM a priori  $m^{S_{k-1}}$  pour calculer une FM prédite sur  $S_k$ , notée  $m_1^{S_k}$ . Les différents filtres sont ensuite appliqués, en se servant de la mesure  $\mathbf{z}_k$ , afin de calculer les états et les matrices de covariances  $\{\hat{\mathbf{x}}_{k/k}^i, \hat{P}_{k/k}^i\}_{i=1}^r$  correspondants aux MCs. En utilisant les vraisemblances fournies par les filtres élémentaires, une FM sur  $S_k$ , notée  $m_2^{S_k}$ , peut être calculée. La FM finale  $m^{S_k}$  sur  $S_k$  est obtenue en combinant conjonctivement  $m_1^{S_k}$  et  $m_2^{S_k}$ . Enfin, l'utilisation de  $m^{S_k}$  et  $\{\hat{\mathbf{x}}_{k/k}^i, \hat{P}_{k/k}^i\}_{i=1}^r$  permet le calcul des estimations finales




 Figure 4.5 – Représentation des commutations entre  $S_{k-1}$  et  $S_k$  dans la TFC.

$(\widehat{\mathbf{x}}_{k/k}, \widehat{P}_{k/k})$  de l'état du système et de la matrice de covariance. Dans la suite de cette section, nous décrivons la construction de la fonction de masse  $m^{S_k}$ , nécessaire à la présentation des différentes étapes de la BIMM.

## 4.3.2 Construction des fonctions de masse

### 4.3.2.1 Prédiction de croyance

La commutation entre les MCs de  $S_{k-1}$  vers  $S_k$  peut être vue comme un réseau évidentiel élémentaire, illustré sur la Figure 4.5. Les relations entre les différents éléments de ce réseau sont les FMs conditionnelles représentant les commutations entre les MCs. En utilisant ces FMs ainsi que  $m^{S_{k-1}}$ ,  $m_1^{S_k}$  peut être calculée de la suivante :

$$m_1^{S_k} = \sum_{i=1}^r m^{S_k}[M_{k-1}^i] m^{S_{k-1}}(\{M_{k-1}^i\}), \quad (4.10)$$

où  $m_1^{S_k}(A)$  représente la part de connaissance allouée à l'hypothèse que le vrai modèle du système appartient à  $A$ . Cette relation peut être écrite sous la forme suivante [94] :

$$m_1^{S_k} = M_t \cdot m^{S_{k-1}}, \quad (4.11)$$

où  $M_t$  est une matrice de transition calculée à partir des FMs conditionnelles  $\{m^{S_k}[M_{k-1}^i]\}_{i=1}^r$ . Nous présentons ci-après un exemple de calcul d'une telle fonction de masse.

**Exemple 14.** *Considérons un système dynamique avec deux MCs appartenant à  $S_{k-1} = \{M_{k-1}^1, M_{k-1}^2\}$ . Soit  $m^{S_{k-1}}$  la FM représentant la croyance a priori sur le modèle d'évolution du système à l'instant  $k-1$ .*

$$\begin{cases} m^{S_{k-1}}(\emptyset) & = 0, \\ m^{S_{k-1}}(\{M_{k-1}^1\}) & = 0.45, \\ m^{S_{k-1}}(\{M_{k-1}^2\}) & = 0.2, \\ m^{S_{k-1}}(\{M_{k-1}^1, M_{k-1}^2\}) & = 0.35. \end{cases}$$

Supposons que notre croyance sur les commutations entre les MCs puisse être décrite par les deux règles d'implication suivantes :

- $R_1$  : Si  $M_{k-1} = M_{k-1}^1$  alors  $M_k = M_k^1$  avec  $\beta_1 = 0.9$ ,
- $R_2$  : Si  $M_{k-1} = M_{k-1}^2$  alors  $M_k = M_k^2$  avec  $\beta_2 = 0.89$ .

Les FMs conditionnelles associées sont :

- $m^{S_k}[M_{k-1}^1](\{M_k^1\}) = 0.9$  et  $m^{S_k}[M_{k-1}^1](S_k) = 0.1$ ,

–  $m^{S_k}[M_{k-1}^2](\{M_k^2\}) = 0.89$  et  $m^{S_k}[M_{k-1}^2](S_k) = 0.11$ .

La matrice de transition correspondant à ces FMs conditionnelles est :

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.89 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant  $m^{S_{k-1}}$  et la matrice  $M_t$ ,  $m_1^{S_k}$  peut être calculée par l'équation (4.11). On obtient la FM  $m^{S_k}$  suivante :

$$\begin{cases} m^{S_k}(\emptyset) & = 0, \\ m^{S_k}(\{M_k^1\}) & = 0.44, \\ m^{S_k}(\{M_k^2\}) & = 0.21, \\ m^{S_k}(\{M_k^1, M_k^2\}) & = 0.35. \end{cases}$$

#### 4.3.2.2 Mise à jour des croyance

Dans cette section, les vraisemblances associées aux différents MCs sont utilisées pour créer une FM  $m_2^{S_k}$  sur  $S_k$ .

Soit  $\Lambda_k^i$  la vraisemblance du MC  $M_k^i$ . En utilisant  $\Lambda_k^i$ , nous pouvons créer une FM  $m_l^i$  sur  $S_k$  définie par [3] :

$$\begin{cases} m_l^i(\{M_k^i\}) = 0 \\ \overline{m_l^i(\{M_k^i\})} = \alpha_i(1 - R\Lambda_k^i) \\ m_l^i(S_k) = 1 - \alpha_i(1 - R\Lambda_k^i), \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $\overline{\{M_k^i\}}$  est le complémentaire de  $\{M_k^i\}$  dans  $S_k$ ,  $\alpha_i$  est un coefficient d'affaiblissement associé à  $M_k^i$  et  $R$  est un coefficient de normalisation. En combinant les différentes FMs  $\{m_l^i\}_{i=1}^r$  par la règle de combinaison conjonctive, on obtient :

$$m_2^{S_k} = \odot_i m_l^i. \quad (4.13)$$

En combinant  $m_1^{S_k}$  et  $m_2^{S_k}$ ,  $m^{S_k}$  peut être finalement calculée via la relation :

$$m^{S_k} = m_1^{S_k} \odot m_2^{S_k}. \quad (4.14)$$

### 4.3.3 Principales étapes de la méthode BIMM

#### 4.3.3.1 Initialisation

À l'instant  $k = 0$ , les états associés aux différents MCs de  $S_0$  sont supposés gaussiens, de moyennes  $\{\mathbf{x}_0\}_{i=1}^r$  et de covariances  $\{P_0\}_{i=1}^r$ . Ces valeurs a priori sont supposées connues. En l'absence d'information a priori sur le modèle d'évolution du système, l'incertitude sur ce modèle est représentée par une FM vide sur  $S_0$  définie par  $m^{S_0}(S_0) = 1$ . Les commutations entre MCs sont supposées réalisées selon  $r$  règles d'implication, représentées dans la cadre de la TFC par  $r$  FMs conditionnelles  $\{m^{S_k}[M_{k-1}^i]\}_{i=1}^r$  et modélisées par une matrice de transition notée  $M_t$ . Ces FMs conditionnelles sont supposées connues et invariantes dans le temps.

### 4.3.3.2 Étape de coopération

À l'instant  $k - 1$ , les états  $\{\widehat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i\}_{i=1}^r$  et les matrices de covariances associées  $\{\widehat{\mathbf{P}}_{k-1/k-1}^i\}_{i=1}^r$  correspondant aux différents MCs doivent être combinés avec les FMs conditionnelles  $\{m^{S_k}[\{M_{k-1}^i\}]\}_{i=1}^r$  représentant les commutations entre les MCs, pour calculer les nouvelles entrées des filtres élémentaires. Ceci est réalisé comme suit.

Supposons que l'on désire calculer la nouvelle entrée du modèle  $M_k^i$  en utilisant les états associés aux MCs à l'instant  $k - 1$ . La FM conditionnelle  $m^{S_{k-1}}[\{M_k^i\}]$  sur  $S_{k-1}$  peut être calculée en utilisant le GBT et  $\{m^{S_k}[\{M_{k-1}^i\}]\}_{i=1}^r$  via la relation :

$$m^{S_{k-1}}[\{M_k^i\}] = (\odot m^{S_k}[A]^{\uparrow S_k \times S_{k-1}})[\{M_{k-1}^i\}]^{\downarrow S_{k-1}}, \quad (4.15)$$

où  $A$  est un élément focal de  $S_{k-1}$ . En utilisant la probabilité pignistique  $Betp_i$  associée à  $m^{S_{k-1}}[\{M_k^i\}]$ , les nouvelles entrées du filtre élémentaire associé à  $M_k^i$  seront données par :

$$\bar{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i = \sum_j^r Betp_i(\{M_{k-1}^j\}) \cdot \widehat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^j, \quad (4.16)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{k-1/k-1}^i = \sum_j^r Betp_i(\{M_{k-1}^j\}) \cdot (\widehat{\mathbf{P}}_{k-1/k-1}^j + \mathbf{C}), \quad (4.17)$$

avec  $\mathbf{C} = [\widehat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i - \bar{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^i][\widehat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^j - \bar{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}^j]^T$ .

Dans cette phase de coopération, la FM prédite  $m_1^{S_k}$  est calculée en utilisant  $M_t$  et  $m^{S_{k-1}}$  via l'équation (4.11).

### 4.3.3.3 Propagation

Dans cette étape on utilise le vecteur de mesure  $\mathbf{z}_k$  ainsi que les filtres élémentaires pour calculer les états estimés et les matrices de covariances associés aux différents MCs. Une vraisemblance doit également être calculée pour mettre à jour la fonction de masse. Ainsi, pour chaque modèle  $M^j$ , la vraisemblance peut être calculée comme dans le cas de l'IMM de la manière suivante :

$$\Lambda_k^i = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(I_k^i)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\nu_k^i]^T [I_k^i]^{-1} [\nu_k^i]\right\} \quad (4.18)$$

où  $\nu_k^i = \mathbf{z}_k - g^i(\widehat{\mathbf{x}}_{k/k}^i, \mathbf{w}_k^i)$  est l'innovation et  $I_k^i$  est la matrice de covariance associée. Ces valeurs de vraisemblance vont permettre le calcul de la FM  $m_2^{S_k}$  par les équations (4.12) et (4.13).

En combinant conjonctivement  $m_1^{S_k}$  et  $m_2^{S_k}$ , une FM finale sur  $S_k$  est obtenue par l'équation (4.14).

#### 4.3.3.4 Estimation finale

Une estimation finale de l'état du système à l'instant  $k$  peut finalement être calculée en se basant sur  $m^{S_k}$  et sur les sorties des filtres élémentaires associés aux MCs. Cette estimation est obtenue en calculant l'espérance de l'état et la matrice de covariance associée selon la probabilité pignistique  $Betp$  associée à  $m^{S_k}$  :

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k/k} = \sum_j^r Betp(\{M_k^j\}) \cdot \widehat{\mathbf{x}}_{k/k}^j, \quad (4.19)$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_{k/k} = \sum_j^r Betp(\{M_k^j\}) \cdot (\widehat{\mathbf{P}}_{k/k}^j + \mathbf{C}'), \quad (4.20)$$

où  $\mathbf{C}' = [\widehat{\mathbf{x}}_{k/k}^j - \widehat{\mathbf{x}}_{k/k}] [\widehat{\mathbf{x}}_{k/k}^j - \widehat{\mathbf{x}}_{k/k}]^T$ . L'estimation finale donnée par les équations (4.19) et (4.20) est la sortie de la méthode BIMM, résumée dans l'Algorithme 5.

---

#### Algorithm 5 Algorithme de la méthode BIMM.

---

- 1: % Initialisation %
  - 2:  $k \leftarrow 0$
  - 3: Sélectionner l'ensemble  $S_k \leftarrow \{M_k^1, \dots, M_k^r\}$ , formé de  $r$  MCs
  - 4:  $m^{S_k} \leftarrow$  FM vide
  - 5: Construire  $\{m^{S_{k+1}}[\{M_k^i\}]\}_{i=1}^r$ , représentant l'information a priori sur la commutation entre MCs
  - 6: **Pour**  $k = 0$  à  $n_{data}$
  - 7: % Étape de coopération %
  - 8:  $m_1^{S_{k+1}} \leftarrow M_t \cdot m^{S_k}$
  - 9:  $m^{S_k}[\{M_{k+1}^i\}] \leftarrow (\odot m^{S_{k+1}}[w_k^i]^{\uparrow S_k \times S_{k+1}})[\{M_{k+1}^i\}]^{\downarrow S_k}$
  - 10: Mise à jour de l'état et de la matrice de covariance associée en utilisant les équations (4.16) et (4.17)
  - 11: % Étape de propagation %
  - 12: Calculer les états  $\{\widehat{\mathbf{x}}_{k+1/k+1}^i\}_{i=1}^r$  et les matrices de covariance associées  $\{\widehat{\mathbf{P}}_{k+1/k+1}^i\}_{i=1}^r$  en utilisant le vecteur de mesure et les modèles d'évolutions des différents MCs
  - 13:  $\Lambda_{k+1}^i \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi I_{k+1}^i}} \exp\{-\frac{1}{2}[\nu_{k+1}^i]^T [I_{k+1}^i]^{-1} [\nu_{k+1}^i]\}$
  - 14: Calculer  $m_2^{S_{k+1}}$  à partir des vraisemblances en utilisant les équations (4.12) et (4.13)
  - 15:  $m^{S_{k+1}} \leftarrow m_1^{S_{k+1}} \odot m_2^{S_{k+1}}$
  - 16: % Estimation finale %
  - 17: Calculer l'état final et la matrice de covariance associée en utilisant les équations (4.19) and (4.20)
  - 18:  $k = k + 1$
  - 19: **Fin Pour**
-

## 4.4 Application

### 4.4.1 Description du problème

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus par la méthode BIMM sur le problème de localisation routière qui est le fil conducteur de cette thèse. Rappelons que le comportement du véhicule est modélisé par le vecteur d'état  $(x_k, y_k, \theta_k)^T$ , où  $(x_k, y_k)$  représentent les coordonnées cartésiennes du véhicule et  $\theta_k$  est le cap du véhicule (cf. chapitre 2). Dans cette application nous supposons que le véhicule peut se déplacer suivant deux modèles différents :

- $M^1$  : modèle linéaire caractérisé par le modèle d'évolution suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta_{S,k} \cos(\theta_k) \\ y_{k+1} = y_k + \delta_{S,k} \sin(\theta_k) \\ \theta_{k+1} = \theta_k, \end{cases} \quad (4.21)$$

- $M^2$  : modèle tournant caractérisé par le modèle d'évolution suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta_{S,k} \cos(\theta_k + \frac{\delta_{\theta,k}}{2}) \\ y_{k+1} = y_k + \delta_{S,k} \sin(\theta_k + \frac{\delta_{\theta,k}}{2}) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \delta_{\theta,k}, \end{cases} \quad (4.22)$$

Le modèle d'observation du système est donné par :

$$\begin{cases} x_{GPS,k+1} = x_{k+1}, \\ y_{GPS,k+1} = y_{k+1}, \end{cases} \quad (4.23)$$

où  $\delta_{S,k}$  et  $\delta_{\theta,k}$  sont le déplacement et la rotation élémentaires du véhicule, fournies avec une grande précision par un gyromètre optique et un capteur ABS, et  $(x_{GPS,k+1}, y_{GPS,k+1})$  représentent les coordonnées cartésiennes associées à la position observée du véhicule.

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus par simulation réalisée sous Matlab (Simulink toolbox) avec une période d'échantillonnage de  $T = 1$  seconde. Dans cette simulation, nous supposons que les bruits associés aux mesures GPS et aux entrées odométrique et gyrométrique sont caractérisés par des écart-types  $\sigma_x = 7$  m,  $\sigma_y = 9$  m,  $\sigma_s = 1/4$  m et  $\sigma_\theta = 0.002$  degré. La trajectoire du véhicule est illustrée sur la Figure 4.6. Elle a une durée de 1100 sec. Comme montre cette figure, durant ce trajet, le véhicule change plusieurs fois de mode de déplacement, selon la séquence suivante :

- modèle  $M^1$  pendant les intervalles de temps  $[0, 150]$ ,  $[251, 350]$ ,  $[451, 650]$ ,  $[721, 850]$  et  $[876, 1100]$  ;
- modèle  $M^2$  pendant  $[151, 250]$ ,  $[351, 450]$ ,  $[651, 720]$  et  $[851, 900]$ .

Les commutations entre MCs sont représentées par les règles d'implication suivantes :

- $R_1$  : Si  $M^1$  alors  $M^1$  avec  $\beta_1 = 0.99$ ,
- $R_2$  : Si  $M^2$  alors  $M^2$  avec  $\beta_2 = 0.98$ .

Dans cette application, les valeurs de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ont été déterminées à partir de la période d'échantillonnage et le temps de séjour moyenne du véhicule dans chaque modèle, en utilisant la formule suivante [14] :

$$\beta_i = 1 - T/\tau_i,$$

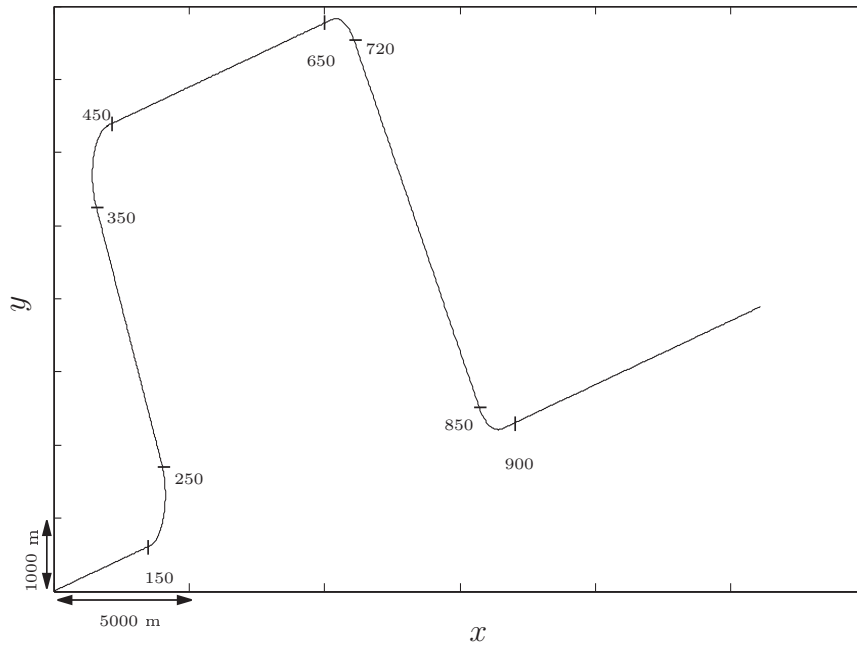


Figure 4.6 – Trajectoire du véhicule. Le temps de départ est  $t_0 = 0$ .

où  $\tau_i$  est le temps de séjour moyen associé au modèle  $M^i$ .

Nous supposons également qu'on n'a initialement aucune information a priori sur le véhicule : la croyance sur le comportement du système à l'instant  $k = 0$  est donc représentée par une FM vide sur  $S_k$  donnée par  $m^{S_0}(S_0) = 1$ . Notons que la méthode de FKE est utilisée comme filtre élémentaire tout le long de cette simulation.

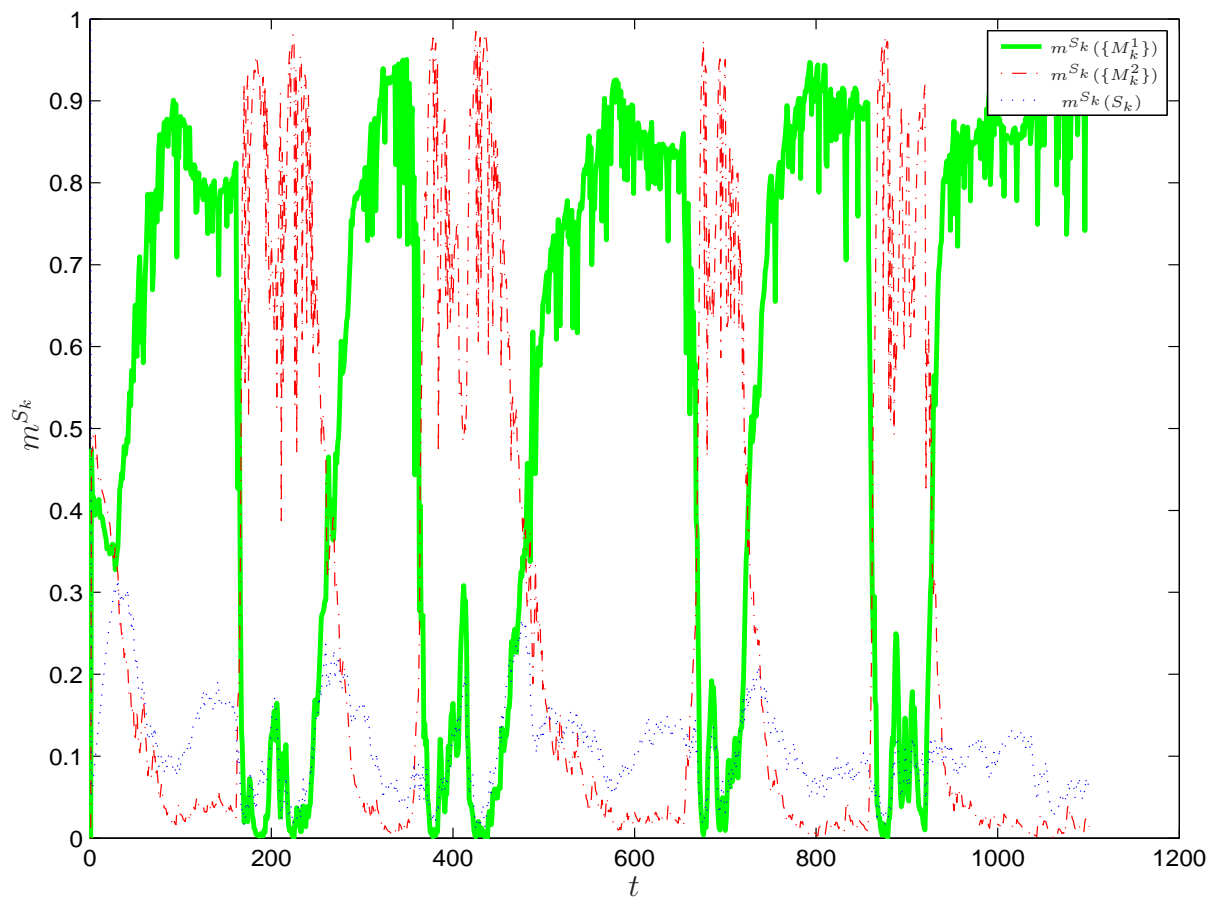
## 4.4.2 Résultats

La Figure (4.7) présente l'évolution de la FM  $m^{S_k}$  sur  $S_k = \{M^1, M^2\}$  pendant tout le trajet. Cette figure montre que la méthode BIMM détecte bien la commutation entre les MCs du système, conformément aux différents modèles d'évolutions décrits dans la section 4.4.1.

Sur la Figure 4.8, les positions du véhicule estimées par la méthode BIMM sont représentées. On peut remarquer que la méthode BIMM suit le filtre élémentaire associé à  $M^1$  jusqu'à l'instant  $k = 350$  environ. Autour de l'instant  $k = 350$  la méthode BIMM suit les positions données par le filtre associé à  $M^2$ . Ceci est en effet conforme aux changements de modèle, comme indiqué sur la Figure 4.6.

Supposons maintenant que l'ensemble des MCs disponibles ne soit pas exhaustif et ne contienne que deux modèles  $M^1$  et  $M^3$ .  $M^1$  est tel que défini précédemment, tandis que  $M^3$  représente le comportement stationnaire du véhicule, caractérisé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k, \\ y_{k+1} = y_k, \\ \theta_{k+1} = \theta_k. \end{cases} \quad (4.24)$$

Figure 4.7 – Fonction de masse sur  $S_k$  associée au trajet de la Figure 4.6.

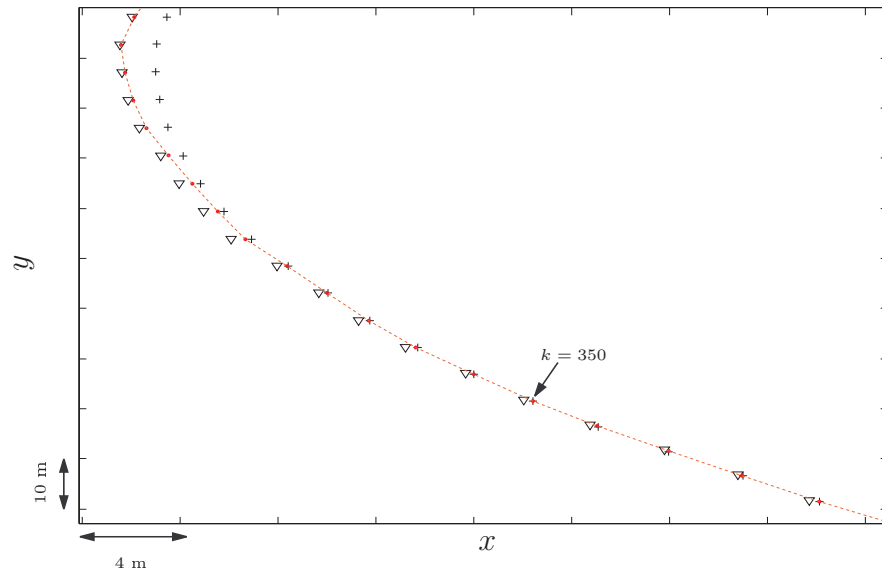


Figure 4.8 – Exemples de positions estimées par la méthode BIMM. La trajectoire du véhicule est représentée par des lignes en pointillé. Les positions fournies par la méthode FKE avec les modèles  $M^1$  et  $M^2$ , et la méthode BIMM sont représentées par des (+), ( $\nabla$ ) et ( $\cdot$ ).

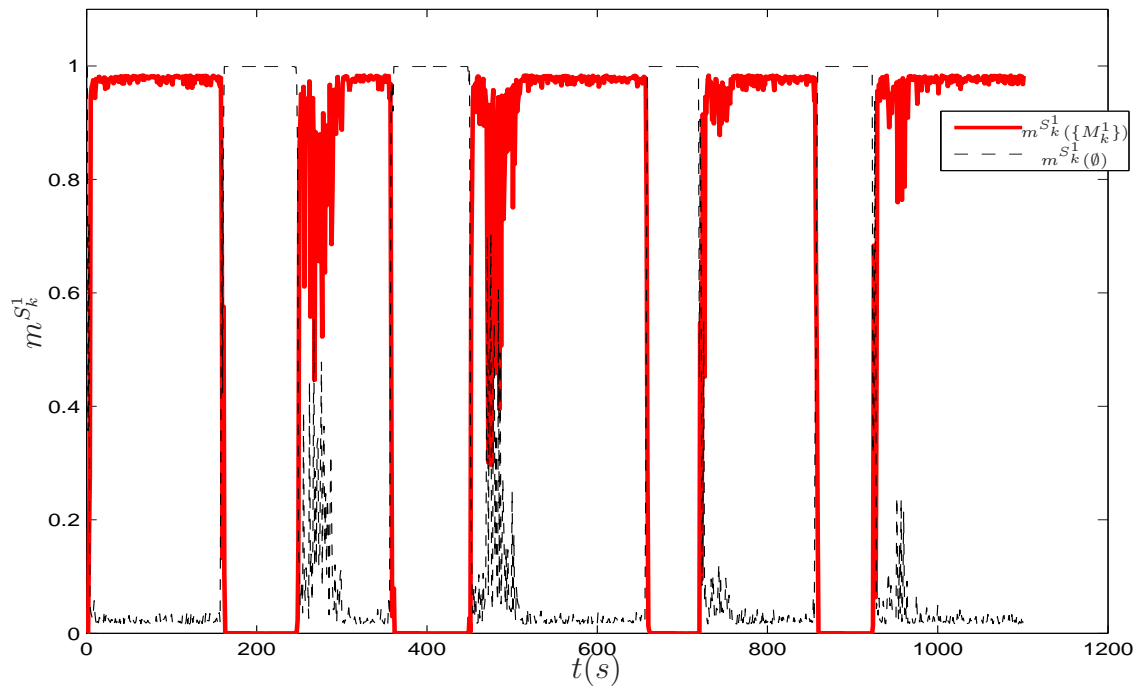


Figure 4.9 – Fonction de masse sur  $S_k^1 = \{M^1, M^3\}$  associée au trajet de la Figure 4.6.



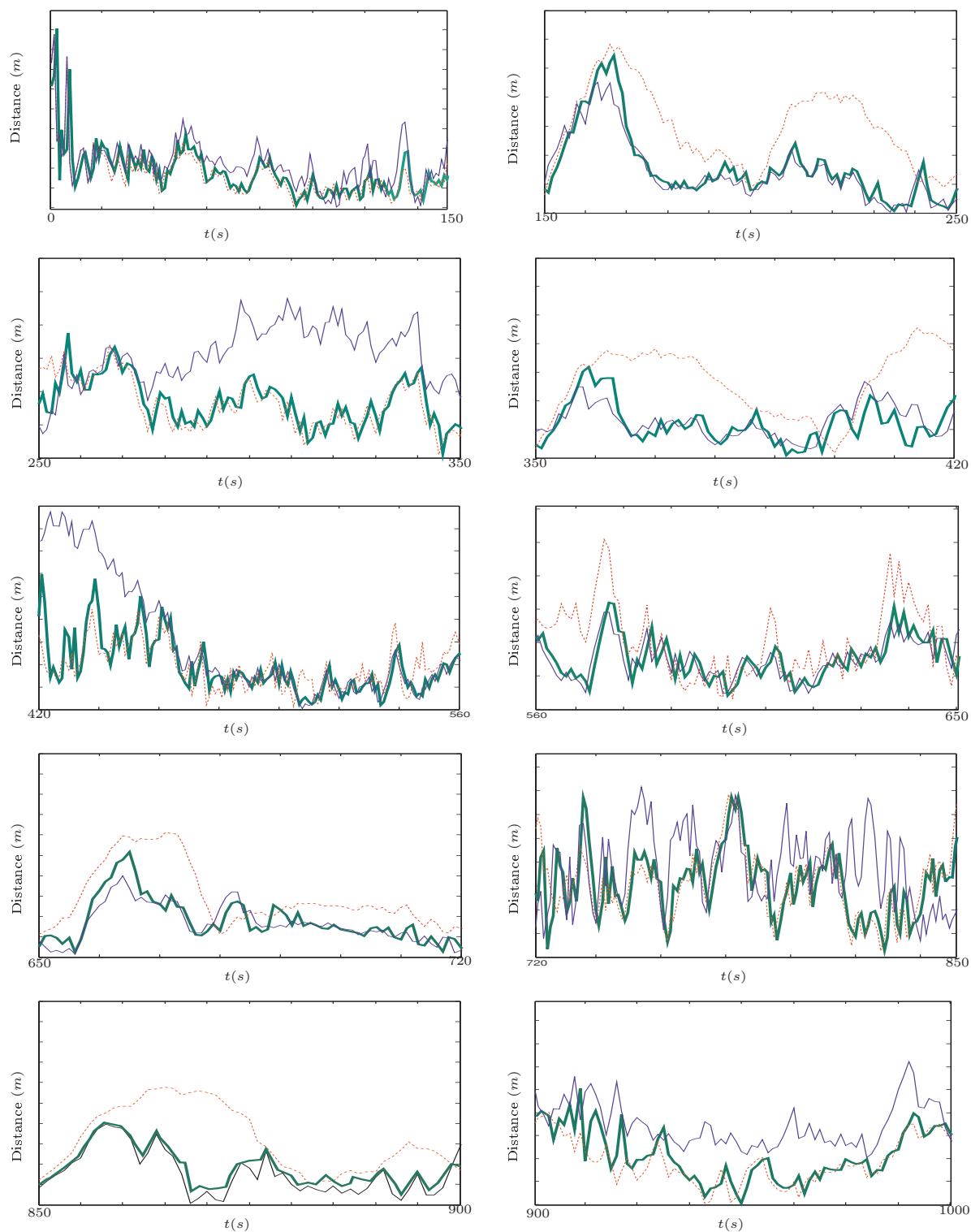


Figure 4.10 – Distances entre les valeurs estimées et exactes du véhicule pour la méthode BIMM (ligne en gras), la méthode FKE avec le modèle  $M^1$  (ligne pointillée) et la méthode FKE avec le modèle  $M^2$  (ligne continue).

La Figure 4.9 représente la FM sur  $S_k = \{M^1, M^3\}$ . Comme on peut le voir, durant les périodes  $[151, 250]$ ,  $[351, 450]$ ,  $[651, 720]$  et  $[851, 900]$ , la masse la plus importante est affectée à l'ensemble vide, cette masse étant proche de 1. Ceci peut s'expliquer par le fait que le véhicule se déplace suivant le modèle tournant  $M^2$  qui n'appartient pas à  $S_k$ . Ainsi, nous pouvons conclure que la méthode BIMM parvient à détecter le fait que le système évolue suivant un modèle qui n'appartient pas à l'ensemble des MCs. Ceci n'est pas le cas dans les approches probabilistes et constitue un avantage de la méthode proposée.

Nous avons effectué une comparaison entre les résultats de la méthode BIMM avec ceux de la méthode FKE, appliquée aux deux MCs  $M^1$  et  $M^2$ . La Figure 4.10 représente les distances entre les valeurs estimées et exactes pour la méthode BIMM et les méthodes FKE avec les modèles  $M^1$  et  $M^2$ , pour les huit intervalles de temps caractérisant les commutations. Comme le montre cette figure, la distance obtenue par la méthode BIMM est toujours plus proche de celle correspondant à la méthode FKE associée au modèle du déplacement du véhicule. Ainsi, la méthode BIMM fournit une estimation plus fiable de la position du véhicule, en combinant les estimations associées aux filtres élémentaires de deux modèles.

De même, les résultats de la méthode BIMM ont été comparés à ceux de la méthode IMM. Cette dernière méthode est ici appliquée aux mêmes MCs associés aux mêmes filtres élémentaires que la méthode BIMM. La commutation entre MCs est caractérisée par la matrice de transition suivante :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix},$$

invariante au cours du le temps. À l'instant  $k = 0$ , l'incertitude sur le modèle d'évolution du véhicule est modélisée dans l'IMM par une distribution de probabilité uniforme sur l'ensemble des MCs :  $\mu_0 = (\mu_0^1, \mu_0^2)^T = (0.5, 0.5)^T$ , où  $\mu_k^i$  est le probabilité que  $M^i$  soit le vrai modèle à l'instant  $k$ .

La Figure 4.11 représente les probabilités  $\{\mu_k^i\}_{i=1}^2$  calculées par la méthode IMM. Comme le montre cette figure, la méthode IMM, comme la méthode BIMM, est capable de détecter le vrai modèle de déplacement du véhicule.

Cependant, la Figure 4.12 représente les distances entre les positions exactes et calculées par les méthodes BIMM et IMM. Comme on le voit, la distance correspondant à la méthodes de la BIMM est plus petite. La performance de la BIMM est supérieur à celle de l'IMM.

Tableau 4.1 – Moyennes quadratiques (MQ) pour le GPS, la méthode FKE avec les modèles  $M^1$  et  $M^2$ , la méthode IMM et la méthode BIMM.

	GPS	EKF $M^1$	EKF $M^2$	IMM	BIMM
MQ suivant $x(m)$	0.1136	0.0686	0.0560	0.0525	0.0461
MQ suivant $y(m)$	0.1096	0.1096	0.0818	0.0801	0.0712

Ces résultats sont confirmés par le tableau 4.1 qui résume les moyennes quadratiques pour les méthodes BIMM, FKE avec les modèles  $M^1$  et  $M^2$ , et IMM. Ce tableau confirme les bonnes performances de l'approche crédibiliste proposée.

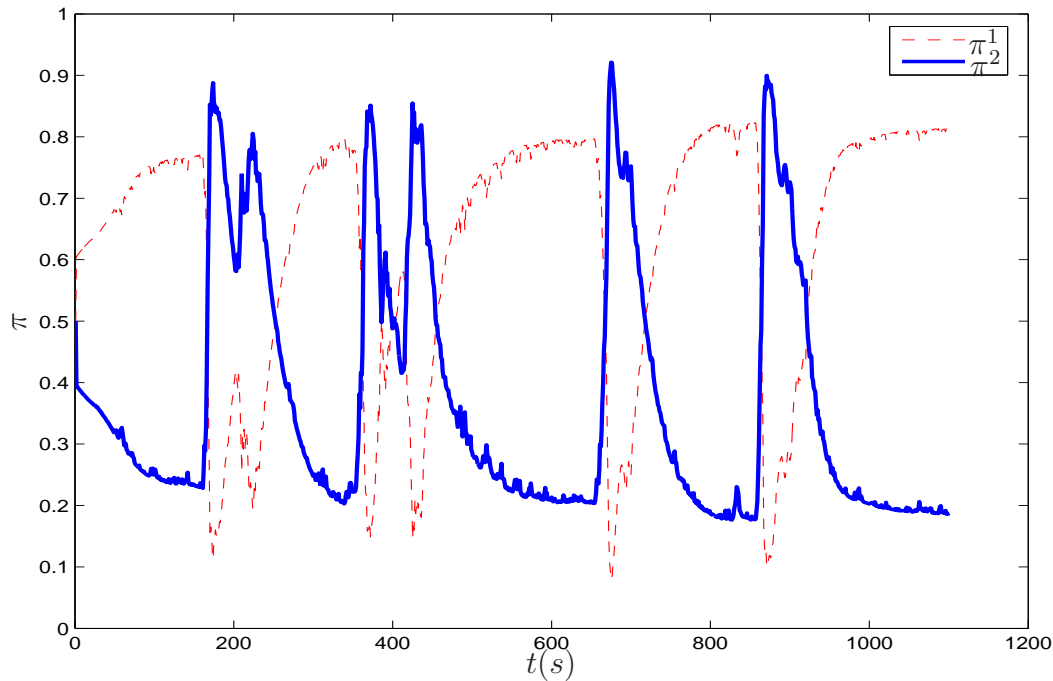


Figure 4.11 – Vecteur de probabilités  $\pi = (\pi^1, \pi^2)^T$  estimés par la méthode IMM.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode pour l'estimation d'état d'un système dynamique multi-modèles à commutations fréquentes a été présentée. Cette méthode utilise la TFC et des méthodes existantes d'estimation d'état pour représenter l'incertitude sur les modèles et calculer une estimation précise de l'état du système. Ceci est réalisé en choisissant un ensemble de modèles candidats (MCs) et en utilisant un banc de filtres élémentaires, chaque filtre étant adapté à un MC. Comme le modèle d'évolution du système peut changer, une étape de coopération entre les MCs est effectuée dans le cadre de la TFC. Enfin, les probabilités pignistiques des MCs sont utilisées pour calculer une estimation de l'état final du système. La méthode proposée peut détecter le fait que le vrai modèle n'est pas inclus dans l'ensemble de MCs. De plus, l'implémentation de cette méthode est très simple et flexible, dans le sens où il est possible d'ajouter facilement une autre source d'information sur la commutation entre les MCs ou sur l'ensemble de MCs.

Dans le chapitre suivant, nous aborderons le problème de la localisation routière couplée à la cartographie. Nous présenterons une nouvelle méthode de *map matching* basée sur une représentation garantie des routes et sur un algorithme multicritère de sélection de routes basé sur la TFC.

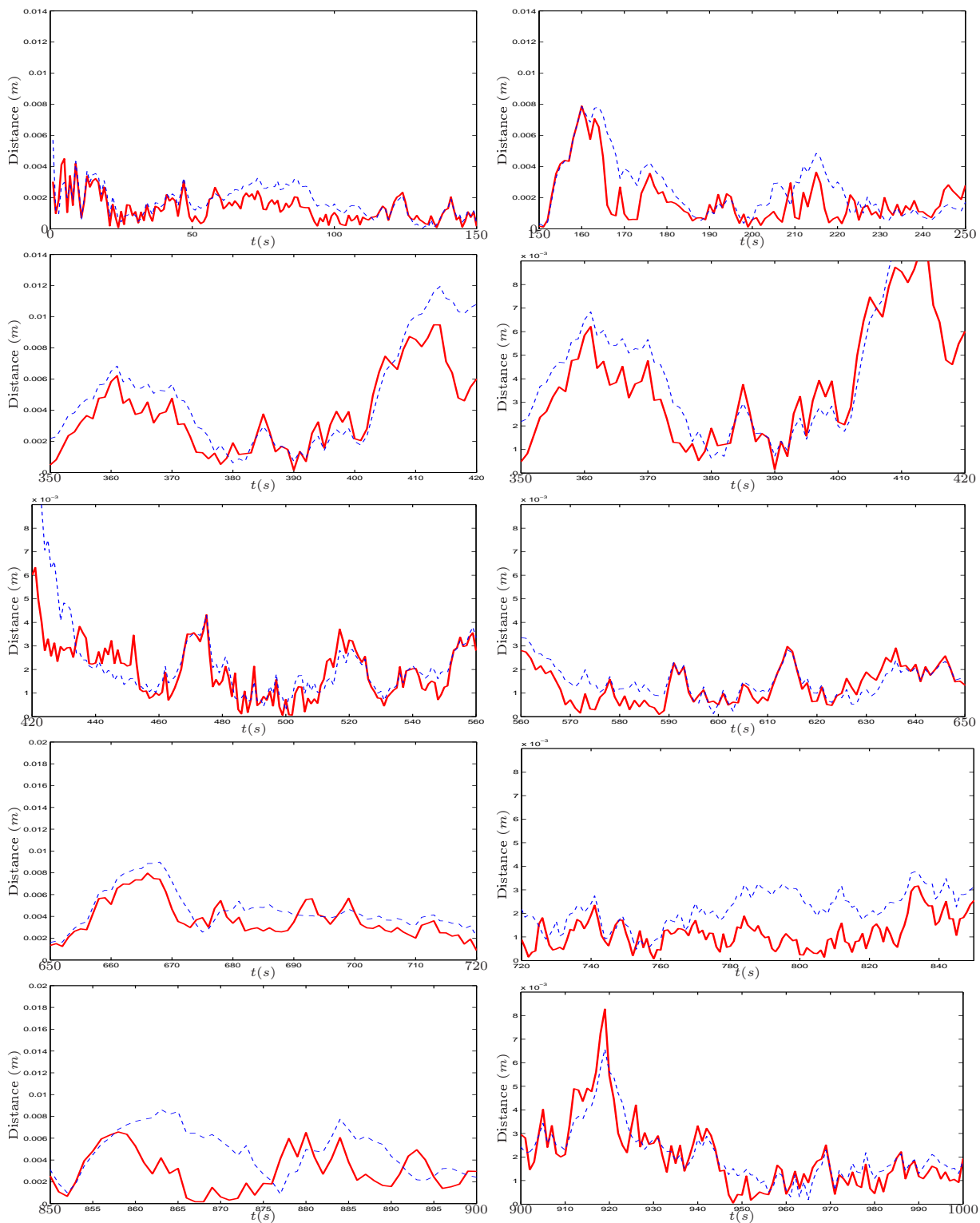


Figure 4.12 – Distances entre les positions estimées et exactes du véhicule pour les méthodes BIMM (ligne continue) et l’IMM (ligne pointillée).

---

# *Algorithmes de Map Matching pour la localisation*

---

## 5.1 Introduction

En supplément des mesures GPS et des mesures issues des capteurs proprioceptifs, nous considérons dans ce chapitre une base de données cartographique similaire à celle introduite dans la section 2.3.1 du chapitre 2. Cette base de données fournit des informations sur l’environnement du véhicule et permet de déterminer sur la carte la route sur laquelle le véhicule se déplace en utilisant une méthode de *map matching* (MM) [19, 35, 45, 91, 97]. Naturellement, cette nouvelle information doit permettre d’améliorer la précision de l’estimation.

La méthode de MM proposée dans ce chapitre prend en compte les erreurs de la carte routière utilisée ainsi que les largeurs des routes d’une façon garantie. Elle permet ainsi de remédier à certaines difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre des algorithmes de map matching, comme cela a été mentionné dans le chapitre 2. Formellement, la méthode combine la sortie de la méthode d’estimation d’état EEB, présentée dans le chapitre 1, avec une représentation rectangulaire des routes et traite les cas multi-hypothèses en utilisant la théorie des fonctions de croyance [68, 73].

La représentation rectangulaire des routes est construite sur la base des erreurs géométriques associées, et des informations a priori sur leurs largeurs. Elle permet de combiner d’une façon pratique les informations cartographiques disponibles avec les pavés résultants de l’AEB. Par ailleurs, l’utilisation de la TFC dans la méthode proposée permet de traiter facilement les cas multi-hypothèses se manifestant dans des situations telles que des intersections et des routes parallèles. La TFC permet aussi de détecter l’absence de données cartographiques, qui constitue un problème connu lors de l’utilisation des cartes numériques. En effet, la notion du *monde ouvert* utilisée dans le cadre de la TFC permet de prendre en compte la non-exhaustivité du référentiel lors de la définition d’une source d’information [92]. Dans le cas d’un problème de MM, la notion du monde ouvert peut ainsi modéliser des situations dans lesquelles le véhicule est en arrêt sur un parking ou se déplace sur une route non répertoriée dans la base de données routières [68, 73].

Ce chapitre est divisé en deux parties principales. Dans la première partie nous exposons le principe et la démarche de la méthode de MM basée sur l’AEB que nous proposons et nous présentons des résultats obtenus par cette méthode [68, 73]. Dans la seconde partie nous proposons une amélioration de la méthode précédente en utilisant l’algorithme BSE du chapitre 3 à la place de l’algorithme EEB [69].

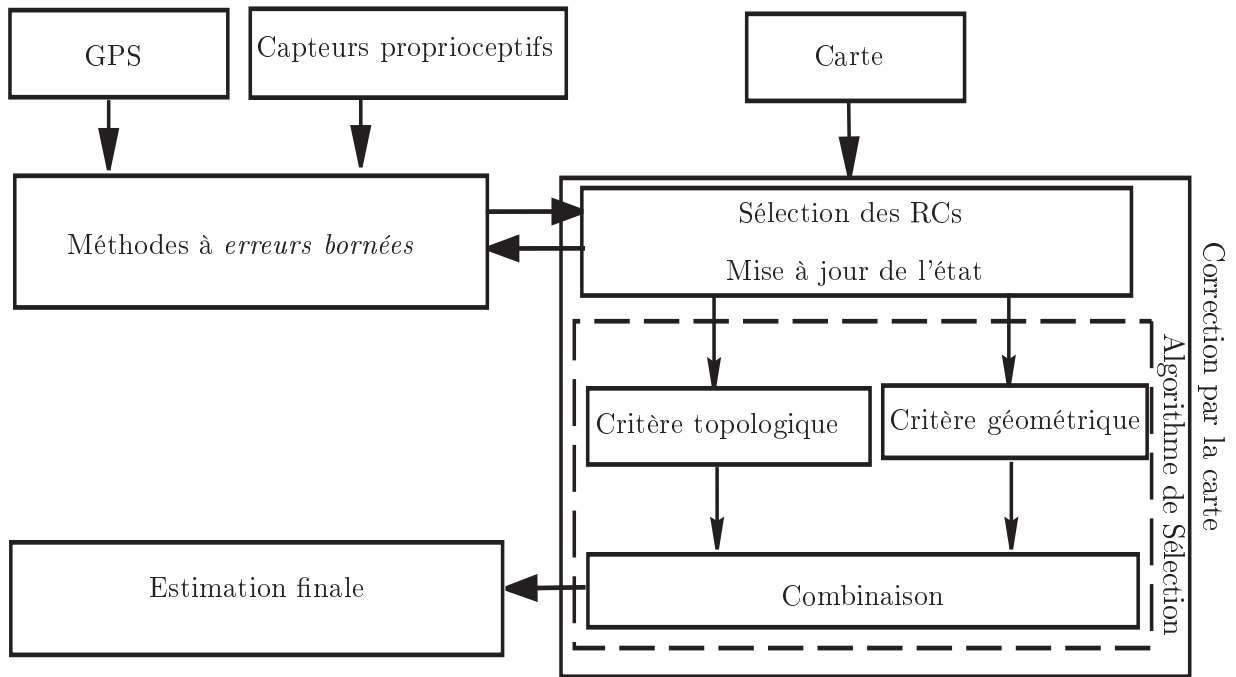


Figure 5.1 – Structure de la méthode crédibiliste de MM.

## 5.2 Approche crédibiliste pour le MM

Dans cette partie, nous allons développer une méthode de MM en prenant en compte les éléments suivants :

- la nature de l'estimation d'état disponible et la confiance associée à partir du système de navigation ;
- la similarité entre la position du véhicule et les routes ;
- les informations historiques relatives au véhicule (route à l'instant précédent, position, cap et vitesse ou déplacement élémentaire du véhicule, etc.) ;
- la topologie de la carte et les largeurs des routes, ainsi que les erreurs associées.

Les méthodes développées dans les chapitres précédents fournissent une estimation de type ensembliste. La méthode de MM que nous allons présenter dans cette partie est particulièrement adaptée à ce type d'estimation.

La Figure 5.1 présente les différentes étapes de la méthode, appelée BMM pour « *Belief Map Matching* » en anglais. Comme le montre cette figure, les données GPS et celles de capteurs proprioceptifs sont d'abord intégrées en utilisant une méthode de fusion de données à erreurs bornées. Le résultat est ensuite combiné avec la représentation rectangulaire des routes afin de sélectionner un ensemble de routes candidates (RCs). Les RCs sont utilisées ultérieurement comme de nouvelles observations afin d'affiner les résultats de la phase initiale d'estimation à erreurs bornées, et de calculer une estimation de la position du véhicule sur chaque RC. La route suivie par le véhicule est choisie en utilisant un algorithme de sélection

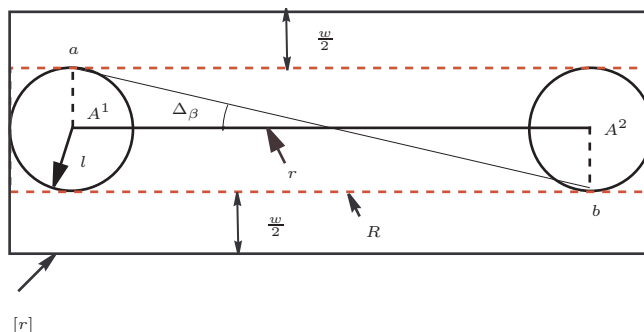


Figure 5.2 – Construction de la route rectangulaire associée à une route linéaire ( $A^1, A^2$ ).

multi-critères basé sur la TFC. L'estimation finale de la position du véhicule est déterminée en fonction de la route sélectionnée.

Notons que la méthode BMM gère des hypothèses multiples, bien qu'une RC soit choisie à chaque instant. Les autres routes sont en effet conservées pour être utilisées ultérieurement si nécessaire. Dans la section suivante, nous introduisons la représentation rectangulaire des routes, nécessaire au développement de la méthode BMM.

### 5.2.1 Construction rectangulaire des routes

Comme cela a été rappelé dans le chapitre 2, les cartes routières numériques sont classiquement basées sur une représentation linéaire des routes consistant en un ensemble de segments linéaires. Cette représentation ne prend donc pas en compte les largeurs des routes ni les erreurs de la carte. Afin de disposer d'une représentation plus pertinente, une configuration rectangulaire des routes s'avère par conséquent nécessaire. Dans cette représentation, les rectangles sont construits autour des segments représentant les lignes centrales des routes en tenant compte des erreurs géométriques de la carte ainsi que des largeurs des routes.

Les erreurs géométriques considérées dans le cadre de ce travail de thèse sont celles de position et de forme utilisées dans [80] pour caractériser l'intégrité de l'estimation. L'erreur de position représente l'écart entre un nœud de la carte et le point réel associé (le point sur le terrain), alors que l'erreur de forme désigne l'écart entre l'orientation des segments représentant la route et leur véritable orientation [75, 80].

Le schéma correspondant est illustré sur la Figure 5.2 représentant une route  $r = (A^1, A^2)$ . En considérant l'erreur de position, les nœuds  $A^1$  et  $A^2$  de  $r$  sont considérés comme appartenant à des cercles de rayon  $l$  déterminé à partir de l'échelle de la carte [80]. En utilisant ces cercles, on peut construire un rectangle  $R$  représentant l'imprécision sur  $r$  induite par l'erreur de position. Ce rectangle prend également en compte l'imprécision apportée par l'erreur de forme comme le montre la Figure 5.2. En effet, la valeur de l'erreur de forme  $\Delta_\beta$  ne peut excéder la valeur engendrée par l'erreur de position de  $A^1$  et  $A^2$ . Finalement, la représentation rectangulaire  $[r]$  de  $r$

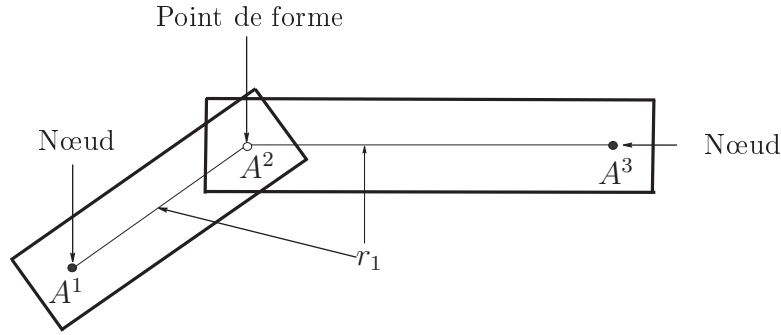


Figure 5.3 – Représentation rectangulaire associée à une route  $r_1 = (A^1, A^2, A^3)$ .

peut être obtenue en considérant la largeur  $\omega$  de  $r$ . La Figure 5.3 montre un exemple de représentation rectangulaire pour une route  $r_1$  formée de deux nœuds  $A^1$  et  $A^3$ , et d'un point de forme  $A^2$ .

## 5.2.2 Modèle d'état du véhicule

Nous utilisons le modèle dynamique introduit dans le chapitre 2, donné par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta_{S,k} \cos(\theta_k + \frac{\delta_{\theta,k}}{2}) \\ y_{k+1} = y_k + \delta_{S,k} \sin(\theta_k + \frac{\delta_{\theta,k}}{2}) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \delta_{\theta,k}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Rappelons que le vecteur d'état est :  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, \theta_k)^T$ , où  $(x_k, y_k)$  sont les coordonnées cartésiennes du véhicule et  $\theta_k$  est le cap du véhicule.  $\delta_{S,k}$  et  $\delta_{\theta,k}$  sont le déplacement et la rotation élémentaires du véhicule à l'instant  $k$ . Le modèle d'observation est donné par :

$$\begin{cases} x_{GPS,k+1} = x_{k+1} \\ y_{GPS,k+1} = y_{k+1}, \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{z}_k = (x_{k,GPS}, y_{k,GPS})$  est la position fournie par le récepteur GPS à l'instant  $k$ , après conversion de la longitude et la latitude dans le repère cartésien. Les écart-types associés aux mesures GPS sont obtenus grâce à la trame *GST NMEA*<sup>1</sup>.

Les pavés sont construits autour de  $\delta_{S,k}$  et  $\delta_{\theta,k}$  en utilisant les écart-types  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$  associés à l'odomètre et au gyromètre, obtenus dans les applications réelles grâce à des tests statiques spécifiques :

$$[\delta_{S,k}] = [\delta_{S,k} - \kappa \cdot \sigma_s, \delta_{S,k} + \kappa \cdot \sigma_s], \quad (5.3)$$

$$[\delta_{\theta,k}] = [\delta_{\theta,k} - \kappa \cdot \sigma_\theta, \delta_{\theta,k} + \kappa \cdot \sigma_\theta]. \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>Cette trame a été définie par la NMEA (National Marine Electronics Association). Elle était conçue initialement pour définir l'interface entre différents pièces d'équipements électroniques marins. La plupart des programmes informatiques qui calculent une position en temps réel utilise ce format.



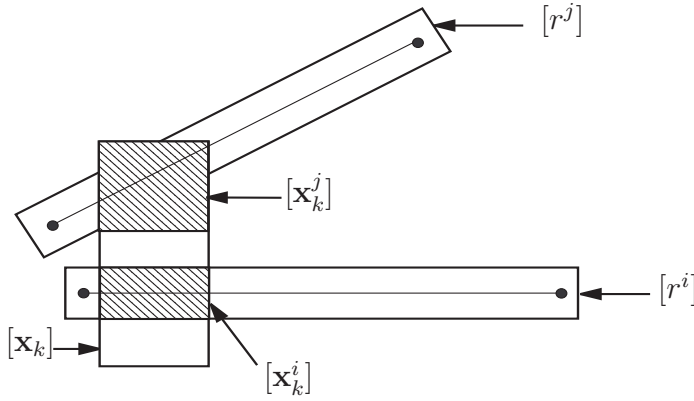


Figure 5.4 – Mise à jour de l'état  $[\mathbf{x}_k]$  en utilisant les routes rectangulaires  $[r^i]$  et  $[r^j]$ . L'état  $[\mathbf{x}_k]$  est remplacé par les pavés  $[\mathbf{x}_k^i]$  et  $[\mathbf{x}_k^j]$  sur les routes  $r^i$  et  $r^j$ .

Des pavés sont aussi construits autour des mesures GPS :

$$[\mathbf{z}_k] = ([x_{k,GPS}], [y_{k,GPS}])^T,$$

où :

$$[x_{k,GPS}] = [x_{k,GPS} - \kappa \cdot \sigma_x, x_{k,GPS} + \kappa \cdot \sigma_x], \quad (5.5)$$

$$[y_{k+1,GPS}] = [y_{k,GPS} - \kappa \cdot \sigma_y, y_{k,GPS} + \kappa \cdot \sigma_y]. \quad (5.6)$$

### 5.2.3 Construction des fonctions des masses

Soit  $[\mathbf{x}_k]$  un pavé représentant l'état à l'instant  $k$ . À partir de  $[\mathbf{x}_k]$  et de la représentation rectangulaire des routes, un ensemble  $R_k$  de RCs peut être défini :

$$R_k = \{r^i / [\mathbf{x}_k] \cap [r^i] \neq \emptyset\}. \quad (5.7)$$

Sachant que le véhicule se déplace en principe toujours sur une route, le pavé  $[\mathbf{x}_k]$  est remplacé par  $\{[\mathbf{x}_k^i]\}_{i=1}^{n_{R_k}}$ , où  $n_{R_k}$  est le cardinal de  $R_k$  et  $[\mathbf{x}_k^i] = [[\mathbf{x}_k] \cap [r^i]]$  est le pavé minimal englobant l'intersection de  $[\mathbf{x}_k]$  avec  $[r^i]$ , comme illustré sur la Figure 5.4.

La FM  $m^{R_k}$  associée à  $R_k$  est calculée en utilisant des critères topologique et géométrique qui vont maintenant être présentés.

#### 5.2.3.1 Critère topologique

La topologie d'une carte routière représente les relations entre ses différents éléments. Elle décrit la façon dont les routes sont connectées et la forme de chaque route. Nous allons utiliser ces informations conjointement avec les informations historiques du véhicule afin de créer une FM  $m_1^{R_k}$  sur  $R_k$ .

Soit  $R_{k-1} = \{r^1, \dots, r^i, \dots, r^n\}$  l'ensemble des RCs considérées à l'instant  $k-1$ , et soit  $m^{R_{k-1}}$  la FM correspondante. Supposons qu'à l'instant  $k-1$  le véhicule était sur la route  $r^i$ . Supposons d'autre part que les informations disponibles sur sa

position et sur son déplacement élémentaire indiquent qu'il peut quitter  $r^i$  à l'instant  $k$ . Pour cela, on doit construire l'ensemble  $S^i$  des routes directement connectées à  $r^i$ , y compris  $r^i$ , et qui ont une intersection avec le pavé prédit  $[\mathbf{x}_k]$  :

$$S^i = \{r^j / r^j \text{ est liée à } r^i \text{ et } [r^j] \cap [\mathbf{x}_k] \neq \emptyset\} \cup \{r^i \text{ si } [r^i] \cap [\mathbf{x}_k] \neq \emptyset\}. \quad (5.8)$$

On peut ainsi définir une application  $\rho$  de  $R_{k-1}$  dans  $2^{R_k}$  telle que :

$$\rho(\{r^i\}) = S^i. \quad (5.9)$$

Cette relation peut être étendue à  $2^{R_{k-1}}$  via la relation :

$$\rho(A) = \begin{cases} \bigcup_{r^i \in A} \rho(\{r^i\}) & \text{si } A \subseteq R_{k-1}, A \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{si } A = \emptyset. \end{cases} \quad (5.10)$$

En se basant sur cette extension, la transformation entre  $m_1^{R_k}$  et  $m^{R_{k-1}}$  peut être décrite par le système suivant :

$$\begin{cases} 2^{R_{k-1}} & \rightarrow 2^{R_k}, \\ m^{R_{k-1}}(A) & \rightarrow m_1^{R_k}(\rho(A)), \end{cases} \quad (5.11)$$

et la FM sur  $R_k$  est donnée par :

$$m_1^{R_k}(B) = \sum_{A \subseteq R_{k-1}} M_\rho(B, A) \cdot m^{R_{k-1}}(A), \quad (5.12)$$

où  $M_\rho$  est la matrice de transition donnée par :

$$M_\rho(B, A) = \begin{cases} 1 & \text{si } B = \rho(A) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.13)$$

Un exemple mettant en œuvre la démarche précédente est présenté ci-après.

**Exemple 15.** *Considérons le cas illustré sur la Figure 5.5, où  $[\mathbf{x}_{k-1}]$  et  $[\mathbf{x}_k]$  représentent les pavés relatifs aux positions du véhicule aux instants  $k-1$  et  $k$ . Dans cette figure, la route  $r^1$  est parallèle aux routes  $r^2$  et  $r^3$ , et la route  $r^2$  est liée à  $r^3$  et  $r^4$ . À l'instant  $k-1$  le véhicule se déplaçait sur  $r^1$  ou  $r^2$  ce qui correspond à un ensemble  $R_{k-1} = \{r^1, r^2\}$ . Supposons que la croyance calculée sur  $R_{k-1}$  soit représentée par une FM  $m^{R_{k-1}}$ , ayant comme éléments focaux  $\emptyset, \{r^1\}, \{r^2\}$  et  $\{r^1, r^2\}$ .*

*À partir de la représentation de l'état à l'instant  $k-1$ , on peut constater que l'ensemble de RCs à l'instant  $k$  est  $R_k = \{r^1, r^2, r^3, r^4\}$ . En utilisant la topologie de la carte, la relation multi-valuée  $\rho$  entre  $2^{R_{k-1}}$  et  $2^{R_k}$  peut être décrite par :*

$$\begin{aligned} \rho(\{r^1\}) &= \{r^1\}, \\ \rho(\{r^2\}) &= \{r^2, r^3, r^4\}. \end{aligned}$$

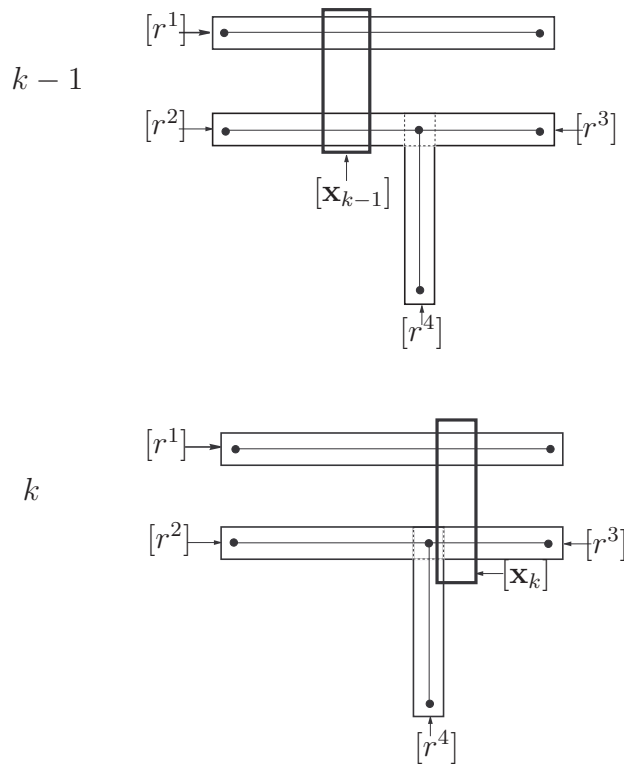


Figure 5.5 – Exemple d’une situation d’intersection et des routes parallèles.

En utilisant l’équation (5.12), la FM  $m_1^{R_k}$  est calculée :

$$m_1^{R_k} = M.m^{R_{k-1}},$$

où  $M$  est la matrice de transition suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette équation signifie que :

- $m^{R_{k-1}}(\emptyset)$  est transférée à  $m_1^{R_k}(\emptyset)$  ;
- $m^{R_{k-1}}(\{r^1\})$  est transférée à  $m_1^{R_k}(\{r^1\})$  ;
- $m^{R_{k-1}}(\{r^2\})$  est transférée à  $m_1^{R_k}(\{r^2, r^3, r^4\})$ ,  $r^2$  étant liée à  $r^3$  et  $r^4$  ;
- $m^{R_{k-1}}(\{r^1, r^2\})$  est transférée à  $m_1^{R_k}(\{r^1, r^2, r^3, r^4\})$ .

### 5.2.3.2 Critère géométrique

Ce critère utilise les vraisemblances géométriques des RCs, connaissant le pavé  $[\mathbf{x}_k]$ , pour créer une FM  $m_2^{R_k}$  sur  $R_k$ . Ces vraisemblances sont caractérisées par les surfaces d'intersection entre  $[\mathbf{x}_k]$  et les routes rectangulaires. Nous calculons la vraisemblance associée à une RC  $r^i$  en utilisant la formule suivante :

$$L^i = \frac{|[\mathbf{x}_k^i]|}{|[\mathbf{x}_k]|}, \quad (5.14)$$

où  $[\mathbf{x}_k^i] = [[\mathbf{x}_k] \cap [r^i]]$  est le pavé minimal englobant  $[\mathbf{x}_k] \cap [r^i]$ .

En utilisant  $L^i$ , une fonction de masse  $m_i^{R_k}$  peut être calculée via la relation suivante [3] :

$$\begin{cases} m_i^{R_k}(\{r^i\}) = 0, \\ m_i^{R_k}(\overline{\{r^i\}}) = \alpha_i(1 - a \cdot L^i), \\ m_i^{R_k}(\mathbf{R}_k) = 1 - \alpha_i(1 - a \cdot L^i), \end{cases} \quad (5.15)$$

où  $\overline{\{r^i\}}$  est le complément de  $\{r^i\}$  dans  $R_k$ ,  $\alpha_i$  est un coefficient d'affaiblissement associé à la route  $r^i$  et  $a$  est un coefficient de normalisation.  $m_2^{R_k}$  est obtenu en combinant conjonctivement les  $m_i^{R_k}$  :

$$m_2^{R_k} = \odot_i m_i^{R_k}. \quad (5.16)$$

### 5.2.3.3 Fonction de masse finale sur $R_k$

La FM finale sur  $R_k$  est définie comme la somme conjonctive de  $m_1^{R_k}$  et  $m_2^{R_k}$  :

$$m^{R_k} = m_1^{R_k} \odot m_2^{R_k}. \quad (5.17)$$

Rappelons que  $m^{R_k}(A)$  représente la croyance allouée à l'hypothèse que le véhicule se déplace sur la route  $r^i \in A$ , et  $m^{R_k}(\emptyset)$  représente la croyance en l'hypothèse que le véhicule se déplace sur une route non répertoriée dans la base de données routière utilisée. Dans la section suivante nous présentons les différentes étapes de la méthode BMM.

## 5.2.4 Étapes principales de la méthode BMM

### 5.2.4.1 Initialisation

À l'instant  $k = 0$ , le pavé de l'état  $[\mathbf{x}_0] = ([x_0], [y_0], [\theta_0])^T$  est initialisé en utilisant la mesure GPS ainsi que la confiance en cette mesure :

$$\begin{cases} [x_0] &= [x_{0,GPS} - 3\sigma_x, x_{0,GPS} + 3\sigma_x], \\ [y_0] &= [y_{0,GPS} - 3\sigma_y, y_{0,GPS} + 3\sigma_y], \\ [\theta_0] &= [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (5.18)$$

Rappelons que le cap du véhicule est non observé ; il est donc initialisé à :  $[\theta_0] = [0, 2\pi]$ .

À partir de  $[\mathbf{x}_0]$  et de la représentation rectangulaire des routes, un ensemble  $R_0$  de RCs est sélectionné en utilisant l'équation (5.7). On note par la suite  $n_{R_k}$  le cardinal de  $R_k$  à l'instant  $k$ . La FM associée au critère topologique de la carte est initialisée par une fonction de masse vide  $m_1^{R_0}(R_0) = 1$ , puisque nous n'avons aucune information a priori sur la trajectoire du véhicule à l'instant  $k = 0$ . La FM  $m_2^{R_0}$  associée au critère géométrique est calculée en utilisant les équations (5.15) et (5.16). La FM finale  $m^{R_0}$  sur  $R_0$  est ainsi obtenue via l'équation (5.17).

Notons qu'à cette étape, le pavé  $[\mathbf{x}_0]$  est remplacé par plusieurs pavés représentant les intersections avec les RCs  $\{[\mathbf{x}_0^i]\}_{i=1}^{n_{R_0}}$ , comme illustré sur la Figure 5.4.

#### 5.2.4.2 Prédiction

Les pavés  $\{[\mathbf{x}_{k-1}^i]\}_{i=1}^{n_{R_{k-1}}}$  associés à toutes les RCs sont propagés à l'instant  $k$  en se servant du modèle d'évolution du véhicule ainsi que de  $[\delta_{S,k}]$  et  $[\delta_{\theta,k}]$  pour former des pavés prédits  $\{[\mathbf{x}_k^i]\}_{i=1}^{n_{R_{k-1}}}$  sur l'état.

#### 5.2.4.3 Correction par la mesure GPS

Dans cette étape, le pavé associé à la mesure GPS  $[\mathbf{z}_k]$  est utilisé pour contracter les  $\{[\mathbf{x}_k^i]\}_{i=1}^{n_{R_{k-1}}}$  en utilisant l'algorithme de Waltz (cf. Section 1.3.1.6 du chapitre 1) et les contraintes du système (5.1) [36–38]. Notons que les RCs associées aux pavés prédits qui n'ont pas d'intersection avec  $[\mathbf{z}_k]$  sont éliminés de  $R_{k-1}$ .

#### 5.2.4.4 Correction par les données de la carte

Dans cette partie la représentation rectangulaire des RCs est utilisée pour contracter de nouveau les  $\{[\mathbf{x}_k^i]\}_{i=1}^{n_{R_{k-1}}}$ . L'ensemble  $R_k$  des RCs à l'instant  $k$  doit être déterminé.

Pour cela, on initialise  $R_k$  à  $R_{k-1}$ . En se basant sur le déplacement élémentaire ou la vitesse du véhicule et en utilisant la topologie de la carte, deux cas peuvent être envisagés pour chaque route  $r^i \in R_{k-1}$  :

- si la distance entre la position du véhicule à l'instant  $k-1$  et la fin de la route  $r$  est plus grande que le déplacement élémentaire du véhicule, alors on en déduit que le véhicule n'a pas quitté la route  $r^i$  et l'ensemble  $R_k$  reste inchangé. Ce cas est illustré sur la Figure 5.6 où le pavé  $[\mathbf{x}_{k-1}^1]$  qui représente la position du véhicule sur la route  $r^1$  à l'instant  $k-1$  reste sur la même route à l'instant  $k$  ;
- dans le cas contraire, le véhicule peut quitter  $r^i$  et  $R_k$  sera ainsi mise à jour en utilisant la relation :

$$R_k = R_k \cup S^i, \quad (5.19)$$

où  $S^i$  est donné par (5.8). La FM  $m_1^{R_k}$  associée à la topologie de la carte sera ainsi calculée en utilisant la matrice de transition et l'équation (5.12). Ce cas est représenté sur la Figure 5.6 par le pavé  $[\mathbf{x}_{k-1}^2]$  de la route  $r^2$ . Comme le montre cette figure, le véhicule peut quitter  $r^2$  à l'instant  $k$  pour se déplacer sur  $r^2$ ,  $r^3$  ou  $r^4$ .

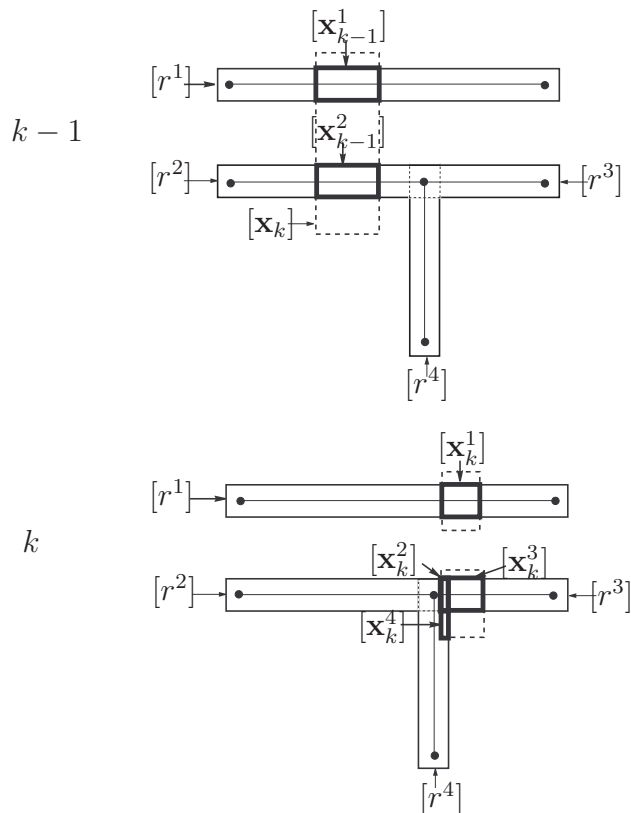


Figure 5.6 – Exemple de déplacement au voisinage d’une intersection.

Le pavé  $[\mathbf{x}_k^i]$  associé à chaque RC  $r^i$  est ensuite remplacé par le pavé minimal englobant l’intersection  $[r^i] \cap [\mathbf{x}_k^i]$ .

La FM  $m_2^{R_k}$  associée au critère géométrique est déterminée en utilisant les relations (5.15) et (5.16). La FM globale  $m^{R_k}$  sur  $R_k$  est finalement déduite en utilisant (5.17).

Notons que, s’il n’y a pas d’intersections entre  $\{[\mathbf{x}_k^i]\}_{i=1}^{n_{R_k-1}}$  et les RCs de  $R_k$ , alors nous supposons que le véhicule se déplace sur une route non répertoriée dans la base de données cartographiques. Les pavés  $\{[\mathbf{x}_k^i]\}_{i=1}^{n_{R_k-1}}$  sont sauvegardés et  $R_k$  est mise à jour en utilisant :

$$R_k = R_k \cup T, \quad (5.20)$$

où  $T$  est l’ensemble des routes liées à toutes les  $r^i \in R_k$ . Si cette solution n’est pas suffisante, une étape de ré-initialisation de la méthode BMM est nécessaire.

#### 5.2.4.5 Estimation finale

Pour choisir la route suivie par le véhicule, nous devons calculer la distribution de probabilité pignistique  $Betp$  associée à  $m^{R_k}$ . La route suivie par le véhicule est choisie comme étant celle de plus grande probabilité pignistique. La position du véhicule sur la route sélectionnée est estimée par le centre du pavé associé à cette route. La confiance associée à cette estimation est donnée par la taille du pavé. Si plusieurs pavés sont associés à la route sélectionnée, alors le pavé représentant l’état

peut être choisi comme étant le pavé minimal englobant tous ces pavés.

### 5.2.5 Intégrité de la méthode BMM

L'intégrité est une caractéristique fondamentale d'un système de localisation routière. Dans certaines applications, l'intégrité est plus importante que la précision. Dans la cadre du MM, la notion d'intégrité renvoie à la confiance en l'exactitude de la position fournie par le système de localisation. Elle peut être définie comme la capacité à identifier correctement la route suivie par le véhicule et à déterminer précisément l'emplacement du véhicule sur cette route.

Une étude sur l'intégrité des méthodes de MM est menée dans [80]. Cette étude définit plusieurs critères d'intégrité :

- Ecart à la position GPS : ce critère est basé sur la proximité entre la position du véhicule  $P$  fournie par le récepteur GPS et la position  $M$  fournie par la méthode de MM sur le segment de la route. Soit  $D(P, M)$  la distance entre  $P$  et  $M$ , et  $R$  une constante calculée en se basant sur les erreurs du système de navigation et la largeur de la route. L'intégrité de la méthode de MM est grande si  $D(P, M) \leq R$ .
- Erreur d'orientation : ce critère est basé sur la proximité entre le cap du véhicule et l'orientation de la route. Soit  $\theta$  le cap du véhicule,  $\beta$  l'orientation de la route et  $HE$  une constante calculée en se basant sur les erreurs de la carte et du système de navigation. L'intégrité de la méthode MM utilisée est grande si  $|\theta - \beta| \leq HE$ .
- Erreur de position : ce critère est basé sur la proximité entre la position  $M$  fournie par la méthode de MM et la vraie position  $V$  du véhicule. Soit  $D(M, V)$  la distance entre  $M$  et  $V$ . Suivant [80], la confiance sur  $M$  est grande si  $D(M, V) \leq r_f$  où  $r_f$  est une constante calculée à partir des erreurs associées à la carte et au système de navigation, ainsi que des largeurs des routes.

La méthode BMM introduite dans ce chapitre possède l'avantage d'intégrer implicitement les trois critères présentés ci-dessus. En effet, la position fournie par la méthode BMM est incluse dans l'intersection de l'estimation bornée de l'état représentée par un pavé, ainsi que dans la représentation rectangulaire des routes. Etant donné que les erreurs de la carte et la largeur des routes sont considérées dans la construction de cette représentation rectangulaire, et que les erreurs du système de navigation sont intégrées dans le pavé représentant l'état, on peut déduire que  $D(P, M) - R$  et  $|\theta - \beta| - HE$  sont souvent négatifs ou proches de zéro. De plus, la vraie position du véhicule est toujours incluse dans le pavé de l'état (propriété d'estimation garantie de l'AEB).  $D(V, M)$  est ainsi inférieure ou égale à  $\frac{w}{2} + l$ , où  $w$  est la largeur de la route et  $l$  est l'erreur géométrique de la carte.

La méthode BMM est résumée par l'Algorithme 6.

### 5.2.6 Application de la méthode BMM

#### 5.2.6.1 Résultats sur des données simulées

Nous allons présenter les résultats obtenus par la méthode BMM sur des données simulées générées sous Matlab (Simulink toolbox) avec un pas de temps

---

**Algorithm 6** L'algorithme de la méthode BMM.
 

---

- 1: % Initialisation %
  - 2:  $k \leftarrow 0$  et construire le pavé de l'état  $[\mathbf{x}_0]$  en se basant sur la mesure GPS
  - 3: Construire la représentation rectangulaire des routes
  - 4:  $R_k = \{r^i / [r^i] \cap [\mathbf{x}_0] \neq \emptyset\}$ ,  $n_{R_k}$  est le cardinal de  $R_k$
  - 5:  $m_1^{R_k} \leftarrow$  FM vide sur  $R_k$
  - 6: Calculer  $m_2^{R_k}$  en utilisant (5.15) et (5.16)
  - 7:  $m^{R_{k+1}} \leftarrow m_1^{R_{k+1}} \odot m_2^{R_{k+1}}$
  - 8: Mise à jour de l'état :  $[\mathbf{x}_k^i] = [[\mathbf{x}_k] \cap [r^i]]$ ,  $i = 1, \dots, n_{R_k}$ .
  - 9:  $R_{k+1} = R_k$  et  $m_1^{R_{k+1}} = m^{R_k}$
  - 10: **Pour**  $i = 1$  à  $n_{R_k}$
  - 11: % Prediction %
  - 12: Pavés correspondant aux entrées :  $[\delta_{S,k}] = [\delta_{S,k} - 3 \cdot \sigma_s, \delta_{S,k} + 3 \cdot \sigma_s]$  et  $[\delta_{\theta,k}] = [\delta_{\theta,k} - 3 \cdot \sigma_\theta, \delta_{\theta,k} + 3 \cdot \sigma_\theta]$
  - 13: Calculer  $[\mathbf{x}_{k+1}^i]$  en utilisant  $[\delta_{S,k}]$ ,  $[\delta_{\theta,k}]$  et (5.1)
  - 14: % Correction GPS %
  - 15: Pavé du GPS :  $[\mathbf{z}_{k+1}] = ([x_{k+1,GPS}, y_{k+1,GPS}])'$ , où  $[x_{k+1,GPS}] = [x_{k+1,GPS} - 3 \cdot \sigma_x, x_{k+1,GPS} + 3 \cdot \sigma_x]$  et  $[y_{k+1,GPS}] = [y_{k+1,GPS} - 3 \cdot \sigma_y, y_{k+1,GPS} + 3 \cdot \sigma_y]$
  - 16: Innovation :  $[I^i] = [\mathbf{x}_{k+1}^i] \cap [\mathbf{z}_{k+1}]$
  - 17: **Si**  $[I^i]$  n'est pas vide **Alors**,
  - 18:      $[\mathbf{x}_{k+1}^i] \leftarrow$  Waltz( $[\mathbf{x}_k^i]$ ,  $[\mathbf{x}_{k+1}^i]$ ,  $[\delta_{s,k}]$ ,  $[\delta_{\theta,k}]$ , (5.1))
  - 19: **Sinon**
  - 20:      $r^i$  est éliminée de  $R_k$
  - 21: **Fin Si**
  - 22: % Correction GIS %
  - 23: **Si** la distance entre le centre de  $[\mathbf{x}_k^i]$  et un nœud de  $r^i$  est inférieure ou égale à  $\delta_{S,k}$  **Alors**,
  - 24:      $R_{k+1} \leftarrow R_{k+1} \cup S^i$  où  $S^i$  est donnée par (5.8)
  - 25:     Calculer  $m_1^{R_{k+1}}$  en utilisant (5.12)
  - 26: **Sinon**
  - 27:      $R_{k+1}$  et  $m_1^{R_{k+1}}$  sont inchangés
  - 28: **Fin Si**
  - 29: Mise à jour de l'état :  $[\mathbf{x}_{k+1}^i] = [[\mathbf{x}_{k+1}^i] \cap [r^i]]$ ,  $i = 1, \dots, n_{R_{k+1}}$ .
  - 30: **Si**  $\{[\mathbf{x}_{k+1}^i] \cap [r^i]\}_{i=1}^{n_{R_{k+1}}} = \emptyset$  **Alors**,
  - 31:      $\{[\mathbf{x}_{k+1}^i]\}_{i=1}^{n_{R_k}}$  sont sauvegardés
  - 32:      $R_{k+1} = R_k \cup T$ ,  $T = \{r^j \text{ directement liée à } r^i / r^i \in R_k\}$
  - 33:     Si cette solution n'est pas adéquate alors, aller en 4
  - 34: **Fin Si**
  - 35: **Fin Pour**
  - 36: Calculer  $m_2^{R_{k+1}}$  en utilisant (5.15) and (5.16)
  - 37:  $m^{R_{k+1}} \leftarrow m_1^{R_{k+1}} \odot m_2^{R_{k+1}}$
  - 38:  $Betp \leftarrow$  distribution de probabilité pignistique associée à  $m^{R_{k+1}}$
  - 39: Choisir la route  $r$  de plus grande probabilité pignistique
  - 40: Le pavé de l'état est le pavé englobant tous les pavés associés à  $r$ ; l'état estimé est le centre de ce pavé
  - 41:  $k \leftarrow k + 1$ ; aller en 9 jusqu'à ce que  $k = k_{end}$
-



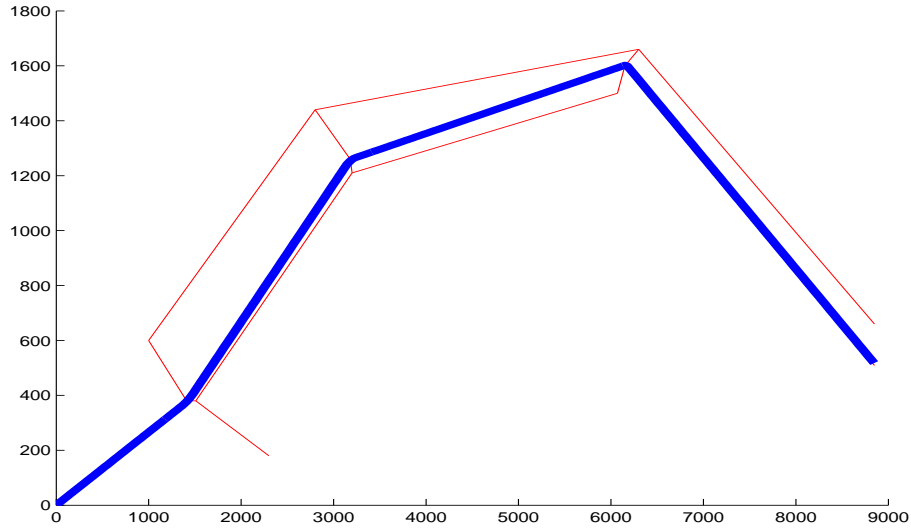


Figure 5.7 – La trajectoire du véhicule sur les routes est représentée en gras.

d'échantillonnage égal à 1 sec. Nous supposons que les bruits associés aux mesures GPS et aux entrées odométriques et gyrométriques sont caractérisés par  $\sigma_x = 7$  m,  $\sigma_y = 9$  m,  $\sigma_s = 1/4$  m et  $\sigma_\theta = 0.002$  degré. La Figure 5.7 présente les routes générées sur lesquelles le véhicule se déplace ainsi que l'itinéraire du véhicule. Les erreurs géométriques de la carte sont définies par  $l = 1$  m, tandis que la largeur des routes est égale à  $w = 6$  m.

Comme dans d'autres travaux appliquant l'AEB au problème de localisation de véhicule, nous avons fixé le paramètre caractérisant la confiance dans les mesures et les entrées à  $\kappa = 3$  [1, 37]. Dans le cas gaussien, ce choix garantit un intervalle contenant la vraie valeur de l'état avec une probabilité égale à 99.87%.

La Figure 5.8 présente les positions fournies par le récepteur GPS et la méthode BMM. Notons que, bien que la méthode BMM fournisse une position sur chaque RC, seules les positions finales sont représentées sur la figure.

La Figure 5.9 illustre la procédure utilisée par la méthode BMM pour gérer les hypothèses multiples engendrées par une intersection. Comme nous pouvons l'apercevoir sur la Figure 5.9-a, à l'instant  $k = 63$ ,  $R_k = \{r^1, r^2, r^3, r^4\}$  et la méthode BMM rencontre une intersection. Aux instants  $k = 64$  et  $k = 65$ , il n'y a pas d'intersection entre les pavés et les routes rectangulaires de  $r^1$  et  $r^2$  comme le montrent les Figures 5.9-b et c et ainsi  $R_k = \{r^3, r^4\}$ . À l'instant  $k = 66$ , la route non pertinente est éliminée par les critères de la méthode BMM et nous obtenons une seule RC comme illustré sur la Figure 5.9-d.

Tableau 5.1 – Erreurs quadratiques moyennes sur  $x$  et  $y$  pour le GPS, la méthode BMM et la méthode développée par Quddus et al. dans [81].

	GPS	BMM	Quddus
EQM sur $x(m^2)$	0.2207	0.104	0.121
EQM sur $y(m^2)$	0.2817	0.176	0.179

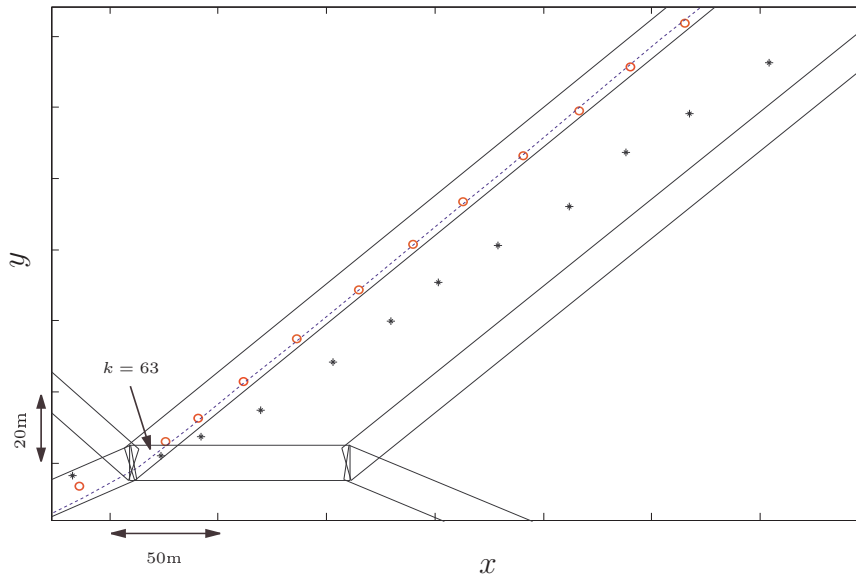


Figure 5.8 – Application de la méthode BMM : trajectoire du véhicule (---), positions GPS (\*) et positions estimées par la méthode BMM (o).

Nous comparons dans la suite de cette section la méthode BMM avec la méthode développée par Quddus et al. dans [81], et qui sera désignée dans la suite de ce chapitre comme la *méthode de référence*. Cette méthode utilise un filtre de Kalman étendu pour intégrer les données GPS avec les mesures fournies par les capteurs proprioceptifs. En utilisant la position résultante, le nœud le plus proche est sélectionné en utilisant un critère de proximité (distance). Les routes connectées à ce nœud sont choisies comme RCs et la route suivie par le véhicule est sélectionnée en utilisant :

- la proximité entre la position résultante du filtre et les RCs ;
- la similarité angulaire entre le trajet du véhicule et l'orientation de RCs.

L'estimation de la position du véhicule sur la route sélectionnée est obtenue en utilisant les erreurs associées au différents capteurs et en adoptant une technique de projection perpendiculaire. Notons que cette méthode n'utilise pas la topologie de la carte, et qu'elle nécessite par conséquent une ré-initialisation après chaque croisement des routes.

Le tableau 5.1 présente l'erreurs quadratiques moyennes (EQM) sur  $x$  et  $y$  pour le GPS, la méthode BMM et la méthode de référence. Ce tableau montre que la méthode BMM et la méthode de référence ont des performances comparables avec une légère supériorité pour la méthode BMM.

La Figure 5.10 présente les résultats de la méthode BMM et de la méthode de référence au voisinage d'une intersection. Comme on le voit, à cause d'une mesure GPS fortement erronée, la méthode de référence échoue dans l'identification de la route à l'instant qui suit l'intersection ( $k = 63$ ). Ceci peut engendrer un changement de trajet dans les systèmes de localisation. La méthode de référence applique toujours une phase d'initialisation autour d'une intersection afin d'éviter la divergence, contrairement à la méthode BMM qui gère ce problème par l'approche

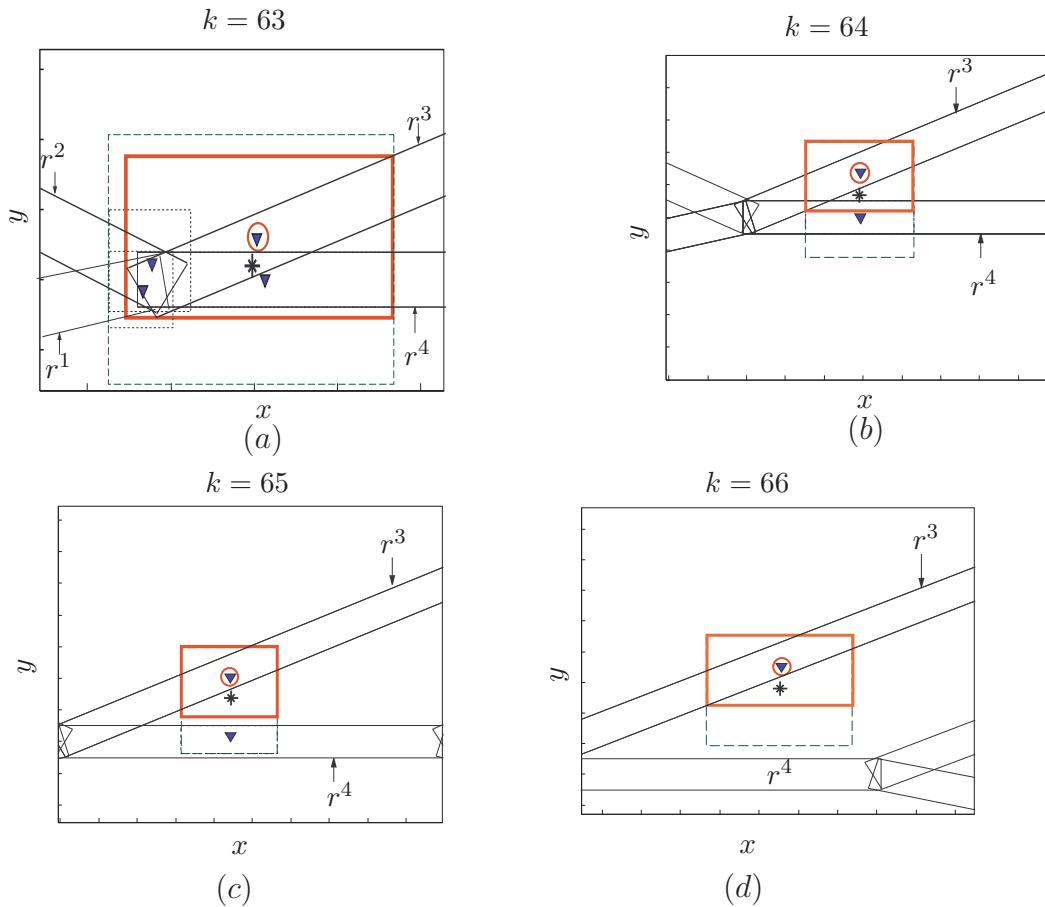


Figure 5.9 – Résultats de la méthode BMM au voisinage d’une intersection. Les figures (a), (b), (c) et (d) correspondent aux instants  $k = 63$ ,  $k = 64$ ,  $k = 65$  et  $k = 66$ . Les routes rectangulaires, le pavé de l’état et le pavé du GPS sont représentés par des rectangles en traits pleins, en gras et en pointillés. Les positions fournies par le GPS et la méthode BMM sont représentées par des points (\*) et (o). Les positions associées aux différentes RCs sont représentées par des ( $\nabla$ ).

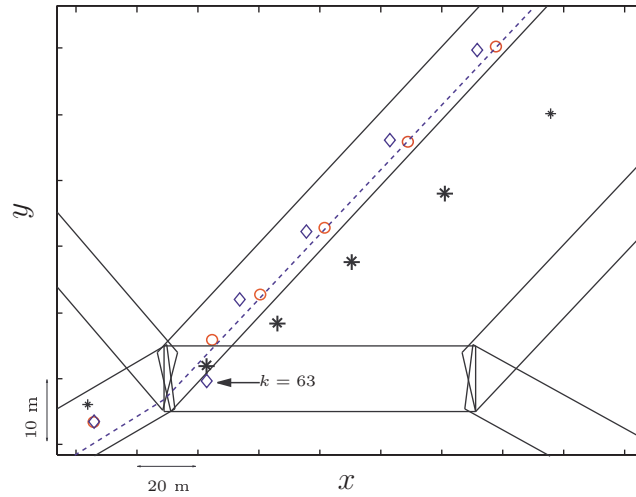


Figure 5.10 – Résultats de la méthode BMM et de la méthode de référence au voisinage d’une intersection. La vraie trajectoire du véhicule est illustrée par des lignes en pointillé. Les positions fournies par le GPS, la méthode BMM et la méthode de référence sont représentées par des (\*), (o) et (◇).

multi-hypothèses.

### 5.2.6.2 Résultats avec des données manquantes

Dans cette section nous étudions le comportement de la méthode BMM face à des données cartographiques manquantes, comme par exemple dans le cas où le véhicule se déplace sur une route non répertoriée dans la base de données. La Figure 5.11 illustre un exemple d’une telle situation où le véhicule quitte la route  $r^4$  à l’instant  $k = 66$  pour se déplacer sur une route non répertoriée dans la base de données. À l’instant  $k = 88$ , le véhicule se déplace de nouveau sur la route  $r^5$  reconnue par la carte.

La Figure 5.12-a présente les résultats obtenus par la méthode BMM entre les instants  $k = 65$  et  $k = 97$ . La Figure 5.12-b montre les résultats à l’instant  $k = 66$  où il y a une seule RC :  $R_k = \{r^4\}$  et  $m^{R_k}(\{r^4\}) = 1$ . À l’instant  $k = 67$ , il n’y a pas d’intersection entre le pavé de l’état et les RCs (Figure 5.12-c). L’ensemble de RCs est ainsi mise à jour par  $R_k = \{r^4, r^5, r^6\}$ , comme expliqué dans la section 5.2.4.4. La FM devient alors  $m^{R_k}(\emptyset) = 1$ , ce qui indique que le véhicule se déplace sur une route qui n’appartient pas à la base de données cartographiques. À l’instant  $k = 88$ , on obtient une intersection entre la route rectangulaire associée à  $r^5$  et le pavé de l’état. Par conséquent, la route  $r^5$  est choisie comme RC par la méthode BMM et  $m^{R_k}(\{r^5\}) = 1$  (Figure 5.12-e).

La Figure 5.13 illustre les résultats obtenus par la méthode BMM et la méthode de référence sur le trajet de la Figure 5.11. Comme nous pouvons le remarquer, la méthode de référence est incapable de détecter le fait que le véhicule se déplace sur une route non répertoriée dans la base de données routière, et effectue des projections sur la route la plus proche de l’estimation.

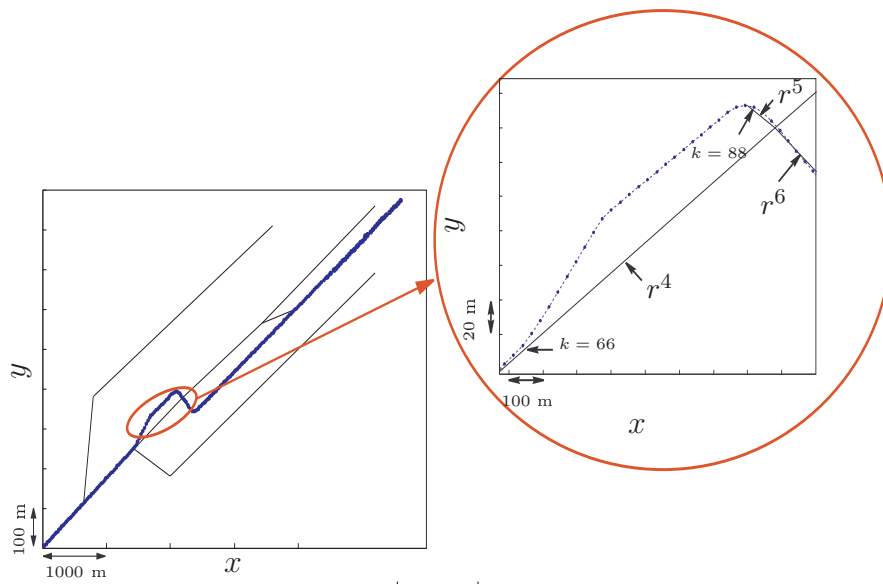


Figure 5.11 – Exemple d’une donnée cartographique manquante. Dans la partie gauche, la trajectoire du véhicule est représentée par des lignes en gras. Dans la partie droite, la trajectoire du véhicule est illustrée par des lignes en pointillé. On peut remarquer que le véhicule durant la période  $[66, 88]$  se déplace sur une route non répertoriée dans la base de données.

### 5.2.6.3 Résultats sur des données réelles

Dans cette section, nous montrons les résultats obtenus par la méthode BMM sur des données réelles. l’expérience a été menée à Compiègne avec le véhicule du laboratoire Heudiasyc. Les mesures de position  $(x_{GPS}, y_{GPS})$  sont obtenues par un récepteur GPS. Les rotations et les déplacements élémentaires sont mesurés par un capteur gyromètre optique et un capteur ABS. La carte utilisée présente un biais statique que nous corrigeons avant son utilisation. Les erreurs géométriques de la carte autour de la trajectoire sont caractérisées par  $l = 1m$  et les largeurs des routes sont égales à  $w = 6m$ . La carte utilisée ainsi que la trajectoire de test sont représentées sur la Figure 5.14.

La Figure 5.15-a montre les résultats obtenus par la méthode BMM au voisinage d’une intersection (à l’instant  $k_1$ ). Les Figures 5.15-b et c montrent en détail les positions associées aux différentes RCs aux instants  $k_1$  et  $k_1 + 1$ . Comme nous pouvons le remarquer, à l’instant  $k_1$ , trois RCs sont sélectionnées et la méthode BMM fournit une position sur chacune de ces routes. À l’instant  $k_1 + 1$  les RCs sont réduites à deux, la troisième étant éliminée par les critères de la méthode BMM (cf. la Figure 5.15-c).

Le tableau 5.2 indique, pour la méthode BMM et la méthode de référence, la proportion de pas de temps (sur 1500 échantillons) durant lesquels la route suivie par le véhicule est correctement identifiée. Comme on le voit, la méthode BMM a de meilleures performances que la méthode de référence, ce qui peut être attribué au fait qu’elle utilise des informations supplémentaires pour le MM telles que la vitesse, les erreurs de la carte et les largeurs des routes. De plus, elle se base sur une

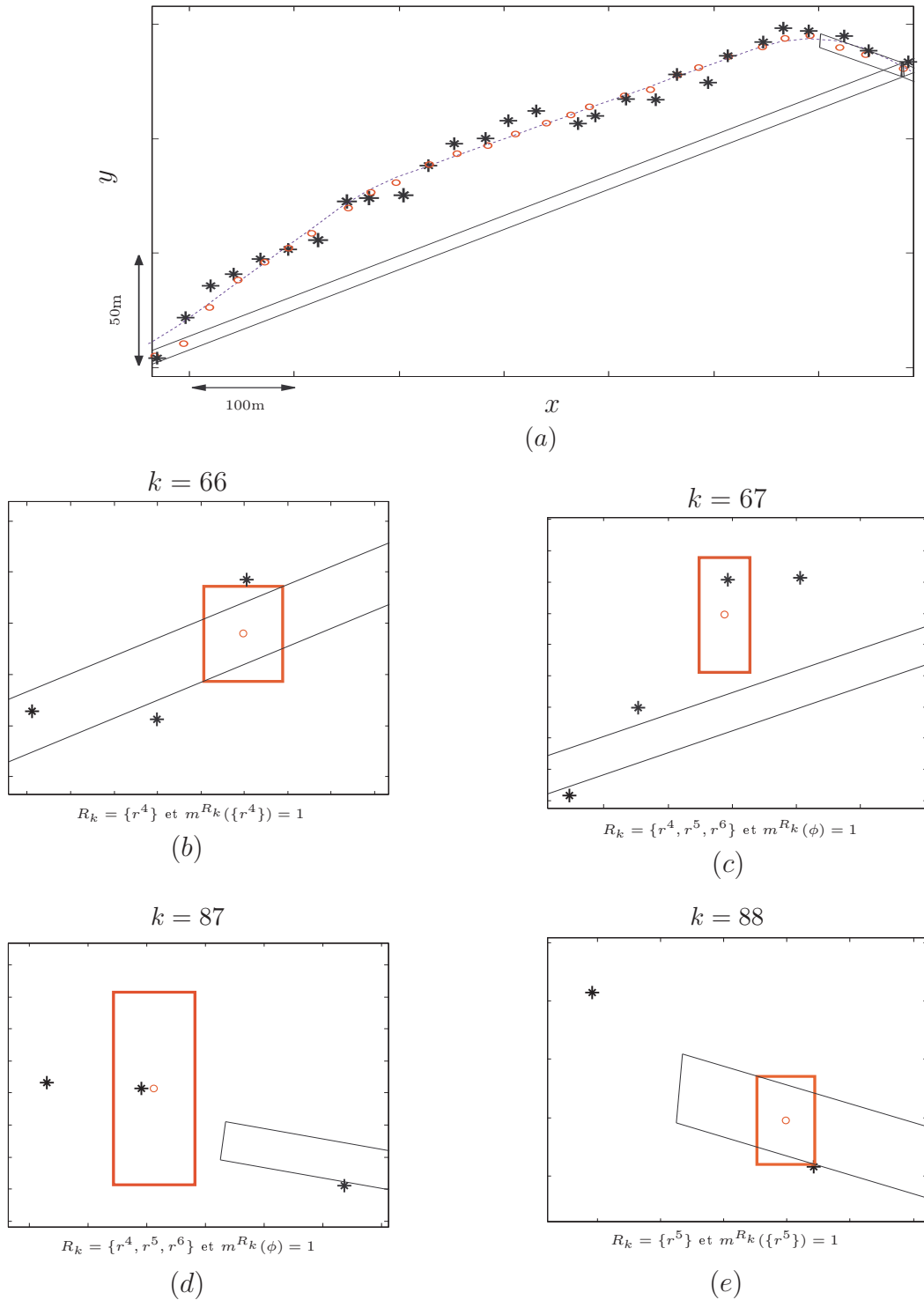


Figure 5.12 – Cas d’une route non répertoriée sur la carte. Les routes rectangulaires sont représentés en traits pleins et les pavés de l’état sont représentés en gras. Les positions obtenues par le GPS et la méthode BMM sont représentées par des points (\*) et (o).

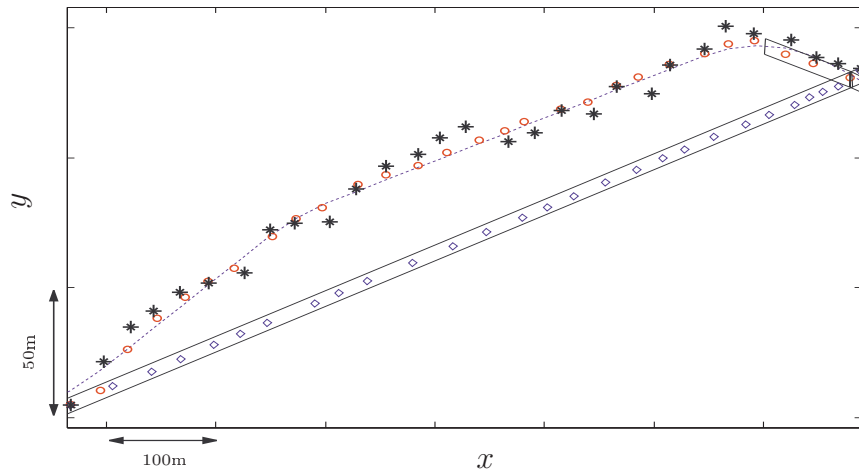


Figure 5.13 – Comparaison entre la méthode BMM et la méthode de référence dans le cas d’une route manquante dans la carte. La vraie trajectoire du véhicule est représentée par des lignes en pointillé. Les positions obtenues par le GPS, la méthode BMM et la méthode de référence sont représentées par des points (\*), (o) et (◊).

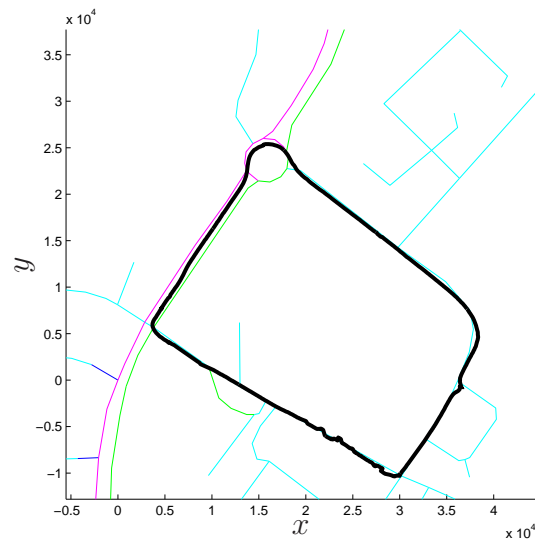
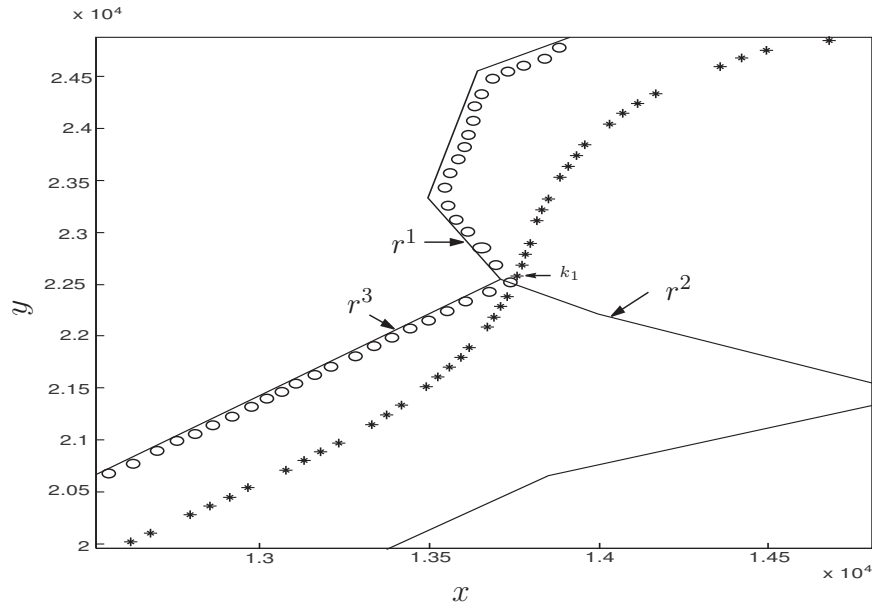


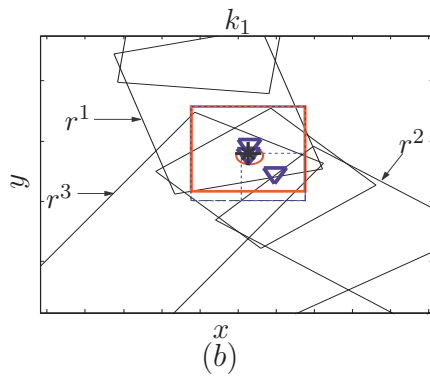
Figure 5.14 – Sous-carte routière. La trajectoire du véhicule obtenue par le récepteur GPS est représentée en gras.

Tableau 5.2 – Pourcentage d’identification de la route par la méthode BMM et la méthode de référence

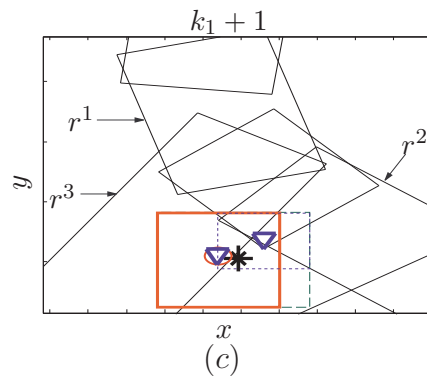
	BMM	Quddus
Identification de la route (%)	99.2	89.6



(a)



(b)



(c)

Figure 5.15 – Résultats expérimentaux au voisinage d’une intersection. Les rectangles en traits pleins représentent les routes rectangulaires, alors que les pavés de l’état associés à chaque RC sont illustrés par des rectangles en pointillé. Les rectangles en gras désignent les pavés associés aux routes suivies par le véhicule. Les positions fournies par le GPS et la méthode BMM sont représentées par des points (\*), (o). Les positions associées aux différents RC sont illustrées par des ( $\nabla$ ).



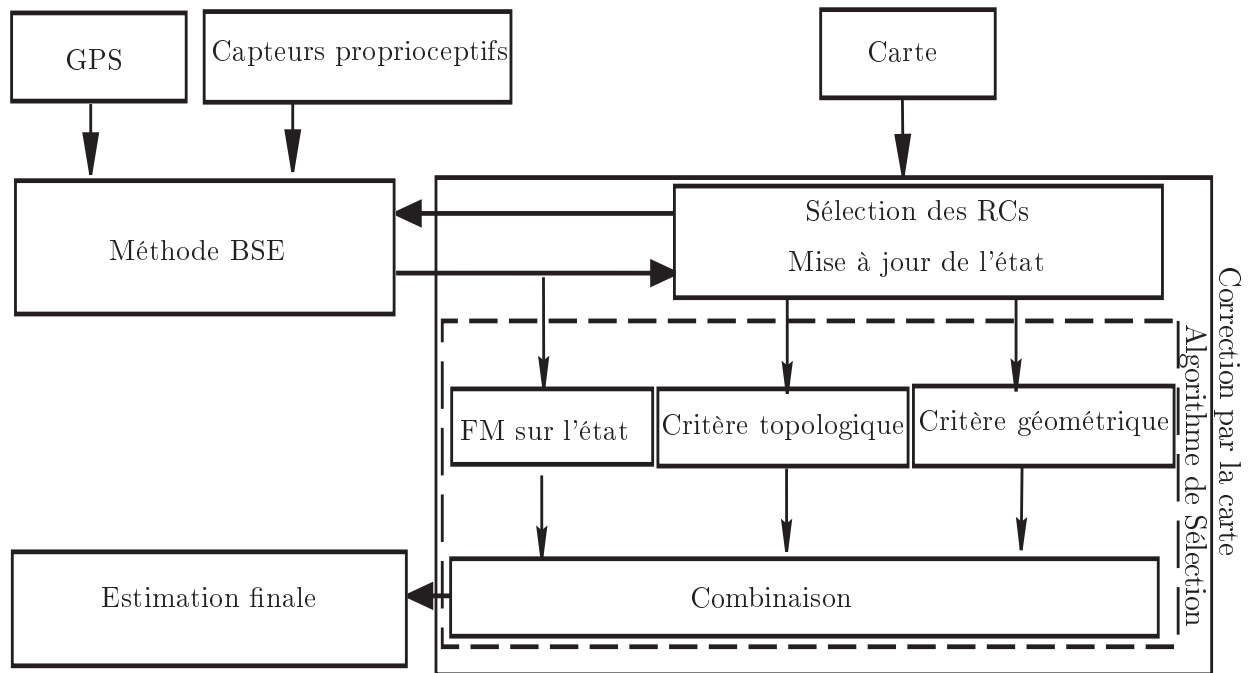


Figure 5.16 – Structure de la méthode BSMM.

approche multi-hypothèses et sur la théorie des fonctions de croyance.

### 5.3 Extension de la méthode BMM

Pour clore ce chapitre, nous proposons finalement dans cette section une extension de la méthode BMM, appelée BSMM pour *Belief State Map Matching* en anglais [69]. La méthode BSMM est basée sur l'utilisation de la méthode BSE introduite dans le chapitre 3 [70, 74] pour l'intégration des données fournies par le récepteur GPS et les capteurs proprioceptifs. Nous adoptons donc une modélisation crédibiliste des bruits associés aux modèles et aux différentes variables du système dynamique. À chaque variable réelle est associée une FM avec plusieurs intervalles focaux, à la différence de l'AEB qui n'utilise qu'un seul intervalle. Ceci doit permettre de fournir des estimations plus fiables que celles obtenus par la méthode BMM [69].

La structure de la méthode BSMM est illustrée sur la Figure 5.16. Les données fournies par le récepteur GPS et les capteurs proprioceptifs sont combinées en utilisant la méthode BSE pour donner une fonction de masse représentant l'état. En se basant sur la FM résultante et sur la représentation rectangulaire des routes, un ensemble de RCs est sélectionné et une FM associée est calculée en utilisant des critères topologique et géométrique. La route suivie par le véhicule est finalement choisie et une estimation ponctuelle de sa position sur cette route est calculée en utilisant la règle de maximum de probabilité pignistique.

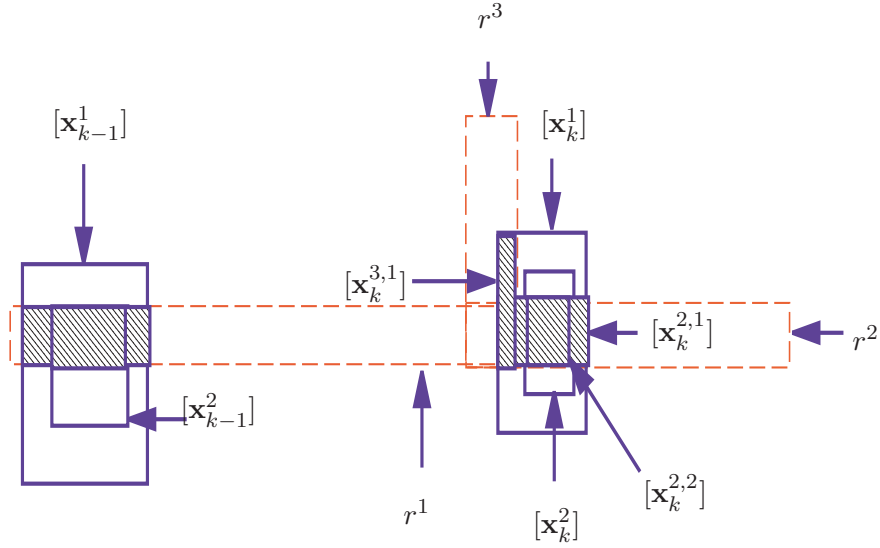


Figure 5.17 – Exemple d’une situation d’intersection. La route  $r^1$  est liée à  $r^2$  et  $r^3$ .

À l’image de la méthode BMM, la méthode BSMM gère des hypothèses multiples. À chaque instant  $k$ , une seule RC est choisie, même si les autres RCs sont sauvegardées jusqu’à ce qu’elles soient éliminées par les critères topologique et géométrique de la méthode BSMM.

La méthode BSMM suit la même démarche générale que la méthode BMM, à la différence que, du fait qu’il peut y avoir plusieurs éléments focaux sur l’état, la mise à jour des fonctions de masse sur les RCs est un peu plus complexe que dans le cas de la méthode BMM. Ce calcul est détaillé dans la partie suivante.

### 5.3.1 Sélection de RCs et mise à jour de l’état

Soit  $m^{\mathbf{x}^k}$  la FM représentant l’état à l’instant  $k$ . L’ensemble  $R_k$  des RCs à l’instant  $k$  peut être sélectionné en utilisant la formule suivante :

$$R_k = \{r/\exists i, [\mathbf{x}_k^i] \cap [r] \neq \emptyset\}, \quad (5.21)$$

où  $[\mathbf{x}_k^i]$  est un élément focal de  $m^{\mathbf{x}^k}$ . Soit  $n_{R_k}$  le cardinal de  $R_k$  à l’instant  $k$ .

Soit  $\rho^i$  une fonction de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{I}\mathbb{R}^2$ , définie par :

$$\rho^i([\mathbf{x}_k^j]) = [\mathbf{x}_k^{i,j}] = [[\mathbf{x}_k^j] \cap [r^i]], \quad (5.22)$$

où  $[\mathbf{x}_k^j]$  est un élément focal de  $m^{\mathbf{x}^k}$ . En utilisant  $\rho^i$  et  $m^{\mathbf{x}^k}$ , une FM  $m_i^{\mathbf{x}^k}$  représentant l’état associé à  $r^i$  peut être déduite en transférant la masse  $m^{\mathbf{x}^k}([\mathbf{x}_k^j])$  à  $\rho^i([\mathbf{x}_k^j])$  :

$$m^{\mathbf{x}^k}([\mathbf{x}_k^j]) \rightarrow m_i^{\mathbf{x}^k}(\rho^i([\mathbf{x}_k^j])). \quad (5.23)$$

On obtient ainsi la FM  $m_i^{\mathbf{x}^k}$  définie par :

$$m_i^{\mathbf{x}^k}([\mathbf{x}_k^{i,j}]) = m^{\mathbf{x}^k}([\mathbf{x}_k^j]),$$

où  $[\mathbf{x}_k^{i,j}]$  est le  $j^{\text{ème}}$  élément focal de  $m_i^{\mathbf{x}_k}$ . Cette mise à jour des masses est illustrée par l'exemple suivant.

**Exemple 16.** *Considérons le cas représenté sur la Figure 5.17 où la FM  $m^{\mathbf{x}_{k-1}}$  associée à l'état à l'instant  $k-1$  a deux éléments focaux :  $[\mathbf{x}_{k-1}^1]$  et  $[\mathbf{x}_{k-1}^2]$  se déplaçant sur  $r^1$ . La FM  $m^{\mathbf{x}_k}$  associée à l'état à l'instant  $k$  a deux éléments focaux :  $[\mathbf{x}_k^1]$  et  $[\mathbf{x}_k^2]$  engendrés par les deux éléments focaux de  $m^{\mathbf{x}_{k-1}}$ . L'ensemble des RCs à l'instant  $k$  est ainsi  $R_k = \{r^2, r^3\}$ .*

*En utilisant  $m^{\mathbf{x}_k}$  et les relations (5.22) et (5.23), les deux FM associées à  $r^2$  et  $r^3$  sont :*

$$\begin{aligned} m_2^{\mathbf{x}_k}([\mathbf{x}_k^{2,1}]) &= m^{\mathbf{x}_k}([\mathbf{x}_k^1]), \\ m_2^{\mathbf{x}_k}([\mathbf{x}_k^{2,2}]) &= m^{\mathbf{x}_k}([\mathbf{x}_k^2]), \end{aligned}$$

et

$$m_3^{\mathbf{x}_k}([\mathbf{x}_k^{3,1}]) = 1.$$

### 5.3.2 Construction des fonctions de masse

En plus des fonctions de masse calculées à partir de la topologie et de la géométrie de la carte comme dans la méthode BMM, la méthode BSMM prend en compte la FM  $m^{\mathbf{x}_k}$  sur l'état pour calculer une FM finale sur les RCs. Nous détaillons ci-après les différentes parties du calcul de cette FM.

#### 5.3.2.1 Critère topologique

En utilisant la topologie de la carte, une FM  $m_1^{R_k}$  sur  $R_k$  peut être calculée. Soient  $r^i$  une RC de  $R_{k-1}$  et  $S^i$  l'ensemble des routes directement liées à  $r^i$  et qui ont une intersection non nulle avec au moins un élément focal de  $m^{\mathbf{x}_k}$ . Soit  $\rho$  la fonction de  $R_{k-1}$  dans  $2^{R_k}$  définie par l'équation (5.9). En utilisant  $\rho$ ,  $m_1^{R_k}$  peut être obtenue via l'équation (5.12).

**Exemple 17.** *Considérons à nouveau le cas illustré sur la Figure 5.17. À l'instant  $k-1$ , la FM  $m^{\mathbf{x}_{k-1}}$  associée à l'état est caractérisée par deux éléments focaux  $[\mathbf{x}_{k-1}^1]$  et  $[\mathbf{x}_{k-1}^2]$ . Soient  $m^{\mathbf{x}_k}$  la FM de l'état à l'instant  $k$  et  $[\mathbf{x}_k^1]$  et  $[\mathbf{x}_k^2]$  les éléments focaux associés. À partir de ces éléments focaux, deux RCs peuvent être sélectionnées et  $R_k = \{r^2, r^3\}$ . Du fait que  $r^1$  est directement liée à  $r^2$  et  $r^3$ , la FM  $m_1^{R_k}$  peut être déduite de  $m^{R_{k-1}}$  en utilisant la fonction  $\rho$ , définie de  $R_{k-1}$  dans  $2^{R_k}$  par :*

$$\rho(\{r^1\}) = \{r^2, r^3\}.$$

Ainsi,  $m_1^{R_k}$  est donnée par :

$$m_1^{R_k}(\{r^2, r^3\}) = m^{R_{k-1}}(\{r^1\}) = 1.$$

### 5.3.2.2 Critère géométrique

En utilisant l'intersection entre la représentation rectangulaire de RCs et les éléments focaux de  $m^{\mathbf{x}^k}$ , une FM  $m_2^{\mathbf{x}^k}$  sur  $R_k$  peut être calculée. La vraisemblance géométrique  $L^i$  de  $r^i$  sachant  $m^{\mathbf{x}^k}$  est ici définie par :

$$L^i = \max_j \frac{|[\mathbf{x}_k^{i,j}]|}{|[\mathbf{x}_k^j]|}, \quad (5.24)$$

où  $[\mathbf{x}_k^j]$  est le  $j^{\text{ème}}$  élément focal de  $m^{\mathbf{x}^k}$  et  $[\mathbf{x}_k^{i,j}]$  le pavé minimal englobant  $[\mathbf{x}_k^j] \cap [r^i]$ . En utilisant  $L^i$  et le système (5.15), une FM  $m_i$  sur  $R_k$  est calculée. La FM  $m_2^{\mathbf{x}^k}$  est obtenue en combinant les différentes fonctions de masse  $m_i$  via l'équation (5.16).

### 5.3.2.3 Utilisation de l'état

Nous allons maintenant utiliser les FM  $\{m_i^{\mathbf{x}^k}\}_{i=1}^{n_{R_k}}$  sur l'état associées aux RCs afin de créer une FM sur  $R_k$  notée  $m_s^{R_k}$ . Cette FM quantifie la part de croyance sur  $R_k$  donnée par l'état, indépendamment de la topologie et la géométrie de la carte routière utilisée. Soit  $\rho_s$  la fonction définie de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^2$  dans  $2^{R_k}$  par :

$$\rho_s([\mathbf{x}_k^{i,j}]) = \{r^l / r^l \in R_k \text{ and } [r^l] \cap [\mathbf{x}_k^{i,j}] \neq \emptyset\}, \quad (5.25)$$

où  $[\mathbf{x}_k^{i,j}]$  est un élément focal de  $m_i^{\mathbf{x}^k}$ . En utilisant  $\rho_s$ , la relation entre  $\{m_i^{\mathbf{x}^k}\}_{i=1}^{n_{R_k}}$  et  $m_s^{R_k}$  peut être décrite par :

$$m_i^{\mathbf{x}^k}([\mathbf{x}_k^{i,j}]) \rightarrow m_s^{R_k}(\rho_s([\mathbf{x}_k^{i,j}])). \quad (5.26)$$

Notons que la FM  $m_s^{R_k}$  nécessite une étape de normalisation puisqu'elle résulte d'une étape de transfert de masse à partir de plusieurs FM  $\{m_i^{\mathbf{x}^k}\}_{i=1}^{n_{R_k}}$ .

**Exemple 18.** *Considérons à nouveau le cas de la Figure 5.17 où la position du véhicule à l'instant  $k$  est donnée par une FM  $m^{\mathbf{x}^k}$  avec deux éléments focaux  $[\mathbf{x}_k^1]$  et  $[\mathbf{x}_k^2]$ . Comme le montre la figure, la fonction  $\rho_s$  est définie par :*

$$\begin{cases} \rho_s([\mathbf{x}_k^1]) = \{r^2, r^3\}, \\ \rho_s([\mathbf{x}_k^2]) = \{r^2\}. \end{cases}$$

En utilisant (5.26),  $m_s^{R_{k+1}}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} m_s^{R_k}(\{r^2\}) &= m^{\mathbf{x}^k}([\mathbf{x}_k^2]), \\ m_s^{R_k}(\{r^2, r^3\}) &= m^{\mathbf{x}^k}([\mathbf{x}_k^1]) \end{aligned}$$

En combinant  $m_1^{R_k}$ ,  $m_2^{R_k}$  et  $m_s^{R_k}$ , la FM finale  $m^{R_k}$  sur  $R_k$  peut être obtenue :

$$m^{R_k} = m_1^{R_k} \odot m_2^{R_k} \odot m_s^{R_k}. \quad (5.27)$$

Dans la section suivante nous présentons l'algorithme complet de la méthode BSMM.

### 5.3.3 Algorithme de la méthode BSMM

#### 5.3.3.1 Initialisation

A l'instant  $k = 0$ , une FM  $m^{\mathbf{x}_0}$  sur l'état est construite avec  $p$  éléments focaux. On peut utiliser la procédure décrite dans la Section 3.3.1, qui permet de construire une distribution de possibilité autour de la mesure GPS sur la base des écart-types  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ . À partir de  $p$   $\alpha$ -coupes de cette distribution, une FM  $m^{\mathbf{x}_0}$  ayant  $p$  éléments focaux peut être déduite. En utilisant  $m^{\mathbf{x}_0}$  et la représentation rectangulaire des routes, un ensemble  $R_0$  des RCs est sélectionné. Soit  $n_{R_0}$  le cardinal de  $R_0$ .

Comme on n'a pas d'information a priori sur la position antérieure du véhicule à l'instant  $k = 0$ ,  $m_1^{R_0}$  est initialisée par la FM vide sur  $R_0$ . La FM  $m_2^{R_0}$  est calculée via les équations (5.24), (5.15) et (5.16). La FM  $m_s^{R_0}$  est donnée par la relation (5.26). Finalement, la FM finale  $m^{R_0}$  est déduite en combinant conjonctivement ces différentes FMs en utilisant (5.27).

Pour chaque RC  $r^i \in R_0$ , une FM représentant l'état  $m_i^{\mathbf{x}_0}$  est calculée via les équations (5.22) et (5.23).

#### 5.3.3.2 Étape BSE

Les FMs  $m_{k-1}^{\mathbf{S}}$ ,  $m_{k-1}^{\ominus}$  et  $m_k^{\mathbf{z}}$ , associées aux  $\delta_{s,k-1}$ ,  $\delta_{\theta,k-1}$  et  $\mathbf{z}_k$ , sont construites en se basant sur les mesures obtenues par l'ABS, le gyromètre et le récepteur GPS en utilisant à nouveau la procédure décrite dans la Section 3.3.1. Ces FMs sont combinées avec celle de l'état afin de donner la FM sur l'état à l'instant  $k$  en utilisant l'algorithme 4 de la méthode BSE du chapitre 3 (page 83). Soit  $\{m_i^{\mathbf{x}_k}\}_{i=1}^{n_{R_{k-1}}}$  la FM associée aux RCs et calculée à partir de l'état à l'instant  $k$ .

#### 5.3.3.3 Correction par les données de la carte

La représentation rectangulaire des RCs est utilisée dans cette étape afin de corriger la croyance sur la position du véhicule. L'ensemble des RCs à l'instant  $k$  doit ainsi être sélectionné.

L'ensemble  $R_k$  est initialisé à  $R_{k-1}$ . Soit  $r^i$  une RC de  $R_k$  et soit  $[\mathbf{x}_k^{i,j}]$  un élément focal de  $m_i^{\mathbf{x}_k}$ . En notant  $d^i$  la distance entre le centre de  $[\mathbf{x}_k^{i,j}]$  et un nœud de  $r^i$ , plusieurs cas peuvent se présenter :

- Si  $d^i$  est inférieure ou égale à  $\delta_{S,k-1}$ , alors le véhicule peut quitter la route  $r^i$ ; on pose alors  $R_k = R_k \cup S^i$  où  $S^i = \{r/r \text{ est directement liée à } r^i \text{ et } [r] \cap [\mathbf{x}_k^{i,j}] \neq \emptyset\}$ .
- Si  $d^i$  est plus grande que  $\delta_{S,k-1}$ ,  $R_k$  ne change pas.

Les FMs  $m_1^{R_k}$ ,  $m_2^{R_k}$ ,  $m_s^{R_k}$  associées à  $R_k$  sont ainsi calculées en suivant la procédure décrite dans la Section 5.3.2 pour former la FM finale  $m^{R_k}$  sur les RCs. Pour chaque RC  $r^i \in R_k$ , la FM de l'état  $m_i^{\mathbf{x}_k}$  est calculée comme expliqué dans la Section 5.3.1.

#### 5.3.3.4 Estimation finale

La distribution de probabilité pignistique  $Betp$  associée à  $m^{R_k}$  est calculée à cette étape, et on choisit la route de plus grande probabilité pignistique. La position

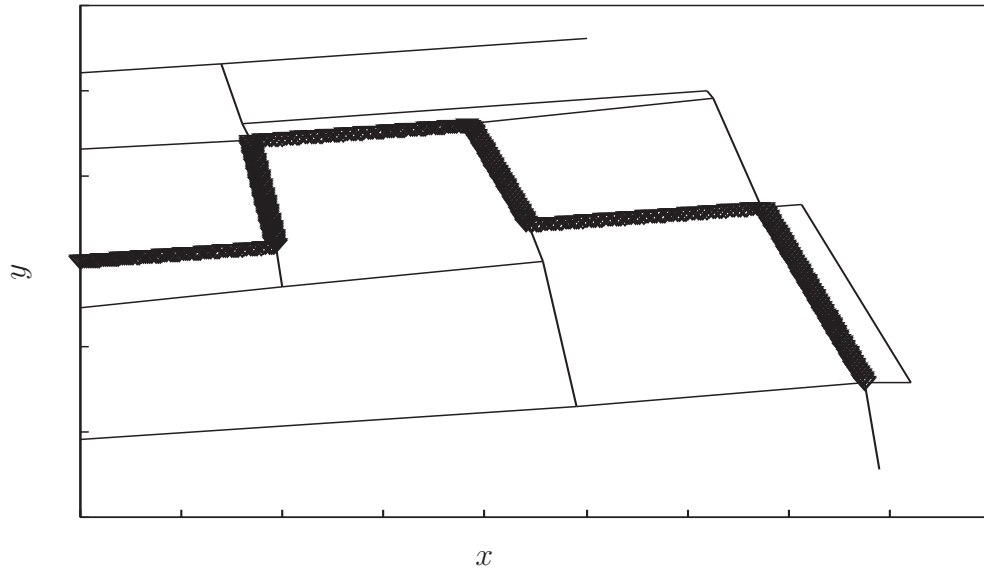


Figure 5.18 – Carte routière simulée. La trajectoire du véhicule est représentée en gras.

du véhicule est ensuite calculée en utilisant la FM sur l'état associée à la route sélectionnée. Soit  $r^i$  la route suivie par le véhicule et  $m_i^{\mathbf{x}_k}$  la FM sur l'état associée. L'estimation ponctuelle de la position du véhicule sur  $r^i$  est donnée par :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_j m_i^{\mathbf{x}_k}([\mathbf{x}_k^{i,j}]) \cdot c_j, \quad (5.28)$$

où  $[\mathbf{x}_k^{i,j}]$  est un élément focal de  $m_i^{\mathbf{x}_k}$  et  $c_j$  est le centre du pavé  $[\mathbf{x}_k^{i,j}]$ . Une région de confiance associée peut être calculée via les relations :

$$\underline{\hat{\mathbf{x}}}_k = \sum_j m_i^{\mathbf{x}_k}([\mathbf{x}_k^{i,j}]) \cdot \underline{\mathbf{x}}_k^{i,j}, \quad (5.29)$$

$$\overline{\hat{\mathbf{x}}}_k = \sum_j m_i^{\mathbf{x}_k}([\mathbf{x}_k^{i,j}]) \cdot \overline{\mathbf{x}}_k^{i,j}, \quad (5.30)$$

où  $\underline{\mathbf{x}}_k^{i,j}$  et  $\overline{\mathbf{x}}_k^{i,j}$  sont les bornes inférieure et supérieure de  $[\mathbf{x}_k^{i,j}]$ .

Le résumé de la méthode BSMM est donné dans l'Algorithme 7.

### 5.3.4 Application

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus par la méthode BSMM sur des données simulées générées par le toolbox Simulink du Matlab, et nous les comparons avec ceux de la méthode BMM. Nous utilisons dans cette application les mêmes valeurs des paramètres que ceux utilisés dans la Section 5.2.6.1. Les nombres d'éléments focaux associés aux FMs  $m^{\mathbf{x}_k}$ ,  $m^{\mathbf{S}_k}$ ,  $m^{\Theta_k}$  et  $m^{\mathbf{z}_k}$  sont fixés à  $p = 3$ .

La Figure 5.18 montre la carte simulée ainsi que la trajectoire suivie par le véhicule.

**Algorithm 7** Algorithme de la méthode BSMM.

---

```

1: % Initialisation %
2:  $k \leftarrow 0$ 
3: Construire la FM  $m^{\mathbf{x}^0}$  sur l'état avec  $p$  éléments focaux. Soit  $[\mathbf{x}_k^i]$  un élément focal de  $m^{\mathbf{x}^k}$ 
4: Construire la représentation rectangulaire des routes
5: Sélectionner  $R_k = \{r^i / [r^i] \cap [\mathbf{x}_k^j] \neq \emptyset\}$  pour  $j = 1 \dots p$ 
6:  $m_1^{R_k} \leftarrow$  FM vide sur  $R_k$ 
7: Calculer  $m_2^{R_k}$  en utilisant (5.24), (5.15) et (5.16)
8: Calculer  $m_s^{R_{k+1}}$  en utilisant (5.26)
9:  $m^{R_{k+1}} \leftarrow m_1^{R_{k+1}} \odot m_2^{R_{k+1}} \odot m_s^{R_{k+1}}$ 
10: Calculer  $\{m_i^{\mathbf{x}^k}\}_{i=1}^{n_{R_k}}$  en utilisant (5.22) et (5.23)
11: Boucle
12:   Construire  $m_k^{\mathbf{S}}$ ,  $m_k^{\ominus}$  et  $m^{\mathbf{z}^{k+1}}$  avec  $p$  éléments focaux sur la base de mesures des capteurs
13:   Pour  $i = 1$  à  $n_{R_k}$ 
14:     Pour  $j = 1$  à  $p$ 
15:       % Prediction %
16:       Calculer  $[\mathbf{x}_{k+1/k}^{i,j}]$  en utilisant  $[\delta_{S,k}^j]$ ,  $[\delta_{\theta,k}^j]$  et (5.1)
17:       % Correction GPS %
18:        $[\mathbf{x}_{k+1}^{i,j}] \leftarrow [\mathbf{x}_{k+1/k}^{i,j}] \cap [\mathbf{z}_{k+1}^j]$ 
19:        $[\mathbf{x}_{k+1}^{i,j}] \leftarrow \text{Waltz}([\mathbf{x}_k^{i,j}], [\mathbf{x}_{k+1}^{i,j}], [\delta_{S,k}^j], [\delta_{\theta,k}^j], (5.1))$ 
20:        $m_i^{\mathbf{x}^{k+1}}([\mathbf{x}_{k+1}^{i,j}]) \leftarrow m_i^{\mathbf{x}^k}([\mathbf{x}_k^{i,j}]) \cdot m_k^{\mathbf{S}}([\delta_{S,k}^j]) \cdot m_k^{\ominus}([\delta_{\theta,k}^j]) \cdot m_{k+1}^{\mathbf{z}}([\mathbf{z}_{k+1}^j])$ 
21:       % Correction GIS %
22:       Si la distance entre le centre de  $[\mathbf{x}_k^{i,j}]$  et un nœud de  $r^i$  est inférieure ou égale à  $\delta_{S,k}$  Alors,
23:          $R_{k+1} \leftarrow R_{k+1} \cup \{r^l / (r^l \text{ liée à } r^i, [r^l] \cap [\mathbf{x}_{k+1}^{i,j}] \neq \emptyset)\}$ 
24:         Calculer  $m_1^{R_{k+1}}$  en utilisant (5.9) et (5.12)
25:       Fin Si
26:     Fin Pour
27:     Calculer  $m_s^{R_{k+1}}$  en utilisant (5.26)
28:     Calculer  $m_i^{\mathbf{x}^{k+1}}$  en utilisant (5.22) et (5.23)
29:   Fin Pour
30:   Calculer  $m_2^{R_{k+1}}$  en utilisant (5.24), (5.15) et (5.16)
31:    $m^{R_{k+1}} \leftarrow m_1^{R_{k+1}} \odot m_2^{R_{k+1}} \odot m_s^{R_{k+1}}$ 
32:   % Estimation finale %
33:    $Betp \leftarrow$  distribution de probabilité pignistique de  $m^{R_{k+1}}$ 
34:   Sélectionner la route de plus grande probabilité pignistique.
35:   Calculer la position du véhicule sur la route choisie par (5.28), (5.29) et (5.30)
36:    $k \leftarrow k + 1$ 
37: Fin Boucle

```

---

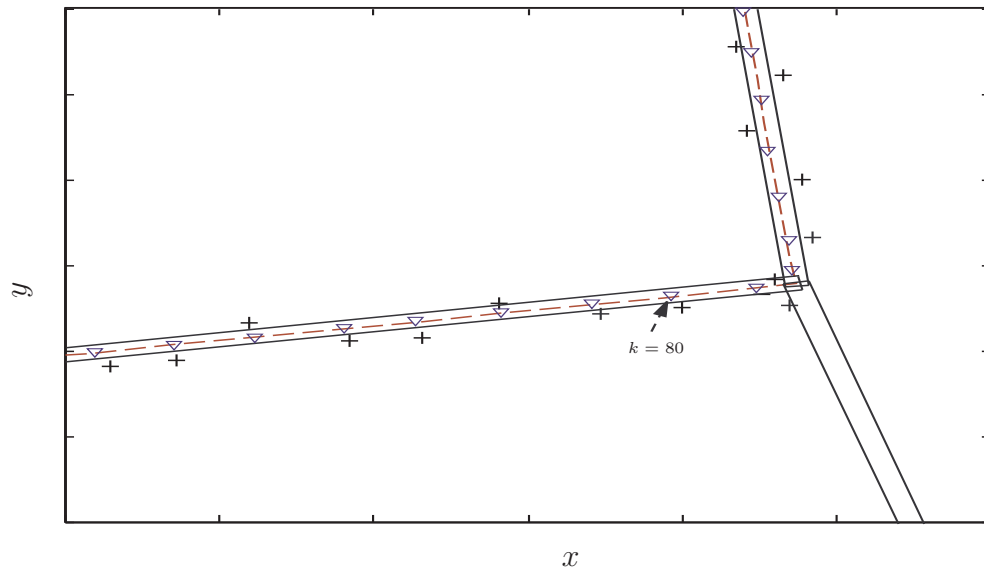


Figure 5.19 – Résultats de la méthode BSMM au voisinage d’une intersection. La vraie trajectoire du véhicule est présentée par des lignes en pointillé. Les positions fournies par le GPS et la méthode BSMM sont respectivement illustrées par des (+) et ( $\nabla$ ).

La Figure 5.19 représente les résultats obtenus par la méthode BSMM au voisinage d’une intersection; seul apparaît le résultat final de l’estimation. La Figure 5.20 montre la façon dont la méthode BSMM gère les hypothèses multiples causées par l’intersection de routes. Comme on peut le remarquer, à l’instant  $k = 80$ , le véhicule se déplace sur la route  $r^1$  avec  $R_k = \{r^1\}$ . Aux instants  $k = 81$  et  $k = 82$ , le véhicule est au croisement de trois routes avec  $R_k = \{r^1, r^2, r^3\}$ : il faut conserver toutes les solutions possibles pour les instants suivants. À l’instant  $k = 83$ , on a une seule RC et  $R_k = \{r^2\}$ ; les deux autres routes sont éliminées par les critères de la méthode BSMM. A la différence de la méthode BMM, nous remarquons que la méthode BSMM fournit une FM représentant l’état sur chaque RC.

Tableau 5.3 – Erreurs quadratiques moyennes pour le GPS, les méthodes BMM, BSE, BSMM, et la méthode de référence.

	GPS	BSE	BMM	BSMM	Quddus
EQM sur $x$ ( $m^2$ )	0.174	0.130	0.125	0.090	0.127
EQM sur $y$ ( $m^2$ )	0.227	0.161	0.164	0.140	0.163

Dans le tableau 5.3 nous donnons les erreurs quadratiques moyennes associées au trajet illustré sur la Figure 5.18, pour le GPS, les méthodes BMM, BSE, BSMM, et la méthode de référence. Comme on le voit, la méthode BSMM donne les meilleurs résultats sur cet exemple. Nous attribuons ces bons résultats au fait que la méthode BSMM est une combinaison des méthodes BSE et BMM : comme la méthode BSE, elle a la propriété d’avoir plusieurs éléments focaux sur l’état, et elle hérite de la



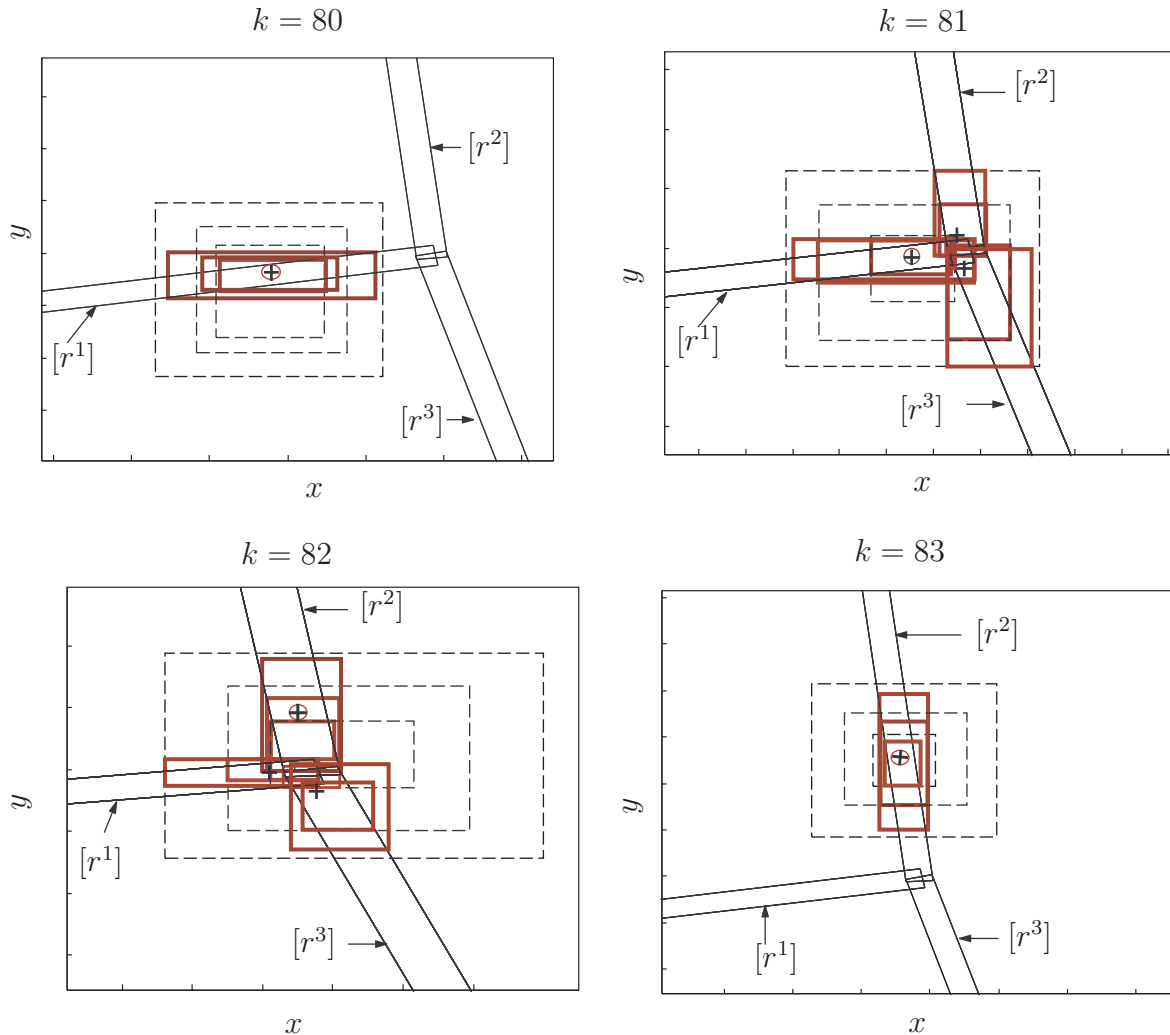


Figure 5.20 – Résultats de la méthode BSMM au voisinage d’une intersection. Les rectangles en traits pleins représentent les routes rectangulaires tandis que les éléments focaux associés à la FM du GPS sont représentés par des rectangles en traits en pointillés. Les rectangles en gras représentent les éléments focaux des FMs associées aux RCs. Les positions estimées associées aux RCs et la position finale du véhicule sont représentées par des (+) et des (o).

méthode BMM l'utilisation de la carte ainsi que les informations associées.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une nouvelle méthode de map matching, appelée BMM. Cette méthode est basée sur la TFC et sur une représentation rectangulaire des routes, construite en utilisant les erreurs géométriques de la carte ainsi que les largeurs des routes. Le point de départ de cette méthode est le pavé obtenu par une méthode d'estimation d'état basée sur une approche à erreurs bornées. Ceci est en effet en adéquation avec la représentation rectangulaire des routes adoptée par la méthode.

Nous avons également proposé une extension de cette méthode, notée BSMM, qui consiste à utiliser la méthode BSE, présentée dans le chapitre 3, à la place de l'AEB qui n'utilise qu'un seul pavé pour représenter l'état, dans le but d'intégrer plus précisément les données fournies par les différents capteurs.

Les deux méthodes présentées ont l'avantage de vérifier les conditions d'intégrité étudiées par Quddus et al. dans [80]. Elles gèrent aussi les hypothèses multiples dans les situations où cela est nécessaire, comme dans les cas de routes parallèles ou d'intersections. Par ailleurs, elles considèrent le cas d'un monde ouvert et sont ainsi capables de détecter le fait que le véhicule se déplace sur une route non répertoriée dans la base de données cartographiques. Enfin, elles sont flexibles dans le sens où l'on peut ajouter facilement un critère supplémentaire dans la phase de sélection des routes.

---

## *Conclusion générale et perspectives*

---

Nous nous sommes intéressés dans ce travail au problème de l'estimation d'état d'un système dynamique, en nous focalisant sur la localisation routière d'un véhicule. L'un des fils conducteurs de cette thèse est l'utilisation de la théorie de Dempster-Shafer, ou théorie des fonctions de croyance.

Après avoir rappelé le problème de l'estimation d'état, nous avons présenté une méthode crédibiliste dans laquelle les incertitudes sont représentées par des fonctions de masse ayant comme éléments focaux des pavés de  $\mathbb{R}^n$ . Cette méthode conserve les propriétés de garantie des approches à erreurs bornées tout permettant une estimation plus précise de l'état, comparable à celle obtenue par les méthodes bayésiennes.

Nous avons ensuite abordé l'estimation d'état dans le cas d'un système multimodèles. Nous avons considéré le cas d'un système dynamique dont le modèle d'évolution, inconnu, est supposé appartenir à un ensemble de modèles candidats, variant au cours temps. La méthode que nous avons développée repose sur une modélisation crédibiliste de l'incertitude sur le modèle et sur la commutation entre les différents modèles possibles. La méthode est à la fois simple et flexible, dans le sens où il est possible d'ajouter facilement une autre source d'information dans la phase de commutation. Les résultats obtenus en appliquant la méthode au problème de localisation routière montrent que l'approche proposée parvient à bien détecter la commutation entre les modèles candidats et qu'elle est même capable de détecter les situations dans lesquelles le vrai modèle du système n'appartient pas à l'ensemble de modèles candidats. Une comparaison avec la méthode *Interactive Multiple Models* nous a permis de montrer l'efficacité et la pertinence de l'approche proposée.

Nous avons finalement abordé le problème de localisation routière couplée à la cartographie en développant une nouvelle approche de *map matching* basée sur une représentation rectangulaire des routes et sur l'utilisation de la théorie des fonctions de croyance. La méthode proposée combine le pavé calculé par une approche à erreurs bornées avec la représentation rectangulaire des routes. La théorie des fonctions de croyance est utilisée dans le but de fusionner plusieurs critères afin de caractériser de manière robuste la croyance accordée à chaque route sélectionnée. Deux critères ont été pris en compte : la *similarité* et la *topologie de la carte*. Ici encore, l'utilisation du formalisme des fonctions de croyance permet de détecter naturellement le cas des données cartographiques manquantes, qui est un problème couramment rencontré en *map matching*. La méthode proposée présente l'avantage de vérifier naturellement les conditions d'intégrité étudiées par Quddus et al. dans [80]. Elle est également capable de gérer des hypothèses multiples dans certaines situations telles que des routes parallèles ou des intersections.

La méthode multi-modèles développée dans le cadre de cette thèse n'a été testée qu'en simulation sur un système simple avec trois modèles possibles. Il sera donc nécessaire d'évaluer sa performance sur des problèmes plus complexes (tels que le suivi de cibles) et des systèmes réels. Nous envisageons également, comme prolongement de ces travaux, de généraliser notre approche en l'adaptant à la modélisation de systèmes multi-modèles caractérisés par un grand nombre de modèles candidats. Dans ce cas, il peut être intéressant de sélectionner à chaque instant, comme ensemble de modèles candidats, une partie de l'ensemble des modèles possibles. La méthode multi-modèles proposée pourrait ensuite être appliquée au sous-ensemble sélectionné, ce qui aurait pour avantage de réduire la complexité de la méthode. Le choix du sous-ensemble nécessitant la connaissance de toutes les séquences de commutation entre les modèles candidats, il conviendrait de développer une procédure de choix systématique qui respecte le comportement du système ainsi que la commutation possible entre les différents modèles.

Concernant le problème du map matching, la méthode proposée dans cette thèse a été testée en simulation et sur des situations réelles simples. Il serait donc intéressant d'évaluer sa pertinence dans des situations réelles plus complexes comme, par exemple, en milieu urbain dense. Comme autre perspective de ce travail, il sera également utile d'étudier l'influence de l'introduction d'autres critères, tels que le sens de direction des routes, le cap du véhicule ou la similarité entre le trajet estimé du véhicule et les routes, sur la précision et la performance de la méthode. Enfin, il est possible d'envisager des développements similaires dans les applications de type SLAM [33, 55].

---

# Bibliographie

---

- [1] F. Abdallah, A. Gning, and P. Bonnifait. Box particle filtering for non linear state estimation using interval analysis. *Automatica*, 44:807–815, 2008.
- [2] G. A. Ackerson and K. S. Fu. On state estimation of sampled stochastic processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15:10–17, 1970.
- [3] A. Appriou. Uncertain data aggregation in classification and tracking processes. In *In B. Bouchon-Meunier (Ed.), Aggregation and Fusion of imperfect information*, pages 231–260, Physica Verlag, Wurzburg, 1998.
- [4] M.S. Arulampalam, S.L. Maskel, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 20:174–188, 2002.
- [5] A. Asadian, B. Moshir, and A.K. Sedigh. A novel data fusion approach in an Integrated GPS/INS System Using Adaptive Fuzzy Particle Filter. In *5th International Conference on Technology and Automation (ICTA), Sponsored by IEEE and EURASIP*, pages 125–130, Thessaloniki, Greece, 2005.
- [6] I. Ashokaraj, A. Tsourdos, P. Silson, and B. White. Sensor Based Robot Localisation and Navigation: Using Interval Analysis and Extended Kalman Filter. In *5th Asian Control Conference (ASCC)*, pages 1086–1093, Melbourne, Australia, 2004.
- [7] Y. Bar-Shalom and W. D. Blair. *Multitarget-Multisensor Tracking: Applications and Advances, vol. III*. Artech House, Norwood, USA, 2000.
- [8] Y. Bar-Shalom and X.R. Li. *Estimation and tracking principle, technique and software*. Artech House, Norwood, USA, 1993.
- [9] Y. Bar-Shalom, E. Mazor, A. Averbuch, and J. Dayan. Interacting multiple model methods in target tracking: a survey. *Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34:103–123, 1998.

- 
- [10] C. Baudrit and D. Dubois. Practical representations of incomplete probabilistic knowledge. *Computational Statistics and Data Analysis*, 5:86–108, 2006.
- [11] F. Benhamou, F. Goualard, L. Granvilliers, and J.F.Puget. Revising hull and box consistency. In *Proceedings of the 1999 international conference on Logic programming*, pages 230–244, Las Cruces, New Mexico, United States, 1999.
- [12] D. Berstein and A. Kornhauser. An introduction to map matching for personal navigation assistants. Technical report, New Jersey TIDE Center, Princeton University, 1996.
- [13] D.P. Bertsekas and I.B. Rhodes. Recursive state estimation for a set membership description of uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic control*, 16:117–128, 1971.
- [14] S. Blackman and R. Popoli. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Artech House, Norwood, USA, 1999.
- [15] H. A. P. Blom. Overlooked potential of systems with markovian switching coefficients. In *In Proceedings of the 25th IEEE Conference on Decision and Control*, Athens, Greece, 1986.
- [16] H. A. P. Blom and Y. Bar-Shalom. The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33:780–783, 1988.
- [17] H. A. P. Blom and Y. Bar-Shalom. Time-reversion of a hybrid state stochastic difference system with a jump-linear smoothing application. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36:836–847, 1990.
- [18] P. Bonnifait. Contribution à la localisation dynamique d’automobiles. Application à l’aide à la conduite. Habilitation à diriger des recherches, Université de Technologie de Compiègne, France, 2005.
- [19] W. Chen, Z. Li, M. Yu, and Y. Chen. An integrated map-match algorithm with position feedback and shape-based mismatch detection and correction. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 12:168–175, 2008.
- [20] W.-S. Chen. *Bayesian estimation by sequential Monte-Carlo sampling*. PhD thesis, Ohio State University, 2004.
- [21] F. L. Chernousko. *State estimation for dynamic systems*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.

- 
- [22] F.L. Chernousko. Optimal guaranteed estimates of indeterminacies with the aid of ellipsoids. *Engineering Cybernetics*, 18:3–5, 1981.
- [23] J. G. Cleary. Logical arithmetic. *Future computing systems*, 2:125–149, 1987.
- [24] E. David. Constraint propagation with interval labels. *Artificial Intelligence*, 32:281 – 331, 1987.
- [25] A.P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38:325–339, 1967.
- [26] T. Denœux. Analysis of evidence-theoretic decision rules for pattern classification. *Pattern Recognition*, 30:1095–1107, 1997.
- [27] T. Denœux. Inner and outer approximation of belief structures using a hierarchical clustering approach. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9:437–460, 2001.
- [28] T. Denœux and A.B. Yaghlane. Approximating the combination of belief functions using the fast mobius transform in a coarsened frame. *International Journal of Approximate Reasoning*, 31:77–101, 2002.
- [29] Département des sciences géomatiques Université Laval Quebec. <http://www.scg.ulaval.ca/>.
- [30] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu. On sequential Monte-Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and computing*, 10:197–208, 2000.
- [31] D. Dubois, L. Foulloy, G. Mauris, and H. Prade. Probability-Possibility Transformations, Triangular Fuzzy Sets, and Probabilistic Inequalities. *Reliable Computing*, 10:273–297, 2004.
- [32] D. Dubois and H. Prade. A set-theoretic view of belief functions: Logical operations and approximations by fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, 12:193–226, 1986.
- [33] H. Durrant-Whyte and T. Bailey. Simultaneous localisation and mapping (SLAM): Part 1 the essential algorithms. *Robotics and Automation*, 12:193–226, 2006.
- [34] S. Ferson, V. Kreinovitch, L. Ginzburg, D.S. Myers, and K. Sentz. Constructing probability boxes and Dempster-Shafer structures. Technical report, SAND2002-4015, Sandia National Laboratories, Albuquerque, 2003.

- 
- [35] S. Gattein and P. Vannooenenberghe. A comparative analysis of two approaches using the road network for tracking ground targets. In *in Proceedings of the 7th International Conference on Information Fusion (FUSION'04)*, pages 62–69, Stockholm, Sweden, 2004.
- [36] A. Gning. *Localisation garantie d'automobiles. Contribution aux techniques de satisfaction de contraintes sur les intervalles*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 2005.
- [37] A. Gning and P. Bonnifait. Constraints propagation techniques on intervals for a guaranteed localization using redundant data. *Automatica*, 42:1167–1175, 2006.
- [38] A. Gning and Ph. Bonnifait. Dynamic Vehicle Localization using Constraints Propagation Techniques on Intervals. A comparison with Kalman Filtering. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 05)*, pages 4144–4149, Barcelona, Spain, 2005.
- [39] N.J. Gordon, D.J. Salmond, and A.F.M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEE Proceedings Part F: Radar and Signal Processing*, 140:107–113, 1993.
- [40] Y.S. Greenfeld. Matching GPS observations to localizations on a digital map. In *Proceeding of the 81th annual Meeting of the Transportation Board*, Washington, 2002.
- [41] F. Gustafsson, F. Gunnarsson, N. Bergman, U. Forssell, J. Jansson, R. Karlsson, and P. Nord-lund. Particle filters for positioning, navigation, and tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50:425–435, 2002.
- [42] A. Hocine. *Estimation d'état et diagnostic de systèmes à commutation par filtrage multi-modèles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2006.
- [43] B. Hummel. *Map Matching for Vehicle Guidance: Dynamic and Mobile GIS: Investigating Changes in Space and Time*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 2006.
- [44] M. Jabbour. *Localisation de véhicules en milieu urbain à l'aide d'un lidar et d'une base de données navigable*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 2007.
- [45] M. Jabbour, P. Bonnifait, and V. Cherfaoui. Map-Matching Integrity Using Multihypothesis Road-Tracking. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 12:189–201, 2008.



- 
- [46] L. Jaulin. Le calcul ensembliste par analyse par intervalles et ses applications. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2000.
- [47] L. Jaulin. Nonlinear bounded-error state estimation of continuous-time systems. *Automatica*, 38:1079–1082, 2002.
- [48] L. Jaulin, M. Kieffer, and O. Didrit. *Applied Interval Analysis*. Springer, 2001.
- [49] V.P. Jilkov and X.R. Li. Online Bayesian estimation of transition probabilities for Markovian jump systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52:1620–1630, 2004.
- [50] R.E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, 82:35–45, 1960.
- [51] M. Kieffer, L. Jaulin, and E. Walter. Guaranteed Recursive Nonlinear State Estimation Using Interval Analysis. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, pages 3966–3971, Florida, USA, 1998.
- [52] M. Kieffer, L. Jaulin, and E. Walter. Guaranteed recursive non-linear state bounding using interval analysis. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16:193–218, 2002.
- [53] S. Kim and J.h. Kim. Adaptive fuzzy-network based C-measure map matching algorithm for car navigation system. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 48:432–440, 2001.
- [54] W. Kim, G. Jee, and J. Lee. Efficient use of digital road map in various positioning for ITS. In *EEE Symposium on Position Location and Navigation*, pages 170–176, San Diego, CA, 2000.
- [55] J.J. Leonard and H.F. Durrant-Whyte. Simultaneous map building and localization for an autonomous mobile robot. In *EEE Symposium on Position Location and Navigation*, pages 1442–1447, Osaka, Japan, 1991.
- [56] J. Li and M. Fu. Research on route planning and map-matching in vehicle GPS/dead-reckoning/ electronic map integrated navigation system. *IEEE Proceedings on Intelligent Transportation Systems*, 2003.
- [57] X. R. Li and Y. Bar-Shalom. Multiple-model estimation with variable structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:178–493, 1996.
- [58] X.R. Li and V.P. Jilkov. A Survey of Maneuvering Target Tracking: Approximation Techniques for Nonlinear Filtering. *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, 41:1255–1321, 2005.

- [59] L. Jaulin, O. Didrit M. Kieffer, and E. Walter. Guaranteed nonlinear estimation using constraint propagation on sets. *International Journal of Control*, 47:1772–1782, 2001.
- [60] J.D. Lowrance, T.D. Garvey, and T.M. Strat. A framework for evidential reasoning systems. In *T. Kehler et al., editor, Proceedings of AAAI 86*, 2:896–903, 1986.
- [61] D.T. Magill. Optimal adaptive estimation of sampled stochastic process. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10:434–439, 1965.
- [62] D. Maksarov and J. P. Norton. State bounding with ellipsoidal set description of the uncertainty. *International Journal of Control*, 65:847–866, 1996.
- [63] Y. Meng, W. Chen, Y. Chen, and J.C.H. Chao. A simplified map-matching algorithm for in-vehicle navigation unit. Technical report, Research Report, Department of Land Surveying and Geoinformatics, Hong Kong Polytechnic University, 2003.
- [64] R.E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Society for Industrial Mathematics (SIAM), 1979.
- [65] M.E. Najjar and P. Bonnifait. A roadmap matching method for precise vehicle localization using belief theory and Kalman filtering. In *The 11th International Conference in Advanced Robotics*, Coimbra, Portugal, 2003.
- [66] M.E. Najjar and P. Bonnifait. A road matching method for precise vehicle localization using belief theory and Kalman filtering. *Autonomous Robots*, 19:173–191, 2005.
- [67] F. Nashashibi. *Système embarqué temps réel de localisation et de modélisation 3D par fusion multi-capteur*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2005.
- [68] G. Nassreddine, F. Abdallah, and T. Dencœux. Map matching algorithm using belief function theory. In *In Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion (FUSION08)*, pages 995–1002, Cologne, Germany, 2008.
- [69] G. Nassreddine, F. Abdallah, and T. Dencœux. Map matching algorithm using interval analysis and dempster-shafer theory. In *IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV 2009)*, pages 494 – 499, Xi’an, Shannxi, China,, 2009.
- [70] G. Nassreddine, F. Abdallah, and T. Dencœux. A new method for state estimation of dynamic system based on Dempster-Shafer theory. In *International Conference on Advances in Computational Tools for Engineering*

- Applications (ACTEA '09)*, pages 101 – 106, Notre Dame University, Lebanon, 2009.
- [71] G. Nassreddine, F. Abdallah, and T. Dencœux. A state estimation method for multiple model systems using belief function theory. In *In Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion (FUSION'09)*, pages 506 – 513, Seattle, Washington, USA, 2009.
- [72] G. Nassreddine, F. Abdallah, and T. Dencœux. Estimation d'état par la théorie des fonctions de croyance. In *In Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'07)*, pages 115–124, Nîmes, France, Novembre, 2007.
- [73] G. Nassreddine, F. Abdallah, and Thierry Dencœux. A map matching method for vehicle localization using interval analysis and belief function theory. *Second submission to the IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems Journal*, 2009.
- [74] G. Nassreddine, F. Abdallah, and Thierry Dencœux. State estimation using interval analysis and belief function theory: Application to dynamic vehicle localization. *Accept with Minor Revisions, Transactions on Systems, Man, and Cybernetics–Part B: Cybernetics Journal*, 2009.
- [75] V. Noronha and M. Goodchild. Map accuracy and location expression in transporation reality and prospects. *Transportation Research C*, 8:53–69, 2000.
- [76] S. Petit-Renaud and T. Dencœux. Nonparametric regression analysis of uncertain and imprecise data using belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 35:1–28, 2004.
- [77] J. Pyo, D. Shin, and T. Sung. Development of a map matching method using the multiple hypothesis technique. *IEEE Proceedings on Intelligent Transportation Systems*, pages 23–27, 2001.
- [78] M.A. Quddus. *High Integrity Map Matching Algorithms for Advanced Transport Telematics Applications*. PhD thesis, Centre for Transport Studies-Department of Civil and Environmental Engineering-Imperial College, 2006.
- [79] M.A. Quddus, N. Robert, and Y. Washington. A high accuracy fuzzy logic-based map-matching algorithm for road transport. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 10:103–115, 2008.
- [80] M.A. Quddus, Y. Washington, and N. Robert. Integrity of map matching algorithms. *Transportation Research C*, 14:283–302, 2006.

- 
- [81] M.A. Quddus, Y. Washington, L. Zhao, and N. Robert. A general map matching algorithm for transport telematics applications. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 7:157–167, 2003.
- [82] E. Ramasso. *Reconnaissance de séquence d'états par le Modèle des Croyances Transférables : Application à l'analyse de vidéos d'athlétisme*. PhD thesis, Université Joseph Fourier de Grenoble, 2007.
- [83] E. Ramasso, M. Rombaut, and D. Pellerin. State Filtering and Change Detection Using TBM Conflict Application to Human Action Recognition in Athletics Videos. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 17:944–949, 2007.
- [84] D. B. Reid. An algorithm for tracking multiple targets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24:843–854, 1979.
- [85] D.B. Ried. An algorithm for tracking multiple targets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24:843–854, 1979.
- [86] B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon. *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House, Norwood, USA, 2004.
- [87] B. Ristic and P. Smets. Target identification using belief functions and implication rules. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 41:1097–1103, 2005.
- [88] F. Schweppe. Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13:22 – 28, 1968.
- [89] L. Servi and Y.C. Ho. Recursive estimation in the presence of uniformly distributed measurement noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:563 – 565, 1981.
- [90] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, Princeton, 1976.
- [91] C. Smaili, M.E. El Najjar, and F. Charpillat. A Road Matching Method for Precise Vehicle Localization Using Hybrid Bayesian Network. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 12:176–188, 2008.
- [92] P. Smets. The combination of evidence in the Transferable Belief Model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12:447–458, 1990.

- 
- [93] P. Smets. Belief Functions: The Disjunctive Rule of Combination and the Generalized Bayesian Theorem. *International Journal of Approximate Reasoning*, 9:1–35, 1993.
- [94] P. Smets. The application of the matrix calculus to belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 31:1–30, 2002.
- [95] P. Smets and R. Kennes. The transferable belief model. *Artificial Intelligence*, 66:191–234, 1994.
- [96] P. Smets and B. Ristic. Kalman filter and joint tracking and classification based on belief functions in the TBM framework. *Information fusion*, 8:16–27, 2007.
- [97] S. Syed and M.E. Cannon. Fuzzy logic-based map matching algorithm for vehicle navigation system in urban canyons. In *In proceedings of the Institute of Navigation (ION) national technical meeting*, California, USA, 2004.
- [98] G. Taylor, C. Brunson, J. Li, A. Olden, D. Steup, and M. Winter. GPS accuracy estimation using map-matching techniques: Applied to vehicle positioning and odometer calibration. *Computers, Environments, and Urban Systems*, 30:757–772, 2006.
- [99] P. Vannooenberghe and P. Smets. Partially supervised learning by a credal EM approach. In *Proceedings of the 8th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'05)*, Springer, pages 956–967, Barcelona, Spain, 2005.
- [100] C.E. White, D. Bernstein, and A.L. Kornhauser. Some map matching algorithms for personal navigation assistants. *Transportation Research C*, 8:91–108, 2000.
- [101] Wikipédia. [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org).
- [102] R.R. Yager. Arithmetic and other operations on Dempster-Shafer structures. *International Journal of Man-Machine Studies*, 25:357–366, 1986.
- [103] R.R. Yager. Cumulative distribution functions from Dempster-Shafer belief structures. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics B*, 34:2080–2087, 2004.
- [104] D. Yang, B. Cai, and Y. Yuan. An improved map-matching algorithm used in vehicle navigation system. In *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, pages 1246–1250, Shanghai, China, 2003.

- [105] L.A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:3–28, 1978.



**Résumé :**

Cette thèse porte sur le problème d'estimation d'état des systèmes dynamiques appliqué à la localisation routière d'un véhicule. Nous présentons d'abord une méthode crédibiliste dans laquelle les incertitudes sont représentées par des fonctions de masse ayant comme éléments focaux des pavés de  $\mathbb{R}^n$ . Nous abordons ensuite l'estimation d'état dans le cas d'un système multi-modèles en adoptant une modélisation crédibiliste de l'incertitude sur le modèle ainsi que sur la commutation entre les différents modèles. Finalement, nous présentons, toujours dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance, une méthode de map matching utilisant mes méthodes d'estimations précédentes ainsi qu'une base de données routière. Les méthodes proposées sont testées sur le problème de localisation avec des données réelles et simulées.

**Mots-clés :**

Fusion de données, estimation d'état, estimation multi-modèles, théorie des fonctions de croyance, théorie de Dempster-Shafer, approche à erreurs bornées, analyse par intervalles, localisation, map matching, technique multi-hypothèses.

**Abstract:**

This thesis focuses on state estimation with application to dynamic vehicle localization. We first present an evidential approach in which uncertainties are represented by Dempster-Shafer mass functions with interval focal elements. We then handle the case of multiple-model systems using belief functions for modeling the transitions between models. Finally, a map matching method based on belief functions and a guaranteed representation of roads is developed, in order to compute a more accurate estimation of the vehicle position. Experimental results on the vehicle localization problem demonstrate the effectiveness and good performances of the methods presented in this thesis.

**Keyword :**

Data fusion, state estimation, multiple-model estimation, belief function theory, Dempster-Shafer theory, bounded error approach, interval analysis, localization, map matching, multiple hypothesis technique.