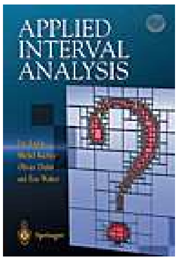
Multilatération using interval analysis



Olivier Reynet et Luc Jaulin, ENSIETA
Lundi 7 juin 2010,

1 Calcul par intervalles

Si $\diamond \in \{+, -, ., /, \max, \min\}$

$$[x] \diamond [y] = [\{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}] \,.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} [-1,3] + [2,5] &= [1,8], \\ [-1,3].[2,5] &= [-5,15], \\ [-1,3]/[2,5] &= [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}], \end{aligned}$$

Si $f \in \{\cos, \sin, \mathrm{sqr}, \mathrm{sqrt}, \log, \exp, \dots\}$

$$f\left([x]\right) = \left[\{f(x) \mid x \in [x]\}\right].$$

Par exemple,

$$\begin{array}{rcl}
\sin\left([0,\pi]\right) & = & [0,1], \\
\mathrm{sqr}\left([-1,3]\right) & = & [-1,3]^2 = [0,9], \\
\mathrm{abs}\left([-7,1]\right) & = & [0,7], \\
\mathrm{sqrt}\left([-10,4]\right) & = & \sqrt{[-10,4]} = [0,2], \\
\log\left([-2,-1]\right) & = & \emptyset.
\end{array}$$

2 Projection de contraintes

Soient x, y, z trois variables telles que

$$\begin{array}{rcl} x & \in & [-\infty, 5], \\ y & \in & [-\infty, 4], \\ z & \in & [6, \infty], \\ z & = & x + y. \end{array}$$

Les valeurs < 2 pour x, < 1 pour y et > 9 pour z sont inconsistantes.

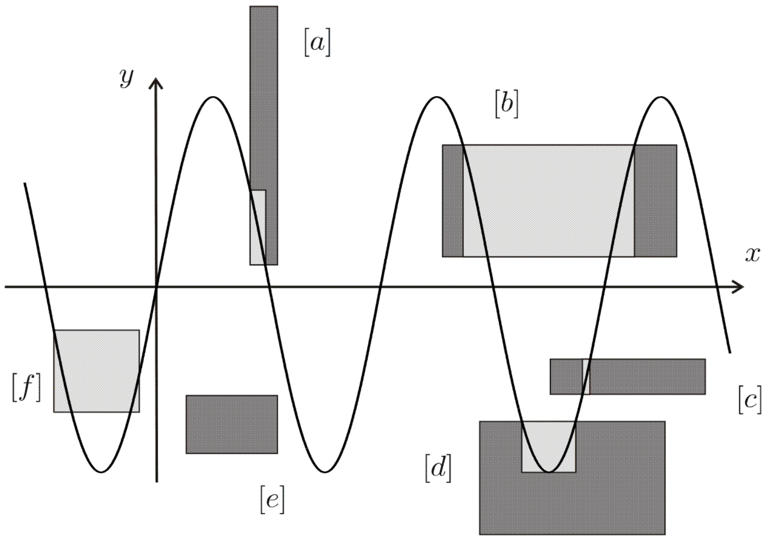
En effet, puisque $x \in [-\infty, 5], y \in [-\infty, 4], z \in [6, \infty]$ et $z = x + y$, nous avons

$$\begin{aligned}
z = x + y \Rightarrow \quad z \in \quad & [6, \infty] \cap ([-\infty, 5] + [-\infty, 4]) \\
& = [6, \infty] \cap [-\infty, 9] = [6, 9]. \\
x = z - y \Rightarrow \quad x \in \quad & [-\infty, 5] \cap ([6, \infty] - [-\infty, 4]) \\
& = [-\infty, 5] \cap [2, \infty] = [2, 5]. \\
y = z - x \Rightarrow \quad y \in \quad & [-\infty, 4] \cap ([6, \infty] - [-\infty, 5]) \\
& = [-\infty, 4] \cap [1, \infty] = [1, 4].
\end{aligned}$$

Pour la contrainte

$$y = \sin x, \ x \in [x], y \in [y]$$

le problème est un peu plus difficile.



3 Algorithme de propagation-bissection

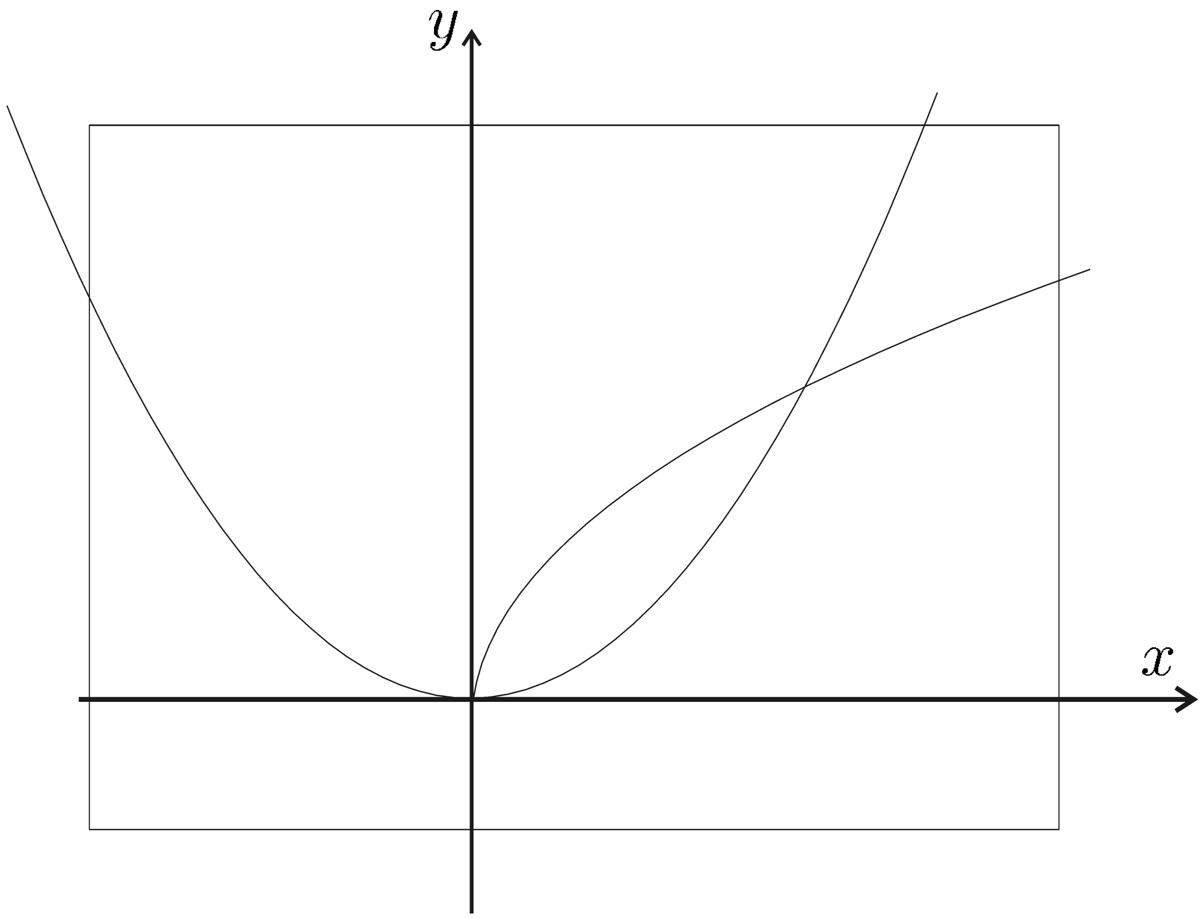
Exemple. Cherchons à résoudre.

$$\begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ y &=& \sqrt{x}. \end{array}$$

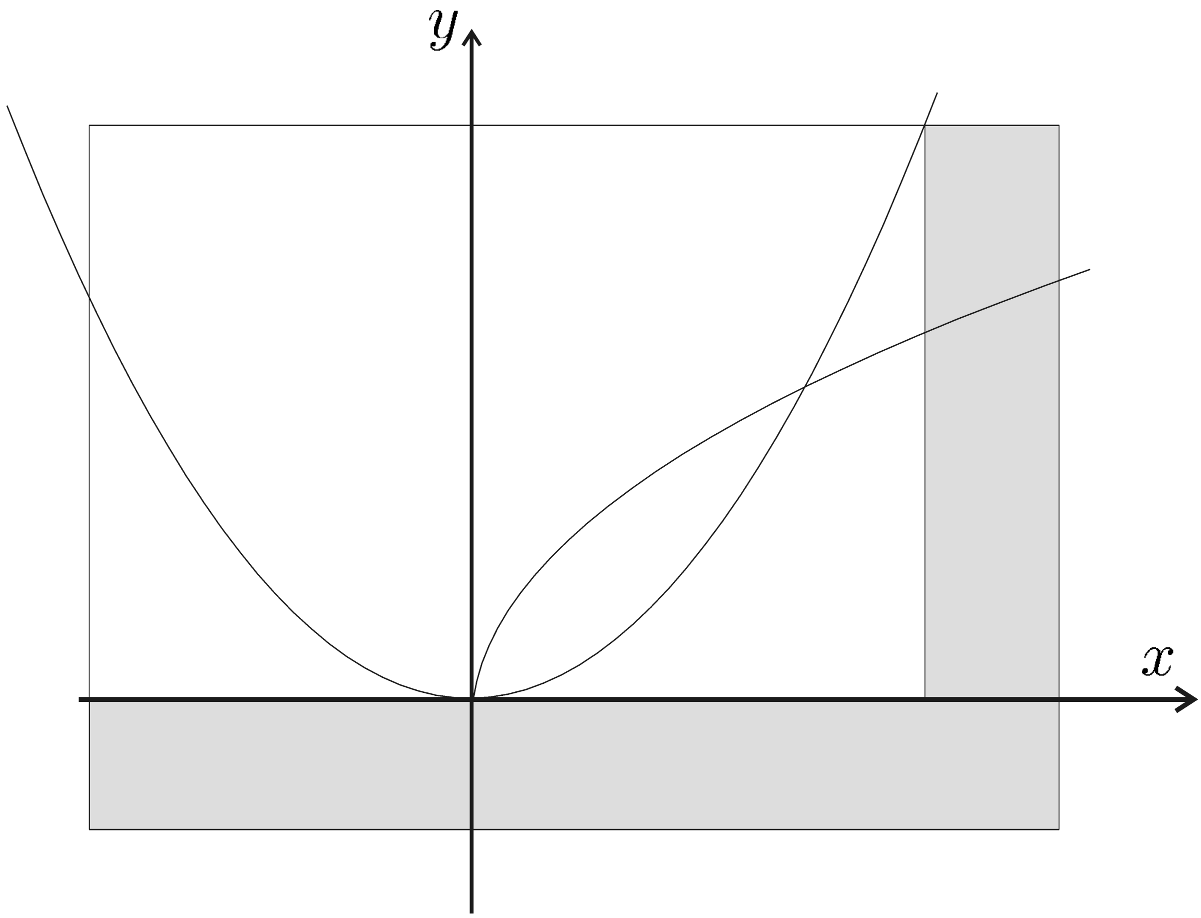
On a deux contracteurs

$$\mathcal{C}_1 : \left\{ \begin{array}{l} [y] = [y] \cap [x]^2 \\ [x] = [x] \cap \sqrt{[y]} \end{array} \right. \quad \text{associé à } y = x^2$$

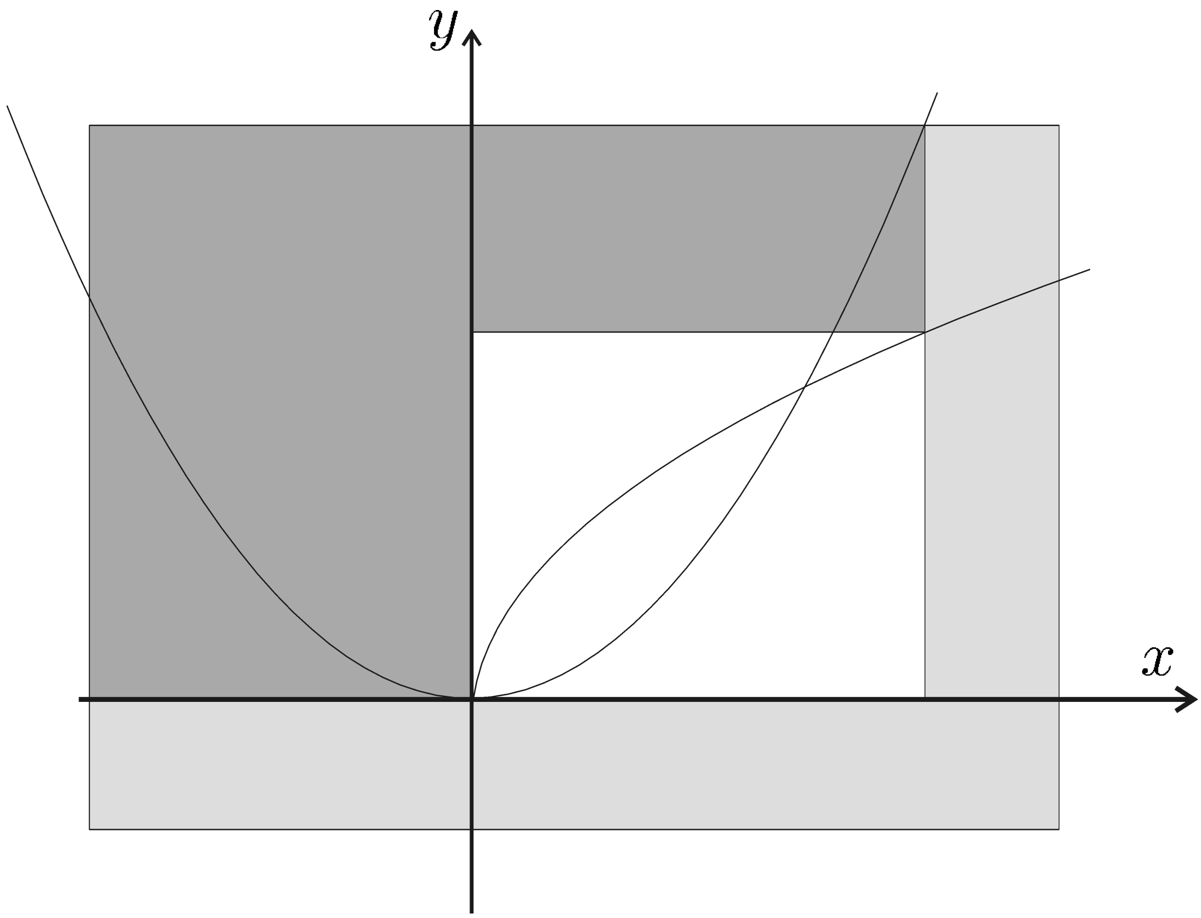
$$\mathcal{C}_2 : \left\{ \begin{array}{l} [y] = [y] \cap \sqrt{[x]} \\ [x] = [x] \cap [y]^2 \end{array} \right. \quad \text{associé à } y = \sqrt{x}$$

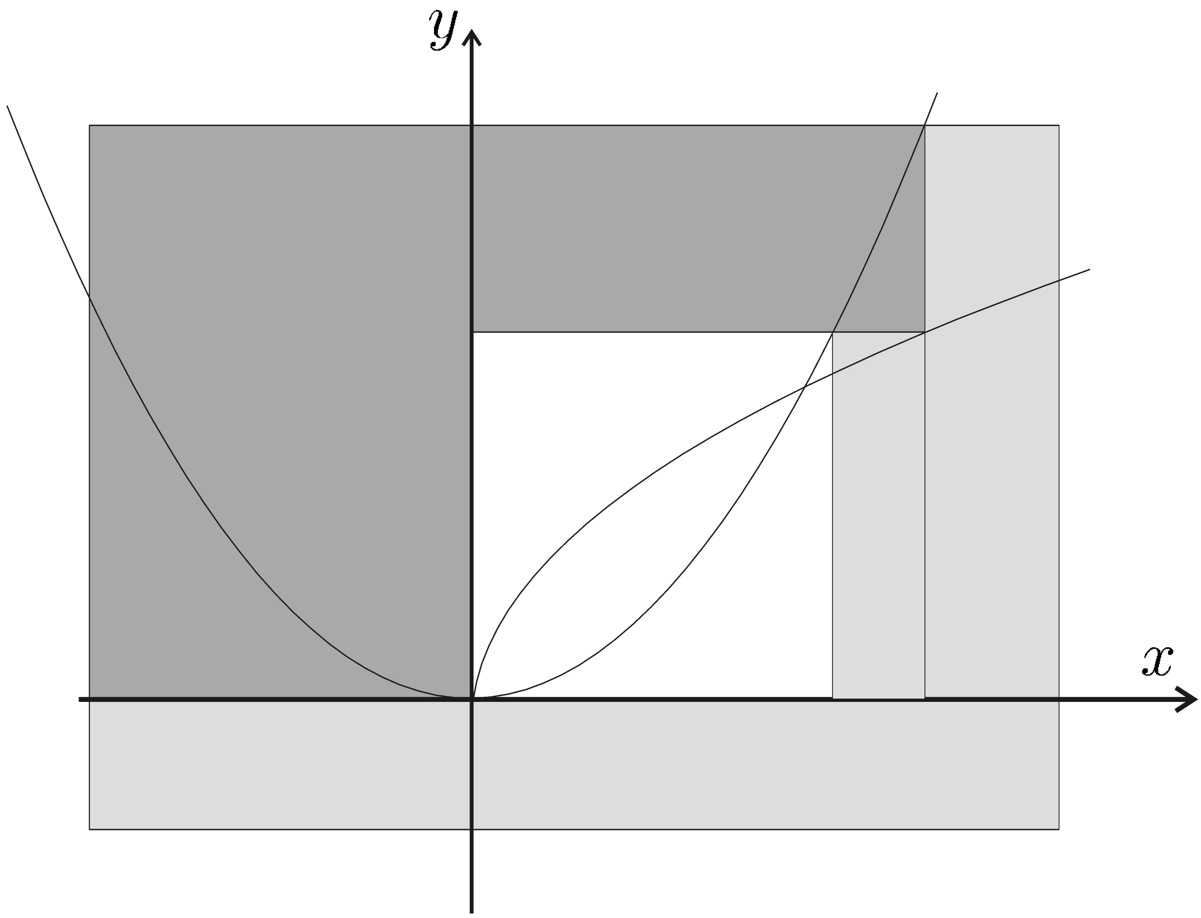


y
x

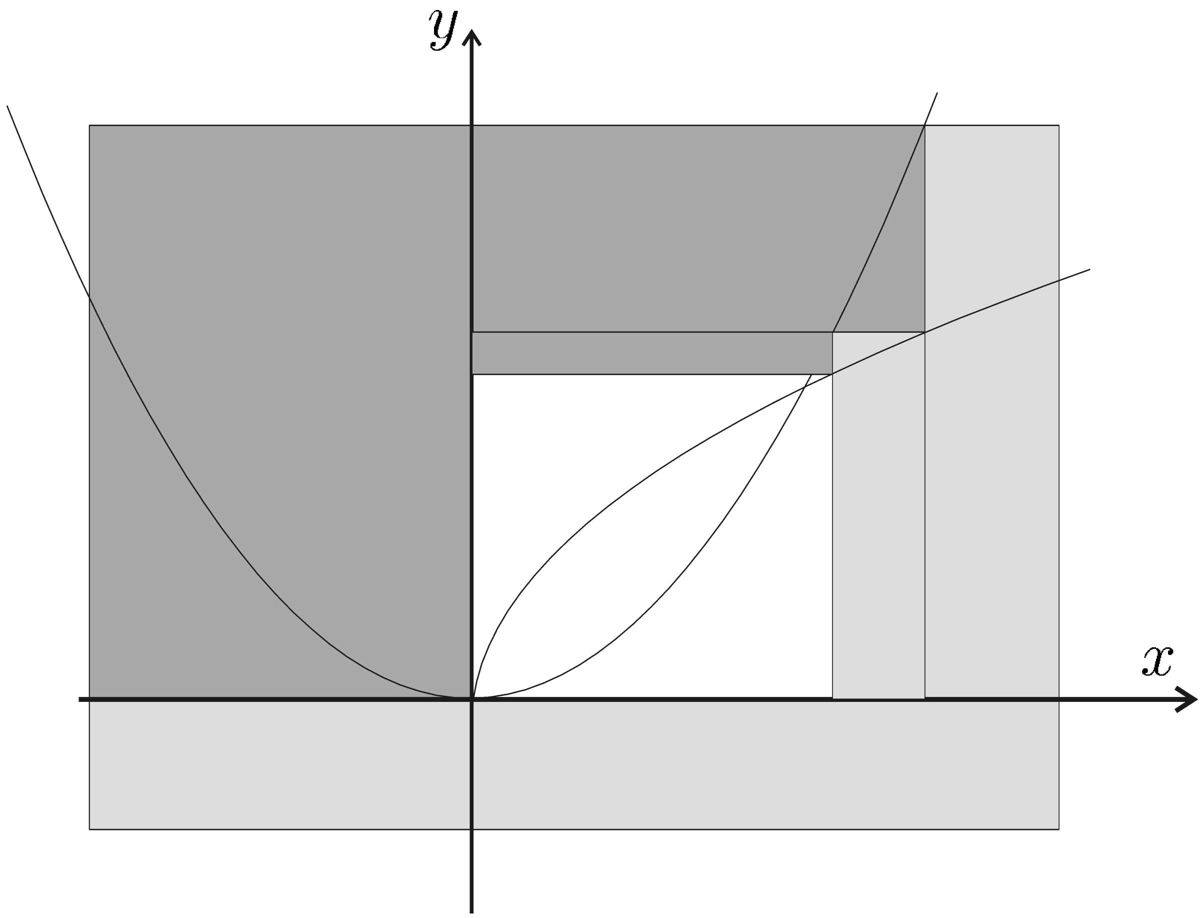


y
x

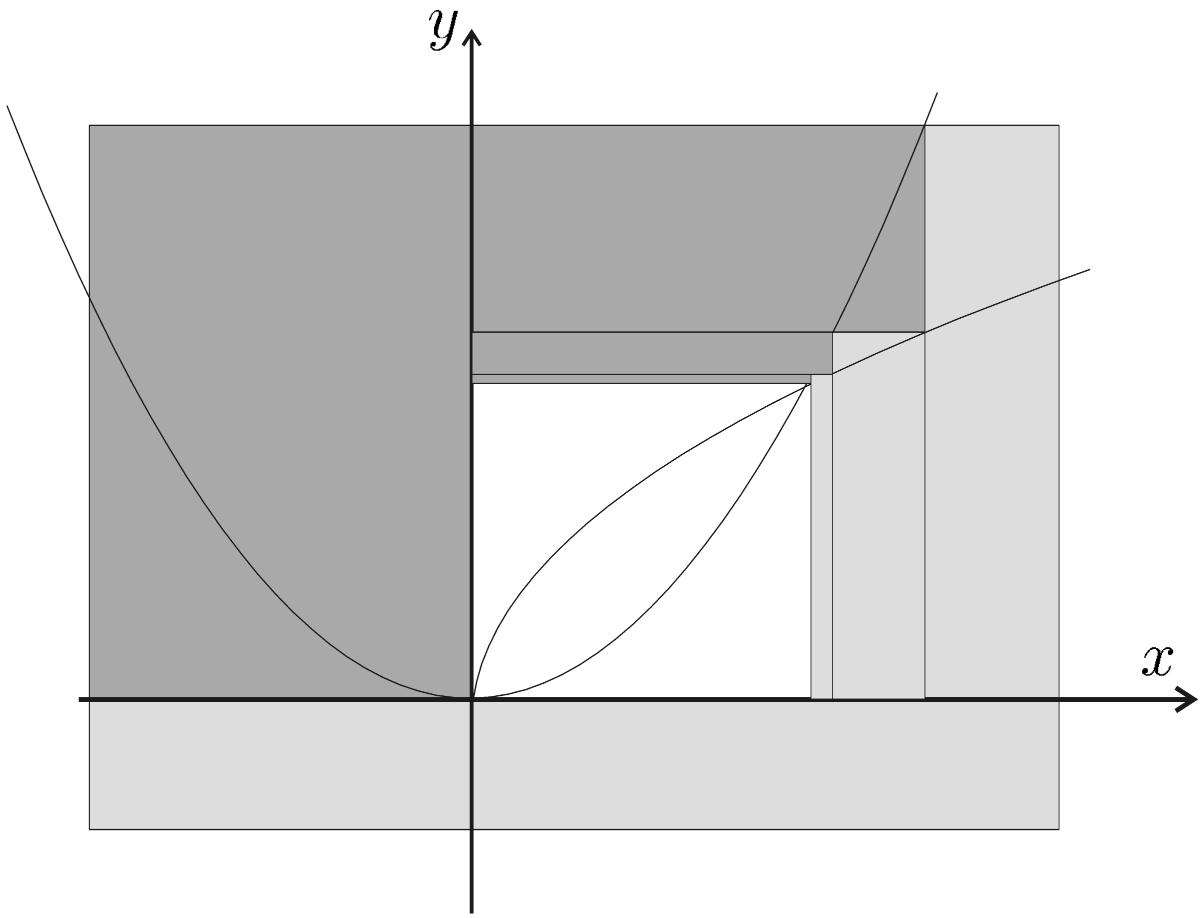

y
x



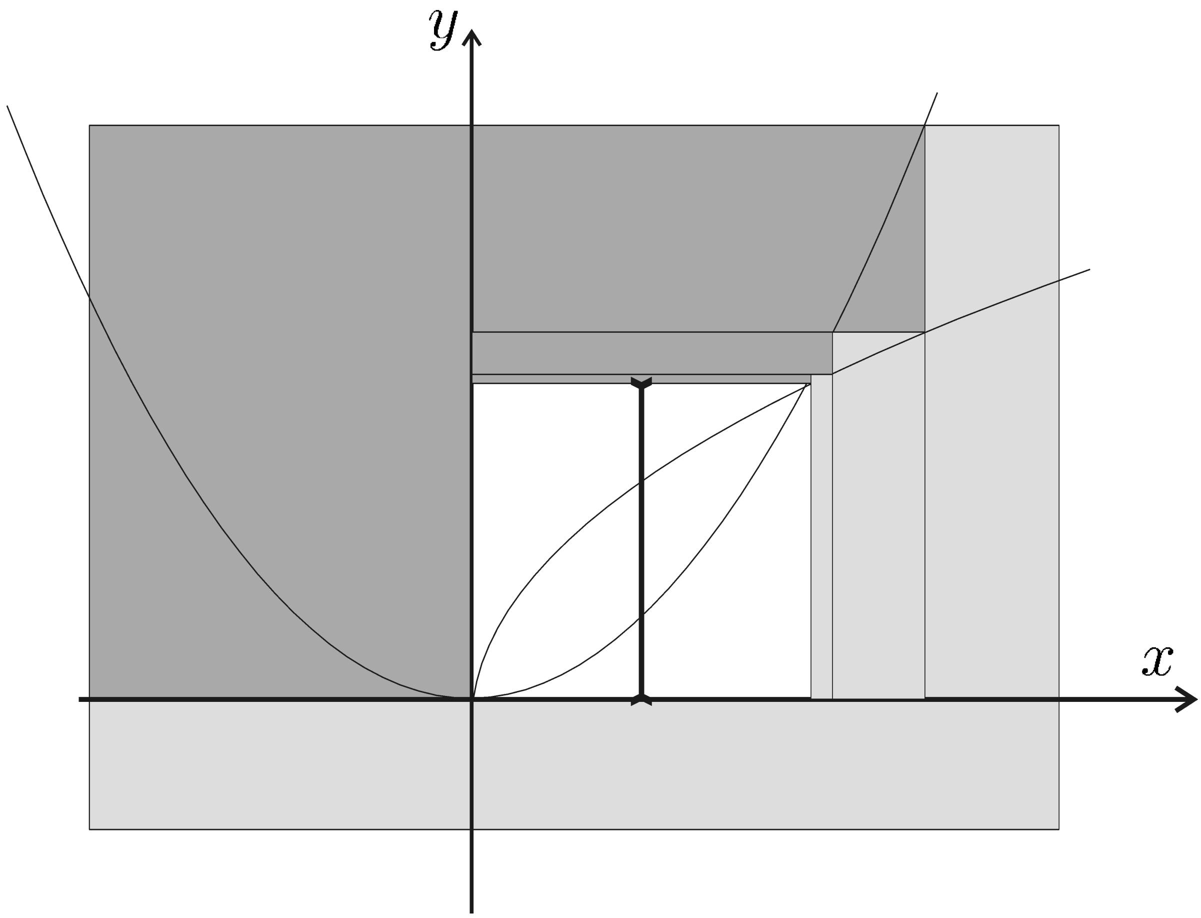
y
x

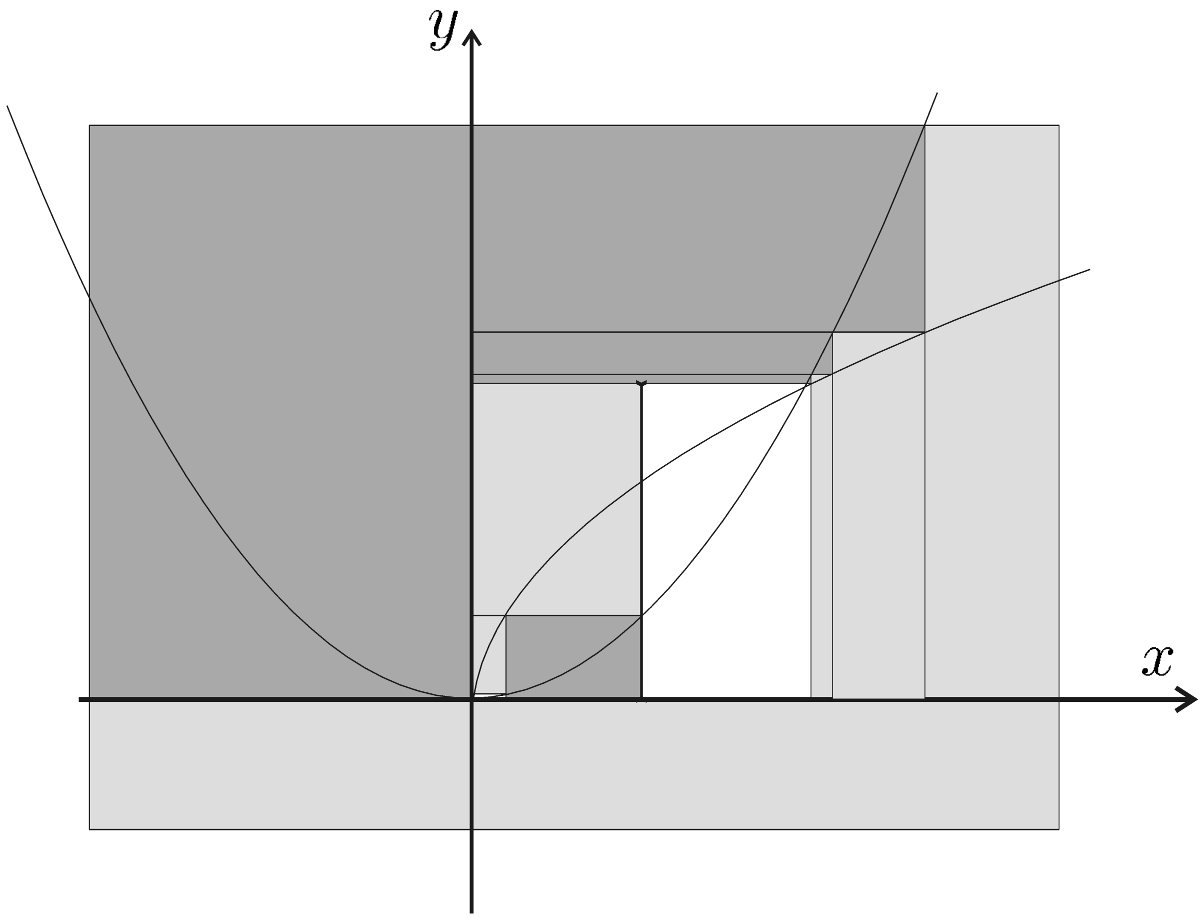


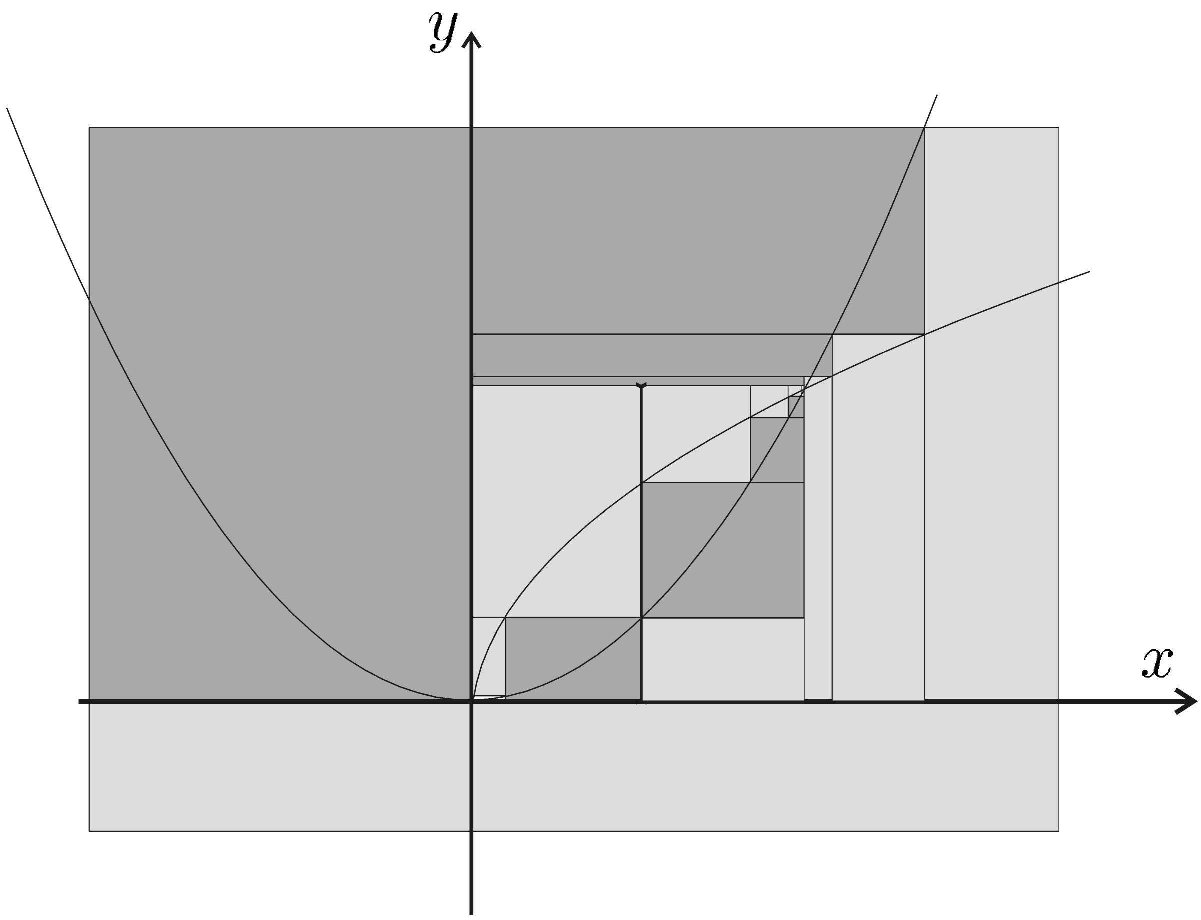
y
x



y
x


y
x


y
x



y
x

4 Décomposition

Pour les contraintes plus complexes, il nous faut effectuer une décomposition

$$\begin{array}{l} x + \sin(xy) \leq 0, \\ x \in [-1,1], y \in [-1,1] \end{array}$$

se décompose en

$$\left\{ \begin{array}{l} a = xy \\ b = \sin(a) \\ c = x + b \end{array} \right. , \qquad \begin{array}{ll} x \in [-1,1] & a \in [-\infty,\infty] \\ y \in [-1,1] & b \in [-\infty,\infty] \\ & c \in [-\infty,0] \end{array}$$

5 QUIMPER

Quimper : QUick Interval Modeling and Programming in a bounded-ERror context.

Quimper est un langage interprété pour le calcul ensembliste.

Un programme Quimper se décrit par un ensemble de contracteurs.

Logiciel libre disposible sur

`http://ibex-lib.org/`

6 CSPs

Un CSP est constitué.

- d'un ensemble de variables $\mathcal{V} = \{x_1, \ldots, x_n\}$,
- d'un ensemble de contraintes $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$
- d'un ensemble d'intervalles $\{[x_1], \ldots, [x_n]\}$.

1) Les informations sur la localisation d'un robot, sur sa carte,... peuvent être représentées par un CSP.

2) Les contraintes c_i représentent les relations entre les variables. On leur associe un contracteur.

3) Les CSP se distribuent facilement.

4) La méthode ne linéarise pas.

5) Elle permet de prendre en compte des variables discrètes (entières, booléennes, ...).

6) Elle est robuste par rapport aux outliers.

7) Elle se parallélise aisément.