

Calcul par intervalles et applications

Luc Jaulin
ENSIETA, Brest

Cours de master recherche (Lyon)
Mardi 15 mai 2007, 9h30-12h.

1 Rappel sur la théorie des ensembles

1.1 Opérations

$$\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbb{X} \text{ and } x \in \mathbb{Y}\}$$

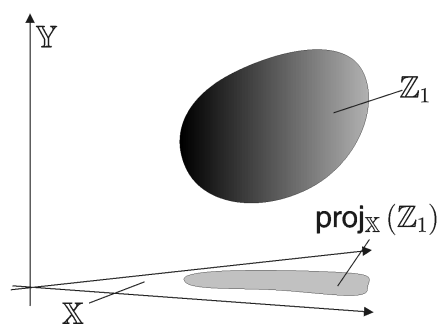
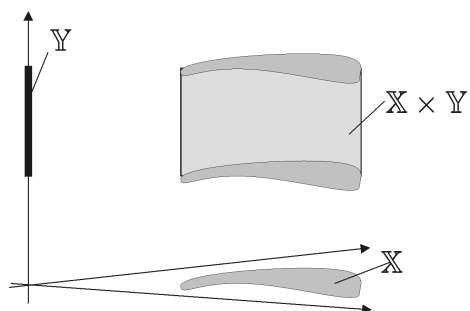
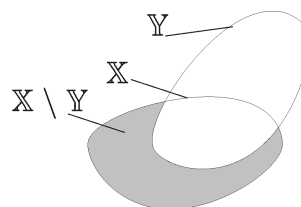
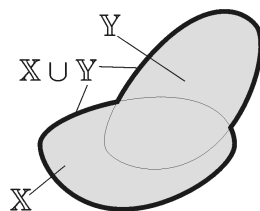
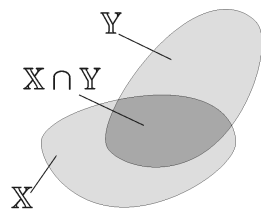
$$\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbb{X} \text{ or } x \in \mathbb{Y}\}$$

$$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbb{X} \text{ and } x \notin \mathbb{Y}\}$$

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid x \in \mathbb{X} \text{ and } y \in \mathbb{Y}\}$$

Si $\mathbb{Z} = \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, la *projection* d'un sous ensemble $\mathbb{Z}_1$ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{X}$ (parralèlement à $\mathbb{Y}$) est défini par

$$\text{proj}_{\mathbb{X}}(\mathbb{Z}_1) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{X} \mid \exists y \in \mathbb{Y}, (x, y) \in \mathbb{Z}_1\}.$$



Exemple 1 : Si $\mathbb{X} = \{a, b, c, d\}$ et $\mathbb{Y} = \{b, c, x, y\}$,

$$\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} = ?$$

$$\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} = ?$$

$$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y} = ?$$

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = ?$$

Si $\mathbb{Z}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, c), (a, y), (b, c), (d, y)\} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$,

$$\text{proj}_{\mathbb{X}}(\mathbb{Z}_1) = ?$$

$$\text{proj}_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Z}_1) = ?$$

Exemple 1 : Si $\mathbb{X} = \{a, b, c, d\}$ et $\mathbb{Y} = \{b, c, x, y\}$,

$$\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} = \{b, c\}$$

$$\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} = \{a, b, c, d, x, y\}$$

$$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y} = \{a, d\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{X} \times \mathbb{Y} = & \{(a, b), (a, c), (a, x), (a, y), \\ & \dots, (d, b), (d, c), (d, x), (d, y)\} \end{aligned}$$

Si $\mathbb{Z}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, c), (a, y), (b, c), (d, y)\} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$,

$$\text{proj}_{\mathbb{X}}(\mathbb{Z}_1) = \{a, b, d\},$$

$$\text{proj}_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Z}_1) = \{c, y\}.$$

Exemple 2 : Si

$$S = \{(x, y, z) \in [1, 5] \times [2, 4] \times [6, 10] \mid z = x + y\}$$

alors

$$\text{proj}_{\mathbb{X}}(S) = ?$$

$$\text{proj}_{\mathbb{Y}}(S) = ?$$

$$\text{proj}_{\mathbb{Z}}(S) = ?.$$

Exemple 2 : Si

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in [1, 5] \times [2, 4] \times [6, 10] \mid z = x + y\}$$

alors

$$\text{proj}_{\mathbb{X}}(\mathbb{S}) = [6, 9]$$

$$\text{proj}_{\mathbb{Y}}(\mathbb{S}) = [2, 4]$$

$$\text{proj}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{S}) = [2, 5].$$

1.2 Fonctions

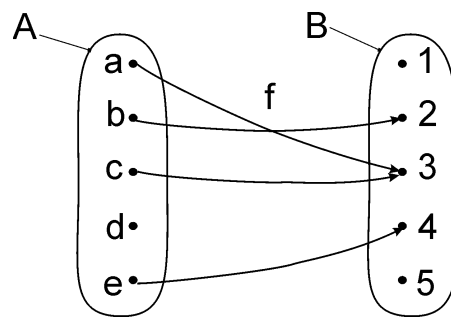
Si $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ et si $\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}$, l'*image directe* de $\mathbb{X}_1$ par f est

$$f(\mathbb{X}_1) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in \mathbb{X}_1\}.$$

Si $\mathbb{Y}_1 \subset \mathbb{Y}$, l'*image réciproque* de $\mathbb{Y}_1$ par f est

$$f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) \in \mathbb{Y}_1\}.$$

Exemple 1: Si f est définie par



alors

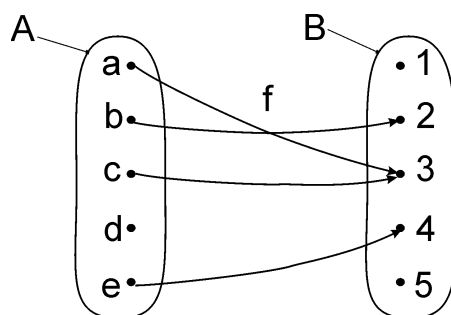
$$f(A) = ?$$

$$f^{-1}(B) = ?$$

$$f^{-1}(f(A)) = ?$$

$$f^{-1}(f(\{b, c\})) = ?$$

Exemple 1: Si f est définie par



alors

$$f(A) = \{2, 3, 4\} = \text{Im}(f)$$

$$f^{-1}(B) = \{a, b, c, e\} = \text{dom}(f)$$

$$f^{-1}(f(A)) = \{a, b, c, e\} \subset A$$

$$f^{-1}(f(\{b, c\})) = \{a, b, c\}.$$

Exemple 2 : Si $f(x) = x^2$, alors

$$f([2, 3]) = ?$$

$$f^{-1}([4, 9]) = ?$$

Exemple 2 : Si $f(x) = x^2$, alors

$$\begin{aligned}f([2, 3]) &= [4, 9] \\f^{-1}([4, 9]) &= [-3, -2] \cup [2, 3].\end{aligned}$$

Ce qui est cohérent avec la propriété

$$f\left(f^{-1}(\mathbb{Y})\right) \subset \mathbb{Y}.$$

Exemple 3 : Si $f(x) = \log$, alors

$$f^{-1}(f([-3, -2])) = \emptyset.$$

2 Arithmétique sur les intervalles

2.1 Opérateurs élémentaires

Si $\diamond \in \{+, -, ., /, \max, \min\}$, on a

$$[x] \diamond [y] = [\{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}].$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} [-1, 3] + [2, 5] &= [?, ?], \\ [-1, 3] \cdot [2, 5] &= [?, ?], \\ [-1, 3] / [2, 5] &= [?, ?], \\ [-1, 3] \vee [2, 5] &= [?, ?]. \end{aligned}$$

Si $\diamond \in \{+, -, \cdot, /, \max, \min\}$, on a

$$[x] \diamond [y] = [\{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}].$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} [-1, 3] + [2, 5] &= [1, 8], \\ [-1, 3] \cdot [2, 5] &= [-5, 15], \\ [-1, 3] / [2, 5] &= [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}], \\ [-1, 3] \vee [2, 5] &= [2, 5]. \end{aligned}$$

Exercice : Calculer

$$([1, 2] + [-3, 4]) * [-1, 5] = \dots$$

Solution : Calculer

$$\begin{aligned}([1, 2] + [-3, 4]) * [-1, 5] &= [-2, 6] * [-1, 5] \\ &= [-10, 30].\end{aligned}$$

2.2 Fonctions élémentaires

Si $f \in \{\cos, \sin, \text{sqr}, \text{sqrt}, \log, \exp, \dots\}$

$$f([x]) = [\{f(x) \mid x \in [x]\}].$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}\sin([0, \pi]) &= [\text{?}, \text{?}], \\ \text{sqr}([-1, 3]) &= [\text{?}, \text{?}], \\ \text{abs}([-7, 1]) &= [\text{?}, \text{?}], \\ \text{sqrt}([-10, 4]) &= [\text{?}, \text{?}], \\ \log([-2, -1]) &= [\text{?}, \text{?}].\end{aligned}$$

Si $f \in \{\cos, \sin, \text{sqr}, \text{sqrt}, \log, \exp, \dots\}$

$$f([x]) = [\{f(x) \mid x \in [x]\}].$$

Par exemple,

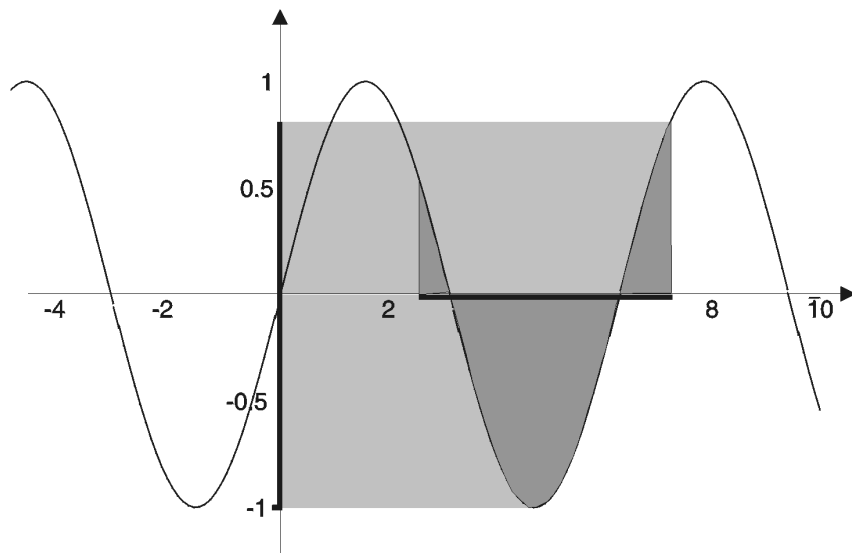
$$\sin([0, \pi]) = [0, 1],$$

$$\text{sqr}([-1, 3]) = [-1, 3]^2 = [0, 9],$$

$$\text{abs}([-7, 1]) = [0, 7],$$

$$\text{sqrt}([-10, 4]) = \sqrt{[-10, 4]} = [0, 2],$$

$$\log([-2, -1]) = \emptyset.$$



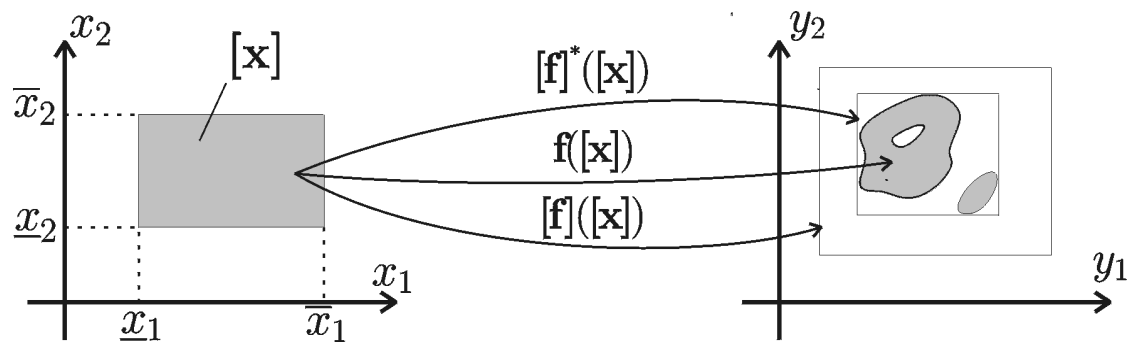
2.3 Fonction d'inclusion

Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. La fonction $[\mathbf{f}] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$, est une *fonction d'inclusion* de $\mathbf{f}$ si

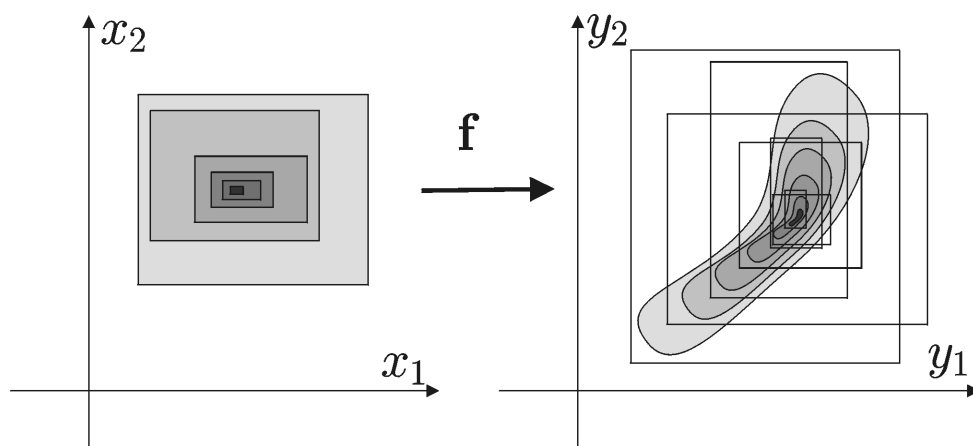
$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n, \quad \mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]).$$

On dira que $[\mathbf{f}]$ est

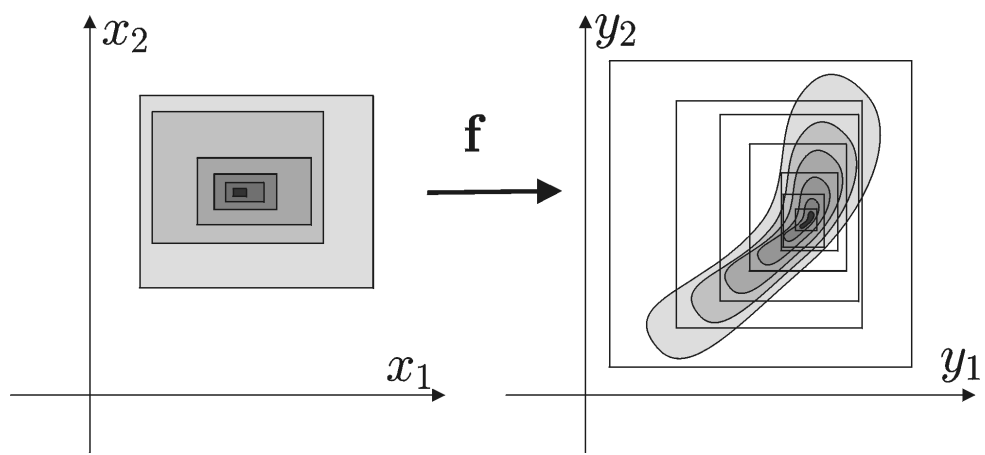
<i>monotone</i>	si	$([\mathbf{x}] \subset [\mathbf{y}]) \Rightarrow ([\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{y}]))$
<i>minimale</i>	si	$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n, [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) = [\mathbf{f}([\mathbf{x}])]$
<i>convergente</i>	si	$w([\mathbf{x}](k)) \rightarrow 0 \Rightarrow w([\mathbf{f}]([\mathbf{x}](k)) \rightarrow 0$



Fonctions d'inclusion $[f]$ et $[f]^*$. Ici, $[f]^*$ est minimale.



Fonction d'inclusion convergente mais pas monotone



Fonction d'inclusion convergente et monotone

2.4 Fonction d'inclusion naturelle

Il suffit de remplacer dans l'expression de $\mathbf{f}$, tous les x_i 's par $[x_i]$.

Exemple 1. Si $f(x) = x^2 + 2x + 4$ alors, sa fonction d'inclusion naturelle est

$$[f]([x]) = \text{sqr}([x]) + 2[x] + 4.$$

Pour $[x] = [-3, 4]$, nous avons

$$\begin{aligned} [f]([-3, 4]) &= \text{sqr}([-3, 4]) + 2[-3, 4] + 4 \\ &= [0, 16] + [-6, 8] + 4 = [-2, 28]. \end{aligned}$$

Notons que

$$f([-3, 4]) = [3, 28] \subset [f]([-3, 4]) = [-2, 28].$$

Exemple 2. Si

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 x_2, x_1^2, x_1 - x_2).$$

alors, sa fonction d'inclusion naturelle $[\mathbf{f}]$ est

$$\mathbb{IR}^2 \rightarrow \mathbb{IR}^3 \\ ([x_1], [x_2]) \rightarrow ([x_1] * [x_2], [x_1]^2, [x_1] - [x_2]).$$

Par exemple,

$$[\mathbf{f}]([-1, 1] \times [-1, 1]) = [-1, 1] \times [0, 1] \times [-2, 2].$$

Puisque dans les f_i , les x_i n'apparaissent qu'une seule fois, la fonction d'inclusion est minimale.

Exemple 3 : Si f est donnée par

Algo $f(\text{in: } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \text{ out: } \mathbf{y} = (y_1, y_2))$
--

1 $z := x_1;$
2 for $k := 0$ to 100
3 $z := x_2(z + kx_3);$
4 next;
5 $y_1 := z;$
6 $y_2 := \sin(zx_1);$

alors, sa fonction d'inclusion naturelle est

Algo $[f](\text{in: } [x] = ([x_1], [x_2], [x_3]), \text{ out: } [y] = ([y_1], [y_2]))$	
1	$[z] := [x_1];$
2	for $k := 0$ to 100
3	$[z] := [x_2] * ([z] + k * [x_3]);$
4	next;
5	$[y_1] := [z];$
6	$[y_2] := \sin([z] * [x_1]);$

Ici, $[f]$ est convergente et monotone.

3 Inversion ensembliste

3.1 Sous-pavages

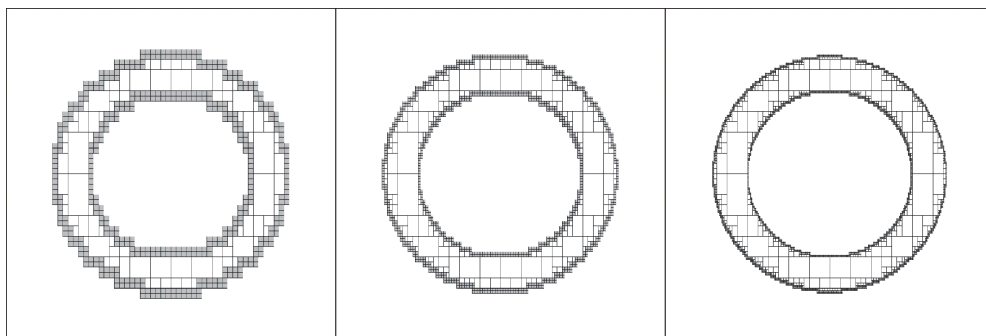
Les ensembles $\mathbb{X}$ peuvent être encadrés par deux sous-pavages $\mathbb{X}^-$ et $\mathbb{X}^+$:

$$\mathbb{X}^- \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{X}^+.$$

Par exemple, l'ensemble

$$\mathbb{X} = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \in [1, 2]\}$$

peut être encadré comme ci-dessous



3.2 Piles

Une *liste* est un ensemble fini ordonné.

Une *pile* est une liste sur laquelle deux opérations sont permises :

- (i) ajouter un élément en début de pile (*stack*)
- (ii) enlever le premier élément (*pop*).

Exemple

k	opération	résultat
0		$\mathcal{L} = \emptyset$
1	$\text{stack}(\mathcal{L}, a)$	$\mathcal{L} = \{a\}$
2	$\text{stack}(\mathcal{L}, b)$	$\mathcal{L} = \{a, b\}$
3	$x := \text{pop}(\mathcal{L})$	$x = b, \mathcal{L} = \{a\}$
4	$x := \text{pop}(\mathcal{L})$	$x = a, \mathcal{L} = \emptyset.$

3.3 Algorithme

Il nous faut encadrer l'ensemble

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{Y}\} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}),$$

où $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^m$. et $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, par deux sous-pavages

$$\mathbb{X}^- \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{X}^+$$

.

Tests pour montrer si $[\mathbf{x}]$ à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathbb{X}$:

- (i) $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subset \mathbb{Y} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{x}] \subset \mathbb{X}$
- (ii) $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap \mathbb{Y} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{x}] \cap \mathbb{X} = \emptyset.$

Algo Sivia(in: $[x]$; out: $\mathcal{L}^-, \mathcal{L}^+$)	
1	$\mathcal{L} := \{[x]\}; \mathcal{L}^- = \emptyset; \mathcal{L}^+ := \emptyset;$
2	if $\mathcal{L} \neq \emptyset$, $[x] := \text{pop}(\mathcal{L})$, else end;
3	if $[f]([x]) \subset \mathbb{Y}$, $\text{stack}(\mathcal{L}^-, \mathcal{L}^+, [x]);$ goto 2;
4	if $[f]([x]) \cap \mathbb{Y} = \emptyset$, goto 2;
5	if $w([x]) < \varepsilon$, $\text{stack}(\mathcal{L}^+, [x]);$ goto 2;
6	$\text{stack}(\mathcal{L}, \text{left}([x]), \text{right}([x]));$ goto 2.

4 Estimation ensembliste

4.1 Estimation de paramètres

Modèle : $\phi(\mathbf{p}, t) = p_1 e^{-p_2 t}$,

Paramètres : p_1, p_2 ,

Pavé initial pour les paramètres : $[\mathbf{p}] \subset \mathbb{R}^2$,

Temps de mesure : $t_1, t_2, \dots, t_m$,

Barres des données : $[y_1^-, y_1^+], [y_2^-, y_2^+], \dots, [y_m^-, y_m^+]$,

Ensemble de vraisemblance :

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{p} \in [\mathbf{p}], \phi(\mathbf{p}, t_1) \in [y_1^-, y_1^+], \dots, \phi(\mathbf{p}, t_m) \in [y_m^-, y_m^+]\}.$$

Posons

$$\phi\left(\mathbf{p}\right)=\left(\begin{array}{c}\phi\left(\mathbf{p},t_1\right)\\ \phi\left(\mathbf{p},t_m\right)\end{array}\right)$$

et

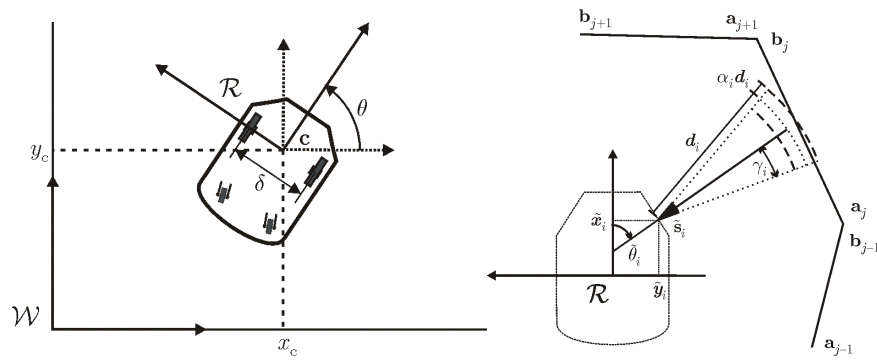
$$[\mathbf{y}]=[y_1^-,y_1^+]\times\cdots\times[y_m^-,y_m^+]$$

alors

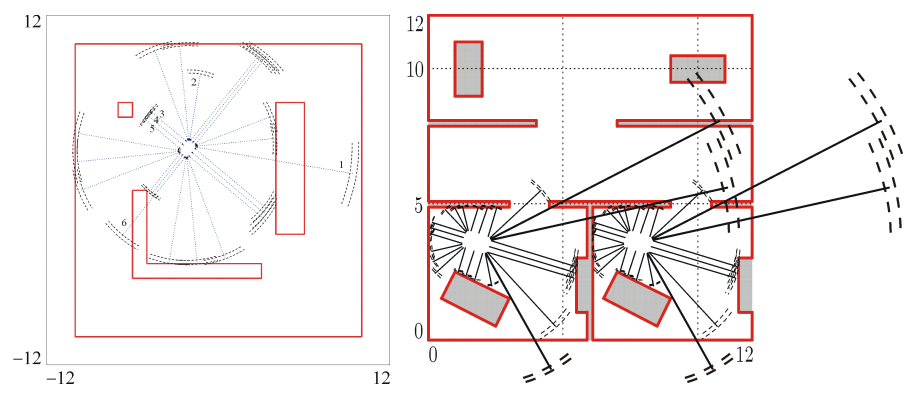
$$\mathbb{S}=[\mathbf{p}]\cap\phi^{-1}\left(\mathbf{p}\right).$$

4.2 Localisation

Robot entouré d'un ceinture de 24 télémètres à ultrasons



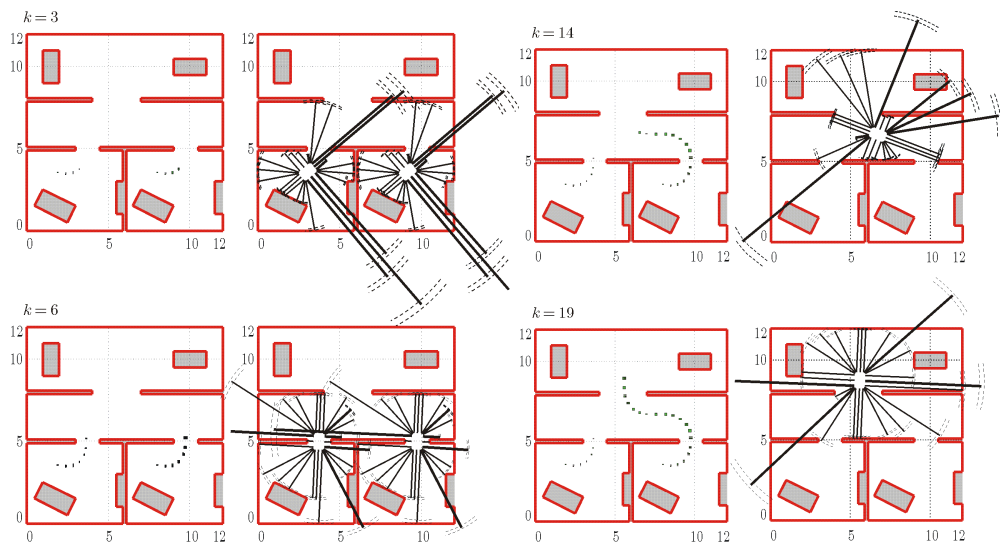
La localisation peut se faire par inversion ensemble



En prenant en compte les équations d'état,

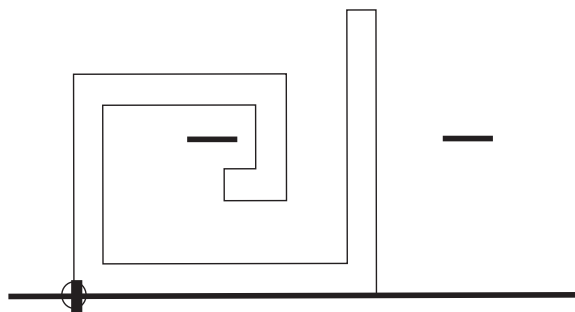
$$\begin{cases} \dot{x} &= \rho \frac{\omega_r + \omega_l}{2} \cos \theta, \\ \dot{y} &= \rho \frac{\omega_r + \omega_l}{2} \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \rho \frac{\omega_r - \omega_l}{\delta} \end{cases}$$

on peut même suivre le robot.

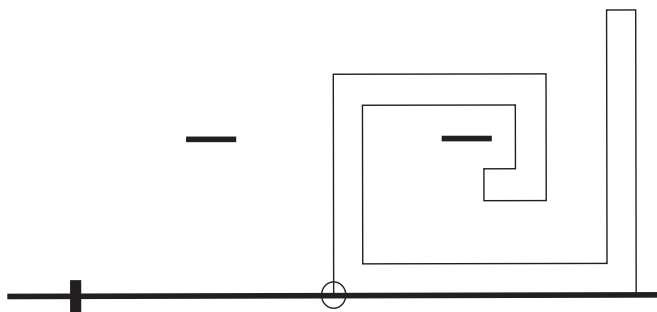


Lancer Setdemo (fait par Guillaume Baffet)

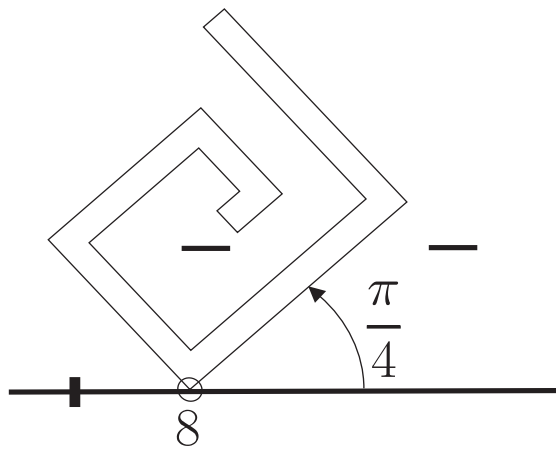
5 Planification de chemin



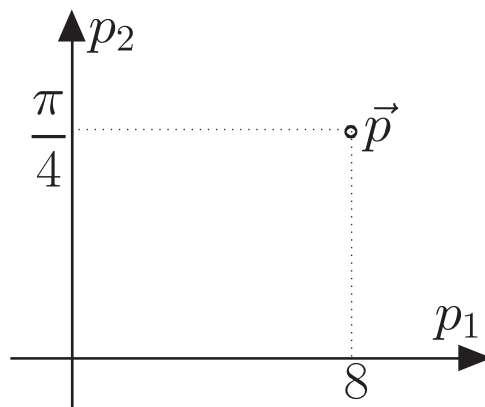
Initial configuration: $\vec{p} = (0 \ 0)^T$



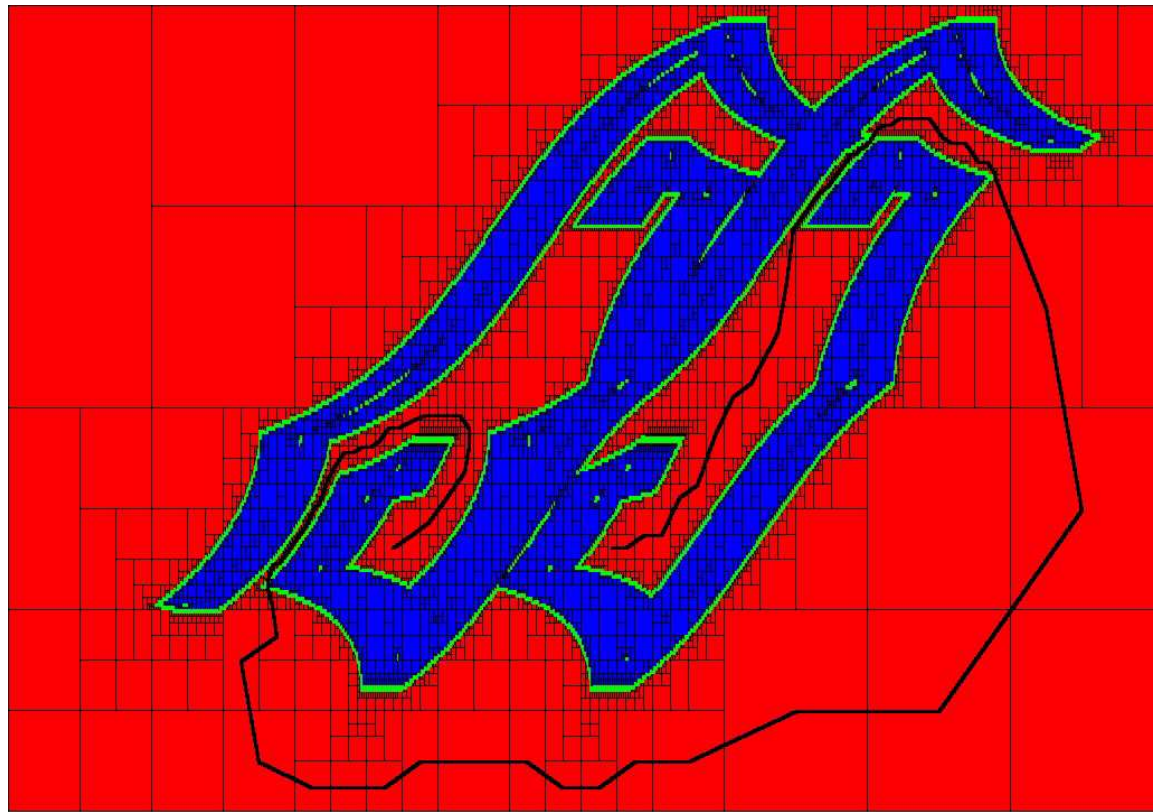
Goal configuration: $\vec{p} = (17 \ 0)^T$

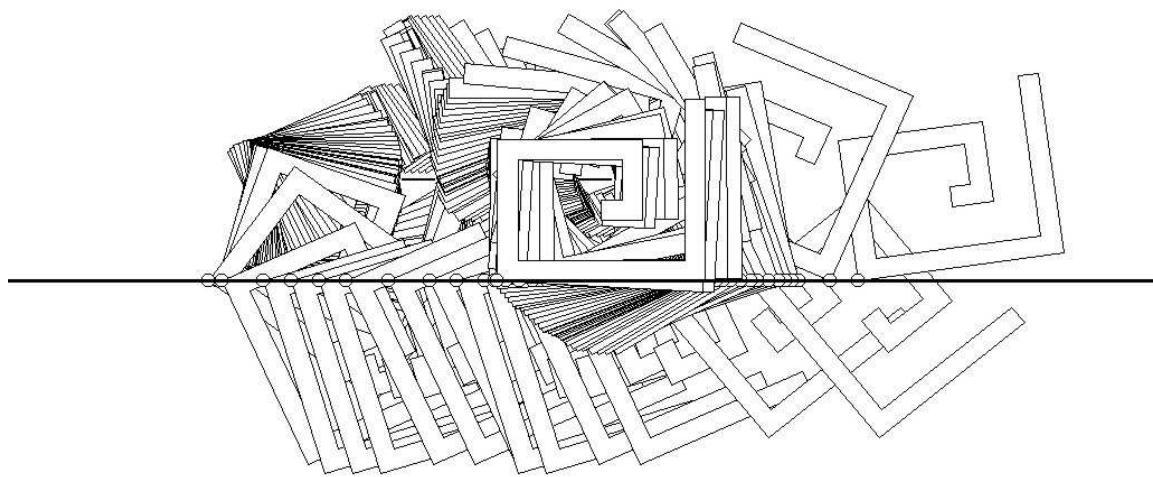


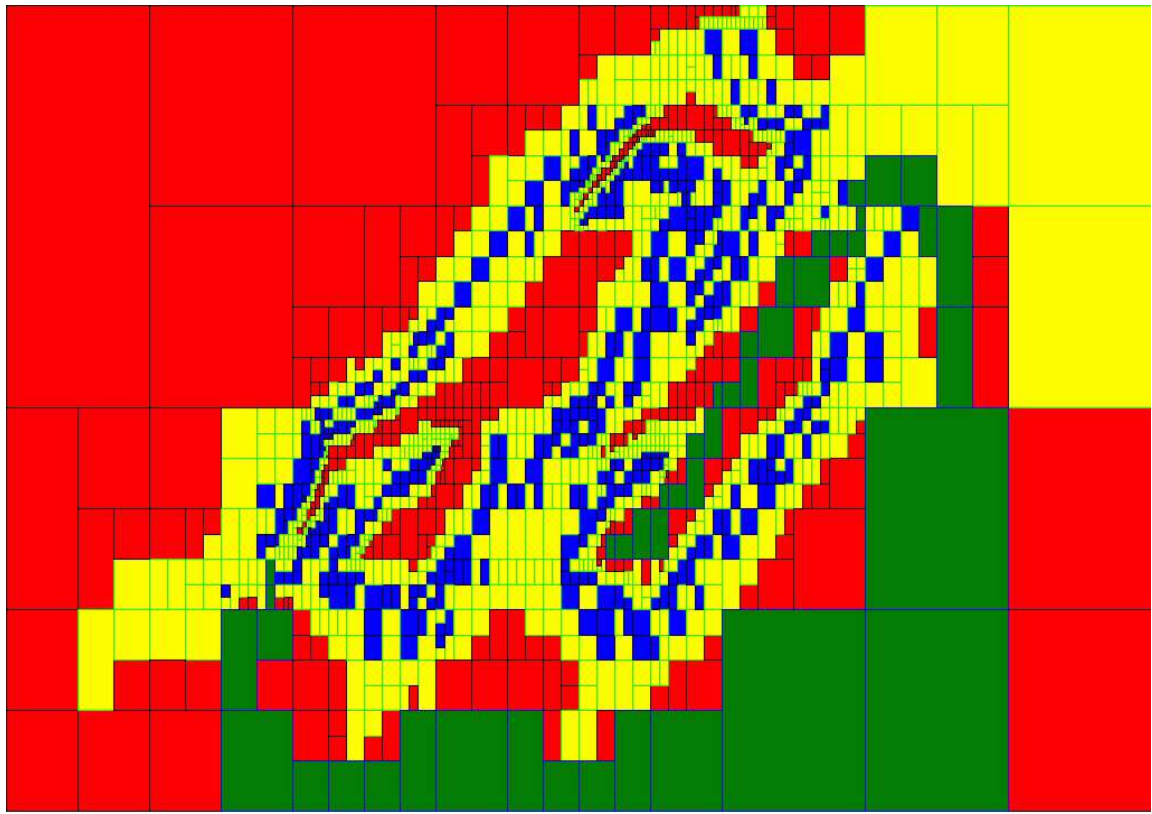
Room

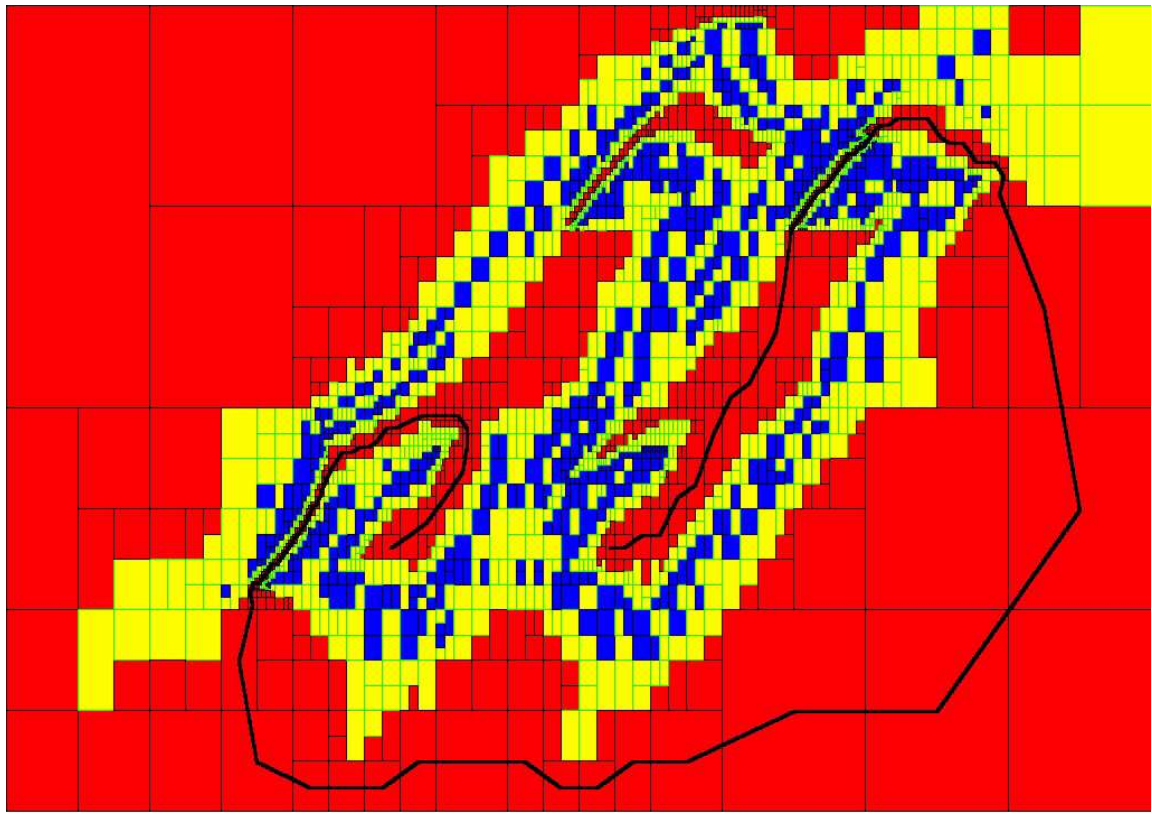


Configuration space









6 Commande d'un voilier

6.1 Equations d'état

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v \cos \theta \\ \dot{y} & = & v \sin \theta - \beta V \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ \dot{\delta}_s & = & u_1 \\ \dot{\delta}_r & = & u_2 \\ \dot{v} & = & \frac{f_s \sin \delta_s - f_r \sin \delta_r - \alpha_f v}{m} \\ \dot{\omega} & = & \frac{(\ell - r_s \cos \delta_s) f_s - r_r \cos \delta_r f_r - \alpha_\theta \omega}{J} \\ f_s & = & \alpha_s (V \cos (\theta + \delta_s) - v \sin \delta_s) \\ f_r & = & \alpha_r v \sin \delta_r. \end{array} \right.$$

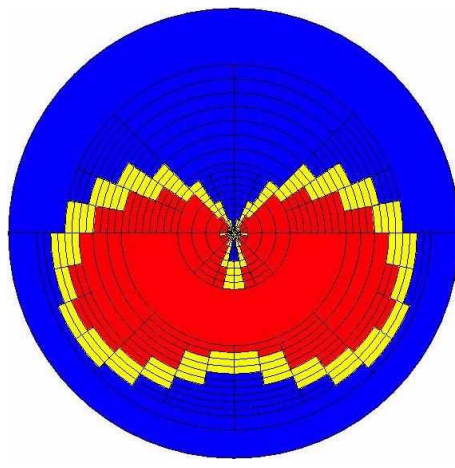
6.2 Est-il possible de l'immobiliser ?

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & v \cos \theta \\ 0 & = & v \sin \theta - \beta V \\ 0 & = & \omega \\ 0 & = & u_1 \\ 0 & = & u_2 \\ 0 & = & \frac{f_s \sin \delta_s - f_r \sin \delta_r - \alpha_f v}{m} \\ 0 & = & \frac{(\ell - r_s \cos \delta_s) f_s - r_r \cos \delta_r f_r - \alpha_\theta \omega}{J} \\ f_s & = & \alpha_s (V \cos (\theta + \delta_s) - v \sin \delta_s) \\ f_r & = & \alpha_r v \sin \delta_r. \end{array} \right.$$

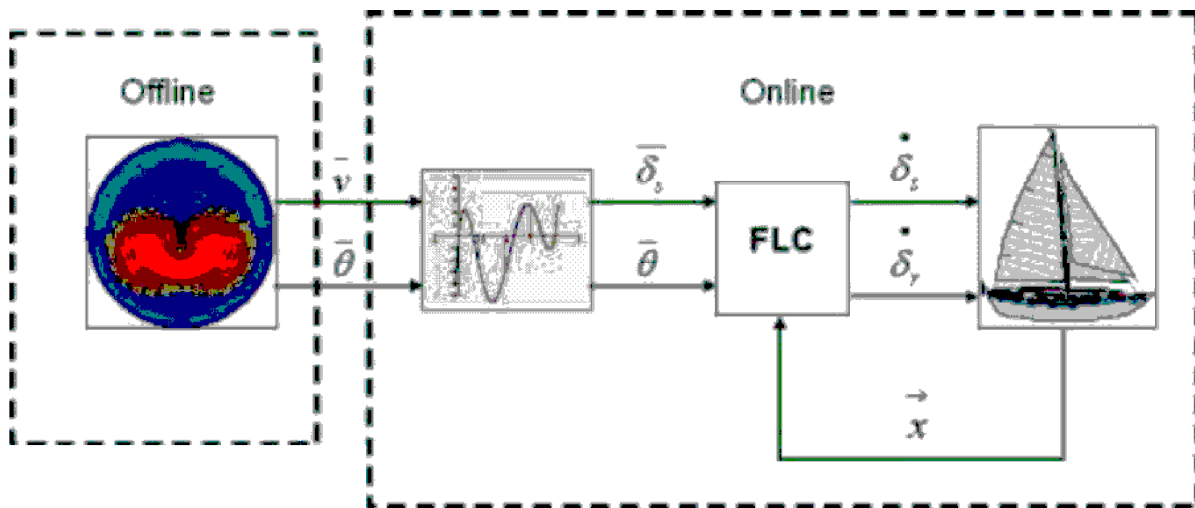
Les techniques intervalles montrent qu'aucune solution existe si $V \neq 0$.

6.3 Polaire des vitesses

$$\mathbb{W} = \{ (\theta, v) \mid \begin{array}{l} \exists(\omega, u_1, u_2, f_s, f_r, \delta_r, \delta_s) \\ \omega = 0, u_1 = 0, u_2 = 0 \\ \frac{f_s \sin \delta_s - f_r \sin \delta_r - \alpha_f v}{f_s \sin \delta_s - f_r \sin \delta_r - \alpha_f v} = 0 \\ \frac{(\ell - r_s \cos \delta_s) f_s - r_r \cos \delta_r f_r}{J} = 0 \\ f_s = \alpha_s (V \cos(\theta + \delta_s) - v \sin \delta_s) \\ f_r = \alpha_r v \sin \delta_r \end{array} \}.$$



6.4 Controle



7 Propagation de contraintes

7.1 Projection d'une contrainte

Soient x, y, z trois variables telles que

$$x \in [-\infty, 5],$$

$$y \in [-\infty, 4],$$

$$z \in [6, \infty],$$

$$z = x + y.$$

Les valeurs < 2 pour x , < 1 pour y et > 9 pour z sont inconsistantes.

En effet, puisque $x \in [-\infty, 5]$, $y \in [-\infty, 4]$, $z \in [6, \infty]$ et $z = x + y$, nous avons

$$z = x + y \Rightarrow z \in [6, \infty] \cap ([-\infty, 5] + [-\infty, 4]) \\ = [6, \infty] \cap [-\infty, 9] = [6, 9].$$

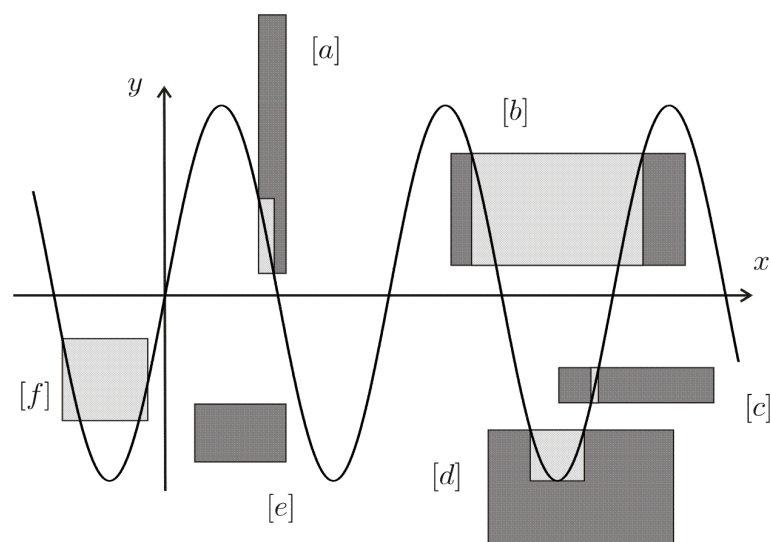
$$x = z - y \Rightarrow x \in [-\infty, 5] \cap ([6, \infty] - [-\infty, 4]) \\ = [-\infty, 5] \cap [2, \infty] = [2, 5].$$

$$y = z - x \Rightarrow y \in [-\infty, 4] \cap ([6, \infty] - [-\infty, 5]) \\ = [-\infty, 4] \cap [1, \infty] = [1, 4].$$

Pour la contrainte

$$y = \sin x, \quad x \in [x], y \in [y]$$

le problème est un peu plus difficile.



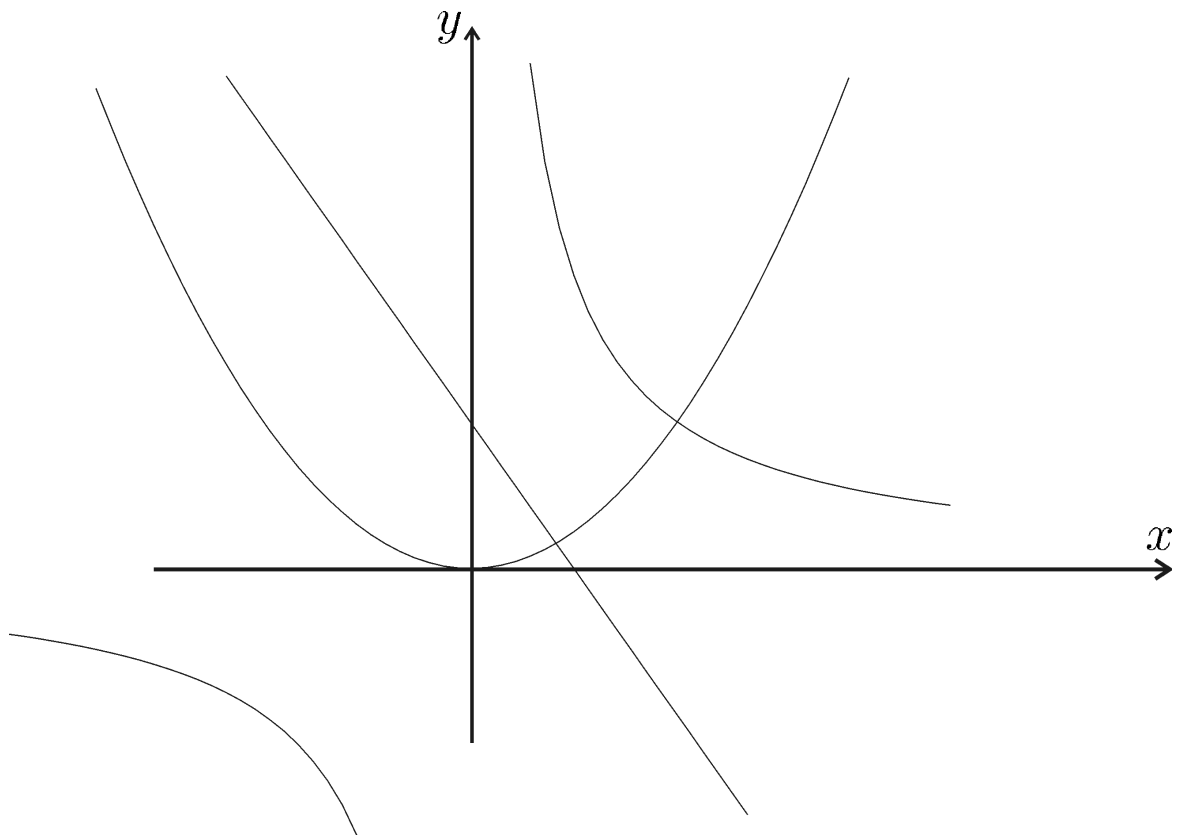
7.2 Propagation

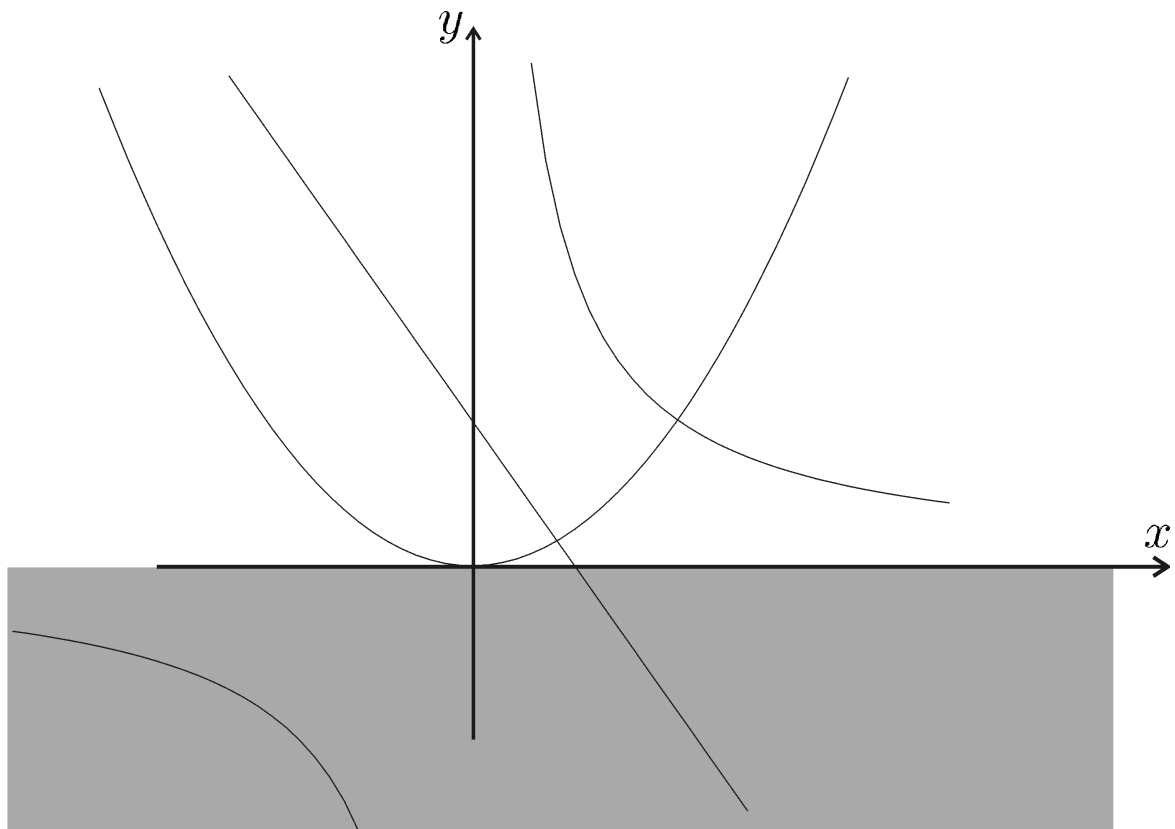
Considérons le problème à trois contraintes

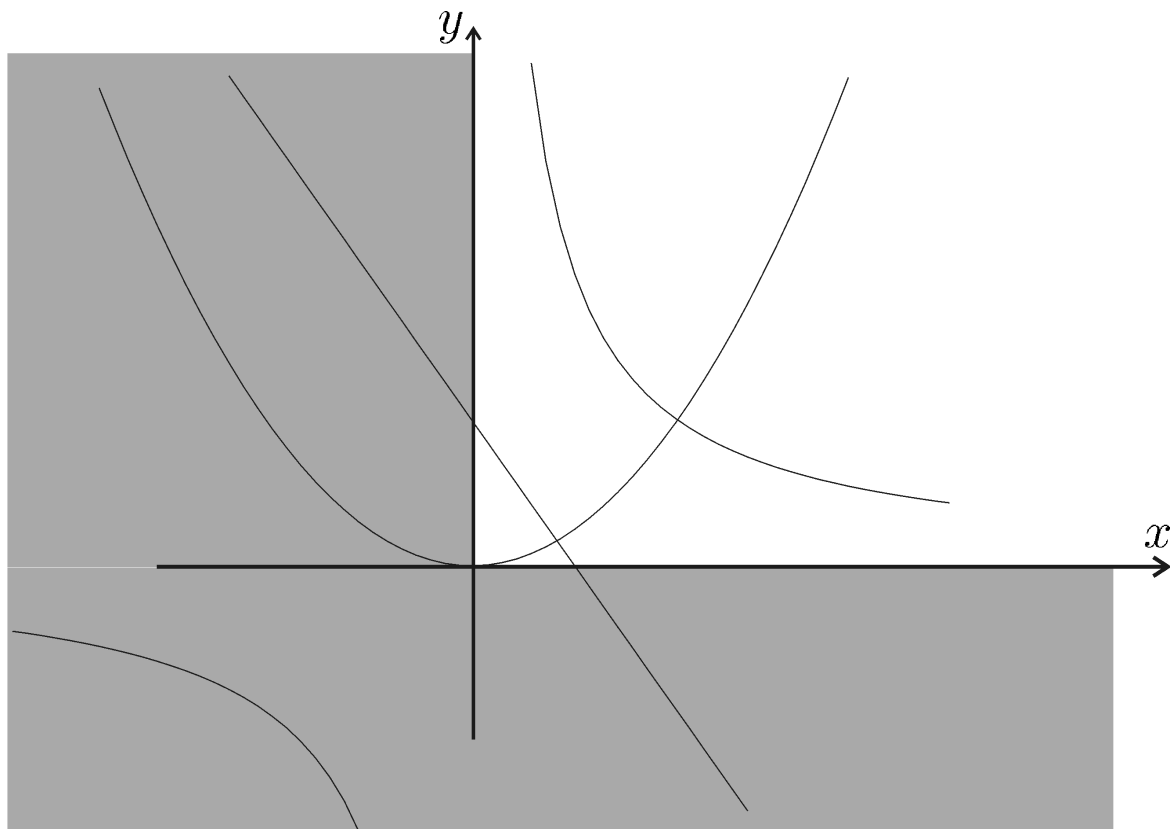
$$\begin{cases} (C_1) : & y = x^2 \\ (C_2) : & xy = 1 \\ (C_3) : & y = -2x + 1 \end{cases}$$

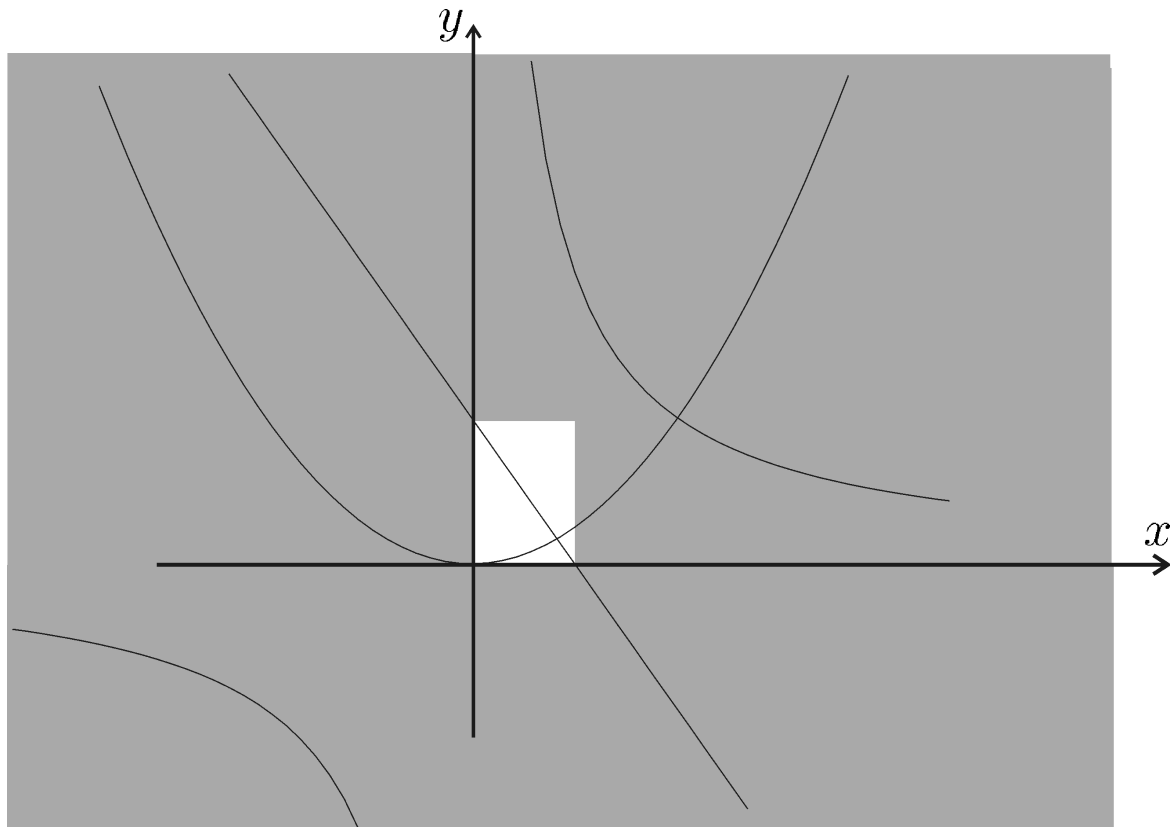
Pour chacune de ces variables, nous affectons le domaine $[-\infty, \infty]$.

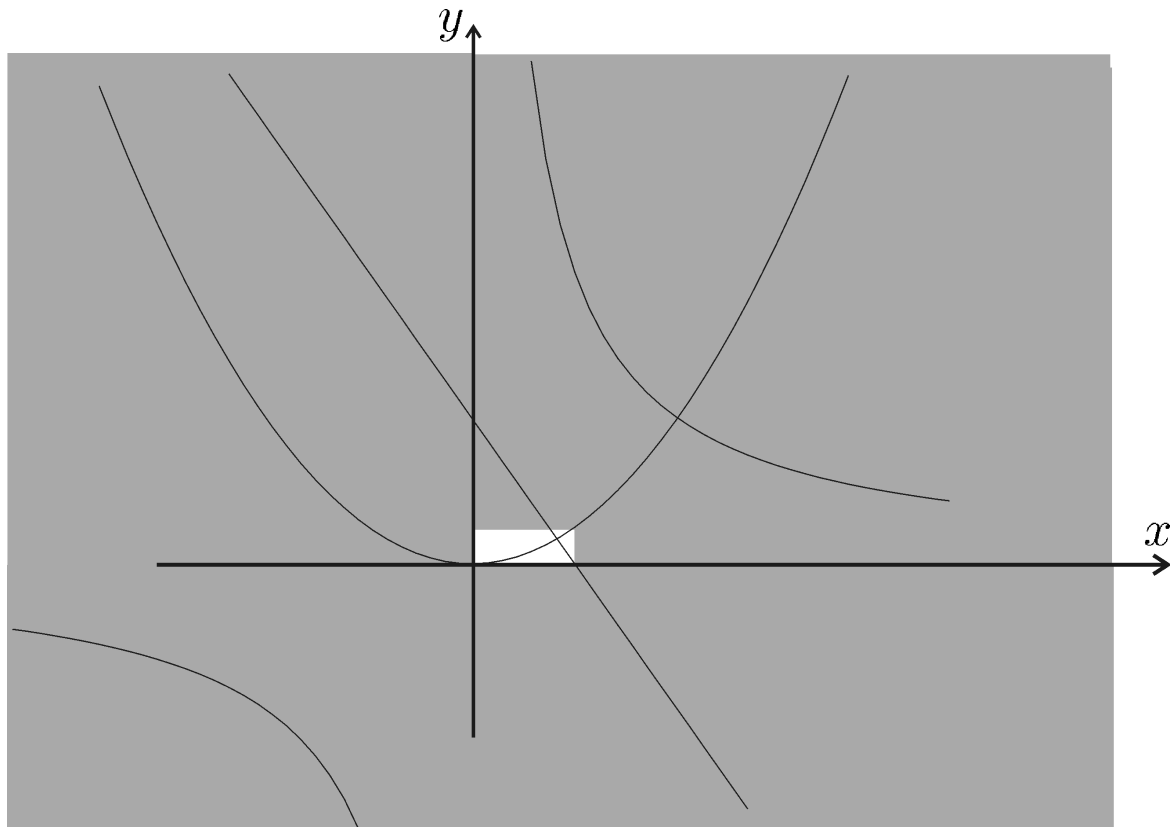
La *propagation* consiste à projeter ces contraintes jusqu'à l'équilibre.

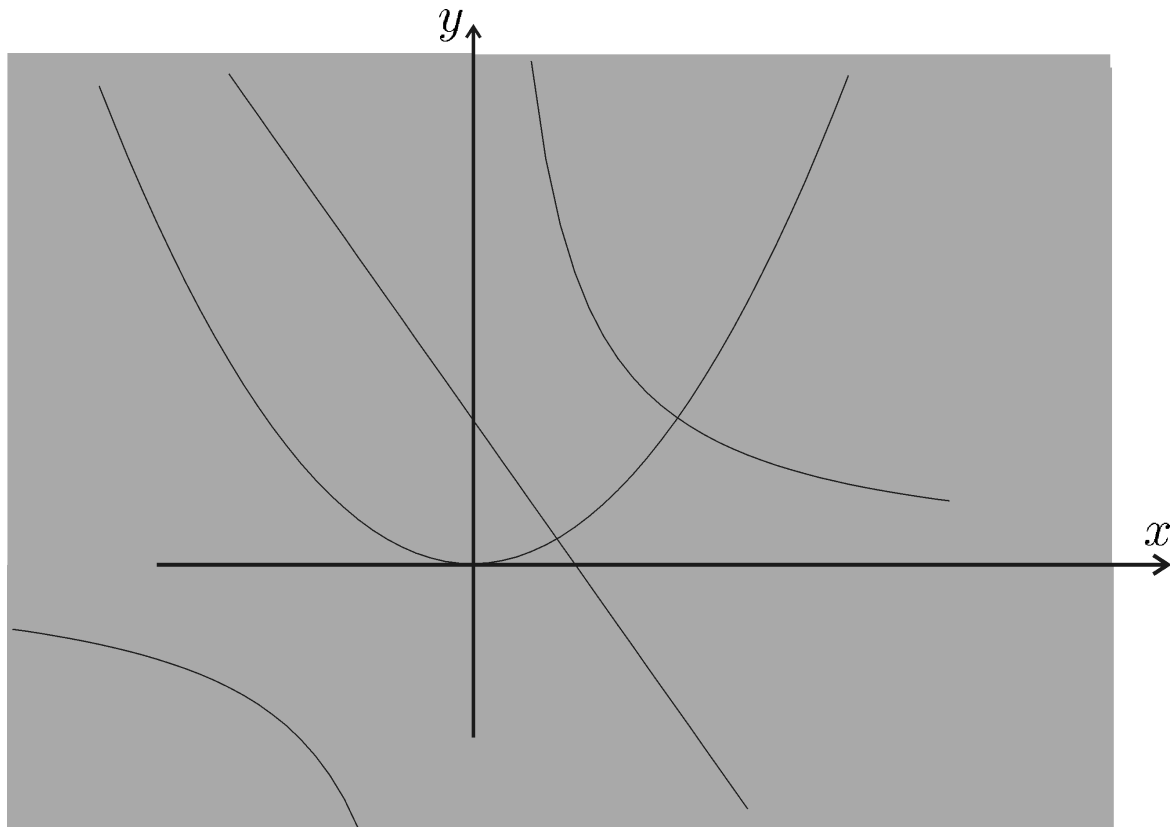


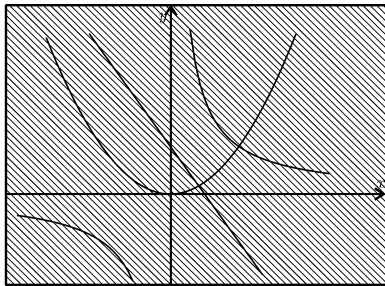
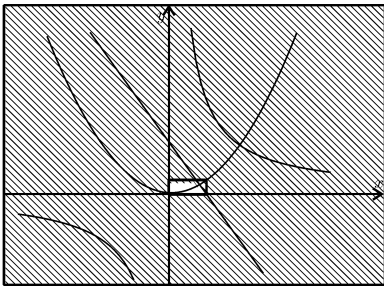
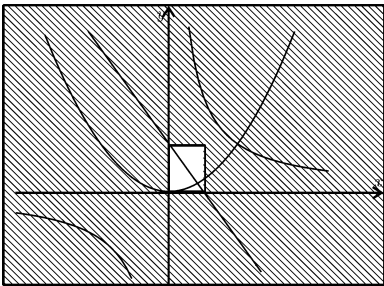
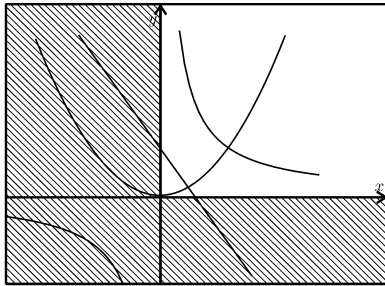
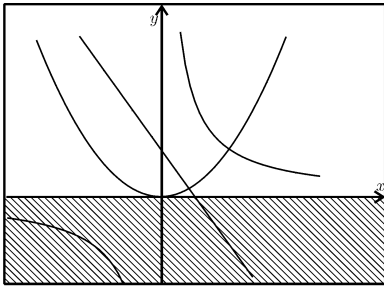
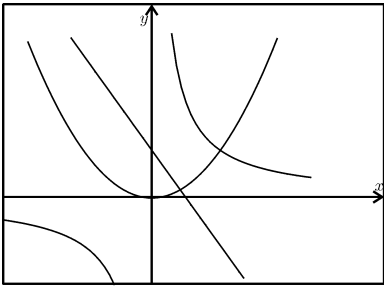












$$(C_1) \Rightarrow y \in [-\infty, \infty]^2 = [0, \infty]$$

$$(C_2) \Rightarrow x \in 1/[0, \infty] = [0, \infty]$$

$$(C_3) \Rightarrow y \in [0, \infty] \cap ((-2) \cdot [0, \infty] + 1) \\ = [0, \infty] \cap ([-\infty, 1]) = [0, 1]$$

$$x \in [0, \infty] \cap (-[0, 1]/2 + 1/2) = [0, \frac{1}{2}]$$

$$(C_1) \Rightarrow y \in [0, 1] \cap [0, 1/2]^2 = [0, 1/4]$$

$$(C_2) \Rightarrow x \in [0, 1/2] \cap 1/[0, 1/4] = \emptyset$$

$$y \in [0, 1/4] \cap 1/\emptyset = \emptyset$$

7.3 Décomposition

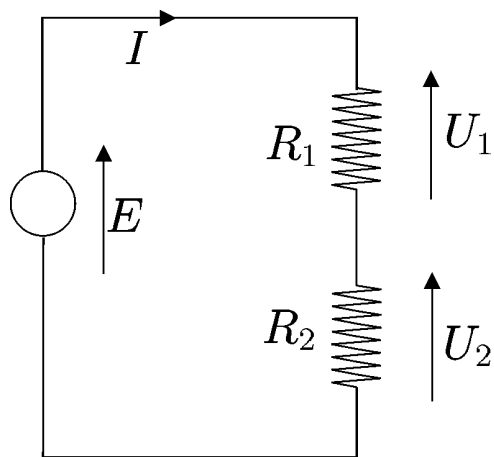
Pour des contraintes plus complexes une décomposition est nécessaire. Par exemple

$$\begin{aligned} x + \sin(y) - xz &\leq 0, \\ x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], z \in [-1, 1] \end{aligned}$$

se décompose comme suit.

$$\left\{ \begin{array}{lll} a = \sin(y) & x \in [-1, 1] & a \in]-\infty, \infty[\\ b = x + a & y \in [-1, 1] & b \in]-\infty, \infty[\\ c = xz & z \in [-1, 1] & c \in]-\infty, \infty[\\ b - c = d & & d \in]-\infty, 0] \end{array} \right.,$$

7.4 Problème d'estimation



Contraintes

$$\begin{aligned}P &= EI; E = (R_1 + R_2) I; \\U_1 &= R_1 I; U_2 = R_2 I; E = U_1 + U_2.\end{aligned}$$

Domaines initiaux

$$\begin{aligned}R_1 &\in [0, \infty]\Omega, & R_2 &\in [0, \infty]\Omega, \\E &\in [23, 26]\text{V}, & I &\in [4, 8]\text{A}, \\U_1 &\in [10, 11]\text{V}, & U_2 &\in [14, 17]\text{V}, \\P &\in [124, 130]\text{W},\end{aligned}$$

Les domaines contractés sont

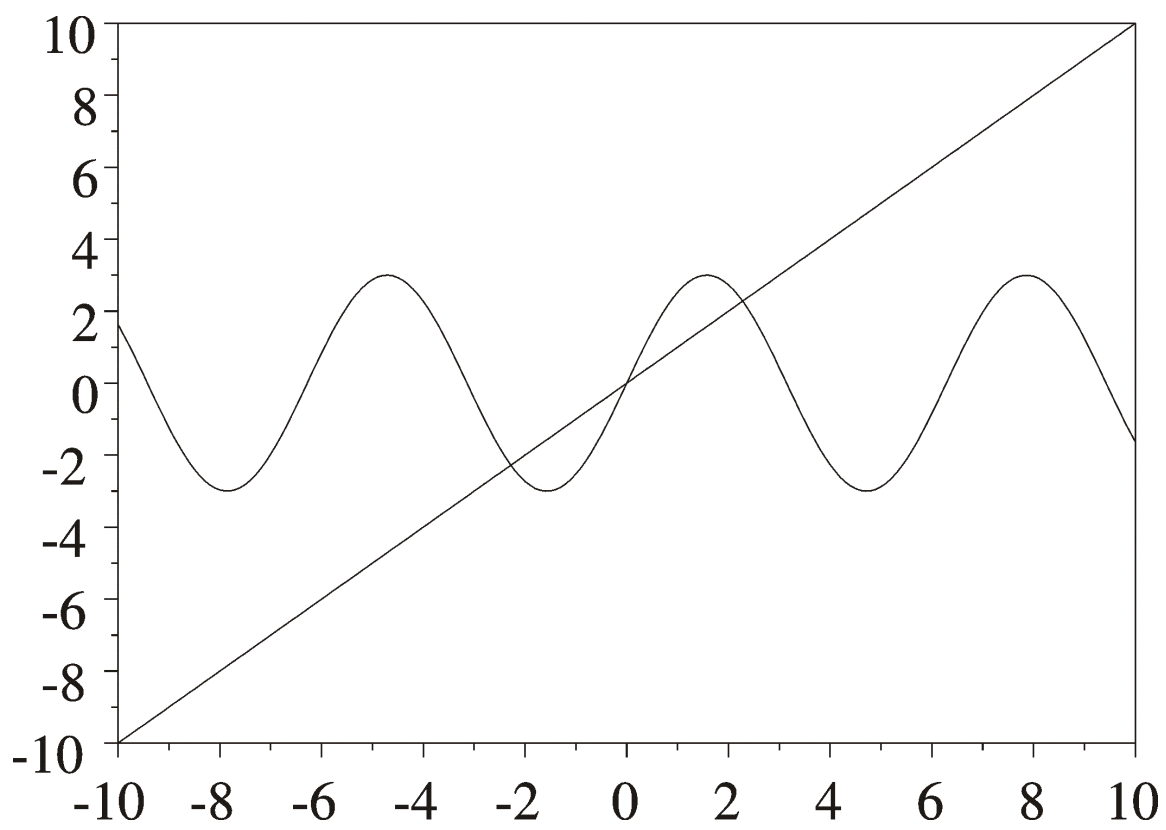
$$\begin{aligned} R_1 &\in [1.84, 2.31] \Omega, & R_2 &\in [2.58, 3.35] \Omega, \\ E &\in [24, 26] \text{V}, & I &\in [4.769, 5.417] \text{A}, \\ U_1 &\in [10, 11] \text{V}, & U_2 &\in [14, 16] \text{V}, \\ P &\in [124, 130] \text{W}, \end{aligned}$$

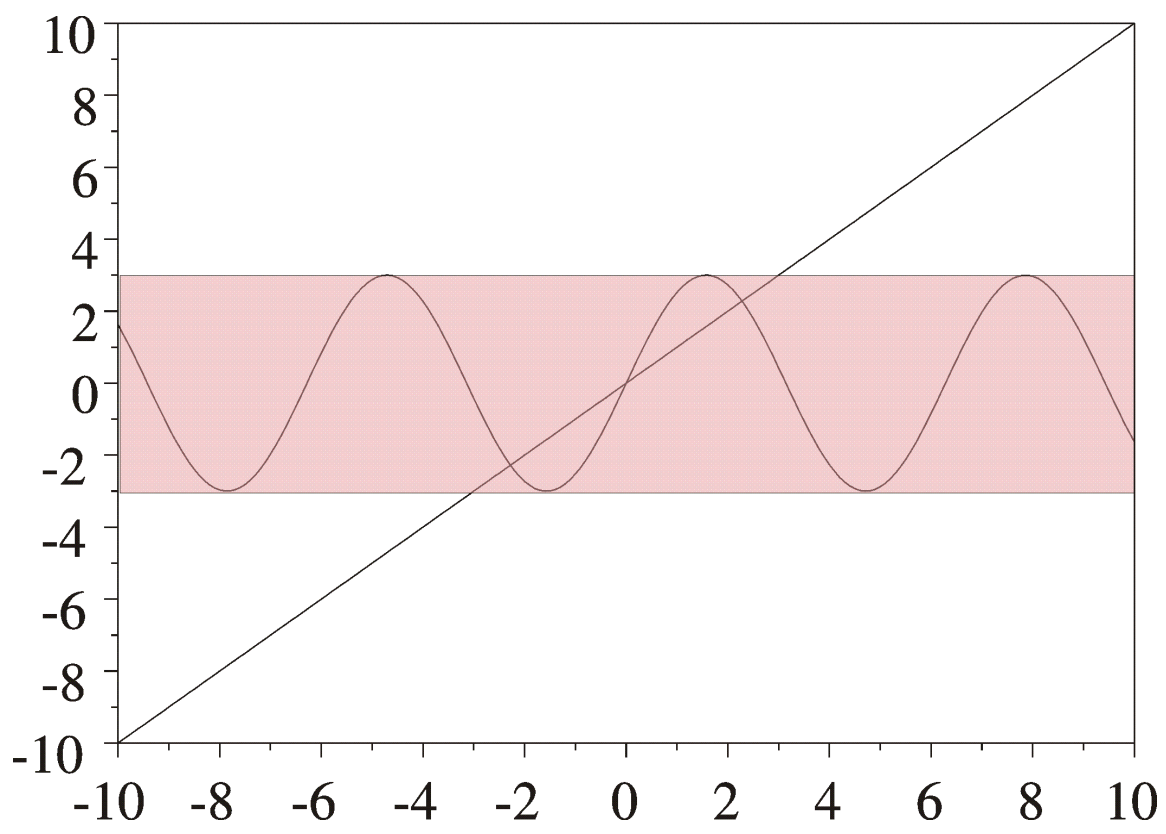
8 Résolution d'équations

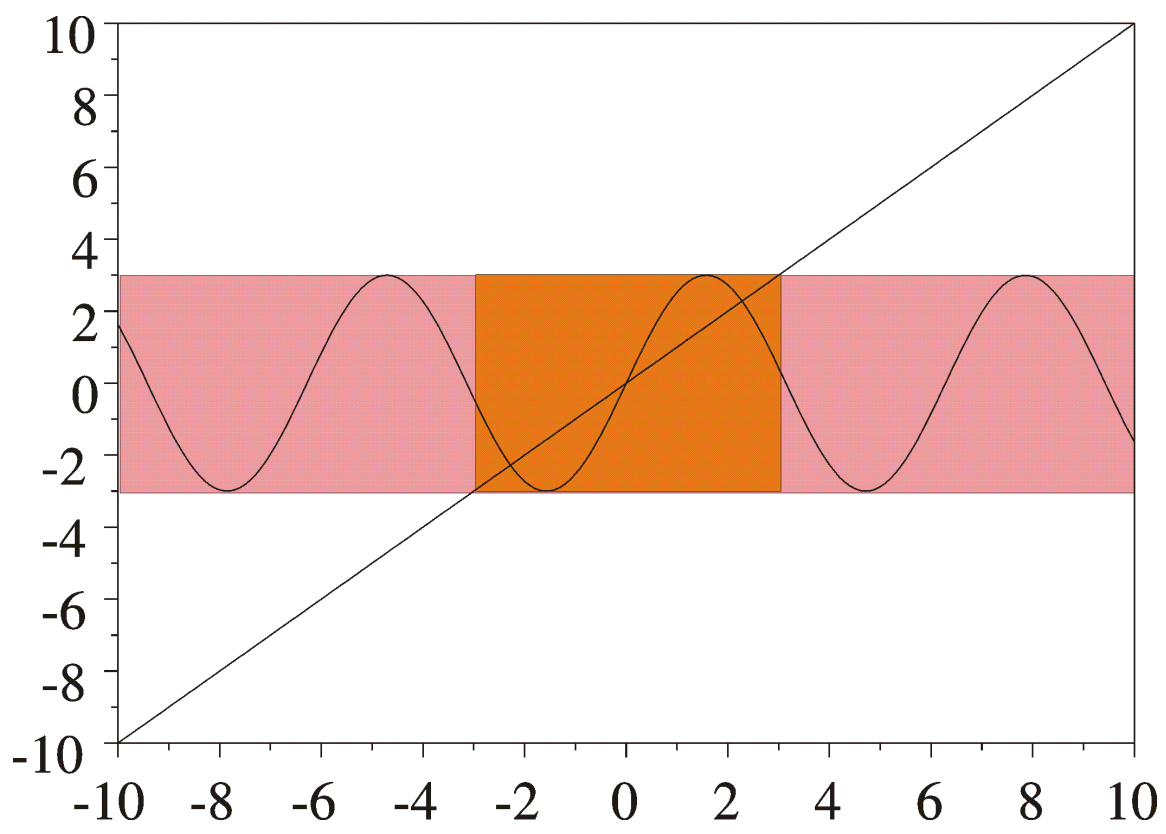
8.1 Principe

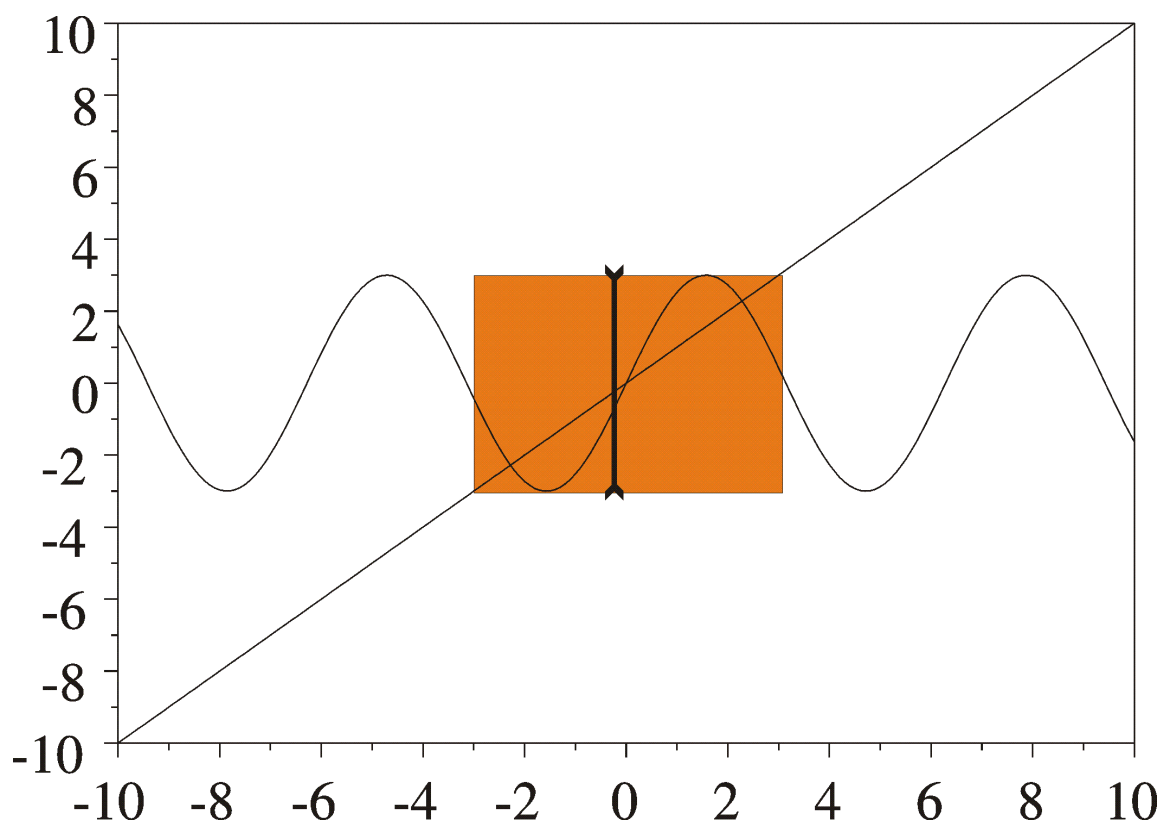
Considérons le système

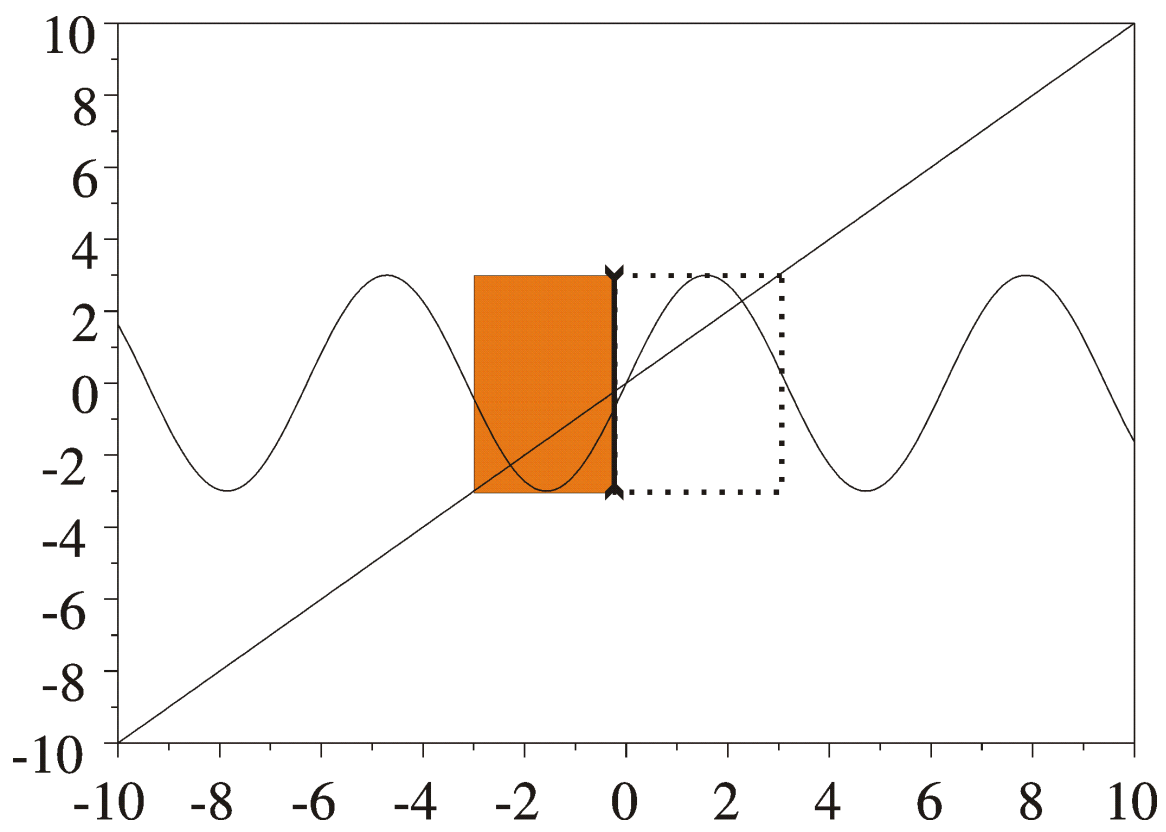
$$\begin{cases} y = 3 \sin(x) \\ y = x \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

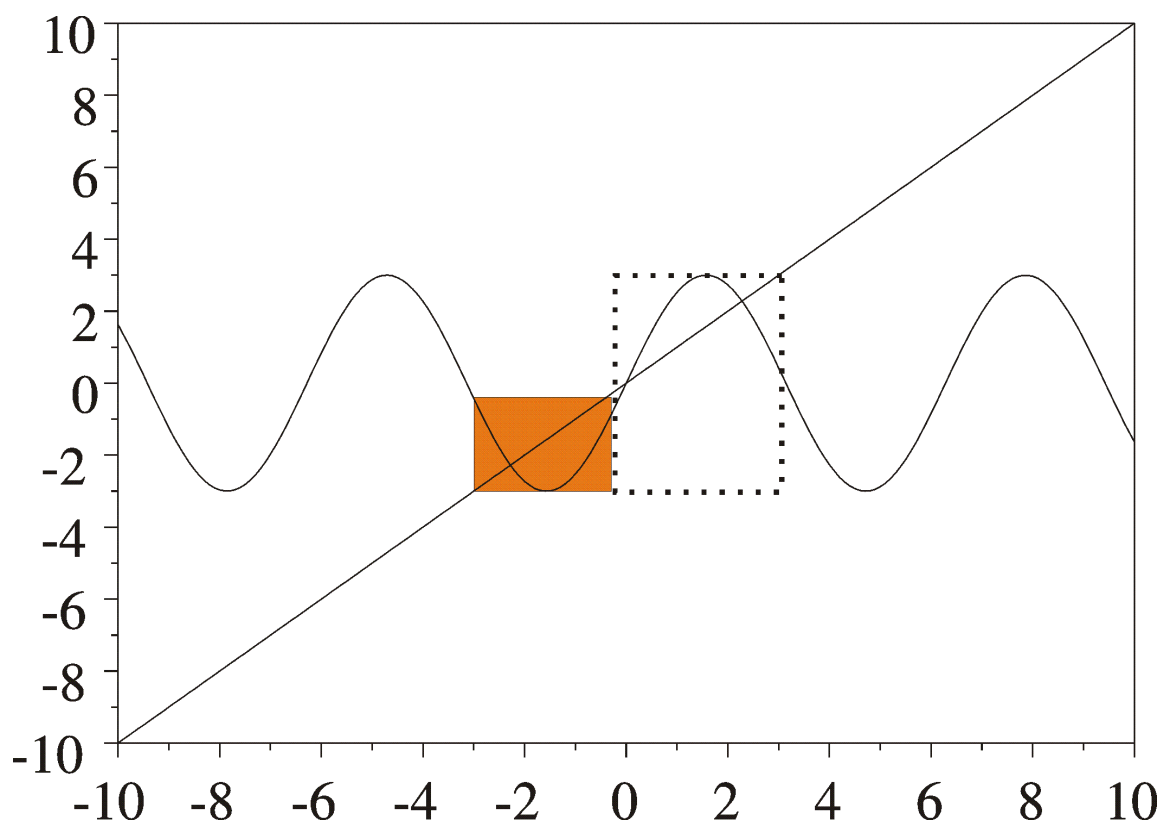


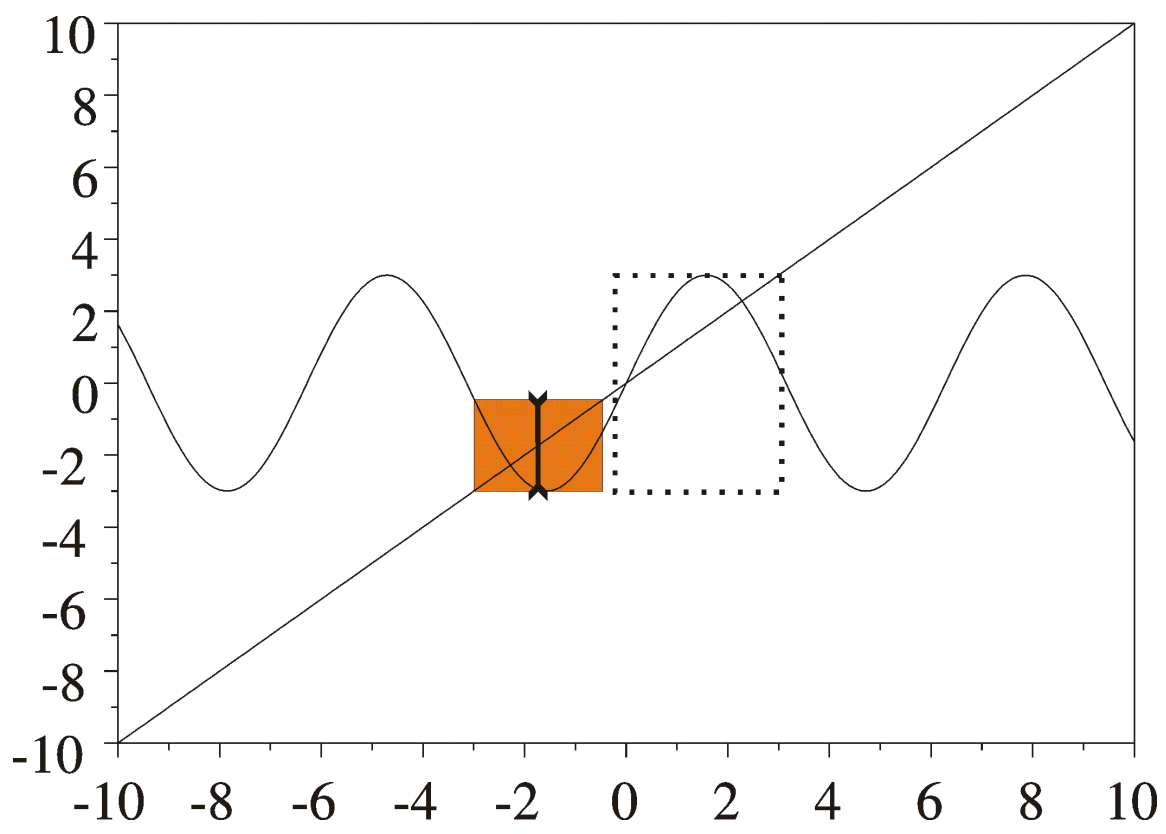


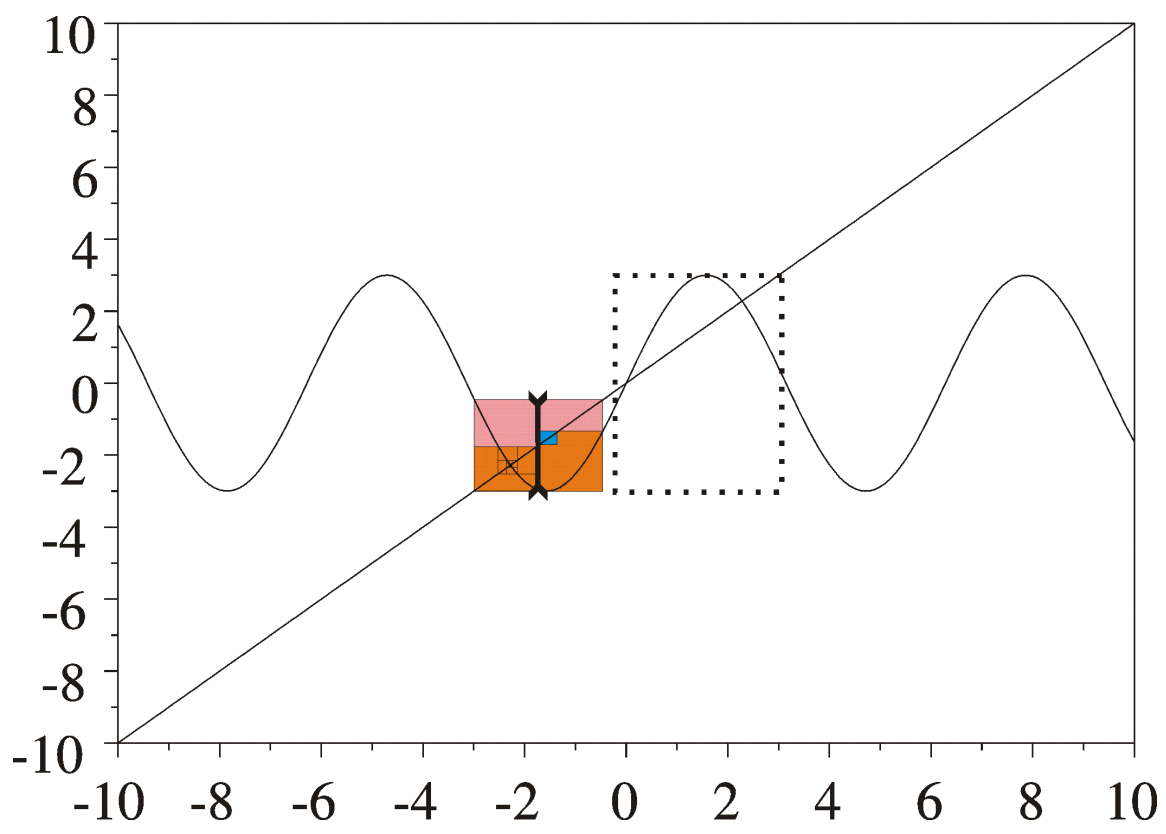


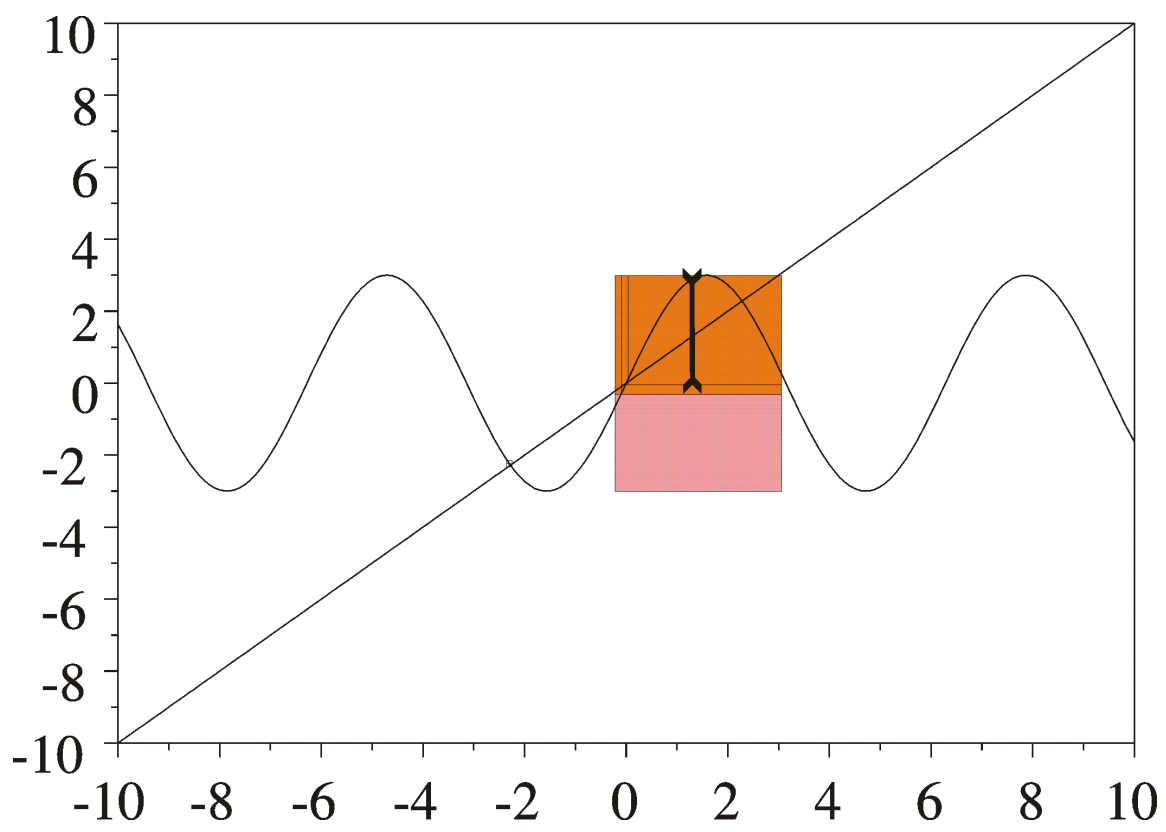


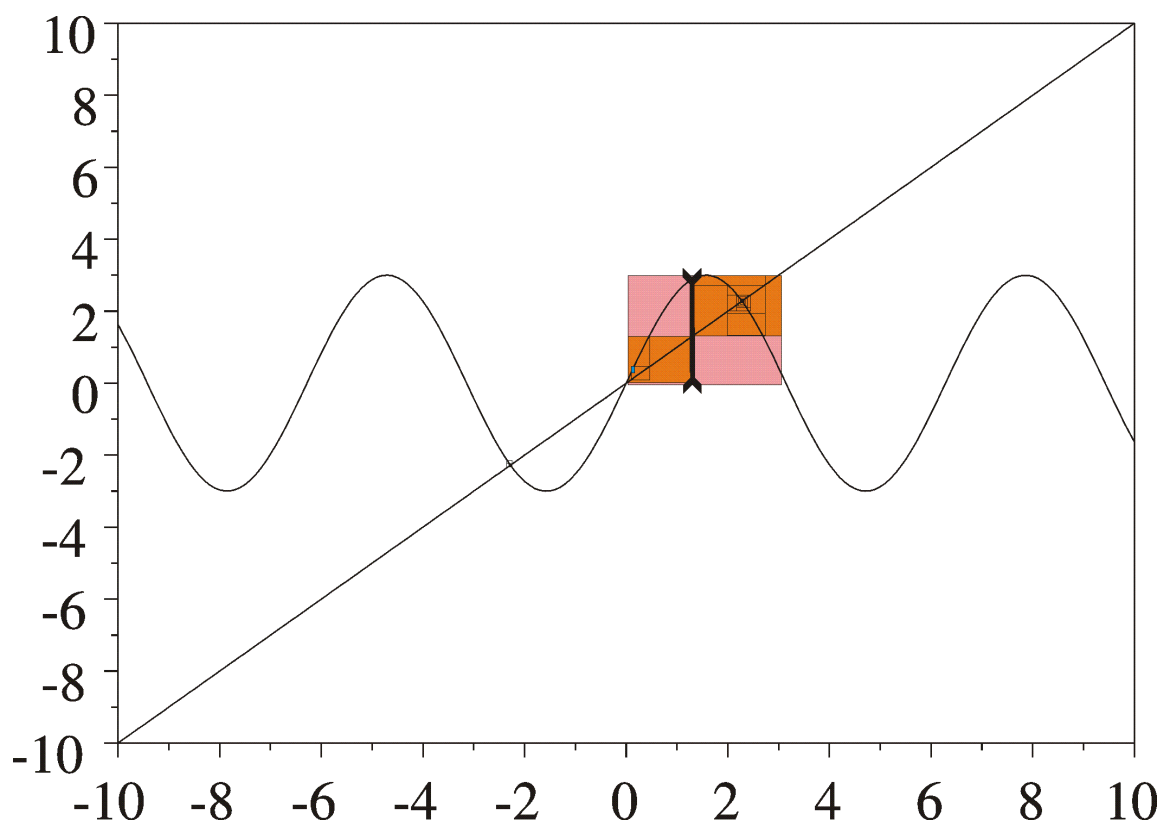




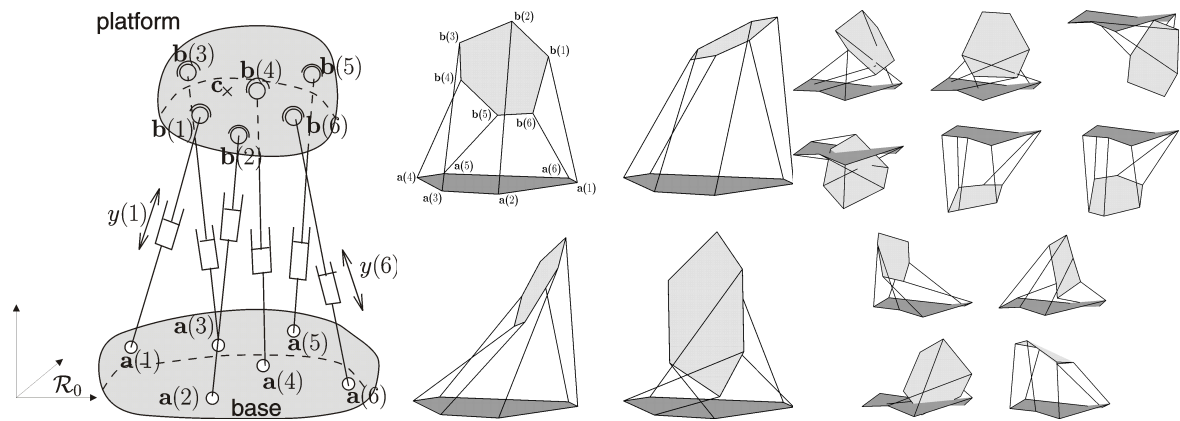








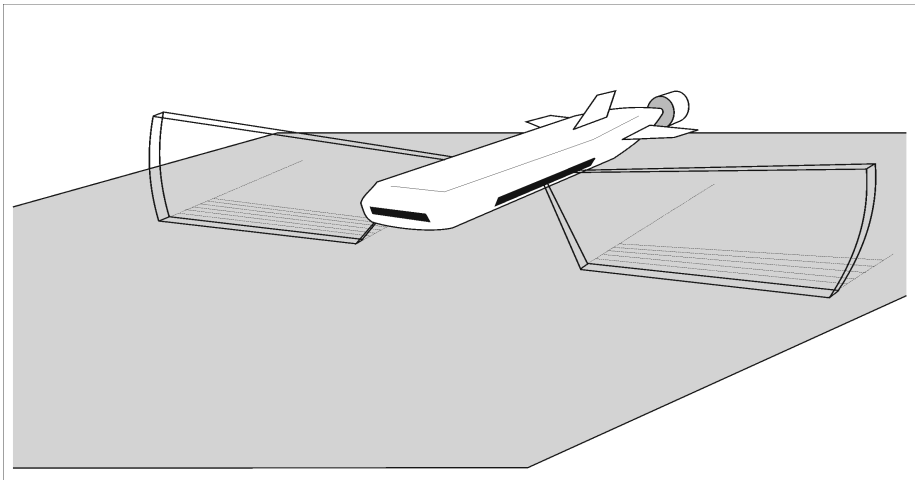
8.2 Plateforme de Stewart

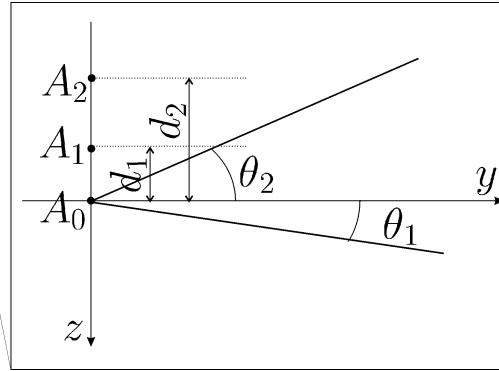
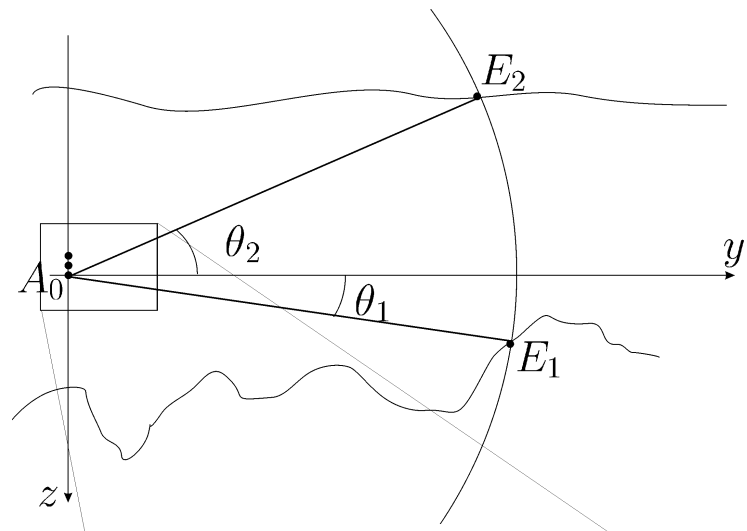


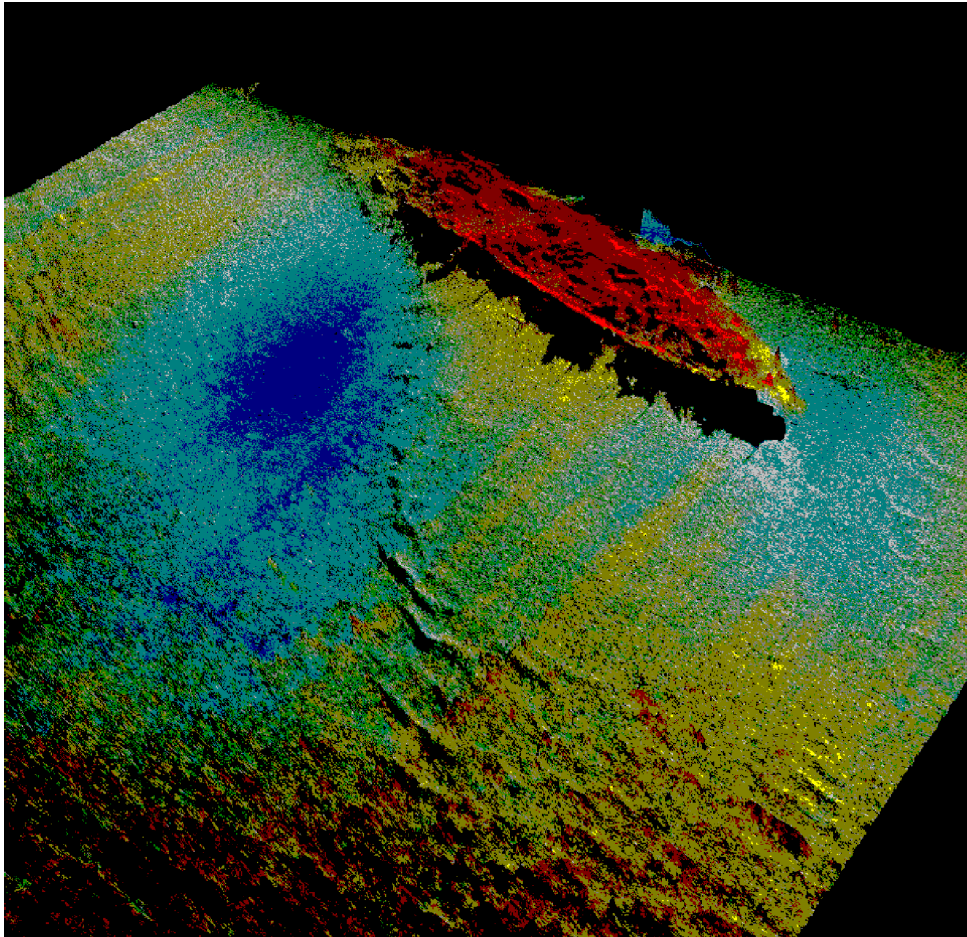
9 Imagerie sonar

Chaque sonar possède trois antennes A_0, A_1, A_2 . L'onde émise par A_0 est $s(t) = e^{2\pi f_0 t}$.

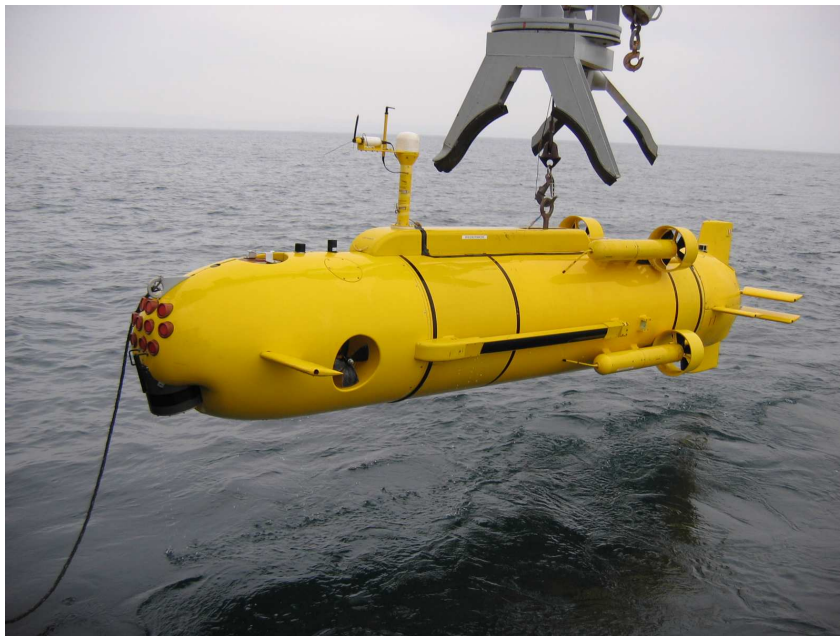
On a $c = 1500 \text{ ms}^{-1}$, $\lambda = 3 \text{ mm}$, $f_0 = 455 \text{ kHz}$.







10 Localisation de mines



Le *Redermor*, fabriqué par le GESMA
(Groupe d'Etude Sous-Marine de l'Atlantique)



Le *Redermor* à la surface

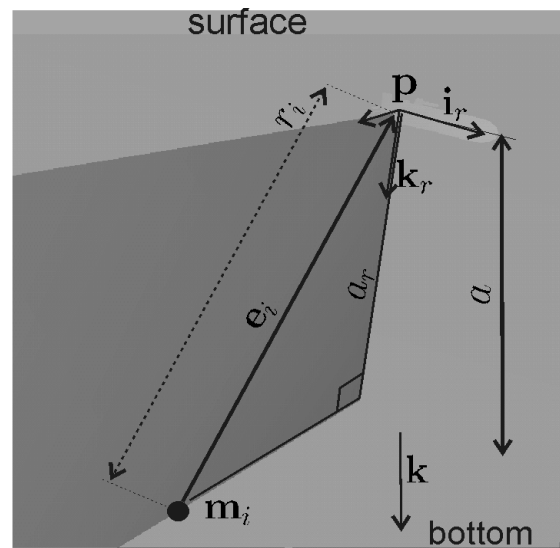
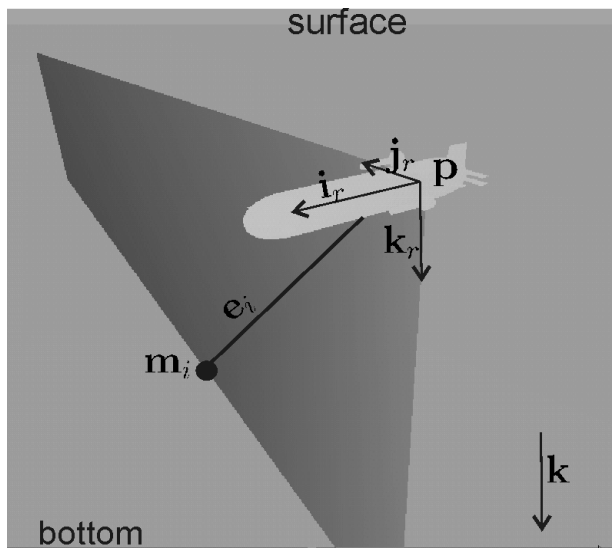
Montrer la simulation

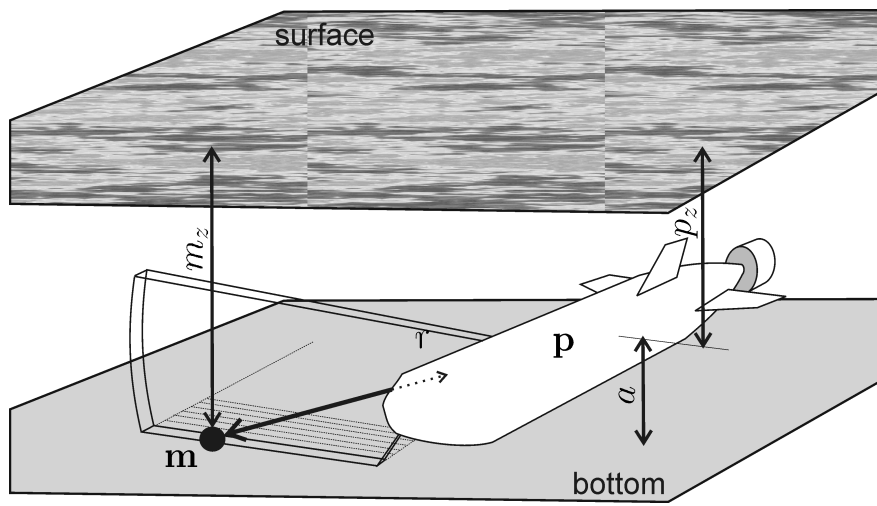
10.1 Capteurs

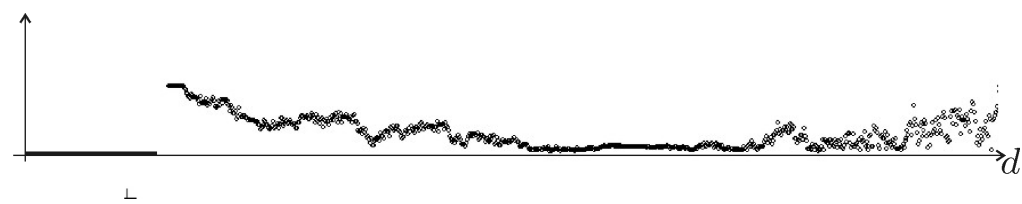
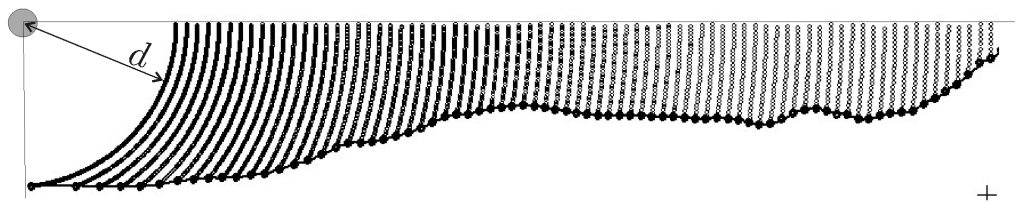
Un GPS (Global positioning system), disponible à la surface.

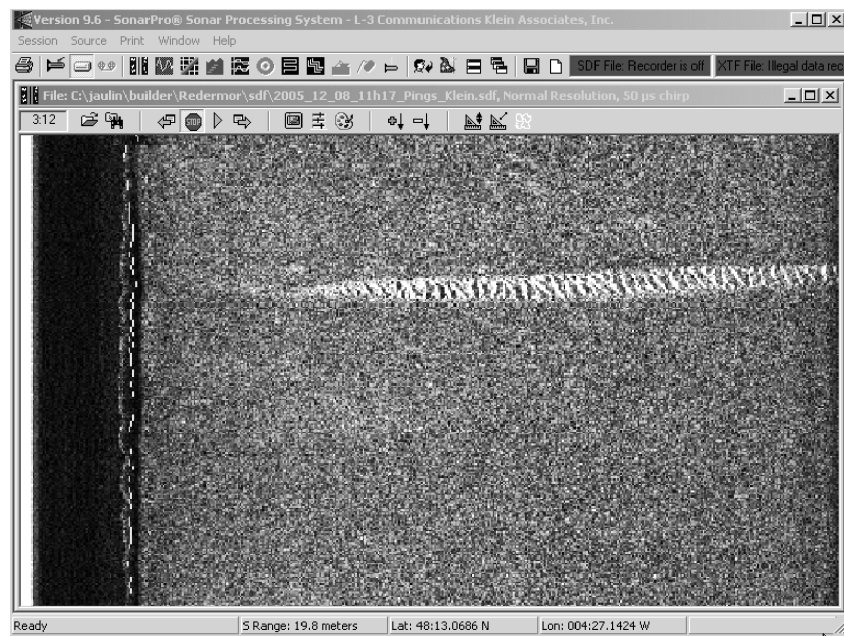
$$\begin{aligned} t_0 &= 6000 \text{ s}, & \ell^0 &= (-4.4582279^\circ, 48.2129206^\circ) \pm 2.5m \\ t_f &= 12000 \text{ s}, & \ell^f &= (-4.4546607^\circ, 48.2191297^\circ) \pm 2.5m \end{aligned}$$

Un sonar (KLEIN 5400 side scan sonar). Donne la distance r entre le robot et la mine

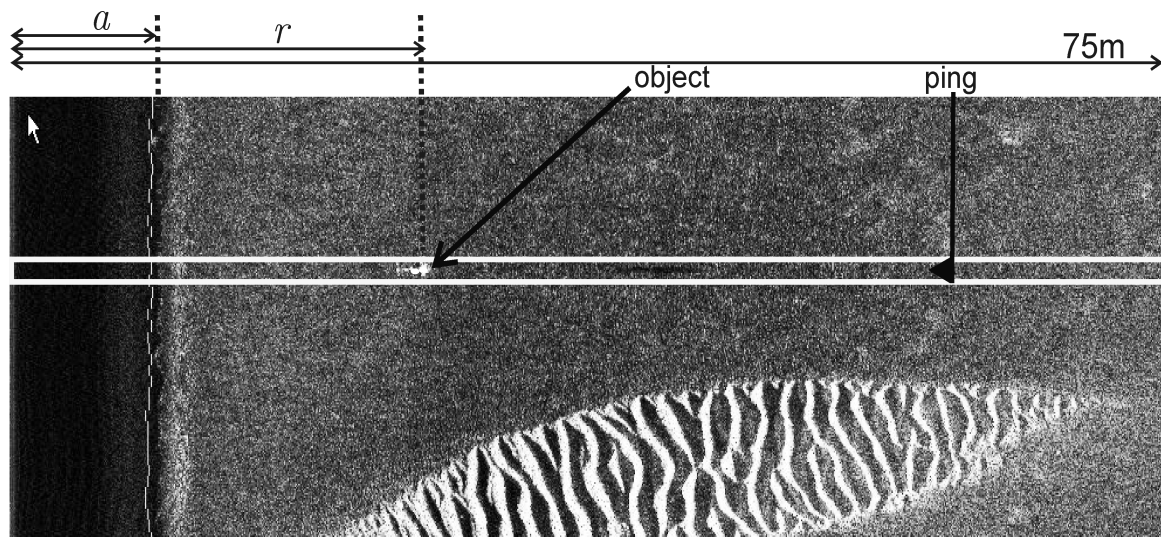








Screenshot du logiciel SonarPro

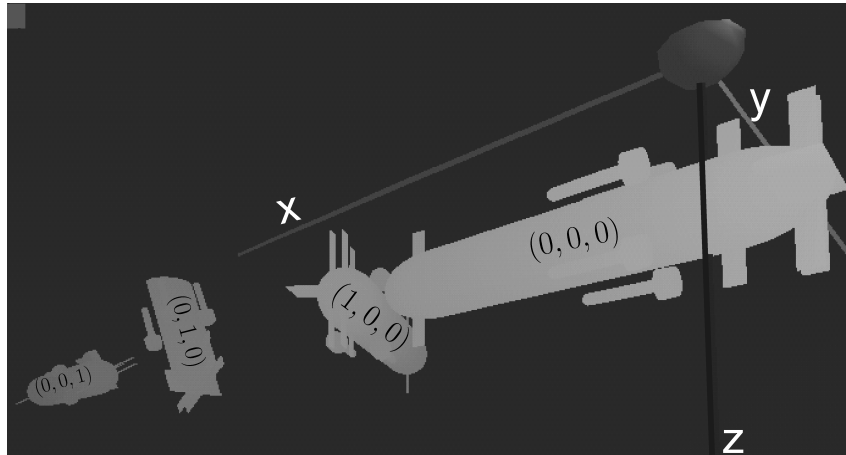


Détection d'une mine à l'aide de SonarPro

Le Loch-Doppler renvoie la vitesse du robot v_r et son altitude a ..

Une centrale inertielle (Octans III from IXSEA) renvoie le roulis ϕ , le tangage θ et le cap ψ du robot.

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.75 \times 10^{-4} \cdot [-1, 1] \\ 1.75 \times 10^{-4} \cdot [-1, 1] \\ 5.27 \times 10^{-3} \cdot [-1, 1] \end{pmatrix}.$$



10.2 Données

Pour chaque $t \in \{6000.0, 6000.1, 6000.2, \dots, 11999.4\}$, nous avons des intervalles pour

$$\phi(t), \theta(t), \psi(t), v_r^x(t), v_r^y(t), v_r^z(t), a(t).$$

Six mines ont été détectées par un opérateur humain, à l'aide de SonarPro.

i	0	1	2	3	4	5
$\tau(i)$	7054	7092	7374	7748	9038	9688
$\sigma(i)$	1	2	1	0	1	5
$\tilde{r}(i)$	52.42	12.47	54.40	52.68	27.73	26.98

6	7	8	9	10	11
10024	10817	11172	11232	11279	11688
4	3	3	4	5	1
37.90	36.71	37.37	31.03	33.51	15.05

10.3 Contraintes

$$t \in \{6000.0, 6000.1, 6000.2, \dots, 11999.4\},$$

$$i \in \{0, 1, \dots, 11\},$$

$$\begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \end{pmatrix} = 111120 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos\left(\ell_y(t) * \frac{\pi}{180}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_x(t) - \ell_x^0 \\ \ell_y(t) - \ell_y^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}(t) = (p_x(t), p_y(t), p_z(t)),$$

$$\mathbf{R}_\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos \psi(t) & -\sin \psi(t) & 0 \\ \sin \psi(t) & \cos \psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\theta(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & 0 & \sin \theta(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta(t) & 0 & \cos \theta(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\varphi(t)=\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&\cos\varphi(t)&-\sin\varphi(t)\\0&\sin\varphi(t)&\cos\varphi(t)\end{array}\right),$$

$$\mathbf{R}(t)=\mathbf{R}_\psi(t)\mathbf{R}_\theta(t)\mathbf{R}_\varphi(t),$$

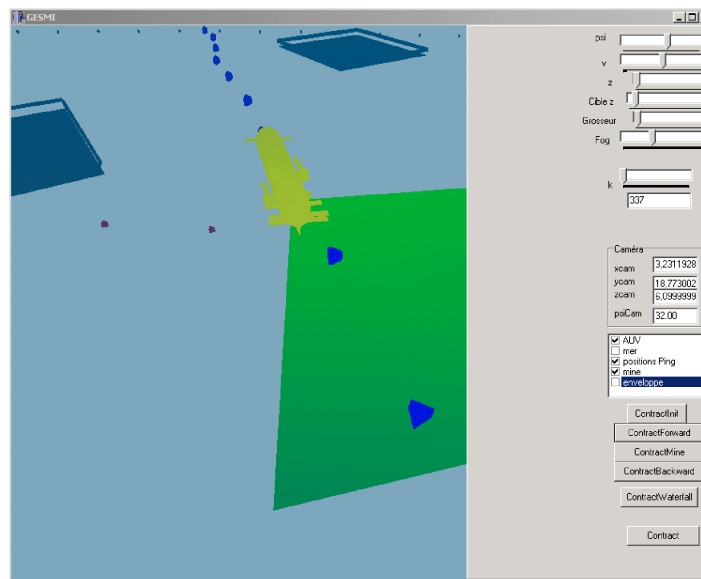
$$\dot{\mathbf{p}}(t)=\mathbf{R}(t).\mathbf{v}_r(t),$$

$$||\mathbf{m}(\sigma(i))-\mathbf{p}(\tau(i))||\;=\;r(i),$$

$$\mathbf{R}^\top(\tau(i))\left(\mathbf{m}(\sigma(i))-\mathbf{p}(\tau(i))\right)\in [0]\times [0,\infty]^{\times 2},$$

$$m_z(\sigma(i))-p_z(\tau(i))-a(\tau(i))\in [-0.5,0.5]$$

10.4 GESMI



GESMI (Guaranteed Estimation of Sea Mines with Intervals)