

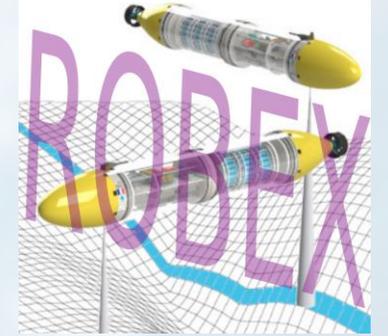
**ENSTA**



IP PARIS



**AGENCE  
INNOVATION  
DÉFENSE**



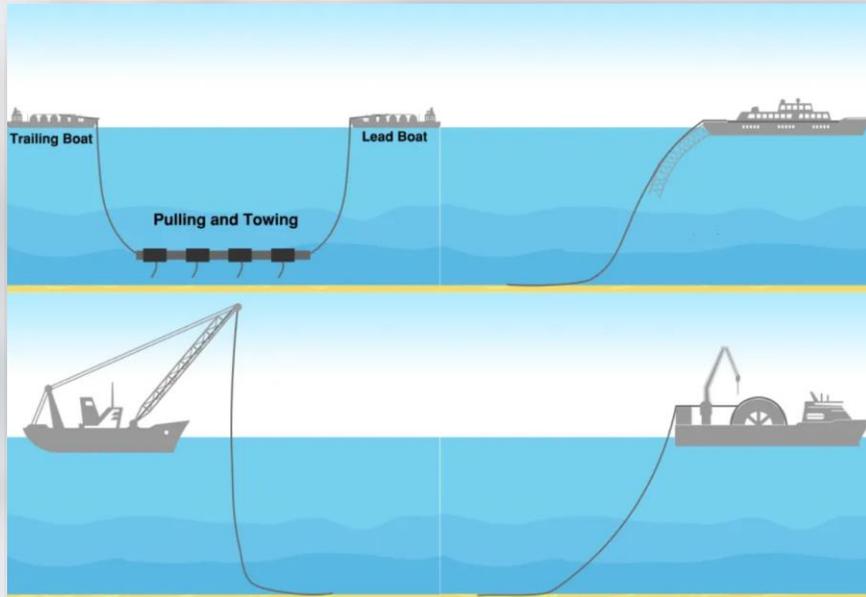
# Tenségrité hybride pour la manipulation coopérative d'objets :

modèle et simulation

# Introduction

## Problématique :

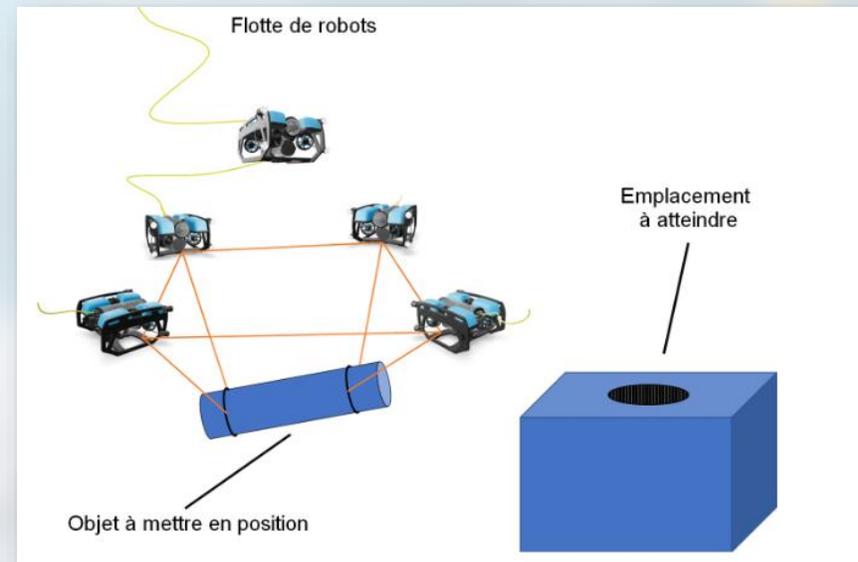
- Utilisation d'énormes bateaux pour déposer en profondeur ( consommation énorme en énergie),
- Impossibilité d'atteindre certains endroits,
- Peu de précision pour déplacer un objet sous l'eau.



# Introduction

**Solution proposée :** Flotte de robots reliés par des câbles inextensibles.

- Considérer cette flotte comme une structure à part entière.
- Utiliser le formalisme de tensegrité.
- Utiliser la redondance des moteurs.



**1<sup>er</sup> Objectif :** Créer la théorie et la simulation du système.

- Formation sans, puis avec un objet attaché.

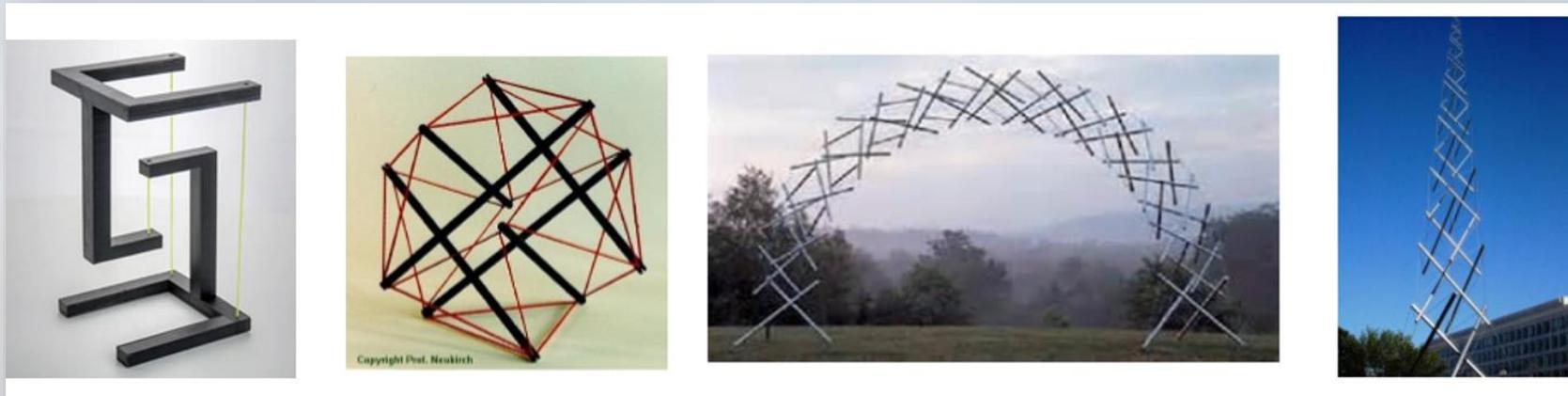
# Plan

- **Qu'est ce que la tenségrité ?**
  - Définition, formalisme et concepts de base
  - Rigidités
- **Modélisation pour flotte de robots câblés**
  - Forces = compression « virtuelle »
  - Modèle des contraintes
  - Système dynamique
  - Intégration dynamique non lisse : schéma implicite
  - Résultats
- **Tenségrité avec corps rigides**
  - TWRB
  - Modification Simulation
  - Etude de la stabilité
- **Conclusion et perspective**

# Qu'est ce que la tenségrité ?

**Tenségrité = Tension + Intégrité.**

Structure stable formée par un équilibre entre les éléments sous tensions (tiré) et sous compression (stable).



**Intégrité** : Etat de quelque chose qui est entier, complet, non altéré et qui préserve ses propriétés fondamentales.

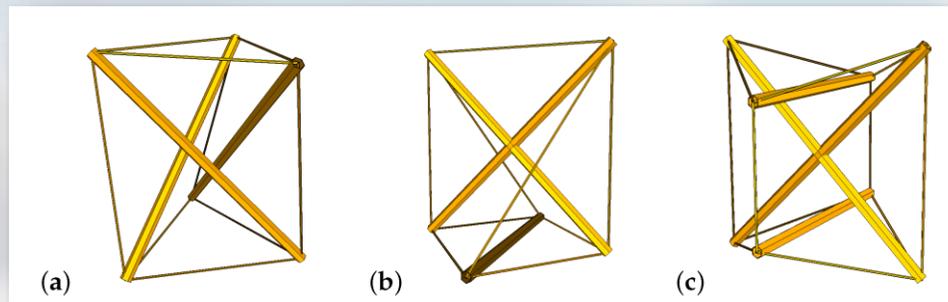
Ici, cela fait référence à la manière dont ces structures maintiennent leur stabilité et leur cohésion grâce à l'interaction entre des forces de tension et de compression.

# Qu'est ce que la tenségrité ?

## Formalisme et concepts de base :

- Framework (cadre bar-joint) : Graphe  $G = (V, E)$  en dimension  $d$  avec des positions  $p = \{p_i \in \mathbb{R}^d : i \in V\}$

- **Arêtes** - Différents types :  $\begin{cases} \text{câble } (i, j) : & \|q_i - q_j\| \leq \|p_i - p_j\| \quad (\text{tension seulement}), \\ \text{strut } (i, j) : & \|q_i - q_j\| \geq \|p_i - p_j\| \quad (\text{compression seulement}), \\ \text{barre } (i, j) : & \|q_i - q_j\| = \|p_i - p_j\| \quad (\text{longueur fixée}). \end{cases}$



## - Nœuds et Stress/Effort :

- Auto-stress (équilibre nodal). Un stress est une famille scalaire  $\{\omega_{ij}\}_{(ij) \in E}$  telle que, au repos, chaque nœud est équilibré :

$$\forall i \in V : \sum_{j: (i,j) \in E} \omega_{ij} (p_j - p_i) = 0.$$

# Qu'est ce que la tenségrité ?

**Rigidités** : propriété **géométrique** d'un framework  $G(p)$  qui ne dépend que des contraintes de distance.

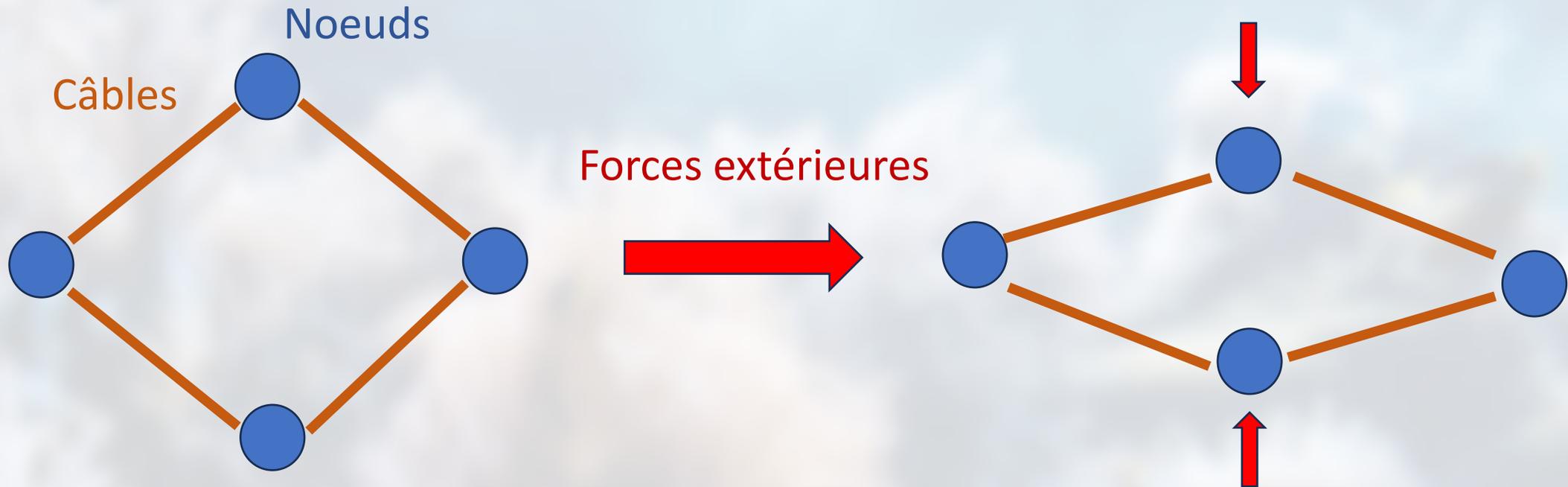
Rigidités	Caractéristiques
Rigidité locale	Il n'existe, au voisinage de $p$ , aucun déplacement continu non trivial préservant les longueurs des arêtes
Rigidité du 2 <sup>ème</sup> ordre	Aucun flex du 1 <sup>er</sup> ordre prolongeable sans briser les longueurs au 2 <sup>ème</sup> ordre.
Rigidité globale	Toute autre réalisation de $G$ ayant les mêmes longueurs d'arêtes est congruente à $p$ .
Rigidité générique	Presque tout placement $p$ rend $(G,p)$ localement rigide
Prestress stabilité	Existence d'un auto-stress d'équilibre rendant l'énergie strictement minimale (déf. positive sur l'espace des flexions).

**-Rigidité universelle** :  $G(p)$  est *universellement rigide (UR)* si  $p$  est unique à congruence près dans toutes les dimensions  $E^k$ ,  $k \geq d$ , dès lors que les contraintes de longueur/signe sont satisfaites.

# Modélisation pour robots câblés

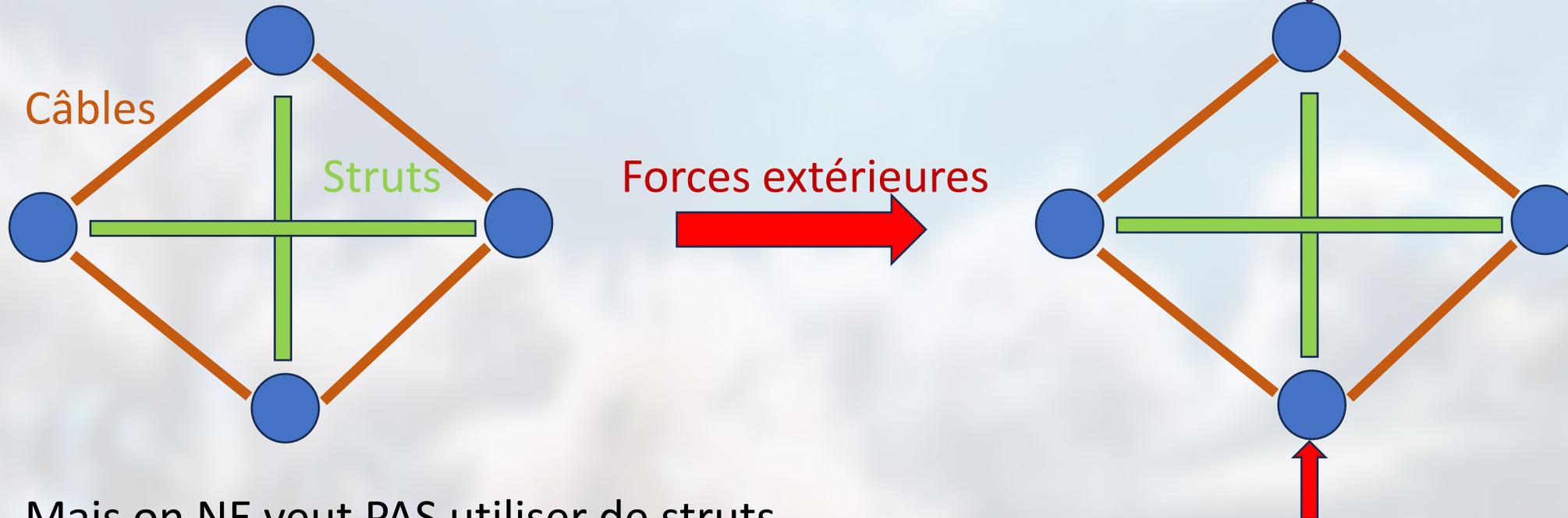
Mon modèle : 4 robots liés par 4 câbles

Problème : Naturellement pas *Universellement Rigide*.



# Modélisation pour robots câblés

Or... Il existe une configuration universellement rigide à partir de 4 nœuds :



Mais on NE veut PAS utiliser de struts.

# Modélisation pour robots câblés

## Forces = compression « virtuelle »

Donc on peut utiliser les propulseurs pour créer « virtuellement » ces struts.

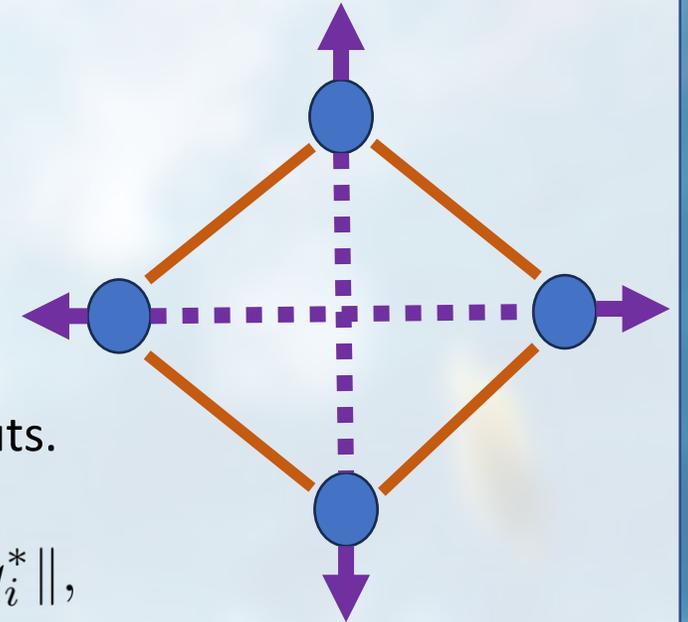
En notant  $r_{ij} = \|q_j - q_i\|$ ,  $e_{ij} = \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|}$ ,  $r_{ij}^* = \|q_j^* - q_i^*\|$ ,

On peut poser :

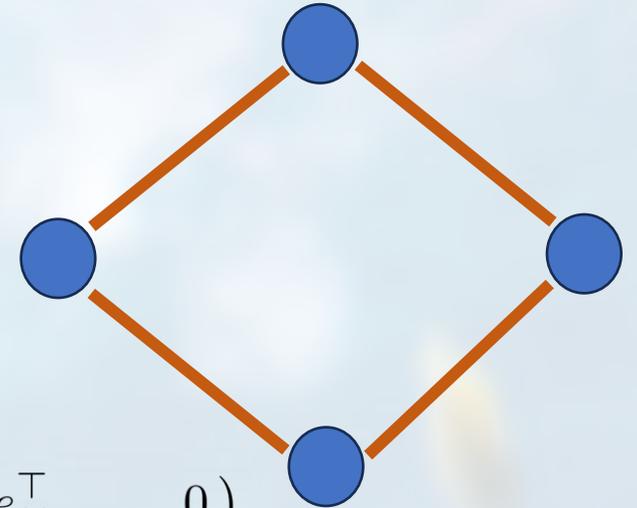
$$V_{ij}(r_{ij}) = \frac{1}{2} k_{ij} (r_{ij} - \ell_{ij})^2, \quad \ell_{ij} = \gamma_{ij} r_{ij}^* \quad (\gamma_{ij} > 1), \quad k_{ij} = \frac{|\omega_{ij}|}{\gamma_{ij} - 1},$$

Une force virtuelle (action moteur « répartie » sur les deux robots comme un ressort) est :

$$F_{i \leftarrow j}^{\text{strut}}(q, \dot{q}) = - \frac{\partial V_{ij}}{\partial q_i} = - k_{ij} (r_{ij} - \ell_{ij}) e_{ij}$$



# Modélisation pour robots câblés



## Modèle des contraintes :

Pour chaque câble  $(i,j) \in C$ :

$$g_{ij}(q) = L_{ij} - \|q_j - q_i\| \geq 0, \quad J_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q} = (0, \dots, +e_{ij}^\top, \dots, -e_{ij}^\top, \dots, 0),$$

En regroupant ces gradients (câbles et collisions), on construit la **matrice Jacobienne**  $J(q)$ .

Pour la dynamique, on utilise le **formalisme Lagrangien** en associant à chaque contrainte un *multiplicateur de Lagrange*  $\lambda_i \geq 0$  qui représente la force de tension exercée par le câble  $i$  lorsque celui-ci est tendu.

La force de réaction exercée par le câble sur les masses se fait dans la direction du vecteur unitaire reliant les deux masses d'où le vecteur des forces internes définit ci-dessous :

$$F_{\text{contrainte}} = J(q)^T \lambda, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{\text{cables}} \\ \lambda_{\text{collisions}} \end{bmatrix} \geq 0$$

# Modélisation pour robots câblés

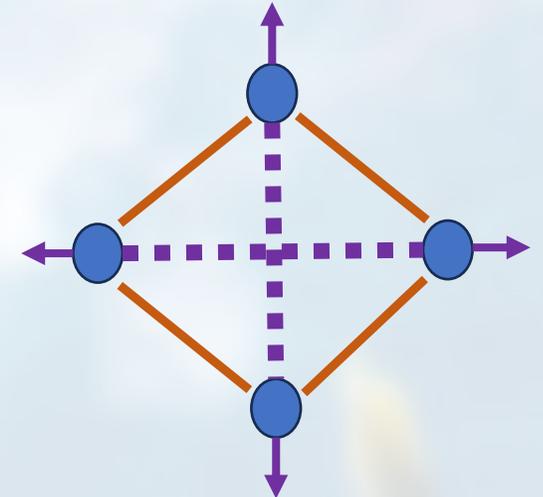
## Système dynamique (DVI):

Soient les masses  $M = \text{diag}(m_1 I_d, \dots, m_n I_d)$ , les traînée linéaire appliqué à chaque robot  $F_D = -Dv$ .

Le triplet  $(q, v, \lambda)$  vérifie un système DVI (une ODE mécanique couplée à une inégalité variationnelle sur  $(g, \lambda)$ ).

D'où le système :

$$\begin{cases} \dot{q} = v, \\ M \dot{v} = F_{\text{strut}}(q, v) - Dv + F_{\text{ext}}(t) + J(q)^T \lambda, \\ g(q) \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad g(q)^T \lambda = 0. \end{cases}$$



# Modélisation pour robots câblés

$$\begin{cases} \dot{q} = v, \\ M \dot{v} = F_{\text{strut}}(q, v) - D v + F_{\text{ext}}(t) + J(q)^\top \lambda, \\ g(q) \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad g(q)^\top \lambda = 0. \end{cases}$$

## Intégration dynamique non lisse/régulière : Schéma implicite

**Problème** : Les contacts/câbles créent discontinuités (chocs) et raideur numérique.

**Solution** : *Méthode de Stewart-Trinkle* : intégration sans détection d'événement, en traitant tous les contacts/impacts dans un intervalle de temps  $[t; t + h]$ .

**Mise à jour implicite (Backward-Euler)** :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k + h M^{-1} \left( F_{\text{modèle}}(q_k, v_k, t_k) + J(q_k)^\top \lambda_{k+1} \right), \\ q_{k+1} &= q_k + h v_{k+1}. \end{aligned}$$

**Vitesse libre (sans câbles/contacts) et correction.**

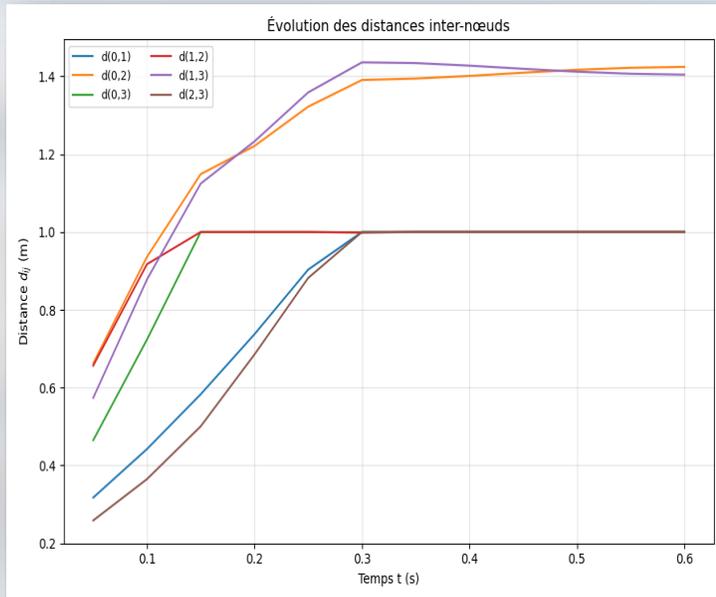
$$\begin{aligned} v_{\text{free}} &= v_k + h M^{-1} F_{\text{modèle}}(q_k, v_k, t_k), \\ v_{k+1} &= v_{\text{free}} + h M^{-1} J^\top \lambda_{k+1}. \end{aligned}$$

**LCP unilatéral (câble / contact).**

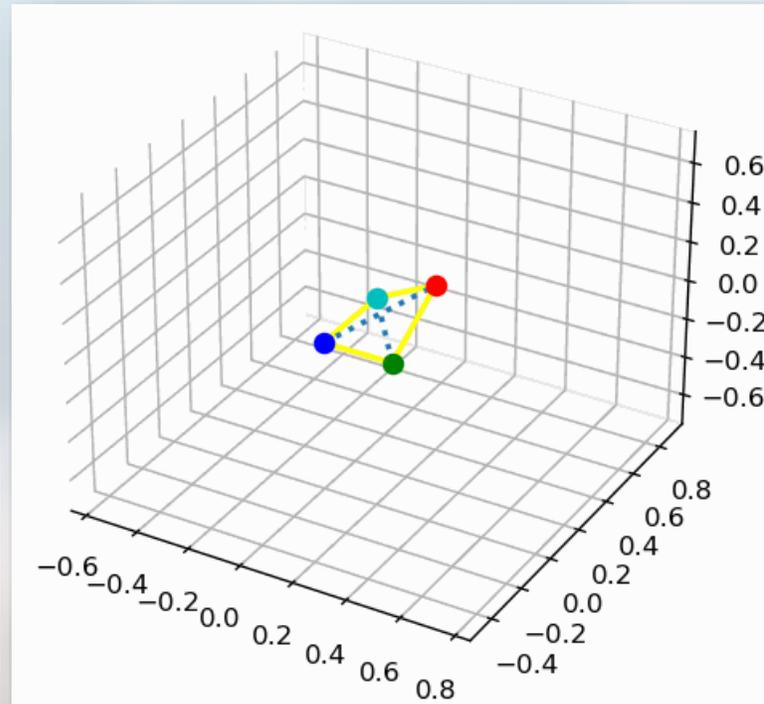
$$0 \leq w = A \lambda + b \perp \lambda \geq 0, \quad A = h^2 J M^{-1} J^\top \succeq 0, \quad b = g_k + h J v_{\text{free}}.$$

# Modélisation pour robots câblés

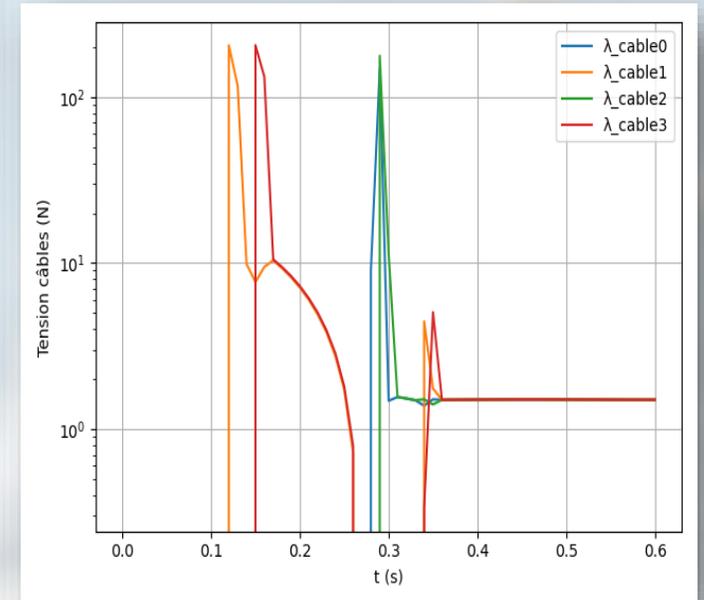
## Résultats



Distance Inter-nœuds

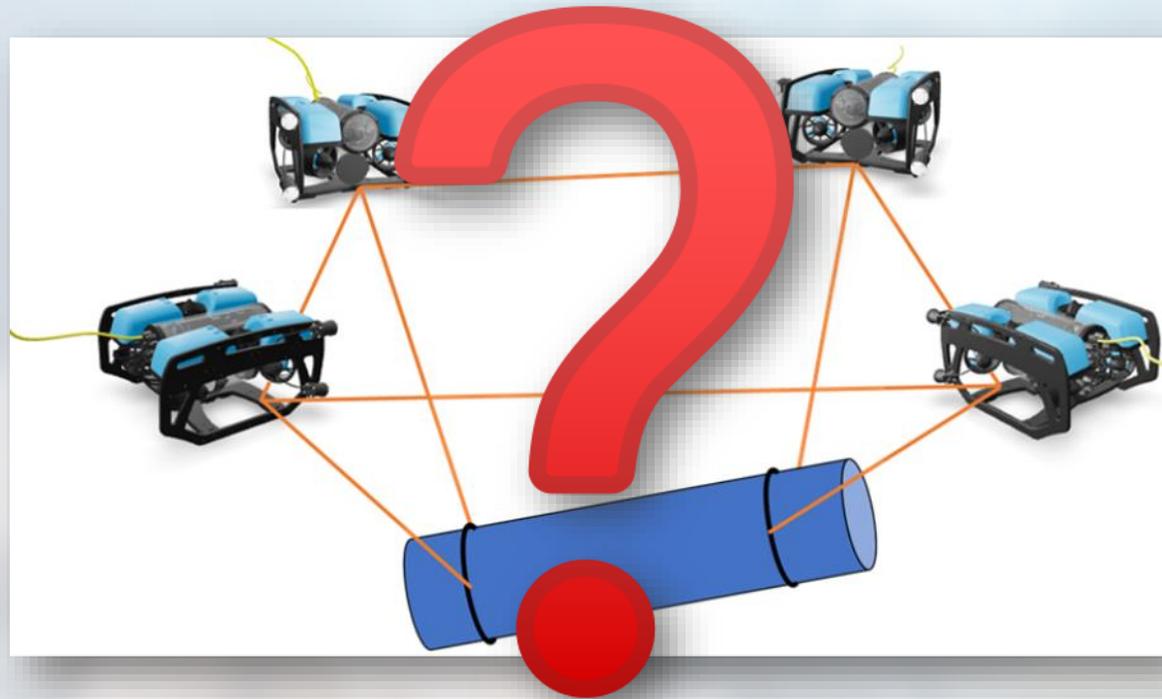


Simulation des robots câblés



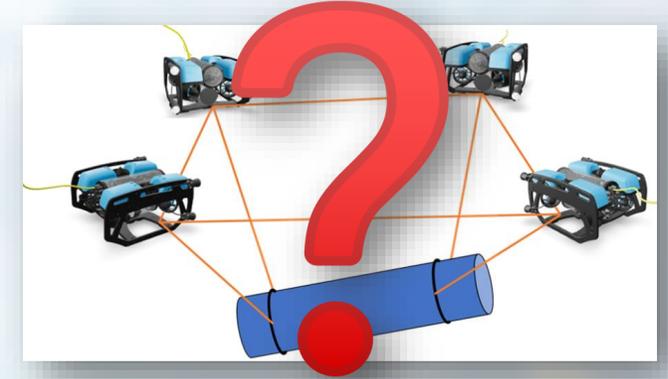
Tension dans les câbles

# Modélisation pour robots câblés avec corps rigides



Et avec un corps rigide attaché ?

# Tenségrité avec corps rigides



## Nouveau formalisme « Tensegrity With Rigid Bodies »

Tenségrité classique avec ajout de corps rigide dans la structure.

2 types de nœuds : nœuds libres (sans corps rigide), nœuds sur corps rigide → orientation

Equilibre sur les corps rigide (moment et résultantes des forces)

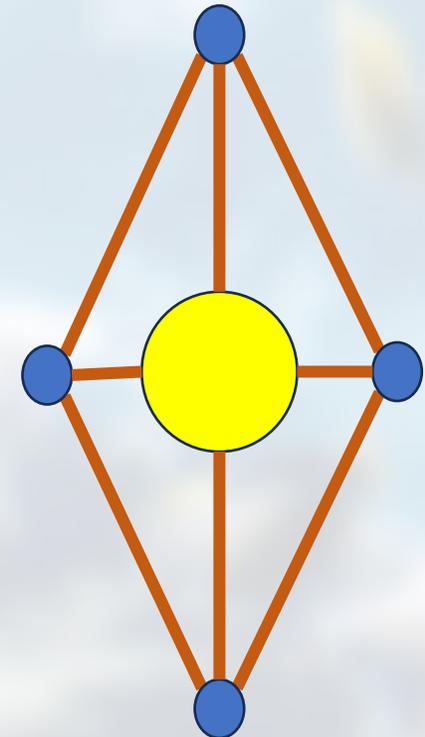
Exemples de différence avec la tenségrité classique :

Axe de comparaison	Tenségrité classique	TWRB
Type d'éléments	Réseau de nœud + arêtes (câbles, struts, barres)	Corps rigides (plaques, poutres, modules...) connectés aux nœuds + arêtes.
Variables d'équilibre	Position des nœuds	Position des nœuds + orientation des corps
DOF	DOF nodaux indépendants	DOF contraints par la non-déformabilité des corps

# Tenségrité avec corps rigides

## Modification apportée à la simulation

- **Robots:** 3 DDL par robot (position  $p \in R^3$ )
- **Sphère rigide :** 6 DDL (translation  $x \in R^3$ , rotation  $R \in SO(3)$  ; représentation possible par quaternion  $q$ ).
- **Attaches fixes (sur le corps) :** On note  $a_k \in R^3$  les positions d'attaches en repère corps, avec  $|a_k| = r$ . En repère monde :  $y_k = x + Ra_k$ .
- **Câble nœud-corps (nœud  $i$ ) :**  $r_{ik} = \|p_i - y_k\|$ ,  $e_{ik} = \frac{p_i - y_k}{r_{ik}}$ , gap LCP :  $g_{ik} = L_{ik} - r_{ik} \geq 0$ .
- **Jacobienne d'un câble nœud-corps :**  $\frac{\partial g}{\partial p_i} = +e_{ik}^\top$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x} = -e_{ik}^\top$ ,  $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -(Ra_k)^\top [e_{ik}]$
- **Effort (wrench) du câble sur le corps (tension  $\lambda \geq 0$ ) :**  $F_c = -\lambda e_{ik}$ ,  $\tau_c = (Ra_k) \times F_c$ .



# Tenségrité avec corps rigides

## Etude de la stabilité : Outils

**Equilibre statique :**  $f_{\text{ext}}(q^*) + f_{\text{struts}}(q^*) + J(q^*)^\top \lambda^* = 0$ ,  $g(q^*) \geq 0$ ,  $\lambda^* \geq 0$ ,  $\lambda^{*\top} g(q^*) = 0$ .

**Raideur tangente :**  $K_T = K_E + K_G = K_E + K_G^s + K_G^f$

Où :

- $K_E$ : raideur matérielle (élasticité des membres/liaisons). Contribution strictement dissipative au sens statique.
- $K_G^s$  raideur géométrique stabilisante due à la réorientation des câbles en traction
- $K_G^f$  raideur géométrique purement rotationnelle.

Soit  $U$  une base de la nullité des contraintes actives ( $J_A U = 0$ ) (mouvements admissibles ( $\Omega_c$ )).

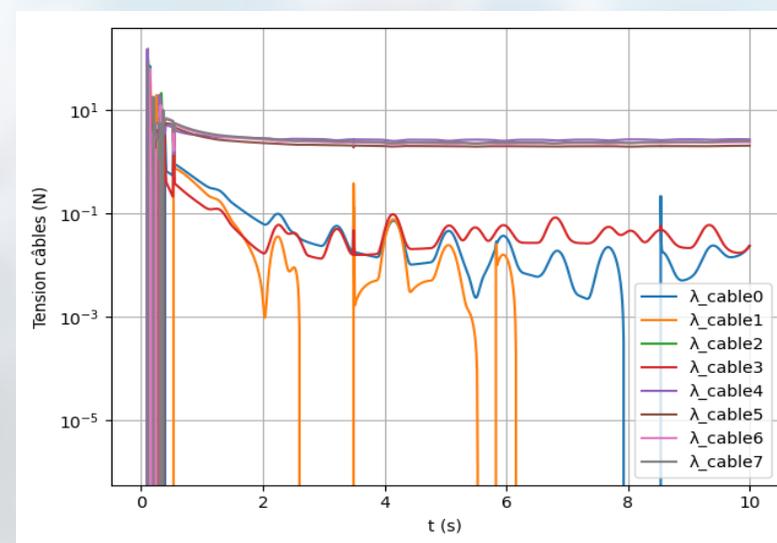
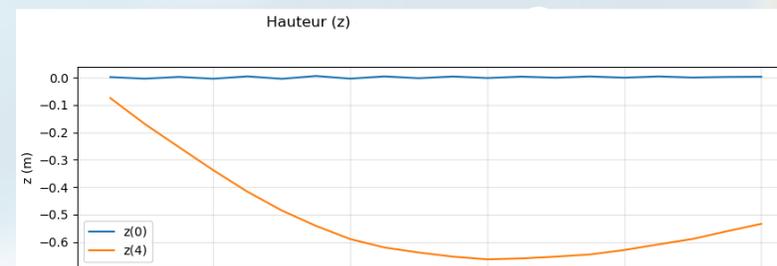
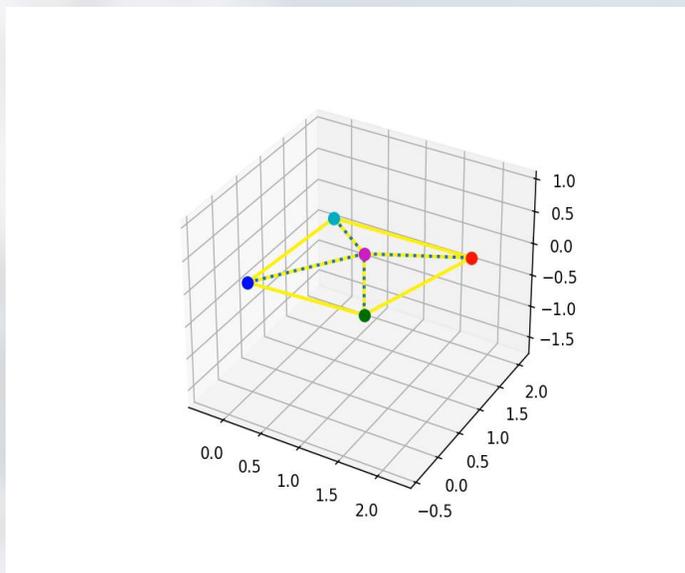
Les tests se font sur la forme réduite  $K_{RED} = U^\top K_T U$

**Stabilité générale :**  $K_{RED} \succ 0$  (défini positif).

# Tenségrité avec corps rigides

## Etude de la stabilité : Application à notre simulation

1. Appliquer les forces aux robots jusqu'à ce que la structure soit à l'état d'équilibre ( $q_E, \lambda_E$ )
2. Construire  $J_A$  et la base  $U$  de  $\Omega_C$
3. Approcher  $K_T$  au voisinage de  $q_E$



# Conclusion/Perspective

- **Etude de la stabilité dynamique** (A unified approach to dynamic analysis of tensegrity structures with arbitrary rigid bodies and rigid bars, *Jiahui Luo*, 2024)
- **Algorithme pour trouver les forces à appliquer à chaque robot pour finir en équilibre.** (Constructing Universally Rigid Tensegrity Frameworks With Application in Multiagent Formation Control, *Qingkai Yang*, 2018)
- **Application sur de vrais robots** (Quand on aura le bassin...)



Question ?

