

Cours d'automatique, Approche fréquentielle  
Licence de Physique et Applications

Luc Jaulin

29 janvier 2010



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Quelques définitions abstraites . . . . .	7
1.2	Systèmes entrée-sortie . . . . .	8
1.3	Automatique . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Fonction de transfert</b>	<b>11</b>
2.1	Systèmes décrits par une équation différentielle linéaire . . . . .	11
2.2	Convolution . . . . .	12
2.2.1	Décomposition de Dirac . . . . .	12
2.2.2	Opération de convolution . . . . .	13
2.3	Transformée de Laplace . . . . .	14
2.3.1	Définition . . . . .	14
2.3.2	Application à la résolution des équations différentielles . . . . .	14
2.4	Fonction de transfert . . . . .	16
2.4.1	Systèmes en série . . . . .	17
2.4.2	Systèmes en parallèle . . . . .	17
2.4.3	Système bouclé . . . . .	17
2.4.4	Exemple de calcul d'une fonction de transfert . . . . .	18
2.4.5	Autre exemple . . . . .	19
2.5	Pôles d'un système, modes d'un signal . . . . .	20

2.5.1	Définition . . . . .	20
2.5.2	Propagation des modes à travers un système . . . . .	22
2.6	Réponse fréquentielle . . . . .	23
2.6.1	Principe . . . . .	23
2.6.2	Gain statique . . . . .	24
2.6.3	Diagrammes pour la réponse fréquentielle . . . . .	24
2.6.4	Exemple . . . . .	27
2.7	Les modèles de base . . . . .	28
2.7.1	Intégrateur . . . . .	28
2.7.2	Dérivateur . . . . .	29
2.7.3	Système du premier ordre . . . . .	29
2.7.4	Système du second ordre . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Stabilité</b>	<b>35</b>
3.1	Critère des pôles . . . . .	35
3.2	Critère de Routh . . . . .	36
3.3	Critère de Nyquist . . . . .	39
3.3.1	Fonction analytique . . . . .	39
3.3.2	Théorème de Cauchy . . . . .	40
3.3.3	Contour de Bromwich . . . . .	42
3.3.4	Théorème de Nyquist . . . . .	42
3.3.5	Critère de Nyquist . . . . .	43
3.3.6	<b>Exemple</b> . . . . .	44
3.4	Critère du revers . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Synthèse des régulateurs</b>	<b>47</b>
4.1	Régulateur PID . . . . .	47

4.1.1	Commande proportionnelle . . . . .	47
4.1.2	Commande proportionnelle et dérivée . . . . .	48
4.1.3	Commande proportionnelle, intégrale et dérivée . . . . .	48
4.1.4	Conclusion . . . . .	49
4.2	Régulateur RST . . . . .	49
4.2.1	Formulation du problème . . . . .	49
4.2.2	Résolution . . . . .	51
4.2.3	Exemple . . . . .	52



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Quelques définitions abstraites

Un *système*  $\mathcal{S}$  est une partie de notre univers. On peut agir sur ce système par l'intermédiaire des *entrées* de  $\mathcal{S}$ . On peut obtenir des informations sur  $\mathcal{S}$  par l'intermédiaire de ses *sorties*. Ces sorties sont des grandeurs de notre système que l'on peut mesurer à l'aide de *capteurs*. Les entrées et les sorties seront respectivement rangées dans le vecteur des entrées  $\mathbf{u}$  et le vecteur des sorties  $\mathbf{y}$ . Dans ce manuscrit, les caractères gras seront réservés pour les grandeurs vectorielles.

Le système  $\mathcal{S}$  est dit *déterministe* si son comportement futur peut être déterminé de façon unique à partir d'une complète connaissance du passé de  $\mathcal{S}$  et de ses entrées futures. Nous n'allons ici considérer que des systèmes déterministes, où les entrées et les sorties sont des grandeurs réelles (c'est-à-dire à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) dépendant du temps.

Le temps  $t$  de notre univers physique est continu, c'est-à-dire que  $t$  est un élément de  $\mathbb{R}$ . Il nous sera utile de considérer aussi des temps discrets, où  $t$  sera un élément de  $\mathbb{Z}$ , l'ensemble des entiers relatifs. En effet, si l'univers que nous considérons est un ordinateur, il est concevable de considérer que le temps qui le régit est discret, synchronisé sur l'horloge du microprocesseur.

Un système est dit *causal*, si le comportement présent du système est indépendant des entrées futures.

L'*état* d'un système  $\mathcal{S}$  causal est un ensemble d'informations qui détermine de façon unique son comportement futur à partir de la seule connaissance des entrées futures. L'*état initial* (appelé aussi *conditions initiales*) est l'état de  $\mathcal{S}$  à l'instant  $t = t_0$  où  $t_0$  est l'instant initial.

Un système est *invariant* si les lois qui le régissent ne dépendent pas du temps.

## 1.2 Systèmes entrée-sortie

Pour beaucoup de systèmes déterministes, que nous appellerons systèmes *entrée-sortie*, on peut interpréter le système comme une fonctionnelle qui associe au signal d'entrée  $\mathbf{u}(t)$  un signal de sortie  $\mathbf{y}(t) = \mathcal{S}(\mathbf{u}(t))$ . Ici, un *signal* est défini comme un fonction de  $\mathbb{T}$  vers  $\mathbb{R}^n$ , où  $\mathbb{T}$  est l'espace des temps (c'est-à-dire  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ ). Mais ceci n'est pas toujours le cas. En effet, on peut imaginer des systèmes sans sortie qui évoluent dans le temps. Dans le cas des systèmes entrée-sortie, on peut redéfinir de façon un peu plus rigoureuse certaines des notions définies précédemment.

Soient  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  deux signaux d'entrée du système  $\mathcal{S}$  et soient  $\mathbf{y}_1 = \mathcal{S}(\mathbf{u}_1)$  et  $\mathbf{y}_2 = \mathcal{S}(\mathbf{u}_2)$ , leurs sorties respectives. Le système  $\mathcal{S}$  est *causal* si pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$(\forall \tau \leq t, \mathbf{u}_1(\tau) = \mathbf{u}_2(\tau)) \Rightarrow \mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}_2(t), \quad (1.1)$$

et *invariant* si pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , on a

$$(\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_1(t - \tau) = \mathbf{u}_2(t)) \Rightarrow (\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{y}_1(t - \tau) = \mathbf{y}_2(t)). \quad (1.2)$$

Un système entrée-sortie est dit *linéaire* si pour tout  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  et pour tout couple de signaux  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$ , on a

$$\mathcal{S}(\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2) = \alpha \mathcal{S}(\mathbf{u}_1) + \beta \mathcal{S}(\mathbf{u}_2). \quad (1.3)$$

**Exemple de l'intégrateur :** L'*intégrateur* est le système entrée-sortie qui obéit à l'équation

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau. \quad (1.4)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\alpha u_1 + \beta u_2) &= \int_{-\infty}^t (\alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau)) d\tau \\ &= \alpha \int_{-\infty}^t u_1(\tau) d\tau + \beta \int_{-\infty}^t u_2(\tau) d\tau = \alpha \mathcal{S}(\mathbf{u}_1) + \beta \mathcal{S}(\mathbf{u}_2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

L'intégrateur est donc bien un système linéaire.

**Exemple du redresseur :** La relation entrée/sortie du redresseur est donnée par  $y(t) = |u(t)|$ . Si  $\mathcal{S}$  était linéaire, nous aurions

$$\mathcal{S}(1 * u + 1 * (-u)) = 1 * \mathcal{S}(u) + 1 * \mathcal{S}(-u), \quad (1.6)$$

c'est-à-dire  $0 = 2|u(t)|$ . Cela n'est vrai que pour  $u(t) = 0$ . Donc le redresseur est un système non-linéaire.

## 1.3 Automatique

L'*automatique* a pour but de fabriquer des machines automatiques (c'est-à-dire où l'homme n'intervient quasiment pas, sauf pour donner ses ordres, où *consignes*), appelées *régulateurs* capables de *domestiquer* (c'est-à-dire changer le comportement dans le sens que l'on souhaite) les systèmes considérés. Pour cela, le régulateur devra calculer les entrées  $\mathbf{u}(t)$  à appliquer au système à partir de la connaissance (plus ou moins bruitées) des sorties  $\mathbf{y}(t)$  et de la consigne  $\mathbf{w}(t)$  que nous lui donnerons (voir figure 1.1).

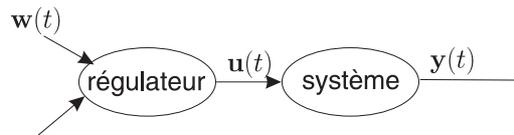


FIG. 1.1 – Principe de la régulation d'un système

Vu de l'utilisateur, le système, dit *système bouclé*, d'entrée  $\mathbf{w}(t)$  et de sortie  $\mathbf{y}(t)$  aura un comportement qui nous convient. On dira que l'on a *asservi* le système.

**Exemple du chauffage d'une maison :** Si le système considéré est une maison pour laquelle on s'intéresse à sa température. Sa sortie  $y(t)$  sera donc sa température et il nous faudra disposer d'un capteur de température. Son entrée sera la commande du chauffage  $u(t)$ . Le régulateur possible est celui décrit par la relation

$$u(t) = \max(0, k(w(t) - y(t))), \quad (1.7)$$

où  $k$  est réel positif fixé une fois pour toute et  $w(t)$  est la température désirée. Ainsi, chauffage le fonctionnera seulement si  $w(t) > y(t)$ . Cette commande n'est pas très bonne car une fois l'équilibre atteint,  $y(t)$  risque n'être différent de  $w(t)$ . En effet, à l'équilibre, la puissance reçue (due au chauffage) est égale à la puissance dissipée (due à une isolation non parfaite), c'est-à-dire :

$$k(w - y) = \alpha (y - y_{\text{ext}}), \quad (1.8)$$

où  $y_{\text{ext}}$  est la température extérieure et  $\alpha$  est le coefficient de dissipation. Ainsi,

$$y = \frac{k w + \alpha y_{\text{ext}}}{\alpha + k}, \quad (1.9)$$

ce qui revient à dire que  $y$  est une moyenne pondérée entre la consigne et la température extérieure. Bien sur, il serait préférable d'avoir un régulateur qui nous assure qu'à l'équilibre,  $y = w$ .

**Exemple du monocycle :** Le monocycle est un système instable. Ses sorties  $\mathbf{y}(t)$  peuvent être, par exemple, sa vitesse et ses angles de roulis et de tangage. Les entrées  $\mathbf{u}(t)$  du

systemes sont la puissance du moteur, la puissance du freinage et l'angle de la roue par rapport au cockpit. Si les consignes  $\mathbf{w}(t)$  sont les vitesses linéique et angulaire (par rapport à l'axe verticale) désirées, le régulateur sera une machine capable de générer automatiquement les bonnes commandes  $\mathbf{u}(t)$  en fonction des mesures  $\mathbf{y}(t)$  prises sur le système et les consignes  $\mathbf{w}(t)$  tel que le système reste stable. Ce régulateur devra alors être implanté dans le cockpit de l'engin et la consigne pourra être transmise au régulateur par l'intermédiaire d'une manette de commande.

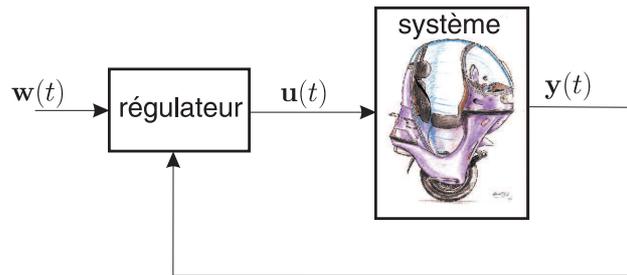


FIG. 1.2 – Régulation d'un monocycle

# Chapitre 2

## Fonction de transfert

### 2.1 Systèmes décrits par une équation différentielle linéaire

Dans ce manuscrit, nous allons considérer seulement des systèmes entrée-sortie avec une seule entrée et une seule sortie (de tels systèmes sont dits *monovariabiles*) linéaires et à temps continu. Plus précisément, nous supposons que le système  $\mathcal{S}$  considéré est décrit par une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  donnée par

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u. \quad (2.1)$$

Il est possible de montrer que cette équation différentielle décrit un système monovariabiles, linéaire, invariant et causal.

**Vecteur initial :** Définissons le *vecteur des conditions initiales* (ou *vecteur initial*) du système  $\mathcal{S}$  comme le vecteur des  $n$  premières dérivées de la sortie  $y(t)$  au temps  $t = 0$ , c'est-à-dire, le vecteur

$$\mathbf{x}(0) = (y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0))^T. \quad (2.2)$$

Le théorème de Cauchy nous dit que pour un vecteur initial donné, et pour une entrée  $u(t)$  donnée, il existe une et une seule solution  $y(t)$  de l'équation différentielle. Souvent, dans toute la suite, nous supposons que le vecteur initial est nul. Notons par  $\mathcal{S}_0(u(t))$  la sortie du système lorsque son entrée est égale à  $u(t)$  pour un vecteur initial nul.

**Théorème 2.1.1** Soient  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ , deux signaux d'entrées. Posons  $y_1(t) = \mathcal{S}_0(u_1(t))$  et  $y_2(t) = \mathcal{S}_0(u_2(t))$ . Pour tout  $\alpha$  et  $\beta$ , on a :

$$\mathcal{S}_0(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) = \alpha \mathcal{S}_0(u_1(t)) + \beta \mathcal{S}_0(u_2(t)).$$

**Preuve :** Posons  $y_1(t) = \mathcal{S}_0(u_1(t))$  et  $y_2(t) = \mathcal{S}_0(u_2(t))$ . D'après (2.1), on a

$$\begin{aligned} a_n y_1^{(n)} + \cdots + a_0 y_1 &= b_m u_1^{(m)} + \cdots + b_0 u_1, \\ a_n y_2^{(n)} + \cdots + a_0 y_2 &= b_m u_2^{(m)} + \cdots + b_0 u_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donc

$$\begin{aligned} &\alpha \left( a_n y_1^{(n)} + \cdots + a_0 y_1 \right) + \beta \left( a_n y_2^{(n)} + \cdots + a_0 y_2 \right) \\ &= \alpha \left( b_m u_1^{(m)} + \cdots + b_0 u_1 \right) + \beta \left( b_m u_2^{(m)} + \cdots + b_0 u_2 \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

c'est-à-dire

$$a_n (\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n)} + \cdots + a_0 (\alpha y_1 + \beta y_2) = b_m (\alpha u_1 + \beta u_2)^{(m)} + \cdots + b_0 (\alpha u_1 + \beta u_2).$$

De plus, il est clair que les  $n$  premières dérivées  $\alpha y_1 + \beta y_2$  sont nulles (puisque c'est le cas pour  $y_1$  et  $y_2$ ). Ainsi,  $\alpha \mathcal{S}_0(u_1(t)) + \beta \mathcal{S}_0(u_2(t))$  est la sortie du système lorsque l'entrée est égale à  $\alpha u_1 + \beta u_2$ , et dont les  $n$  premières dérivées sont nulles, c'est-à-dire,  $\alpha \mathcal{S}_0(u_1(t)) + \beta \mathcal{S}_0(u_2(t)) = \mathcal{S}_0(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t))$ . ■

**Signal causal :** Un *signal causal*  $s(t)$  est un signal nul pour  $t < 0$

**Réponse indicielle :** Souvent, la sortie  $y(t)$  d'un système est appelé *réponse* lorsque l'entrée est une entrée particulière (constante, sinus, Dirac, ...). Nous appellerons *échelon* le signal causal  $e(t)$  qui vaut 1 lorsque  $t \geq 0$ . La *réponse indicielle*  $k(t)$  est la sortie du système lorsque l'entrée est égale à l'échelon et que le vecteur initial est nul.

**Réponse impulsionnelle :** C'est la sortie  $h(t)$  du système pour un vecteur initial nul et pour une entrée est égale à l'*impulsion* (ou la distribution de Dirac)  $\delta_0(t)$ .

## 2.2 Convolution

### 2.2.1 Décomposition de Dirac

Une fonction porte  $\pi_{[a,b]}(t)$  est une fonction qui vaut partout 0 sauf dans l'intervalle  $[a, b]$  où elle vaut 1. On rappelle que la suite de fonction

$$\frac{\pi_{[0,\Delta]}(t)}{\Delta}, \quad (2.5)$$

converge vers la distribution de Dirac  $\delta(t)$  lorsque  $\delta$  tends vers 0.

Un signal  $x(t)$  peut être approximé par une somme de fonctions portes de la façon suivante

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \pi_{[k\Delta, (k+1)\Delta]}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \pi_{[0, \Delta]}(t - k\Delta) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \frac{\pi_{[0, \Delta]}(t - k\Delta)}{\Delta} \Delta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Faisons tendre  $\Delta$  vers zéro. Les transformations suivantes se produisent :

$$\begin{aligned} \sum &\rightarrow \int, & \Delta &\rightarrow d\tau, \\ k\Delta &\rightarrow \tau, & \frac{\pi_{[0, \Delta]}(t - k\Delta)}{\Delta} &\rightarrow \delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ainsi, on obtient

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

## 2.2.2 Opération de convolution

Considérons un système linéaire invariant  $\mathcal{S}_0$  de réponse impulsionnelle  $h(t)$ . Rappelons que le vecteur initial est supposé nul. Cherchons l'expression la sortie du système en fonction de l'entrée. On a

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Donc la sortie du système est donnée par

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{S}_0(u(t)) = \mathcal{S}_0\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_0(u(\tau) \delta(t - \tau)) d\tau \quad (\text{linéarité de } \mathcal{S}_0 : \mathcal{S}_0(a + b) = \mathcal{S}_0(a) + \mathcal{S}_0(b)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \mathcal{S}_0(\delta(t - \tau)) d\tau \quad (\text{linéarité de } \mathcal{S}_0 : \mathcal{S}_0(\alpha a) = \alpha \mathcal{S}_0(a)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{invariance de } \mathcal{S}_0 : \mathcal{S}_0(\delta(t - \tau)) = h(t - \tau)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'opération sur  $u(\cdot)$  donnée par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (2.10)$$

est une opération dite de *convolution* que l'on notera  $y = u * h$ .

**Cas causal :** Dans le cas causal,  $h(t)$  et  $u(t)$  sont nuls pour  $t < 0$ . Ainsi, la convolution devient

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (2.11)$$

## 2.3 Transformée de Laplace

### 2.3.1 Définition

Tous les signaux considérés sont causaux, c'est-à-dire, nuls pour  $t \leq 0$ . La transformée de Laplace d'un signal  $f(t)$  est définie par

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.12)$$

où  $s \in \mathbb{C}$ . Dans le domaine de Laplace les dérivations, les convolutions et beaucoup d'autres opérations différentielles deviennent simples. Les deux tables qui suivent rappellent leurs propriétés. Dans ces tables,  $f$  et  $g$  sont des fonctions et  $a$  et  $b$  sont des réels.

définition	$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}(f(t))$
linéarité	$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$
retard temporel	$\mathcal{L}(f(t - \tau)) = e^{-s\tau}\mathcal{L}(f(t))$
retard fréquentiel	$\mathcal{L}(e^{at}.f(t)) = \hat{f}(s - a)$
convolution	$\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \mathcal{L}(f(t)).\mathcal{L}(g(t))$
dérivation	$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = s\hat{f}(s) - f(0^-)$
intégration	$\mathcal{L}(\int_0^t f(\tau)d\tau) = \frac{1}{s}\hat{f}(s)$
valeur initiale	$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s.\hat{f}(s)$
valeur finale	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s.\hat{f}(s)$

$f(t)$	$\hat{f}(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - a)$	$e^{-sa}$
$\dot{\delta}(t)$	$s$
1	$\frac{1}{s}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$

### 2.3.2 Application à la résolution des équations différentielles

Afin de montrer comment la transformée de Laplace permet la résolution d'équations différentielles linéaires, nous allons considérer deux exemples.

**Exemple 1.** Soit l'équation différentielle linéaire

$$2\ddot{y} - 8\dot{y} + 6y = u - \dot{u}, \quad (2.13)$$

où les conditions initiales sont données par  $y(0^-) = y_0$ ;  $\dot{y}(0^-) = 0$ . L'entrée est donnée par

$$u(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \quad \text{et} \quad u(t) = 5t \text{ sinon.}$$

La transformée de Laplace de cette équation différentielle est

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}(2\ddot{y} - 8\dot{y} + 6y) = \mathcal{L}(u - \dot{u}) \\
 \Leftrightarrow & 2\mathcal{L}(\ddot{y}) - 8\mathcal{L}(\dot{y}) + 6\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(\dot{u}) \\
 \Leftrightarrow & 2(s\mathcal{L}(\dot{y}) - \dot{y}(0^-)) - 8(s\hat{y}(s) - y(0^-)) + 6\hat{y}(s) = \hat{u}(s) - (s\hat{u}(s) - u(0^-)) \\
 \Leftrightarrow & 2(s(s\hat{y}(s) - y_0)) - 8(s\hat{y}(s) - y_0) + 6\hat{y}(s) = (1-s)\hat{u}(s). \quad (2.14) \\
 \Leftrightarrow & 2(s^2\hat{y}(s) - sy_0) - 8(s\hat{y}(s) - y_0) + 6\hat{y}(s) = (1-s)\frac{5}{s^2} \\
 \Leftrightarrow & \hat{y}(s)(2s^2 - 8s + 6) - 2sy_0 + 8y_0 = (1-s)\frac{5}{s^2} \\
 \Leftrightarrow & \hat{y}(s) = \frac{(1-s)\frac{5}{s^2} + 2sy_0 - 8y_0}{2s^2 - 8s + 6} = \frac{(1-s)\frac{5}{s^2}}{2s^2 - 8s + 6} + \frac{2sy_0 - 8y_0}{2s^2 - 8s + 6}
 \end{aligned}$$

Le polynôme  $2s^2 - 8s + 6$  est appelé *polynôme caractéristique*. Le premier terme de cette somme correspond à la *réponse forcée* c'est-à-dire à la composante de la sortie due uniquement à l'entrée. Le deuxième terme correspond à la *réponse libre*, c'est-à-dire la composante de la réponse due aux conditions initiales.

Afin de calculer la transformé inverse de  $\hat{y}(s)$ , il nous faut transformer  $\hat{y}(s)$  en éléments simples. Cette opération peut se faire à l'aide de MUPAD en tapant les instructions suivantes

```
f := ((1-s)*5/s^2)/(2*s^2-8*s+6)+(2*s*y0-8*y0)/(2*s^2-8*s+6)
h := partfrac(f,s)
```

Nous obtenons

$$\hat{y}(s) = \frac{5}{6s^2} + \frac{5}{18s} - \frac{45}{18(s-3)} + \frac{3}{2} \frac{y_0}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{y_0}{(s-3)}, \quad (2.15)$$

et la table des transformées inverses nous donne

$$y(t) = \frac{5}{6}t + \frac{5}{18} - \left(\frac{45}{18} + \frac{y_0}{2}\right)e^{3t} + \frac{3y_0}{2}e^t.$$

Les opérations de décomposition en éléments simples et transformées inverses pouvaient se faire, sous MUPAD par la seule instruction

```
transform::invlaplace(f,s,t)
```

**Exemple 2.** Résolvons, à l'aide de la transformée de Laplace, l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = 0 ; \quad y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \frac{1}{2}. \quad (2.16)$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle est

$$s^2\hat{y}(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - s\hat{y}(s) + y(0) - 2\hat{y}(s) = 0, \quad (2.17)$$

donc

$$\hat{y}(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) - y(0)}{s^2 - s - 2} = \frac{s}{2(s+1)(s-2)}. \quad (2.18)$$

Après décomposition en éléments simples, il vient

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{6(s+1)} + \frac{1}{3(s-2)}. \quad (2.19)$$

D'où, par transformée inverse,

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}. \quad (2.20)$$

On retrouve bien que les modes de  $y(t)$  ( $-1$  et  $2$ ) sont les racines du polynôme caractéristique  $P(s) = s^2 - s - 2$  de l'équation différentielle. On peut vérifier le résultat sous MUPAD par les instructions

```
ivp :=ode({y''(t)-y'(t)-2*y(t)=0,y(0)=1/2,y'(0)=1/2},y(t))
solve(ivp)
```

La fonction `ode` (pour *ordinary differential equation*) est une fonction MUPAD qui construit le problème. Ce dernier se trouve mémorisé dans le variable `ivp` (pour *initial value problem*).

**Exemple 3.** Résolvons, à l'aide de la transformée de Laplace, l'équation différentielle suivantes :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega t \quad ; \quad x(0^-) = \dot{x}(0^-) = 0.$$

Puisque les conditions initiales sont nulles, la transformée de Laplace de l'équation différentielle est

$$ms^2\hat{x}(s) + k\hat{x}(s) = F_0 \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Donc

$$\hat{x}(s) = F_0 \frac{s}{(ms^2 + k)(s^2 + \omega^2)} = \left( \frac{F_0}{m\omega^2 - k} \right) \left( \frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right).$$

Par transformée inverse, on obtient

$$x(t) = \left( \frac{F_0}{m\omega^2 - k} \right) \left( \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \cos(\omega t) \right).$$

## 2.4 Fonction de transfert

La *fonction de transfert* d'un système est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle. Elle est donnée par

$$H(s) = \mathcal{L}(h(t)).$$

Par exemple, pour un intégrateur,  $h(t) = 1$  et donc sa fonction de transfert est  $H(s) = \frac{1}{s}$ . Dans le domaine de Laplace, l'équation (2.11) se traduit par

$$\hat{y}(s) = H(s).\hat{u}(s). \quad (2.21)$$

Dans le cadre de ce manuscrit,  $H(s)$  sera toujours une fonction rationnelle de la forme  $\frac{Q(s)}{P(s)}$ , où  $Q(s)$  et  $P(s)$  sont des polynômes. Le dénominateur  $P(s)$  est appelé *polynôme caractéristique*.

### 2.4.1 Systèmes en série

Considérons deux systèmes de fonction de transfert  $H_1(s)$  et  $H_2(s)$  mis en série comme sur la figure 2.1.

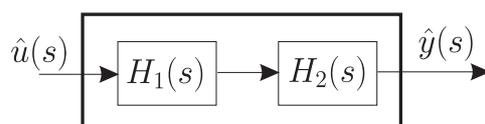


FIG. 2.1 – Deux systèmes en série

La fonction de transfert du système résultant est  $H(s) = H_2(s).H_1(s)$ . En effet,  $\hat{y}(s) = H_2(s)\hat{u}_2(s)$  et  $\hat{u}_2 = H_1(s)\hat{u}(s)$ .

### 2.4.2 Systèmes en parallèle

Mettons les deux systèmes de fonction de transfert  $H_1(s)$  et  $H_2(s)$  en parallèle comme sur la figure 2.2.

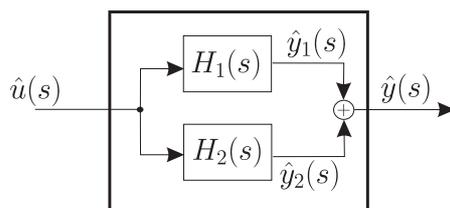


FIG. 2.2 – Deux systèmes en parallèle

On a  $\hat{y}(s) = \hat{y}_1(s) + \hat{y}_2(s) = H_1(s)\hat{u}(s) + H_2(s)\hat{u}(s) = (H_1(s) + H_2(s))\hat{u}(s)$ . Ainsi, la fonction de transfert du système résultant est  $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$ .

### 2.4.3 Système bouclé

Bouclons le système  $H(s)$  comme sur la figure 2.3.

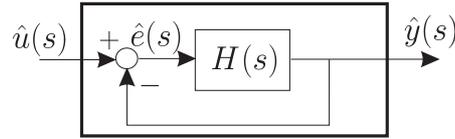


FIG. 2.3 – Système bouclé

Puisque  $\hat{y}(s) = H(s)\hat{e}(s)$  et que  $\hat{e}(s) = \hat{u}(s) - \hat{y}(s)$ , on a  $\hat{y}(s) = H(s)(\hat{u}(s) - \hat{y}(s))$ . En isolant  $\hat{y}(s)$ , on obtient

$$\hat{y}(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)}\hat{u}(s). \quad (2.22)$$

La fonction de transfert du système bouclé est donc  $\frac{H(s)}{1+H(s)}$ .

#### 2.4.4 Exemple de calcul d'une fonction de transfert

Considérons le système dont le câblage est donné par la figure 2.4.

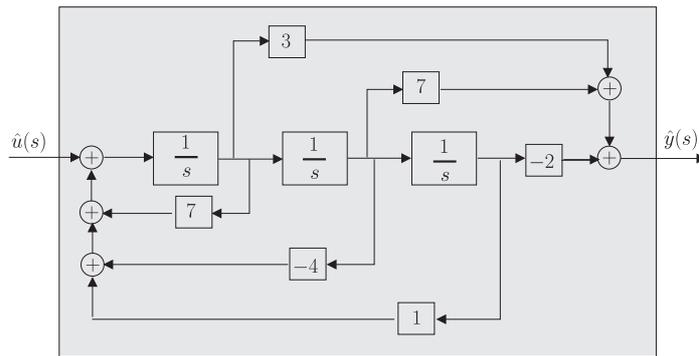


FIG. 2.4 – Système d'ordre 3 composé de trois intégrateurs

Calculons la fonction de transfert  $G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$  de ce système. Pour cela, notons,  $x_i$  la sortie du  $i$ ème intégrateur. On a.

$$\hat{y}(s) = -2x_3 + 7x_2 + 3x_1 = -2\frac{x_1}{s^2} + 7\frac{x_1}{s} + 3x_1 \quad (2.23)$$

$$sx_1 = \hat{u}(s) + 7x_1 - 4x_2 + x_3 = u + 7x_1 - 4\frac{x_1}{s} + \frac{x_1}{s^2}.$$

En isolant dans chacune de ces deux équations la variable  $x_1$ , il vient

$$x_1 = \frac{\hat{y}(s)}{-2\frac{1}{s^2} + 7\frac{1}{s} + 3} = \frac{\hat{u}(s)}{s - 7 + 4\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}}. \quad (2.24)$$

Donc la fonction de transfert est

$$G(s) = \frac{-2\frac{1}{s^2} + 7\frac{1}{s} + 3}{s - 7 + 4\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}} = \frac{3s^2 + 7s - 2}{s^3 - 7s^2 + 4s - 1}. \quad (2.25)$$

**Remarque 2.4.1** *Un câblage possible pour le système de fonction de transfert*

$$G(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \quad (2.26)$$

peut être obtenu en remplaçant de haut en bas sur la figure précédente les nombres 3, 7, -2, 7, -4, 1 par les quantités  $b_2, b_1, b_0, -a_2, -a_1, -a_0$ .

## 2.4.5 Autre exemple

On considère le système représenté par la figure 2.5.

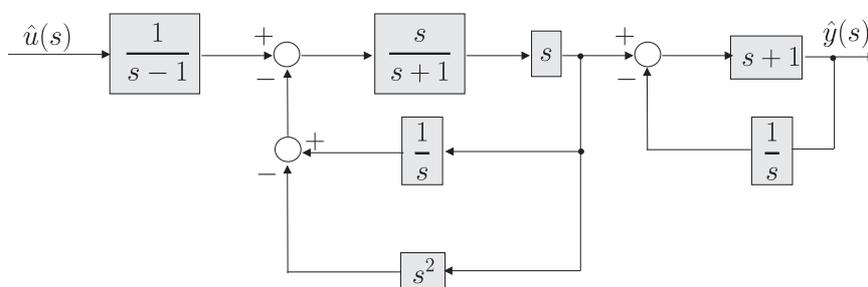


FIG. 2.5 – Système plus complexe

La fonction de transfert  $G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$  de ce système peut être calculée sous SCILAB en tapant les lignes suivantes.

```

s = poly(0, 's')
G1 = 1/(s-1)
G2 = (s^2/(s+1))/(1+(s^2/(s+1))*(1/s)-s^2)
G3 = (s+1)/(1+(s+1)*(1/s))
G = G1*G2*G3

```

La première de ces lignes a pour but de créer le polynôme  $P(s) = s$  qui a pour unique racine 0. Les fonctions  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$  correspondent aux fonctions de transfert de chacun des trois blocs en série composant le système. On obtient

$$G(s) = -\frac{s^3 + s^4}{2s^5 + s^4 - 6s^3 - s^2 + 3s + 1}.$$

## 2.5 Pôles d'un système, modes d'un signal

### 2.5.1 Définition

Les *pôles* d'un système linéaire invariant  $\mathcal{H}$  de fonction de transfert  $H(s)$  sont les racines du dénominateur de  $H(s)$ , c'est-à-dire du polynôme caractéristique. Ici, nous avons supposé que  $H(s)$  était rationnelle, mais cette définition s'étend au cas non rationnel. Les *modes* d'un signal sont les racines du dénominateur de la transformée de Laplace du signal. De même, cette définition s'étend au cas non rationnel.

La table suivante donne pour différents signaux, la transformée de Laplace ainsi que les modes associés.

$x(t)$	$\hat{x}(s)$	modes
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\{i\omega, -i\omega\}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\{i\omega, -i\omega\}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\{-\alpha + i\omega, -\alpha - i\omega\}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\{-\alpha\}$
1	$\frac{1}{s}$	$\{0\}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\{0, 0\}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\{0, 0, 0, \dots, 0\}$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\{i\omega, i\omega, -i\omega, -i\omega\}$

Les modes d'un signal donnent une idée de son comportement à l'infini. Par exemple, comme l'illustre la table précédente, les parties réelles des modes du signal indiquent sa rapidité à converger vers 0 ou à diverger alors que la partie imaginaire des modes représente les oscillations du signal. Ainsi,

- si tous les modes de  $x(t)$  sont à parties réelles strictement négative,  $x(t)$  converge vers 0,
- si tous les modes de  $x(t)$  sont à parties réelles négative,  $x(t)$  et si aucun mode imaginaire pur n'est pas de multiplicité supérieure (ou égale) à 2,  $x(t)$  reste borné,
- sinon,  $x(t)$  diverge.

On peut énoncer (bien qu'on puisse trouver des contres-exemples atypiques auxquels cas, l'égalité devient une inclusion) que si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux signaux,

$$\begin{aligned} \text{modes}(x_1 + x_2) &= \text{modes}(x_1) \cup \text{modes}(x_2) \\ \text{modes}(x_1 \cdot x_2) &= \{m_1 + m_2 \mid m_1 \in \text{modes}(x_1) \text{ et } m_2 \in \text{modes}(x_2)\} \end{aligned}$$

**Exemple 2.5.1** *Les modes de la fonction*

$$y(t) = \sin(3t) - 3 \cos(-5t) + 2e^{-2t} \sin(t) - 4e^{2t} \cos(2t) + e^{-2t} + t^3 - 5 \quad (2.27)$$

sont

$$\{3i, -3i, 5i, -5i, -2 + i, -2 - i, 2 + 2i, 2 - 2i, -2, 0, 0, 0\}. \quad (2.28)$$

**Exemple 2.5.2** *Les modes de  $ae^{-\alpha t} \cos \omega_1 t + 4 \cos \omega_2 t$  sont  $\{-\alpha + i\omega_1, -\alpha - i\omega_1, -i\omega_2, i\omega_2\}$  sauf dans le cas où  $a = -4$ ,  $\alpha = 0$  et  $\omega_2 = \omega_1$  où les modes deviennent l'ensemble vide.*

**Exemple 2.5.3** *Les modes de  $x_1(t) = e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t$  et  $x_2(t) = e^{\alpha_2 t} \cos \omega_2 t$  sont  $\{\alpha_1 + i\omega_1, \alpha_1 - i\omega_1\}$  et  $\{\alpha_2 + i\omega_2, \alpha_2 - i\omega_2\}$ . Ainsi, les modes de  $x_1.x_2$  devraient être*

$$\{\alpha_1 + i\omega_1 + \alpha_2 + i\omega_2, \alpha_1 + i\omega_1 + \alpha_2 - i\omega_2, \alpha_1 - i\omega_1 + \alpha_2 + i\omega_2, \alpha_1 - i\omega_1 + \alpha_2 - i\omega_2\}$$

*c'est-à-dire*

$$\text{modes}(x_1.x_2) = \{\alpha_1 + \alpha_2 \pm i(\omega_1 + \omega_2), \alpha_1 + \alpha_2 \pm i(\omega_1 - \omega_2)\}. \quad (2.29)$$

*Vérifions le.*

$$\begin{aligned} x_1(t).x_2(t) &= e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t . e^{\alpha_2 t} \cos \omega_2 t \\ &= e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t} \left( \frac{\cos(\omega_1 t + \omega_2 t) + \cos(\omega_1 t - \omega_2 t)}{2} \right) \\ &= e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t} \cos(\omega_1 + \omega_2)t + e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t} \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \end{aligned} \quad (2.30)$$

*Les modes de ce signal sont bien donnés par (2.29).*

**Exemple 2.5.4** *On injecte le signal  $u(t) = \sin(\omega t)$  dans un intégrateur de sortie  $y(t)$ . Les modes pour  $y(t)$  sont  $0, \pm \omega j$ . Cherchons à quelle valeur doit-on initialiser l'intégrateur de façon à ne pas exciter le mode  $s = 0$ . Pour cela, calculons l'expression de la sortie. Bien qu'on puisse utiliser la méthode de Laplace, nous pouvons, dans ce cas particulier, directement exprimer le résultat comme suit :*

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_0^t \sin(\omega \tau) d\tau = y_0 + \left[ -\frac{\cos(\omega \tau)}{\omega} \right]_0^t \\ &= y_0 - \frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

*Le mode  $s = 0$  ne sera donc pas excité si on initialise l'intégrateur à  $y_0 = -\frac{1}{\omega}$ .*

### 2.5.2 Propagation des modes à travers un système

Considérons un système  $\mathcal{H}$  d'entrée  $u$ , de sortie  $y$  et de fonction de transfert  $H(s)$ . Puisque  $\hat{y}(s) = H(s)\hat{u}(s)$ , on a

$$\text{modes}(y) = \text{pôles}(H) \cup \text{modes}(u). \quad (2.32)$$

Ainsi,  $y$  possède plus de modes que  $u$ .

**Exemple 2.5.5** *Un système de fonction de transfert*

$$H(s) = \frac{1+s}{s(s+1)^2((s+3)^2+4)} \quad (2.33)$$

est excité par une entrée du type  $u(t) = \sin(3t)$ . Les modes de la sortie du système sont donc

$$\{3i, -3i, 0, -1, -1, -3+2i, -3-2i\}. \quad (2.34)$$

Un mode (ou un pôle) sera dit *stable* si sa partie réelle est strictement négative et *instable* sinon. Comme nous le verrons plus en détail au chapitre 3, un système (resp. un signal) est dit *stable* si tous ses pôles (resp. ses modes) sont stables. Remarquons que  $y$  est stable si  $u$  et  $\mathcal{H}$  sont tous les deux stables.

La *constante de temps* d'un signal  $x$  stable est définie par

$$\tau(x) = \max_{\lambda \in \text{modes}(x)} \left( \frac{1}{-\text{Re}(\lambda)} \right). \quad (2.35)$$

Notons que les  $\lambda$  sont forcément à parties réelles négatives et que donc  $\tau(x)$  est positif. De même, la constante de temps d'un système  $\mathcal{H}$  stable est définie

$$\tau(\mathcal{H}) = \max_{\lambda \in \text{pôles}(x)} \left( \frac{1}{-\text{Re}(\lambda)} \right) \quad (2.36)$$

est, elle-aussi, strictement positive. Pour un système  $\mathcal{H}$  d'entrée  $u$  et de sortie  $y$ , on a

$$\tau(y) = \max(\tau(\mathcal{H}), \tau(u)) \quad (2.37)$$

où  $\tau$  désigne la constante de temps du système ou du signal.

De même, si on met deux systèmes de fonction de transfert  $H_1(s)$  et  $H_2(s)$  en série (c'est-à-dire  $H = H_1H_2$ ) ou bien en parallèle (c'est-à-dire,  $H = H_1 + H_2$ ) alors

$$\text{pôles}(H) = \text{pôles}(H_1) \cup \text{pôles}(H_2) \quad (2.38)$$

et donc

$$\tau(H) = \max(\tau(H_1), \tau(H_2)). \quad (2.39)$$

## 2.6 Réponse fréquentielle

### 2.6.1 Principe

On a le théorème suivant.

**Théorème 2.6.1** *La sortie d'un système stable de fonction de transfert  $H(s)$  et d'entrée  $u(t) = \cos(\omega t)$  est donnée par*

$$y(t) = a(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + \tilde{h}(t) \quad (2.40)$$

où  $a(\omega) = |H(i\omega)|$ ,  $\varphi(\omega) = \arg(H(i\omega))$  et  $\tilde{h}(t)$  est un signal transitoire qui converge vers 0.

Du fait de ce théorème, la fonction  $\omega \mapsto H(i\omega)$  nous sera d'une grande utilité et sera appelée *réponse fréquentielle*. Pour une pulsation donnée,  $a(\omega)$  est appelé *gain* et  $\varphi(\omega)$  est appelé *déphasage*.

**Preuve :** La transformée de Laplace de la sortie est donnée par

$$\hat{y}(s) = H(s)\hat{u}(s) = H(s)\frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.41)$$

Par décomposition en éléments simples, on a

$$\hat{y}(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} + \tilde{H}(s) \quad (2.42)$$

où les pôles de  $\tilde{H}(s)$ , qui sont ceux de  $H(s)$  sont tous stables. Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont choisis de façon à satisfaire l'égalité

$$H(s)\frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} + \tilde{H}(s) \quad (2.43)$$

c'est-à-dire

$$\alpha s + \beta = H(s)s - \tilde{H}(s)(s^2 + \omega^2). \quad (2.44)$$

Cette égalité doit être vérifiée pour tout  $s$ , donc aussi pour  $s = i\omega$ . Ainsi,

$$\alpha i\omega + \beta = H(i\omega)i\omega \quad (2.45)$$

Donc

$$\alpha - \frac{\beta}{\omega}i = H(i\omega) \quad (2.46)$$

En décomposant cette équation imaginaire en deux équations réelles, et en notant  $a(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  le module et l'argument de  $H(i\omega)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{Re}(H(i\omega)) = a(\omega) \cos(\varphi(\omega)) \\ \beta &= -\omega \operatorname{Im}(H(i\omega)) = -\omega a(\omega) \sin(\varphi(\omega)) \end{aligned} \quad (2.47)$$

En insérant ces deux valeurs dans l'expression (2.42) de  $\hat{y}$ , on obtient

$$\begin{aligned}\hat{y}(s) &= \frac{a(\omega) \cos(\varphi(\omega)) s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega a(\omega) \sin(\varphi(\omega))}{s^2 + \omega^2} + \tilde{H}(s) \\ &= a(\omega) \left( \cos(\varphi(\omega)) \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \sin(\varphi(\omega)) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) + \tilde{H}(s)\end{aligned}\quad (2.48)$$

dont la transformée inverse est

$$y(t) = a(\omega) (\cos(\varphi(\omega)) \cos(\omega t) - \sin(\varphi(\omega)) \sin(\omega t)) + \tilde{h}(t) \quad (2.49)$$

Or, puisque  $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$ , cette formule devient

$$y(t) = a(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + \tilde{h}(t) \quad (2.50)$$

où  $\tilde{h}(t)$  est un signal transitoire qui converge vers 0 puisque des modes sont stables. ■

### 2.6.2 Gain statique

Si l'entrée  $u(t)$  est constante et égale à 1, alors  $u(t) = \cos(\omega t)$  avec  $\omega = 0$ . Ainsi, la sortie s'écrit

$$\begin{aligned}y(t) &= a(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + \tilde{h}(t) \\ &= a(0) \cos(\varphi(0)) + \tilde{h}(t).\end{aligned}\quad (2.51)$$

Or, puisque la fonction de transfert admet uniquement des coefficients réels,  $H(i\omega)$  est un nombre réel, si  $\omega$  est nul. Ainsi,  $H(0) = a(0) \cos(\varphi(0))$ , où  $\cos(\varphi(0)) = \pm 1$ . Donc

$$y(t) = H(0) + \tilde{h}(t). \quad (2.52)$$

Le coefficient  $H(0)$  est appelé *gain statique*. Il représente la valeur vers laquelle converge la réponse indicielle, dans le cas où cette dernière converge.

### 2.6.3 Diagrammes pour la réponse fréquentielle

Il existe plusieurs façons de représenter graphiquement la réponse fréquentielle. Rappelons que la réponse fréquentielle est une fonction qui associe à  $\omega \in \mathbb{R}$  le complexe  $H(i\omega)$ , où  $H(s)$  est la fonction de transfert du système considéré.

1. le diagramme de Nyquist représente dans le plan complexe, l'évolution de  $H(i\omega)$  pour toutes les valeurs positives de  $\omega$ .
2. les diagrammes de Bode représentent le tracé des deux courbes  $a(\omega) = |H(i\omega)|$  et  $\varphi(\omega) = \arg(H(i\omega))$  en fonction de  $\omega$ , dans une échelle logarithmique (on rappelle que  $a_{\text{db}}(\omega) = 20 \log_{10} a(\omega)$ ),

3. le diagramme de Black représente  $H(i\omega) = a(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$  dans le plan  $(a(\omega), \varphi(\omega))$ , pour toutes les valeurs positives de  $\omega$ .

Prenons par exemple le système de fonction de transfert

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}, \quad (2.53)$$

et traçons tous ses diagrammes sous SCILAB. Il nous faut tout d'abord créer le polynôme  $P(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$  qui a pour unique racine 0 en faisant

```
s=poly(0,'s');
```

puis fabriquer un système linéaire  $\mathcal{S}$  à temps continu ('c') et de fonction de transfert  $H$  en tapant

```
H=1/(s^3+2*s^2+2*s+1);S=syslin('c',H);
```

Le diagramme de Nyquist s'obtient en tapant

```
nyquist(S,0,100);
```

Le diagramme de Bode s'obtient en faisant

```
bode(S,0.01,100);
```

et le diagramme de Black-Nycholes par

```
black(S,0,100);
```

Attention, comme le diagramme de Bode se dessine avec une échelle logarithmique, nous devons avoir  $\omega_{\min} > 0$  (en effet  $\log_{10}(0) = -\infty$ ). Ici,  $\omega_{\min}$  a été choisi à 0.01. Les trois diagrammes sont représentés sur la figure 2.6.

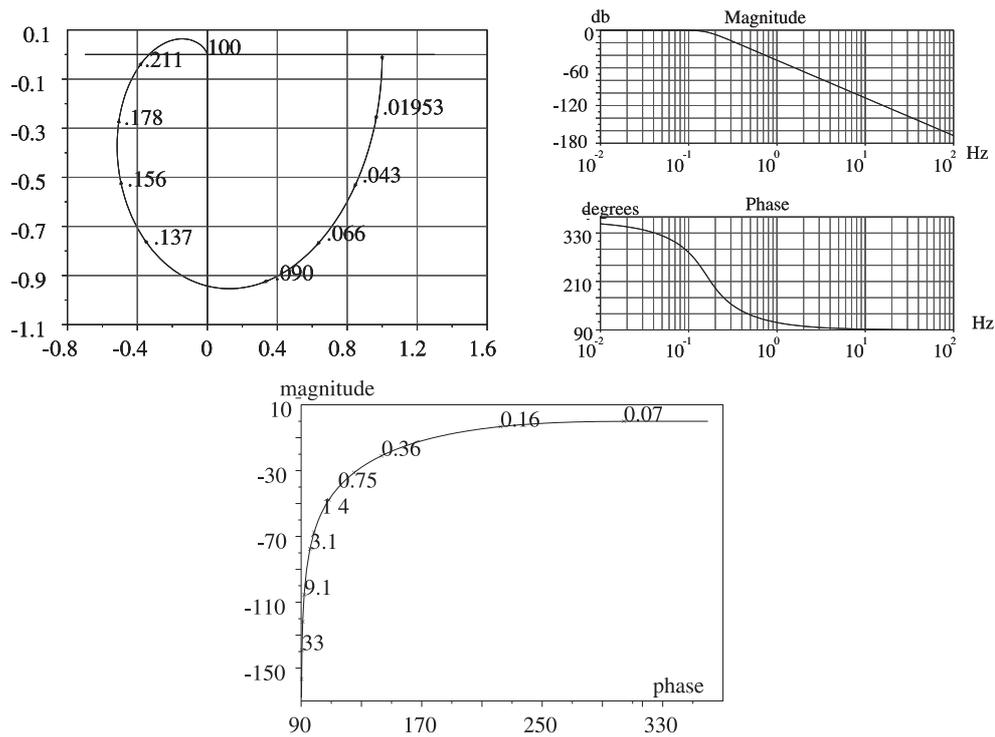


FIG. 2.6 – Réponses fréquentielles (Nyquist, Bode et Black-Nichols)

Attention, il ne faut pas confondre la réponse impulsionnelle, qui dépend de  $\omega$ , avec la réponse indicielle ou impulsionnelle du système, qui elles, dépendent du temps  $t$ . La réponse indicielle de notre système (voir figure 2.7) qui se trace sous SCILAB en faisant

```
t=0 :0.1 :10 ;y=csm('step',t,S) ;plot2d(t,y) ;
```

où `csm` est une fonction qui permet de tracer les réponses des systèmes linéaires à temps continu. Ce tracé nous donne une vision temporelle du comportement du système. A la fois sur les diagrammes fréquentiels et sur la représentation graphique de la réponse indicielle, il est possible de lire que le gain statique est de 1.

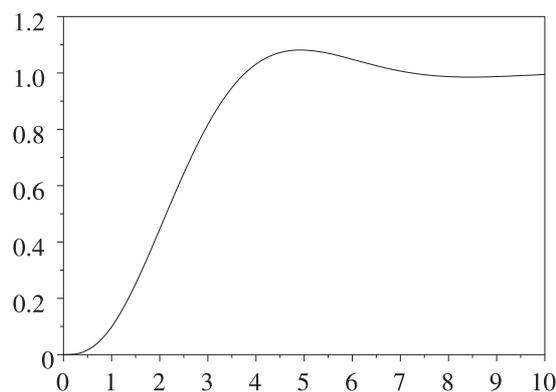


FIG. 2.7 – Réponse indicielle du système

### 2.6.4 Exemple

Pour tracer les diagrammes de Bode, de Nyquist et de Black-Nycols du système ayant pour fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1 - 2s}{1 + s + s^2}, \quad (2.54)$$

sous SCILAB, il faut tout d'abord concevoir notre système **S** en faisant

```
s=poly(0,'s');G=(1-2*s)/(1+s+s^2);S=syslin('c',G);
```

puis utiliser les instructions `bode`, `nyquist`, `black` pour tracer les diagrammes. La réponse indicielle s'obtient en tapant

```
t=0 :0.01 :20; y=csim('step',t,S); plot2d(t,y);
```

Pour tracer sous SCILAB, la réponse du système lorsque son entrée est donnée par  $u(t) = \sin(\omega t)$ , il faut faire

```
t = 0 :0.3 :10; u=sin(w*t);
y = csim(u,t,S); plot2d(t,u); plot2d(t,y)
```

En répétant cette opération pour différentes valeurs de  $\omega$ , et en mesurant pour chaque graphique obtenu le déphasage et le gain entre les deux signaux, on peut retracer point par point les diagrammes de Nyquist, Bode et Black-Nycols.

## 2.7 Les modèles de base

Nous allons maintenant étudier en détails quelques systèmes élémentaires.

### 2.7.1 Intégrateur

Un *intégrateur* est un système décrit par l'équation différentielle

$$\dot{y} = u. \quad (2.55)$$

La table suivante donne quelques exemples d'intégrateurs apparaissant dans différents domaines des sciences de l'ingénieur.

domaine	système	entrée	sortie
aéronautique	navire	angle de barre	angle de cap
économique	compte en banque	dépôt d'argent	capital
hydraulique	cuve	débit d'eau versée	quantité d'eau
mécanique	bille	force	vitesse

La fonction de transfert ce système est la transformée de Laplace de la sortie pour des conditions initiales nulles et pour une entrée  $u(t) = \delta_0(t)$ . La transformée de Laplace de l'équation est

$$s\hat{y}(s) - y(0) = \hat{u}(s). \quad (2.56)$$

Pour  $y(0) = 0$  et pour  $\hat{u}(s) = 1$  (c'est-à-dire pour  $u(t) = \delta_0(t)$ ), on obtient  $\hat{y}(s) = 1/s$ . Donc la fonction de transfert de l'intégrateur est

$$H(s) = \frac{1}{s}. \quad (2.57)$$

Sa réponse fréquentielle, nécessaire pour tracer les diagrammes de Nyquist, de Bode et de Black, est donnée par

$$H(i\omega) = a(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = \frac{1}{i\omega}. \quad (2.58)$$

L'intégrateur peut être considéré comme un système du premier ordre particulier (voir section 2.7.3). Ainsi, pour le tracé des diagrammes pour l'intégrateur on pourra de référer à section 2.7.3. Nous pouvons tout de même remarquer que puisque le gain  $a(\omega) = \frac{1}{\omega}$ , l'intégrateur tend à amplifier les basses fréquences et à filtrer les hautes fréquences.

### 2.7.2 Dérivateur

Un *dérivateur* est un système décrit par l'équation différentielle

$$y = \dot{u}. \quad (2.59)$$

Un tel système n'a pas réellement de sens physique. En effet, si nous prenons  $u(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sin(\omega t)$  alors  $y(t) = \sqrt{\omega} \cos(\omega t)$ . Faisons tendre  $\omega$  vers 0. L'entrée tend vers le signal nul alors que la sortie correspond à une sinusoïde dont l'amplitude tend vers l'infini. Un tel phénomène est difficilement concevable.

La fonction de transfert du dérivateur est  $H(s) = s$  et sa réponse fréquentielle est  $H(i\omega) = i\omega$ .

### 2.7.3 Système du premier ordre

Un *système du premier ordre* (nous verrons par la suite que l'ordre d'un système est le degré du polynôme caractéristique du système) est décrit par l'équation différentielle

$$\tau \dot{y} + y = ku. \quad (2.60)$$

La table suivante donne quelques exemples de systèmes du premier ordre apparaissant dans différents domaines des sciences de l'ingénieur.

domaine	système	entrée	sortie
thermodynamique	maison	chauffage	température ( $T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}$ )
électronique	circuit RC	tension $e(t)$	charge $Q(t)$
mécanique	chariot (avec frottement)	force	vitesse

La fonction de transfert du système est

$$H(s) = \frac{k}{1 + \tau s}, \quad (2.61)$$

où  $k$  est le gain statique et  $\tau$  est appelée *constante de temps*. Nous supposons que ces deux quantités sont positives. L'unique pôle du système est  $s = -\frac{1}{\tau}$ . Sa réponse fréquentielle est

$$H(i\omega) = a(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = \frac{k}{1 + i\tau\omega}. \quad (2.62)$$

Le gain et le déphasage de  $H(i\omega)$  sont donnés par

$$\begin{cases} a(\omega) &= |H(i\omega)| = \left| \frac{k}{1 + i\tau\omega} \right| = \frac{k}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}, \\ \varphi(\omega) &= \arg(k) - \arg(1 + i\tau\omega) = -\arg(1 + i\tau\omega). \end{cases} \quad (2.63)$$

Si  $\omega$  est proche de 0, on a

$$\begin{cases} a(\omega) \simeq k \\ \varphi(\omega) \simeq 0, \end{cases} \quad (2.64)$$

et si  $\omega$  est grand

$$\begin{cases} a(\omega) \simeq \frac{k}{\sqrt{\tau^2 \omega^2}} = \frac{k}{\tau \omega} \\ \varphi(\omega) \simeq -\arg(i\tau\omega) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.65)$$

Notons que puisque  $a_{\text{db}}(\omega) = 20 \log_{10} a(\omega)$ , lorsque  $\omega$  est grand, on a

$$a_{\text{db}}(\omega) = 20 \log_{10} a(\omega) \simeq 20 \log_{10} \frac{k}{\tau \omega} = 20 \log_{10} \frac{k}{\tau} - 20 \log_{10} \omega.$$

### 2.7.4 Système du second ordre

Un *système du second ordre* possède pour fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (2.66)$$

Cette forme, pour la fonction de transfert fait apparaître les coefficients suivants :

- $k$  est le gain statique, en effet, on peut vérifier que  $H(0) = k$  ;
- $\zeta$  (lettre grecque *zeta*) est l'*amortissement réduit*, il correspond, par exemple, à une perte d'énergie par effet Joule, ou par frottement (voir figure 2.8) ;
- et  $\omega_n$  est la *pulsation naturelle*. Elle représente la pulsation à laquelle oscillerait le système, si on pouvait lui supprimer tout amortissement.

Nous supposons que les coefficients  $\zeta$  et  $\omega_n$  sont tous les deux positifs.

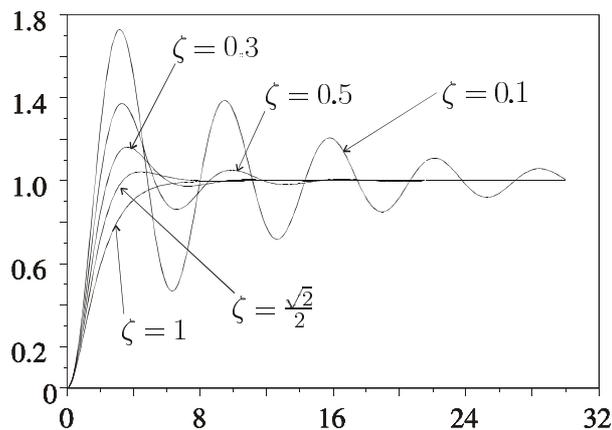


FIG. 2.8 – Réponses impulsionnelles d'un système d'ordre 2 pour différents amortissements

La table suivante donne quelques exemples de systèmes du second ordre.

domaine	système	entrée	sortie
électronique	circuits RLC	tension $e(t)$	courant $i(t)$
mécanique	masse/ressort	force	vitesse

### Pôles

Le polynôme caractéristique de  $H(s)$  est

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0. \quad (2.67)$$

Son discriminant est

$$\Delta = 4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1). \quad (2.68)$$

Les pôles du système sont donc

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)}}{2} = \omega_n \left( -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right). \quad (2.69)$$

On peut distinguer deux cas :

- Si  $\zeta \geq 1$ , alors le discriminant est positif. Les deux pôles sont réels. De plus, ils sont stables car négatifs.
- Si  $\zeta < 1$ , alors le discriminant est négatif. Les pôles sont donnés par

$$s = \omega_n \left( -\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2} \right). \quad (2.70)$$

Remarquons que la partie réelle des pôles est  $-\omega_n\zeta < 0$ . Donc le système est stable. Leurs parties imaginaires sont  $\pm\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ . Le réel  $\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$  est appelé *pulsation propre*. Enfin remarquons que le module des pôles est donné par  $|s| = \omega_n\sqrt{\zeta^2 + (1 - \zeta^2)} = \omega_n$ , c'est-à-dire la pulsation naturelle.

### Résonance

Le module de la réponse fréquentielle est

$$\begin{aligned} a(\omega) &= |H(i\omega)| = \left| \frac{k\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\zeta\omega_n i\omega + \omega_n^2} \right| \\ &= \frac{k\omega_n^2}{|-\omega^2 + 2\zeta\omega_n i\omega + \omega_n^2|} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Le gain  $a(\omega)$  atteint son maximum lorsque son dénominateur (au carré)

$$\eta(\omega) = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2 = \omega^4 + (4\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2)\omega^2 + \omega_n^4 \quad (2.72)$$

atteint son minimum. Après un calcul simple, on obtient que la pulsation  $\omega_r$  où  $a(\omega)$  est maximum, appelée *pulsation de résonance*, satisfait

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (2.73)$$

Cette dernière existe donc si  $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Dans ce cas, un calcul simple montre que

$$a(\omega_r) = \frac{k}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (2.74)$$

Ce nombre est couramment appelé *coefficient de surtension*.

## Diagramme de Bode

**Module :** Puisque

$$a(\omega) = |H(i\omega)| = \left| \frac{k\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_n i\omega} \right| = \frac{k\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}.$$

On a

$$\begin{aligned} a_{\text{db}}(\omega) &= 20 \log_{10} a(\omega) \\ &= k_{\text{db}} + 2\omega_{\text{ndb}} - \frac{1}{2} \left( 20 \log_{10} \left( (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2 \right) \right), \end{aligned} \quad (2.75)$$

où  $k_{\text{db}} = 20 \log_{10} k$  et  $\omega_{\text{ndb}} = 20 \log_{10} \omega_n$ .

– Si  $\omega$  est petit alors

$$a_{\text{db}}(\omega) \simeq k_{\text{db}} + 2\omega_{\text{ndb}} - 10 \log_{10} \omega_n^4 = k_{\text{db}}. \quad (2.76)$$

– Si  $\omega$  est grand, on a

$$\begin{aligned} a_{\text{db}}(\omega) &= k_{\text{db}} + 2\omega_{\text{ndb}} - 10 \log_{10} \left( (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2 \right), \\ &= k_{\text{db}} + 2\omega_{\text{ndb}} - 10 \left( \log_{10} \left( \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}{\omega^4} \right) + \log_{10}(\omega^4) \right), \\ &\simeq k_{\text{db}} + 2\omega_{\text{ndb}} - 10 (0 + \log_{10}(\omega^4)), \\ &= k_{\text{db}} + 2\omega_{\text{ndb}} - 40 \log_{10}(\omega). \end{aligned}$$

Ainsi, le diagramme de Bode possède une asymptote de la pente est de  $-40\text{db/dec}$  (c'est-à-dire que  $a_{\text{db}}$  perd 40 db lorsque  $\omega$  est multiplié par 10).

**Déphasage** : on a

$$\varphi(\omega) = -\arg(\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_n i\omega).$$

Posons  $z(\omega) = \omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_n i\omega$ . Pour  $\omega = 0$ ,  $\omega$  est un nombre réel positif. Lorsque  $\omega$  grandit,  $z$  va dans la partie supérieure du plan complexe, mais puisque sa partie réelle tend plus vite vers  $-\infty$  que sa partie imaginaire tend vers  $\infty$ , l'argument de  $z$  tend vers  $\pi$ . Ainsi,  $\varphi(\omega)$  tend vers  $-\pi$  lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$ .



# Chapitre 3

## Stabilité

Un système linéaire invariant est dit *asymptotiquement stable* (ou tout simplement *stable*) si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0, \quad (3.1)$$

où  $h(t)$  est la réponse impulsionnelle du système. Nous allons donner dans les deux paragraphes suivants deux critères algébriques (c'est-à-dire qui résultent d'un calcul algébrique) capables de déterminer si un système est stable, le critère des pôles et le critère de Routh. Ensuite, nous donnerons le critère Nyquist et le critère du revers qui sont de nature géométrique.

### 3.1 Critère des pôles

Supposons que notre système possède pour fonction de transfert  $H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$  où  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont deux polynômes. Les racines de  $Q(s)$  et celles de  $P(s)$  sont appelées respectivement *zéros* et *pôles* du système. Après décomposition en éléments simples,  $H(s)$  s'écrit sous la forme

$$H(s) = \sum_k \sigma_k s^k + \sum_i \frac{\alpha_i}{s - a_i} + \sum_j \frac{\beta_j s + \gamma_j}{(s - b_j)^2 + c_j^2}, \quad (3.2)$$

où les  $a_i$  sont les pôles réels de  $H(s)$  et les  $c_j \pm id_j$  les pôles imaginaire de  $H(s)$ . Par transformée inverse de Laplace, on obtient que la réponse impulsionnelle  $h(t)$  se met sous la forme

$$h(t) = \sum_k \sigma_k \delta^{(k)} + \sum_i \alpha_i e^{a_i t} + \sum_j \delta_j e^{b_j t} \cos(c_j t + \varphi_j). \quad (3.3)$$

Ainsi,  $h(t)$  converge vers 0 si les  $a_i$  et les  $b_j$  sont tous strictement négatifs. On peut donc conclure par le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1** *Un système linéaire invariant est stable si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.*

**Exemple 3.1.1** *Considérons le système d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  dont l'évolution est régie par l'équation différentielle*

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = 3\frac{d^2u(t)}{dt^2} + u(t), \quad (3.4)$$

et analysons la stabilité de ce système, en utilisant le logiciel SCILAB. Il nous faut tout d'abord obtenir la fonction de transfert  $G(s)$  de ce système. Rappelons que cette dernière est la transformée de Laplace de la sortie, pour des conditions initiales nulles, lorsque le système est excité par une impulsion de Dirac. Or, la transformée de Laplace de l'équation différentielle, pour des conditions initiales nulles, est :

$$s^3\hat{y} - 4s^2\hat{y} + 2s\hat{y} - \hat{y} = 3s^2\hat{u} + \hat{u}. \quad (3.5)$$

En prenant  $u(t) = \delta_0(t)$ , c'est-à-dire,  $\hat{u} = 1$ , on obtient la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{3s^2 + 1}{s^3 - 4s^2 + 2s - 1}. \quad (3.6)$$

En faisant, sous SCILAB,

```
s=poly(0, 's');roots(s^3-4*s^2+2*s-1)
```

nous obtenons les racines du polynôme caractéristique du système, à savoir,

$$0.24 \pm 0.47i \text{ et } 3.51. \quad (3.7)$$

Les trois racines sont instables, c'est-à-dire à droite du plan complexe, donc le système est instable. Notons qu'il suffit d'une seule racine instable pour engendrer un système instable.

## 3.2 Critère de Routh

Le critère des pôles demande le calcul des racines d'un polynôme, ce qui est une opération relativement complexe lorsque le degré du polynôme est élevé. Le critère de Routh que nous allons maintenant donner nous permettra de montrer la stabilité d'un système avec un nombre d'opérations très faible. Notons

$$P(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0, \quad (3.8)$$

le polynôme caractéristique du système. La table de Routh se construit comme suit

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\dots$	0	0
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\dots$	0	0
$b_1$	$b_2$	$b_3$			0	0
$c_1$	$c_2$	$c_3$			0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$

avec

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & b_2 &= \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & \dots \\
 c_1 &= \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} & c_2 &= \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} & \dots \\
 & \dots & & \vdots &
 \end{aligned}$$

Notons que les deux premières lignes sont obtenues à partir du polynôme caractéristique. Les autres éléments  $t_{ij}$  à la ligne  $i > 2$  et à la colonne  $j$  sont obtenus par la formule

$$t_{ij} = \frac{t_{i-1,1}t_{i-2,j+1} - t_{i-2,1}t_{i-1,j+1}}{t_{i-1,1}}.$$

**Théorème 3.2.1** *Le nombre de racines à parties réelles strictement positives est donné par le nombre de changement de signes de la première colonne de la table de Routh.*

Dans un souci de simplification, lorsque nous appliquerons les critères de stabilité, nous supposerons que les racines du polynôme caractéristique ne sont jamais sur l'axe imaginaire. Ainsi, nous pouvons énoncer :

**Théorème 3.2.2** *Un système linéaire invariant est stable si la table de Routh associée au polynôme caractéristique a une première colonne composé d'éléments de même signe.*

**Exemple 3.2.1** *La table de Routh associée au système du second ordre de fonction de transfert*

$$H(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.9)$$

est donnée par

1	$\omega_n^2$	0
$2\zeta\omega_n$	0	0
$\omega_n^2$	0	0
0	0	0

Ainsi, le système est stable si 1,  $2\zeta\omega_n$  et  $\omega_n^2$  sont tous de même signe, c'est-à-dire si  $\zeta\omega_n > 0$ .

**Exemple 3.2.2** On considère le système de fonction de transfert  $\frac{1}{20s^2+2s+1}$  d'entrée  $u$  et de sortie  $y$ . Ce système est commandé par un régulateur intégral, c'est-à-dire que la commande est de la forme  $u = \frac{k}{s}(w - y)$ , où  $w$  est la consigne. Cherchons les conditions sur  $k$  qui nous assurent que le système bouclé soit stable.

Le système bouclé a pour fonction de transfert

$$H(s) = \frac{\frac{k}{s} \cdot \frac{1}{20s^2+2s+1}}{1 + \frac{k}{s} \frac{1}{20s^2+2s+1}} = \frac{k}{s(20s^2 + 2s + 1) + k} = \frac{k}{20s^3 + 2s^2 + s + k}.$$

Le polynôme caractéristique  $20s^3 + 2s^2 + s + k$  possède pour table de Routh :

20	1	0
2	$k$	0
$\frac{2-20k}{2}$	0	0
$k$	0	0

D'après le critère de Routh, on a stabilité si tous les éléments de la première colonne sont de même signe, c'est-à-dire si

$$1 - 10k > 0 \text{ et } k > 0, \quad (3.10)$$

ou encore  $k \in ]0, 0.1[$ .

**Exemple 3.2.3** On cherche à stabiliser l'angle de roulis  $\theta$  du bateau de la figure 3.1. Pour cela, on exerce, par l'intermédiaire de deux ailerons, positionnés sur les côtés du bateau, un couple de roulis  $T$  sur le bateau. Le transfert entre  $T$  et  $\theta$  est donné par :

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (3.11)$$

où  $k$  est le gain statique,  $\zeta$  est l'amortissement réduit et  $\omega_n$  est la pulsation naturelle. Ces coefficients sont donnés  $k = 1$ ,  $\zeta = 0.1$  et  $\omega_n = 2$ . Notons que comme  $\zeta \ll \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ce système est très mal amorti et engendre de nombreux malaises chez les passagers. On propose donc de réguler le bateau par une commande (dite proportionnelle) du type  $T = K(\theta_c - \theta)$ , où  $\theta_c$  est l'angle de consigne, généralement choisi à 0. Cherchons les valeurs de  $K$  pour lesquelles le système régulé est stable. On a  $\hat{\theta}(s) = G(s) \left( K \left( \hat{\theta}_c(s) - \hat{\theta}(s) \right) \right)$  donc le système régulé possède pour fonction de transfert

$$\frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{\theta}_c(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}{1 + K \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} = \frac{Kk\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + Kk\omega_n^2}.$$

D'après la table de Routh donnée par

1	$\omega_n^2 + Kk\omega_n^2$	0
$2\zeta\omega_n$	0	0
$\omega_n^2 + Kk\omega_n^2$	0	0
0	0	0

(3.12)

le système bouclé est stable si  $Kk + 1 > 0$ , c'est-à-dire  $K > -\frac{1}{k} = -1$ . Cherchons maintenant quelle valeur de  $K$  nous permettra d'obtenir un amortissement de  $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (cette valeur est généralement considérée comme idéale car elle correspond à un amortissement rapide et sans d'oscillation). Le système bouclé est un système du deuxième ordre de la forme

$$G'(s) = \frac{k'\omega_n'^2}{s^2 + 2\zeta'\omega_n's + \omega_n'^2}, \quad (3.13)$$

avec  $k'\omega_n'^2 = Kk\omega_n^2$ ,  $\omega_n'^2 = \omega_n^2 + Kk\omega_n^2$  et  $\zeta'\omega_n' = \zeta\omega_n$ . D'où

$$\zeta' = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n'} = \frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2 + Kk\omega_n^2}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + Kk}}. \quad (3.14)$$

Le coefficient d'amortissement  $\zeta'$  sera égal à  $\sqrt{2}/2$  si

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1 + Kk}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\zeta^2 = 1 + Kk \Leftrightarrow K = \frac{2\zeta^2 - 1}{k} = \frac{2}{100} - 1 = -0.98.$$

Lorsque  $\theta$  est positif, on exerce un couple qui tend à ralentir son retour vers 0 de façon à éviter l'effet de balancier.

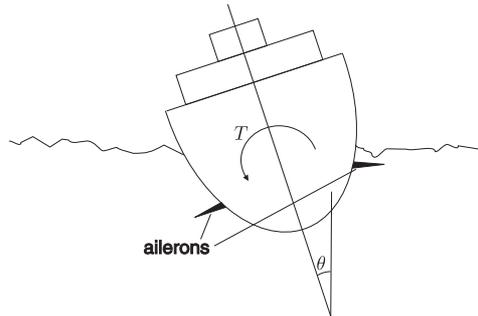


FIG. 3.1 – Bateau dont l'angle de roulis est à stabiliser

## 3.3 Critère de Nyquist

Dans ce paragraphe, nous allons donner un critère géométrique pour montrer la stabilité d'un système. L'intérêt d'un tel critère n'est pas seulement de montrer la stabilité, mais de donner une illustration graphique de cette stabilité qui nous permet d'obtenir une sorte de distance à l'instabilité de notre système.

### 3.3.1 Fonction analytique

Une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est analytique si elle est décomposable en série entière (c'est-à-dire un polynôme en  $s$  de degré infini). Par exemple, la fonction  $\cos$  est analytique

car

$$\cos(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^{2k}}{(2k)!}. \quad (3.15)$$

Ceci implique que la connaissance de  $f$  sur un voisinage de  $s = 0$  (qui nous donne toutes les dérivées de  $f$  en zéro et donc les coefficients de la série) nous permet de déduire  $f$  sur tout  $\mathbb{C}$  (en supposant bien sûr que la série converge toujours, ce qui n'est pas nécessairement le cas). Par exemple, les fonctions

$$f(s) = e^s, g(s) = s^3 + 2s + 2 \text{ et } h(s) = \sin(s + \log(s + 2)) \quad (3.16)$$

sont analytiques alors que la fonction 'conjugué'  $f(s) = s^* = \operatorname{Re}(s) + i \operatorname{Im}(s)$  ne l'est pas.

### 3.3.2 Théorème de Cauchy

**Théorème 3.3.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe fermée séparant le plan complexe en deux : l'intérieur de  $\mathcal{C}$  et l'extérieur de  $\mathcal{C}$ . Soit  $f$  une fonction analytique. Puisque toute fonction analytique est continue,  $f(s)$  décrit aussi une trajectoire fermée lorsque  $s$  parcourt  $\mathcal{C}$ . Notons,  $P$  le nombre de pôles de  $f(s)$  enfermés par  $\mathcal{C}$ ,  $Z$  le nombre de zéros de  $f(s)$  enfermés par  $\mathcal{C}$ , et  $N$  le nombre de tours autour de zéro faits par  $f(s)$  lorsque  $s$  parcourt  $\mathcal{C}$  (on compte positivement lorsque le parcours a lieu dans le sens direct trigonométrique  $\odot$ ) alors,*

$$N = Z - P. \quad (3.17)$$

Dans la situation représentée sur la figure 3.2, on a  $Z = 5$ ,  $P = 3$  et  $N = 2$ .

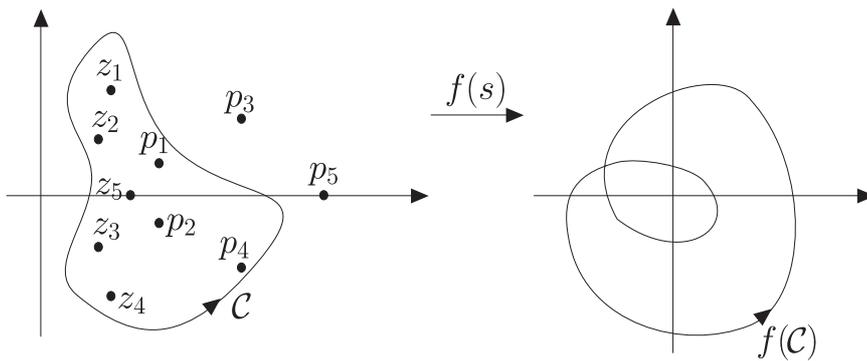


FIG. 3.2 – Théorème de Cauchy

**Exemple 3.3.1** *Si  $\mathcal{C} = \{e^{i\omega} | \omega \in [0, 2\pi]\}$  et  $f(s) = \frac{1}{s}$ , alors  $f(\mathcal{C}) = \{e^{-i\omega} | \omega \in [0, 2\pi]\}$ . Sur cet exemple, il est clair que  $N = -1$ ,  $Z = 0$  et  $P = 1$ . Et donc le théorème de Cauchy se trouve satisfait (car  $-1 = 0 - 1$ ).*

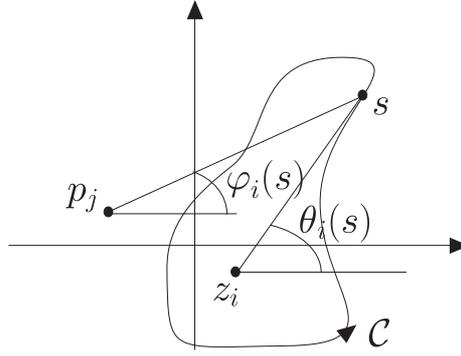


FIG. 3.3 – Illustration du principe du théorème de Cauchy

**Preuve** : Nous allons supposer que  $f$  est rationnelle, c'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme

$$f(s) = \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)} \quad (3.18)$$

En prenant l'argument de cette équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \arg f(s) &= \sum_i \arg(s - z_i) - \sum_j \arg(s - p_j) \\ &= \sum_i \theta_i(s) - \sum_j \varphi_j(s) \end{aligned} \quad (3.19)$$

où  $\theta_i(s) \triangleq \arg(s - z_i)$  et  $\varphi_j(s) \triangleq \arg(s - p_j)$ , comme illustré sur la figure 3.3. Si  $s$  effectue un déplacement infinitésimal sur  $\mathcal{C}$ , alors

$$d \arg f(s) = \sum_i d\theta_i(s) - \sum_j d\varphi_j(s). \quad (3.20)$$

Soit  $s_0$  un point de  $\mathcal{C}$ . Supposons que  $s$  effectue un tour complet de  $\mathcal{C}$  en partant de  $s_0$ . L'équation ci-dessus nous donne

$$\Delta \arg f(s) = \sum_i \Delta \theta_i(s) - \sum_j \Delta \varphi_j(s) \quad (3.21)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de variation lorsque  $s$  parcourt un tour complet. Par exemple, sur la figure 3.3, on a  $\Delta \theta_i(s) = 2\pi$  alors que  $\Delta \varphi_j(s) = 0$ . Or

$$\begin{aligned} \Delta \arg f(s) &= 2\pi \times \text{nombre de tours de } f(s) \text{ autour de } 0 = 2\pi \times N \\ \Delta \theta_i(s) &= 2\pi \times \text{si } z_i \text{ est dans } \mathcal{C} \text{ et } 0 \text{ sinon} = 2\pi \times Z \\ \Delta \varphi_j(s) &= 2\pi \times \text{si } p_j \text{ est dans } \mathcal{C} \text{ et } 0 \text{ sinon} = 2\pi \times P \end{aligned}$$

donc  $N = Z - P$ . ■

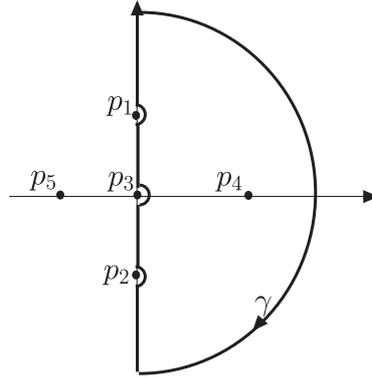


FIG. 3.4 – Contour de Bromwich

### 3.3.3 Contour de Bromwich

Le contour de Bromwich  $\gamma$  associée à une fonction de transfert

$$H(s) = \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)} \quad (3.22)$$

est une courbe fermée qui enferme tous les nombres complexes à partie réelle strictement positives et aucun complexe à partie réelle strictement négative. Ce contour évite les pôles à partie réelle nulle. La figure 3.4 illustre cette notion dans le cas où  $H(s)$  possède 5 pôles dont 3 sont à partie réelle nulle. Les petits demi-cercles correspondent à des *évitements* de pôles à partie réelle nulle et le grand demi cercle représente la partie du contour qui se trouve à l'infini. Attention, le contour de Bromwich tourne dans le sens indirect.

**Remarque 3.3.1** Si  $H(s)$  est propre, l'image de la partie du contour qui se trouve en l'infini est un nombre réel et donc  $H(\gamma)$  correspond au lieu de Nyquist.

### 3.3.4 Théorème de Nyquist

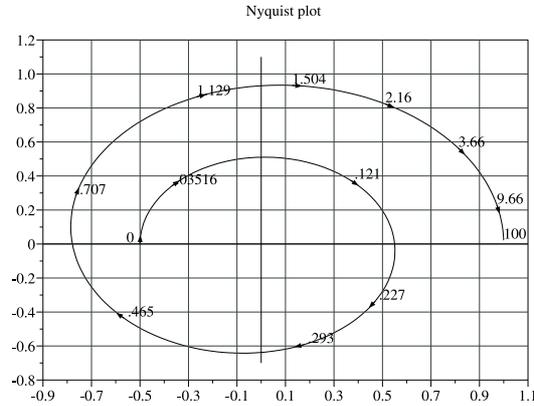
**Théorème 3.3.2 (Nyquist)** Notons  $Z$ , le nombre de zéros de  $H(s)$  dans  $\gamma$ .  $H(s)$  ne contient aucun pôle à partie réelle strictement positive si et seulement si  $H(\gamma)$  fait  $Z$  tours (dans le sens indirect) autour de zéro.

**Preuve :** Si on applique le théorème de Cauchy au contour de Bromwich (qui cette fois tourne dans le sens direct), on obtient que  $H(s)$  entoure  $Z - P$  fois le point 0 dans le sens direct, lorsque  $s$  parcourt le contour. Cela est équivalent à dire que  $H(\gamma)$  fait  $Z - P$  fois le tour du point 0 dans le sens indirect (car  $\gamma$  tourne dans le sens indirect). Ainsi,  $P = 0$  est équivalent dire que  $H(\gamma)$  fait  $Z$  fois le tour du point 0 dans le sens indirect. ■

**Exemple.** On considère le système d'ordre 3

$$H(s) = \frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

d'entrée  $u$  et de sortie  $y$ . Son diagramme de Nyquist est donné ci-dessous.



Vérifions le théorème de Nyquist.  $H(s)$  est stable et il y a 3 pôles instables donc  $H(\gamma)$  devrait faire 3 tours (dans le sens indirect). On voit ici seulement 1 tour et demi. Pour voir les trois tours attendu, il convient de rajouter les points  $H(i\omega)$  correspondant à  $\omega < 0$ .

### 3.3.5 Critère de Nyquist

Considérons un système de fonction de transfert  $G(s)$  bouclé par un retour unitaire négatif (voir figure 3.5). La fonction de transfert du système bouclé est donnée par

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}. \quad (3.23)$$

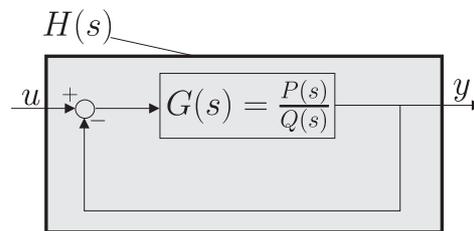


FIG. 3.5 – Système  $G(s)$  bouclé afin de former le système  $H(s)$

**Critère de Nyquist :**  $H(s)$  n'a aucun pôle strictement instable si et seulement si  $G(\gamma)$  entoure (dans le sens direct (○)) le point critique  $-1$  autant de fois que le nombre de pôles strictement instable de  $G(s)$ .

**Preuve :** Dans une première étape **(a)**, nous allons montrer que les pôles de  $H$  sont les zéros de  $1 + G$ . Dans la deuxième étape **(b)**, nous montrerons le critère de Nyquist.

**(a)** Si  $G(s) = P(s)/Q(s)$

$$H(s) = \frac{\frac{P(s)}{Q(s)}}{1 + \frac{P(s)}{Q(s)}} = \frac{P(s)}{P(s) + Q(s)}. \quad (3.24)$$

Les pôles  $s$  de  $H$ , qui satisfont  $P(s) + Q(s) = 0$ , sont donc les zéros de  $1 + G(s)$  qui satisfont  $1 + \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$ . Notons que nous supposons ici que les polynômes  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont premiers entre eux afin qu'aucune simplification ne puisse s'effectuer dans le rapport  $P(s)/Q(s)$ .

**(b)**  $H(s)$  n'a aucun pôle instable  $\Leftrightarrow H(s)$  n'a aucun pôle dans  $\gamma \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} 1 + G(s)$  n'a aucun zéro dans  $\gamma \stackrel{(\text{Cauchy})}{\Leftrightarrow} 1 + G(\gamma)$  entoure 0 ( $\odot$ ) autant de fois que le nombre de pôles de  $1 + G(s)$  instables  $\Leftrightarrow G(\gamma)$  entoure  $-1$  ( $\odot$ ) autant de fois que le nombre de pôles de  $G(s)$  instable (en effet, les pôles de  $1 + G$  sont ceux de  $G$ ). ■

Un des corollaire immédiat du critère de Nyquist est le suivant.

**Corollaire :** Si  $G(s)$  est asymptotiquement stable, alors  $H(s)$  est asymptotiquement stable si et seulement si  $G(\gamma)$  n'entoure pas le point critique  $-1$ .

### 3.3.6 Exemple

Le lieu de Nyquist d'un système  $G(s)$  stable en boucle ouverte et de gain statique égal à 2 est donné sur la gauche de la figure 3.6. On boucle  $G(s)$  après avoir introduit un régulateur proportionnel  $K > 0$ . Cherchons les valeurs de  $K$  pour lesquelles le système bouclé soit stable. D'après le critère de Nyquist, le système bouclé  $H(s)$  n'a aucun pôle strictement instable si et seulement si  $G_1(\gamma)$ , où  $G_1(s) = KG(s)$  entoure ( $\odot$ ) le point critique  $-1$  autant de fois que le nombre  $N$  de pôles strictement instable de  $G_1(s)$ . Puisque  $N = 0$ ,  $G_1(\gamma)$  ne doit donc pas entourer le point critique  $-1$ . D'après la figure, pour  $K = 1$ ,  $H(s)$  est stable. Pour  $K$  quelconque,  $H(s)$  est stable si

$$-1 \in ] -\infty, -2.5K] \cup [-1.5K, -0.5K], \quad (3.25)$$

c'est-à-dire, en divisant par  $K$ ,

$$-\frac{1}{K} \in ] -\infty, -2.5] \cup [-1.5, -0.5]. \quad (3.26)$$

Ainsi

$$-K \in [-\frac{1}{2.5}, 0] \cup [-\frac{1}{0.5}, -\frac{1}{1.5}], \quad (3.27)$$

c'est-à-dire

$$K \in [0, \frac{1}{2.5}] \cup [\frac{1}{1.5}, \frac{1}{0.5}]. \quad (3.28)$$

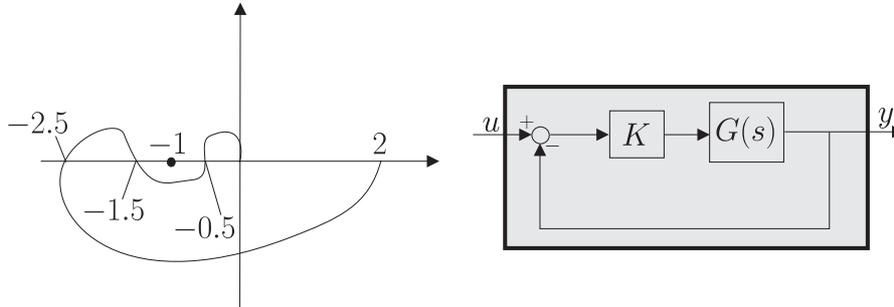


FIG. 3.6 – Diagramme de Nyquist de  $G(s)$

### 3.4 Critère du revers

Le critère du revers que nous allons donner dans ce paragraphe ne s'applique l'étude en stabilité de système stable et propres (c'est-à-dire que le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur).

**Critère du revers :** Si  $G(s)$  est propre et asymptotiquement stable, alors  $H(s)$  est asymptotiquement stable si et seulement si le lieu de Nyquist laisse le point critique  $-1$  sur sa gauche.

**Preuve.** Prenons

$$G(s) = \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{q=1}^n (s - p_q)}.$$

On a

$$\begin{aligned} \arg(G(i\omega)) &= \arg\left(\frac{\prod_{k=1}^m (i\omega - z_k)}{\prod_{q=1}^n (i\omega - p_q)}\right) \\ &= \arg\left(\prod_{k=1}^m (i\omega - z_k)\right) - \arg\left(\prod_{q=1}^n (i\omega - p_q)\right) \\ &= \sum_{k=1}^m \arg(i\omega - z_k) - \sum_{q=1}^n \arg(i\omega - p_q) \end{aligned}$$

Si  $\omega \rightarrow -\infty$ , alors  $\arg(i\omega - z_k) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$  et  $\arg(i\omega - p_q) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$  et donc  $\arg(G(i\omega)) \rightarrow -\frac{\pi}{2}(m - n)$ . De même, si  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\arg(G(i\omega)) \rightarrow \frac{\pi}{2}(m - n)$ . Donc  $\arg(G(i\omega))$  varie de  $\pi(m - n)$  lorsque  $\omega$  varie de  $-\infty$  à  $\infty$ . Donc,  $G(i\omega)$  effectue  $\frac{m-n}{2}$  tours autour de zéro.

Or  $m \leq n$  (le système est supposé propre), donc  $G(i\omega)$  effectue  $\frac{n-m}{2}$  tours autour de zéro dans le sens indirect. Ainsi, dire que  $G(i\omega)$  n'entoure pas  $-1$  (comme nous l'affirme le corollaire du critère de Nyquist) revient à dire que  $G(i\omega)$  laisse le point critique  $-1$  sur sa gauche.

# Chapitre 4

## Synthèse des régulateurs

### 4.1 Régulateur PID

La plupart des régulateurs utilisés dans les applications industrielles sont des régulateurs de type *proportionnel, intégral et dérivée*. Ils sont adaptés à la commande des systèmes déjà stable et avec des comportements qui s'apparentent à un système du premier ou du deuxième ordre. Nous allons montrer à travers un l'exemple simple d'un chariot roulant sur un plan horizontal le principe de cette commande PID et montrerons ainsi en quoi elle constitue une approche naturelle pour la régulation d'une grande classe de systèmes.

Considérons un chariot glissant sur un plan horizontal. Soit  $y$  la position du chariot par rapport au point 0. Le régulateur (voir figure 4.1) doit agir sur ce chariot par une force  $u$  dans le but que la position  $y$  de ce dernier soit égale à la consigne  $w$ .

#### 4.1.1 Commande proportionnelle

Supposons que notre chariot se trouve à droite de la consigne (c'est-à-dire  $y > w$ ), il semble naturel de pousser le chariot vers la gauche d'autant plus que le chariot est à droite de la consigne. Une structure possible pour notre régulateur est donnée par la relation

$$u(t) = k_p e(t), \tag{4.1}$$

où  $e = w - y$  est l'erreur entre la position désirée  $w$  et la position réelle  $y$ .

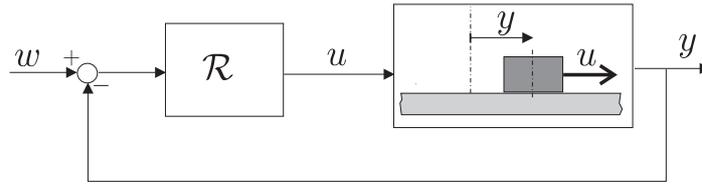


FIG. 4.1 – Chariot à commander afin que  $y$  soit égal à la consigne  $w$

Dans notre cas, il faudra choisir  $k_p$  positif. Plus  $k_p$  sera grand et plus la commande sera nerveuse. Cette commande qui semble la plus naturelle n'est pas très efficace. En effet, imaginons que le chariot roule sans pratiquement aucun frottement et se trouve initialement loin de sa consigne, la commande proportionnelle va, pour le ramener, lui faire prendre de la vitesse. Tant que le chariot n'a pas atteint sa consigne, ce dernier accélère. Mais une fois que le chariot a atteint sa consigne, le chariot va, du fait de son élan, dépasser cette consigne. Un phénomène dit de *pompage* prend place où le chariot effectue un grand nombre d'aller et retour avant de s'arrêter sur sa consigne.

### 4.1.2 Commande proportionnelle et dérivée

Afin d'éviter le phénomène de pompage, il semble naturel de vouloir ralentir le chariot lorsqu'il prend trop de vitesse, ou s'approche trop rapidement de sa consigne. Une commande prenant en compte la dérivée de l'erreur  $e = w - y$  de la forme

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \dot{e}(t) \quad (4.2)$$

permet en effet de freiner le chariot et le faire tendre en douceur vers sa consigne  $w$ . On règle  $k_d$ , pas trop petit pour éviter le pompage, et pas trop grand pour que le chariot puisse atteindre rapidement sa consigne.

### 4.1.3 Commande proportionnelle, intégrale et dérivée

Le rajout d'un terme intégral sur notre régulateur, qui prend alors la forme

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \dot{e}(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (4.3)$$

permet de rejeter les perturbations constantes. Supposons par exemple qu'il y ait une pente le sol où se trouve le chariot ou qu'il y ait un vent constant poussant sur notre chariot. Il est clair qu'une commande de type proportionnelle (avec éventuellement un terme dérivée) stabilisera toujours notre système, mais notre sortie  $y$  ne convergera pas

exactement en  $w$ . On dit qu'il se produit un *biais*. En revanche, avec un terme intégral, un tel biais ne peut exister. Supposons en effet qu'un tel biais se produise, l'intégrale de l'erreur deviendra (au bout un temps suffisamment long non négligeable, et viendra, si le coefficient  $k_i$  est bien choisi, corriger la position du chariot afin de corriger le biais.

#### 4.1.4 Conclusion

Une régulation de type PID est naturelle pour stabiliser de façon efficace les systèmes simples. Les coefficients peuvent généralement être réglés à la main, en fonction du comportement voulu : pour une commande nerveuse, il faut augmenter le terme proportionnel. Pour éviter le pompage, il faut augmenter le terme dérivée. Enfin, si une fois stabilisé par le système met trop de temps à éliminer le biais, il faut augmenter le terme intégral.

En revanche, pour les système plus complexes, une PID s'avère souvent insuffisante pour stabiliser correctement notre système. Nous lui préférons une méthode plus systématique comme celle présentée dans la section suivante.

## 4.2 Régulateur RST

### 4.2.1 Formulation du problème

Considérons le système de fonction de transfert  $\frac{B(s)}{A(s)}$ . On cherche un régulateur  $\mathcal{R}$  tel que le système bouclé possède les pôles que l'on désire (voir figure 4.2).

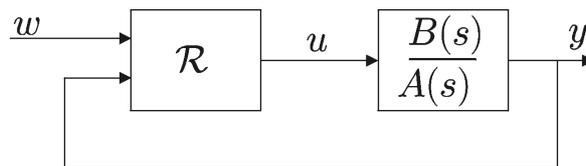


FIG. 4.2 – Régulateur  $\mathcal{R}$  à construire afin de stabiliser le système  $B(s)/A(s)$

Puisque  $\mathcal{R}$  possède deux entrées, sa matrice de transfert  $\mathbf{M}(s)$  (qui généralise la fonction de transfert) possède une ligne et deux colonnes :

$$\mathbf{M}(s) = (R_u(s) \ R_y(s)), \quad (4.4)$$

où  $R_u(s)$  et  $R_y(s)$  sont des fonctions rationnelles en  $s$ . Ainsi,

$$u(s) = R_w(s)w(s) + R_y(s)y(s). \quad (4.5)$$

Après réduction au même dénominateur, on obtient, une équation de la forme

$$u(s) = \frac{T(s)}{S(s)}w(s) - \frac{R(s)}{S(s)}y(s), \quad (4.6)$$

où  $R, S$  et  $T$  sont des polynômes en  $s$  et où  $S$  est unitaire. Le système bouclé peut donc être représenté par la figure 4.3, où  $d$  représente une perturbation supposée inconnue mais constante, censée représenter les incertitudes avec lequel notre système est modélisé par la fonction de transfert  $B(s)/A(s)$ .

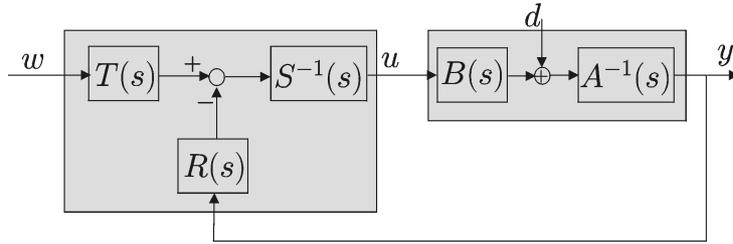


FIG. 4.3 – Principe de la commande RST

On a (en omettant les  $s$ )

$$\begin{aligned} y &= A^{-1} (d + BS^{-1} (Tw - Ry)) \\ &= A^{-1}d + A^{-1}BS^{-1}Tw - A^{-1}BS^{-1}Ry. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donc

$$ASy = Sd + BTw - BRy. \quad (4.8)$$

Ainsi,

$$y = \frac{Sd + BTw}{AS + BR} = \frac{BT}{AS + BR}w + \frac{S}{AS + BR}d. \quad (4.9)$$

Il est clair que  $T(s)$ , qui se trouve au numérateur, ne peut influencer la stabilité du système. Nous allons donc tout simplement le fixer à une constante  $T_0$ .

Le problème peut donc se formuler comme suit :

**Problème :** Trouver  $R, S$  et  $T_0$  tels que

1. au bout d'un temps suffisamment long,  $y(t) = w$  (rappelons que  $d$  et  $w$  sont des constantes); le fait que  $y(t)$  ne dépende plus de  $d$  est connue sous le nom de *rejet de perturbation*
2. les pôles du système bouclé soient ceux que l'on désire,
3. le régulateur soit un système strictement propre, c'est-à-dire que la fonction de transfert  $\frac{R(s)}{S(s)}$  doit être strictement propre.

1) Pour avoir  $y(t) = w$ , pour  $t \rightarrow \infty$ , il suffit d'avoir

$$\frac{BT}{AS + BR}w + \frac{S}{AS + BR}d = w, \quad (4.10)$$

pour  $s = 0$  (qui correspond à la fréquence nulle) et pour tout  $w$  et tout  $d$ . Donc

$$\frac{BT}{AS + BR}\Big|_{s=0} = 1, \quad \frac{S}{AS + BR}\Big|_{s=0} = 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \text{(i)} & S(0) = 0, \\ \text{(ii)} & A(0)S(0) + B(0)R(0) \neq 0, \\ \text{(iii)} & T_0 = R(0). \end{cases} \quad (4.11)$$

Notons que la condition (i) revient à imposer un intégrateur dans la chaîne directe.

2) Soit  $P$  le polynôme unitaire qui possède les pôles  $\lambda_i$  que l'on désire ( $P(s) = \prod_i (s - \lambda_i)$ ), il faut que les  $S$  et  $R$  que l'on cherche soient tels que  $AS + BR = P$ . Cette équation correspond à une équation de Bezout. Attention, les parties réelles des  $\lambda_i$  doivent être  $< 0$ , ainsi le système régulé est stable et la condition (ii) se trouve satisfaite.

3) Il faut  $\deg R < \deg S$ . On peut prendre

$$\deg S = \deg R + 1. \quad (4.12)$$

En conclusion le problème devient : Trouver  $R, S$  et  $T$  tels que

$$\begin{cases} S(0) = 0 & \text{(rejet de perturbation)} \\ T_0 = R(0) & \text{(gain statique } y/w \text{ à 1)} \\ AS + BR = P & \text{(dynamique désirée stable)} \\ \deg S = \deg R + 1 & \text{(propriété stricte du régulateur)}. \end{cases}$$

### 4.2.2 Résolution

Remarquons tout d'abord que, dans l'équation de Bezout,

- nous avons  $\deg S + \deg R + 1$  inconnues : les  $\deg S$  coefficients de  $S$  (car on sait déjà que  $S(0) = 0$ ) et les  $\deg R + 1$  coefficients de  $R$ ;
- et que nous disposons de  $\deg A + \deg S + 1$  équations : celles induites par l'équation de Bezout  $AS + BR = P$ . En effet, comme les systèmes  $\frac{A(s)}{B(s)}$  et  $\frac{R(s)}{S(s)}$  sont propres,

$$\deg(AS + BR) = \max(\deg(AS), \deg(BR)) = \deg(AS) = \deg A + \deg S.$$

Afin d'avoir autant d'équation que d'inconnues, il nous faut

$$\deg S + \deg R + 1 = \deg A + \deg S + 1, \quad (4.13)$$

c'est-à-dire

$$\deg R = \deg A. \quad (4.14)$$

Ainsi, d'après (4.12),  $\deg S = \deg A + 1$ . En posant  $\deg A = n$ , nous avons

$$\deg A = n, \deg R = n, \deg S = n + 1 \text{ et } \deg P = 2n + 1.$$

Les polynômes impliqués dans notre problème sont

$$\begin{aligned} A(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \\ B(s) &= b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 \\ R(s) &= r_ns^n + r_{n-1}s^{n-1} + \dots + r_1s + r_0 \\ S(s) &= s_{n+1}s^{n+1} + s_ns^n + s_{n-1}s^{n-1} + \dots + s_1s + 0 \\ P(s) &= p_{2n+1}s^{2n+1} + p_{2n}s^{2n} + \dots + p_1s + p_0 \end{aligned}$$

L'équation de Bezout  $AS + BR = P$  se traduit par les  $2n + 1$  équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} s^{2n+1} : \quad s_{n+1} = p_{2n+1}, \\ s^{2n} : \quad a_{n-1}s_{n+1} + b_nr_n + s_n = p_{2n}, \\ \\ s^1 : \quad a_0s_1 + b_0r_1 + b_1r_0 = p_1, \\ s^0 : \quad b_0r_0 = p_0. \end{array} \right.$$

Ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & \ddots & 0 & & 0 & b_n & & & & 0 \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & b_{n-1} & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ a_0 & & \ddots & \ddots & 1 & b_1 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & b_0 & \ddots & & \ddots & b_n \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & a_{n-2} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & b_{n-1} \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & a_0 & 0 & 0 & \ddots & b_1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{n+1} \\ s_n \\ s_{n-1} \\ \vdots \\ s_1 \\ r_n \\ r_{n-1} \\ \vdots \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{2n+1} \\ p_{2n} \\ p_{2n-1} \\ \vdots \\ p_{n+1} \\ p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

Ce système linéaire où les inconnues sont les  $s_i$  et les  $r_i$  est appelé système de Sylvester. Ce système est inversible que si les polynômes  $A(s)$  et  $B(s)$  sont premiers entre eux ( $A \wedge B = 1$ ).

### 4.2.3 Exemple

On cherche un régulateur pour le système

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s + 3}{s - 2}. \quad (4.15)$$

On a  $2n+1$  pôles à placer, par exemple  $-1, -1+i, -1-i$ . Donc  $P(s) = (s+1)(s+1-i)(s+1+i) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2$ . Donc

$$S(s) = s_2s^2 + s_1s + s_0 \text{ et } R(s) = r_1s + r_0. \quad (4.16)$$

L'équation de Bezout est

$$AS + BR = P \Leftrightarrow (s-2)(s_2s^2 + s_1s + s_0) + (s+3)(r_1s + r_0) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2.$$

Soit après développement

$$s_2s^3 + (s_1 + r_1 - 2s_2)s^2 + (-2s_1 + s_0 + r_0 + 3r_1)s - 2s_0 + 3r_0 = s^3 + 3s^2 + 4s + 2,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} s_2 & = 1, \\ s_1 + r_1 - 2s_2 & = 3, \\ -2s_1 + s_0 + r_0 + 3r_1 & = 4, \\ -2s_0 + 3r_0 & = 2. \end{cases} \quad (4.17)$$

Puisque  $s_0 = 0$  (effet intégral), le système de Sylvester s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Donc

$$\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2.33 \\ 2.67 \\ 0.67 \end{pmatrix}.$$

Finalement,  $T = R(0) = \frac{2}{3}$ . Donc le régulateur à câbler possède pour relation entrée-sortie

$$u(s) = \left( \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + \frac{7}{3}s} \right) w(s) - \left( \frac{\frac{8}{3}s + \frac{2}{3}}{s^2 + \frac{7}{3}s} \right) y(s).$$

# Index

- amortissement réduit, 30
- automatique, 9
  
- Bezout, 51
  
- capteurs, 7
- chauffage d'une maison, 9
- coefficient de surtension, 32
- commande PID, 47, 48
- commande proportionnelle, 47
- commande proportionnelle et dérivée, 48
- commande RST, 49
- conditions initiales, 7, 11
- consigne, 9
- constante de temps, 22, 29
- contour de Bromwich, 42
- convolution, 13
- critère de Nyquist, 39, 43
- critère de Routh, 36
- critère de stabilité, 35
- critère des pôles, 35
- critère du revers, 45
  
- déphasage, 23
- dérivateur, 29
- déterminisme, 7
- diagramme de Black-Nychols, 25
- diagramme de Bode, 25
- diagramme de Nyquist, 25
- diagramme fréquentiel, 24
  
- entrées, 7
  
- fonction analytique, 39
- fonction de transfert, 16
  
- gain, 23
- gain statique, 24
  
- intégrateur, 8, 28
  
- mode d'un signal, 20
  
- pôle d'un système, 20
- phénomène de pompage, 48
- PID, 47
- polynôme caractéristique, 15, 17
- propagation des modes, 22
- pulsation naturelle, 30
- pulsation propre, 31
  
- régulateur, 9
- régulateur RST, 49
- réponse forcée, 15
- réponse fréquentielle, 23
- réponse impulsionnelle, 12
- réponse indicielle, 12, 26
- réponse libre, 15
- résolution d'équations différentielles, 14
- résonance, 31
- redresseur, 8
- rejet de perturbation, 50
  
- signal, 8
- signal causal, 12
- sorties, 7
- stabilité asymptotique, 35
- stabilité d'un mode, 22
- stabilité d'un système, 22, 35
- système, 7
- système bouclé, 9, 17

systeme causal, 7  
systeme de Sylvester, 52  
systeme du premier ordre, 29  
systeme du second ordre, 30  
systeme invariant, 8  
systeme lineaire, 8  
systeme monovariabile, 11  
systemes en parallele, 17  
systemes en serie, 17  
  
table de Routh, 37  
temps, 7  
theoreme de Cauchy, 11, 40  
theoreme de Nyquist, 42  
transformee de Laplace, 14  
  
vecteur initial, 11