

Chapitre 7

Filtre de Kalman

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons proposé des outils pour la commande non linéaire des robots. Pour cela, nous avons supposé que le vecteur d'état était parfaitement connu. Or, cela n'est pas le cas en pratique. Ce vecteur doit être estimé à partir des mesures capteurs. Dans le cas où les seules variables inconnues sont associées à la position du robot, le chapitre 5 donne des pistes pour les retrouver. Dans le cas plus général le *filtrage* ou *observation d'état* cherche à reconstruire ce vecteur d'état au mieux à partir de toutes les données mesurées sur le robot. Le but de ce chapitre est de montrer comment une telle reconstruction peut être faite, dans un contexte stochastique où le système à observer est supposé linéaire. C'est l'objectif du filtre de Kalman [21] qui sera développé dans ce chapitre. Le filtre de Kalman est utilisé dans de nombreuses applications de robotique mobile, bien que les robots considérés soient fortement non-linéaires. Pour de telles applications, les conditions initiales sont supposée bien connues afin de permettre une linéarisation fiable.

7.1 Matrices de covariance

Le filtre de Kalman repose principalement sur la notion de matrice de covariance qu'il est important de maîtriser pour comprendre la synthèse et l'utilisation de l'observateur. Cette section rappelle les notions fondamentales sur les matrices de covariances.

7.1.1 Définitions et interprétations

Considérons deux vecteurs aléatoires $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Les espérances mathématiques de \mathbf{x} et \mathbf{y} sont dénotées $\bar{\mathbf{x}} = E(\mathbf{x})$, $\bar{\mathbf{y}} = E(\mathbf{y})$. Définissons les *variations* de \mathbf{x} et \mathbf{y} par $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ et $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$. La *matrice de covariance* est donnée par

$$\Gamma_{\mathbf{xy}} = E(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}^T) = E\left((\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T\right).$$

La matrice de covariance pour \mathbf{x} est définie par

$$\Gamma_{\mathbf{x}} = \Gamma_{\mathbf{xx}} = E(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T) = E\left((\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T\right).$$

Celle pour \mathbf{y} est

$$\mathbf{\Gamma}_y = \mathbf{\Gamma}_{yy} = E(\tilde{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{y}}^T) = E\left((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T\right).$$

Notons que $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}$ sont des vecteurs aléatoires alors que $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{\Gamma}_x, \mathbf{\Gamma}_y, \mathbf{\Gamma}_{xy}$ sont déterministes. Une matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}_x$ d'un vecteur aléatoire \mathbf{x} est toujours définie positive (nous écrirons $\mathbf{\Gamma}_x \succ \mathbf{0}$), sauf cas dégénéré. Sur la machine, un vecteur aléatoire peut être représenté par un nuage de points associés à des réalisations. Considérons le programme MATLAB suivant

```
x=2+randn(1000,1); e=randn(1000,1); y=2*x.^2+e; plot(x,y,'k'); xbar=mean(x); ybar=mean(y);
xtilde=x-xbar; ytilde=y-ybar; plot(xtilde,ytilde,'k'); G_x=mean(xtilde.^2); G_y=mean(ytilde.^2);
G_xy=mean(xtilde.*ytilde);
```

Nous obtenons la figure 7.1 qui nous donne une représentation des variables aléatoires x, y (sous figure de gauche) et \tilde{x}, \tilde{y} (sous figure de droite). Le programme nous donne aussi les estimations suivantes :

$$\bar{x} \simeq 1.99, \bar{y} \simeq 9.983, \Gamma_x \simeq 1.003, \Gamma_y \simeq 74.03, \Gamma_{xy} \simeq 8.082,$$

où $\bar{x}, \bar{y}, \Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_{xy}$ correspondent à `xbar, ybar, G_x, G_y, G_xy`.

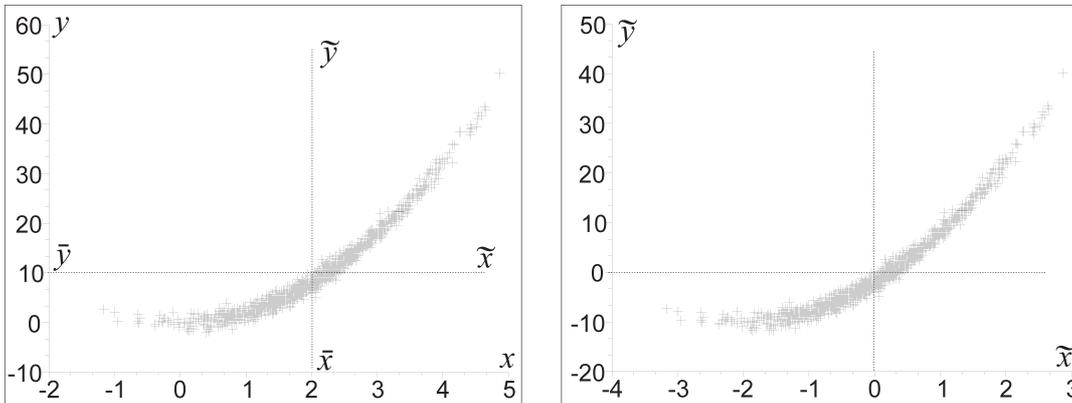


Figure 7.1 – Un nuage de points pour représenter une paire de 2 variables aléatoires

Deux vecteurs aléatoires \mathbf{x} et \mathbf{y} sont linéairement indépendants (ou non corrélés ou orthogonaux) si $\mathbf{\Gamma}_{xy} = \mathbf{0}$. Sur la figure 7.2, les deux nuages de points correspondent à des variables non corrélées. Seule la sous figure de droite correspond à des variables indépendantes.

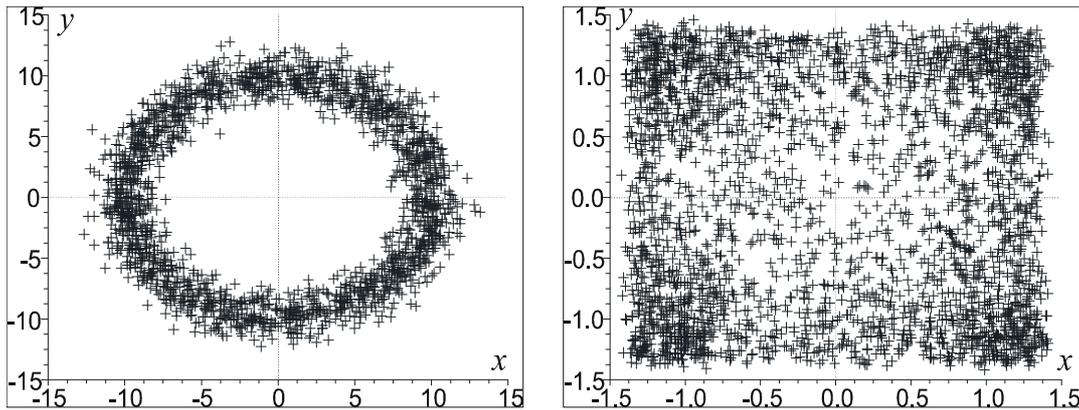


Figure 7.2 – (gauche) : dépendent mais non corrélé; (droite) : indépendant

La figure de gauche a été générée par le programme suivant.

```
rho=10+randn(2000,1) ; theta=2*pi*rand(2000,1) ; x=rho.*sin(theta) ; y=rho.*cos(theta) ;
```

Et la figure de droite a été générée comme suit.

```
x=atan(2*randn(3000,1)) ; y=atan(2*randn(3000,1)) ;
```

Blancheur. Un vecteur aléatoire \mathbf{x} est dit *blanc* si toutes ses composantes x_i sont indépendantes entre elles. Dans un tel cas, la matrice de covariance $\Gamma_{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} est diagonale.

7.1.2 Propriétés

Une matrice de covariance est symétrique et positive, c'est-à-dire, que toutes ses valeurs propres sont réelles et positives. L'ensemble de toutes les matrices de covariance de $\mathbb{R}^{n \times n}$ sera noté $\mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$.

Décomposition. Toute matrice symétrique Γ est diagonalisable et possède une base de vecteurs propres orthonormaux. On peut donc écrire

$$\Gamma = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^{-1}$$

où \mathbf{R} est une matrice de rotation (c'est-à-dire $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ et $\det \mathbf{R} = 1$). La matrice \mathbf{R} correspond aux vecteurs propres et \mathbf{D} est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres. Pour les matrices de covariance, ces valeurs propres sont positives.

Racine carrée. Si Γ est une matrice de covariance, elle possède une unique racine carrée qui soit une matrice de covariance. Cette dernière sera notée $\Gamma^{\frac{1}{2}}$. D'après le théorème de correspondance des valeurs propres, les valeurs propres de $\Gamma^{\frac{1}{2}}$ sont les racines carrées de celles des valeurs propres de Γ .

Exemple. Considérons le script MATLAB suivant : $\mathbf{A}=\text{rand}(3,3)$; $\mathbf{S1}=\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'$; $[\mathbf{R}, \mathbf{D}]=\text{eig}(\mathbf{S1})$; $\mathbf{S2}=\mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}'$; $\mathbf{A2}=\text{sqrtn}(\mathbf{S2})$; $\mathbf{S3}=\mathbf{A2} \cdot \mathbf{A2}'$. La matrice \mathbf{D} est diagonale et la matrice \mathbf{R} est une matrice de rotation qui contient les vecteurs propres de $\mathbf{S1}$. Les trois matrices $\mathbf{S1}$, $\mathbf{S2}$ et $\mathbf{S3}$ sont égales. Cela n'est pas le

cas pour les matrices \mathbf{A} et $\mathbf{A2}$ car seulement $\mathbf{A2}$ est symétrique. Ici, `sqrt` renvoie la racine carrée de $\mathbf{S2}$ et donc $\mathbf{A2}$ est une matrice de covariance.

Ordre. Si $\mathbf{\Gamma}_1$ et $\mathbf{\Gamma}_2$ appartiennent à $\mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_2$ appartient aussi à $\mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$. Cela revient à dire que $\mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$ est un cône convexe de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Définissons la relation d'ordre

$$\mathbf{\Gamma}_1 \leq \mathbf{\Gamma}_2 \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}_2 - \mathbf{\Gamma}_1 \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n).$$

On vérifie qu'elle est bien réflexive, antisymétrique et transitive. Si $\mathbf{\Gamma}_1 \leq \mathbf{\Gamma}_2$ alors l'ellipsoïde de confiance (voir le paragraphe qui suit) de niveau a de $\mathbf{\Gamma}_1$ est incluse dans celle correspondant à $\mathbf{\Gamma}_2$. Plus une matrice de covariance est petite (au sens de cette relation d'ordre) et plus elle est précise. On dira qu'elle est meilleure ou plus précise.

7.1.3 Ellipsoïde de confiance

Un vecteur aléatoire \mathbf{x} de \mathbb{R}^n peut être caractérisé par la paire $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}})$, à laquelle peut être associé un ellipsoïde de \mathbb{R}^n qui est censé enfermer les valeurs consistantes pour \mathbf{x} . En pratique, pour des raisons purement graphiques, nous sommes souvent intéressés par seulement deux composantes $\mathbf{w} = (x_i, x_j)$ de \mathbf{x} (l'écran d'un ordinateur est en effet bi-dimensionnel). La moyenne $\bar{\mathbf{w}}$ peut être déduite directement de $\bar{\mathbf{x}}$ par extraction des $i^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ composantes. La matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}$ peut elle aussi être obtenue à partir de $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}}$ par extraction des $i^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ lignes et colonnes. L'*ellipsoïde de confiance* associée à \mathbf{w} est décrite par l'inégalité

$$\mathcal{E}_{\mathbf{w}} : (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})^T \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{-1} (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}) \leq a^2,$$

où a est un réel positif arbitraire. Puisque $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{-1} \succ \mathbf{0}$, elle possède une racine carrée $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{-\frac{1}{2}}$ qui est aussi définie positive. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{w}} &= \left\{ \mathbf{w} \mid (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})^T \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}) \leq a^2 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{w} \mid \left\| \frac{1}{a} \cdot \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}) \right\| \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{w} \mid \frac{1}{a} \cdot \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}) \in \mathcal{U} \right\}, \text{ où } \mathcal{U} \text{ est le disque unité} \\ &= \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \bar{\mathbf{w}} + a \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{U} \right\} \\ &= \bar{\mathbf{w}} + a \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{U}. \end{aligned}$$

L'ellipsoïde $\mathcal{E}_{\mathbf{w}}$ peut donc être définie comme l'image du disque unité par la fonction affine $\mathbf{w}(\mathbf{s}) = \bar{\mathbf{w}} + a \cdot \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{s}$, comme illustré par la figure 7.3.

Remarque. Considérons un vecteur aléatoire gaussien normé centré \mathbf{s} . La variable aléatoire $z = \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ suit une loi du χ^2 , c'est-à-dire que sa densité de probabilité est donnée par

$$\pi_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

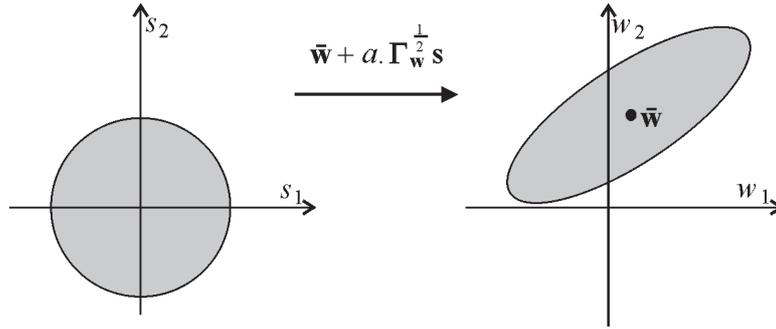


Figure 7.3 – Une ellipsoïde de confiance est l'image du cercle unité par une fonction affine

Pour un $a > 0$ donné, nous avons

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \text{prob}(\|\mathbf{s}\| \leq a) = \text{prob}(\mathbf{s}^T \mathbf{s} \leq a^2) = \text{prob}(z \leq a^2) = \int_0^{a^2} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) dz = 1 - e^{-\frac{1}{2}a^2}.$$

Et donc

$$a = \sqrt{-2 \ln(1 - \eta)}.$$

Cette relation nous permet de calculer le seuil a qu'il nous faut choisir pour avoir une probabilité d'appartenance à l'ellipsoïde de η . La fonction MATLAB suivante nous permet de tracer $\mathcal{E}_{\mathbf{w}}$ pour une probabilité η donnée. Pour dessiner l'ellipse $\mathcal{E}_{\mathbf{w}}$ on peut utiliser la fonction MATLAB suivante

```
function Draw_Ellipse(wbar,Gw,eta);
s=0 :0.01 :2*pi;
w=wbar*ones(size(s))+sqrtm(-2*log(1-eta)*Gw)*[cos(s);sin(s)];
plot(w(1,:),w(2,:));
```

7.1.4 Génération de vecteurs aléatoires gaussiens

Si nous générons n nombres aléatoires gaussiens centrés, nous obtenons la réalisation d'un vecteur aléatoire dont le centre est $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ et dont la matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}}$ est l'identité. Dans ce paragraphe, nous montrons comment, à partir d'un générateur de nombres aléatoire gaussiens centrés qui nous permet de réaliser \mathbf{x} , il est possible d'obtenir un vecteur aléatoire gaussien \mathbf{y} de dimension n d'espérance et de matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{y}}$. Le principe de cette génération repose sur le théorème suivant.

Théorème. Si \mathbf{x} , $\boldsymbol{\alpha}$ et \mathbf{y} sont trois vecteurs aléatoires liés par la relation $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b}$ (où \mathbf{A} et \mathbf{b} sont déterministes). Supposons que \mathbf{x} , $\boldsymbol{\alpha}$ soient indépendants et que $\boldsymbol{\alpha}$ soit centré, nous avons

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b} \\ \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^T + \mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{\alpha}}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Preuve. Nous avons

$$\bar{\mathbf{y}} = E(\mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}E(\mathbf{x}) + E(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{b} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}.$$

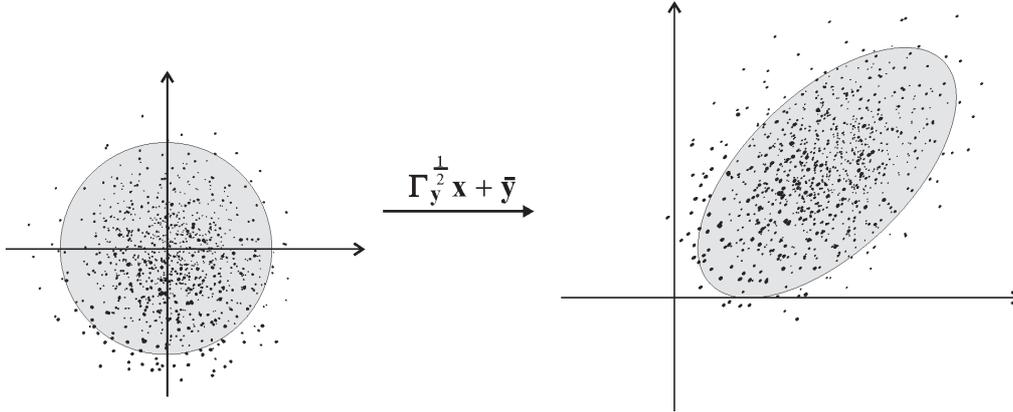


Figure 7.4 – A Gaussian vector is the image by an affine function of a white Gaussian vector

De plus,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mathbf{y}} &= E \left((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \right) \\
 &= E \left((\mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) (\mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b})^T \right) \\
 &= E \left((\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\alpha}) (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\alpha})^T \right) \\
 &= \underbrace{\mathbf{A} \cdot E(\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}^T) \cdot \mathbf{A}^T}_{=\Gamma_{\mathbf{x}}} + \underbrace{\mathbf{A} \cdot E(\tilde{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T)}_{=0} + \underbrace{E(\boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{x}}^T) \cdot \mathbf{A}^T}_{=0} + \underbrace{E(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T)}_{=\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}} \\
 &= \mathbf{A} \cdot \Gamma_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}^T + \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}},
 \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Ainsi, si \mathbf{x} est un vecteur aléatoire gaussien, blanc et unitaire centré (c'est-à-dire, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ et $\Gamma_{\mathbf{x}} = \mathbf{I}$), le vecteur aléatoire $\mathbf{y} = \Gamma_{\mathbf{y}}^{1/2} \mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}}$ aura une espérance de $\bar{\mathbf{y}}$ et une matrice de covariance égale à $\Gamma_{\mathbf{y}}$ (voir Figure 7.4). Donc, pour générer un vecteur aléatoire gaussien de matrice de covariance $\Gamma_{\mathbf{y}}$ et d'espérance $\bar{\mathbf{y}}$, nous utiliser cette propriété. Ainsi, la sous figure de droite de la Figure 7.4) a été obtenue par le script suivant : `n=1000 ; Gy=[3,1 ; 1,3] ; ybar=[2 ; 3] ; x=randn(size(ybar,1),n) ; y=ybar*ones(1,n)+sqrtm(Gy)*x ; plot(y(1, :),y(2, :),'.') ;`

7.2 Estimateur orthogonal non-biaisé

Considérons deux vecteurs aléatoires $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Le vecteur \mathbf{y} correspond au vecteur des mesures, qui est pour l'instant un vecteur aléatoire qui sera disponible qu'une fois la campagne de mesures effectuée. Le vecteur aléatoire \mathbf{x} est celui qu'il nous faut estimer. Un *estimateur* est une fonction $\phi(\mathbf{y})$ censée nous donner une estimation de \mathbf{x} connaissant la mesure \mathbf{y} . La figure 7.5 montre un estimateur non-linéaire correspondant à $E(x|y)$.

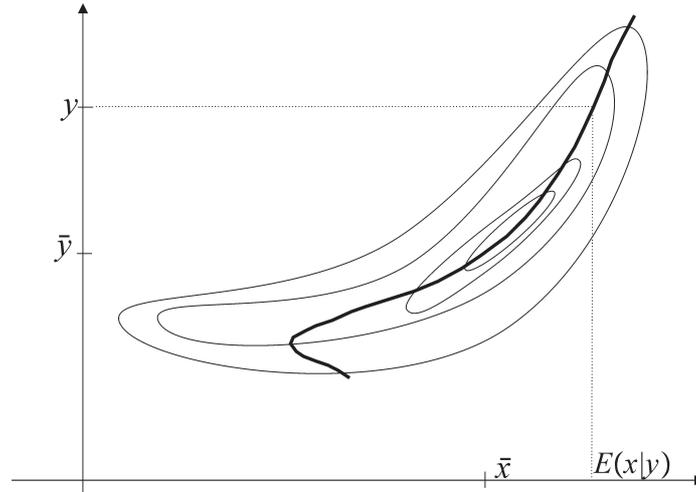


Figure 7.5 – Estimateur non-linéaire $E(x|y)$

Or, l'obtention d'une expression analytique pour un tel estimateur n'est généralement pas facile et on préfère se limiter aux estimateurs linéaires. Un *estimateur linéaire* est une fonction de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire de la forme

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad (7.2)$$

où $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Dans ce paragraphe, nous allons proposer une méthode capable de trouver un *bon* \mathbf{K} et *bon* \mathbf{b} à partir de la seule connaissance des moments du premier ordre $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$ et des moments du second ordre $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}}, \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{y}}, \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{xy}}$. L'*erreur d'estimation* est

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}.$$

L'estimateur est dit *non biaisé* si $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$. Il est *orthogonal* si $E(\boldsymbol{\varepsilon}\tilde{\mathbf{y}}^T) = \mathbf{0}$. Ce nom provient du fait que l'espace des variables aléatoires de \mathbb{R} peut être muni d'un produit scalaire défini par $\langle a, b \rangle = E((a - \bar{a})(b - \bar{b}))$ et que si ce produit scalaire est nul les deux variables aléatoires a et b sont dites orthogonales. Dans le cas vectoriel (qui est celui de notre paragraphe puisque $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\tilde{\mathbf{y}}$ sont des vecteurs), on dit que les deux vecteurs aléatoires \mathbf{a} et \mathbf{b} sont orthogonaux si leurs composantes le sont, c'est-à-dire $E((a_i - \bar{a}_i)(b_j - \bar{b}_j)) = 0$ pour tout (i, j) ou de façon équivalente $E((\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}})(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})^T) = \mathbf{0}$. La figure 7.6 représente les courbes de niveau d'une loi de probabilité pour le couple (x, y) . La droite illustre un estimateur linéaire. Piochons au hasard un couple (x, y) tout en respectant sa loi de probabilité. Il est clair que la probabilité d'être en dessous de la droite est forte, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir $\hat{x} < x$ est grande ou encore que $E(\boldsymbol{\varepsilon}) < 0$. L'estimateur est donc biaisé.

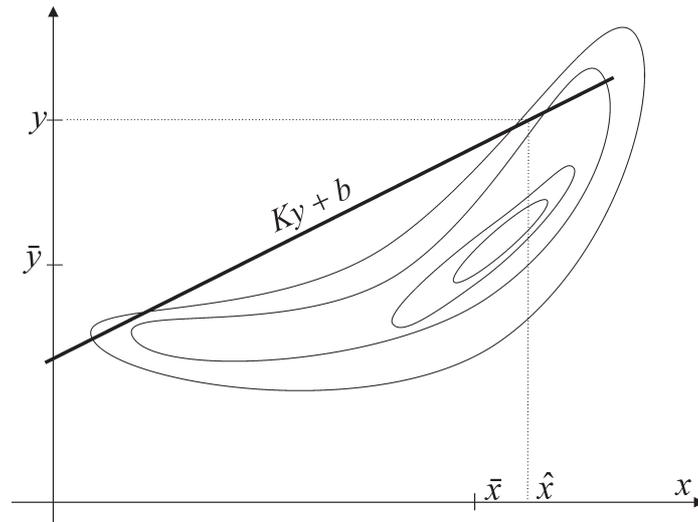


Figure 7.6 – Estimator linéaire biaisé

La figure 7.7 représente 4 estimateurs linéaires différents. Pour l'estimateur (a), $E(\varepsilon) < 0$ et pour l'estimateur (c), $E(\varepsilon) > 0$. Pour les estimateurs (b) et (d), $E(\varepsilon) = 0$ et donc les deux estimateurs sont non biaisés. Pourtant, il est clair que l'estimateur (d) est meilleur. Ce qui différencie les deux, c'est l'orthogonalité. Pour (d), on a $E(\varepsilon\tilde{y}) < 0$, (si $\tilde{y} > 0$, ε tend à être négatif alors que si $\tilde{y} < 0$, ε tend à être positif).

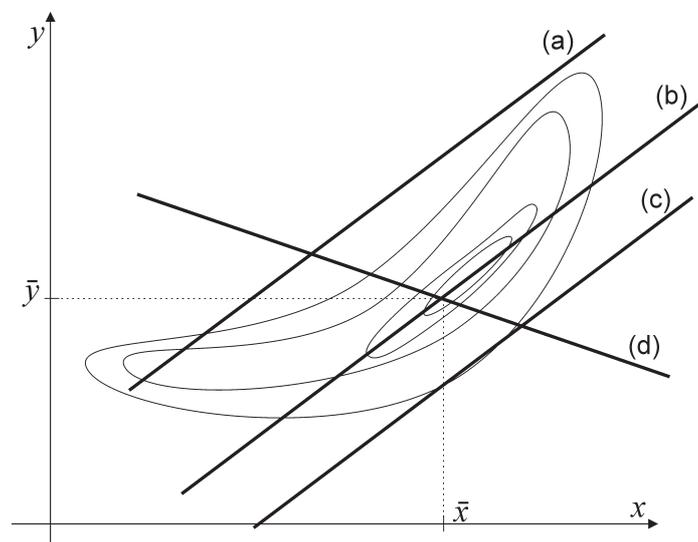


Figure 7.7 – Parmi ces quatre estimateurs linéaires, l'estimateur (b), qui est non biaisé et orthogonal, semble être le meilleur.

Théorème. Soient deux vecteurs aléatoires \mathbf{x} et \mathbf{y} . Il existe un unique estimateur orthogonal non

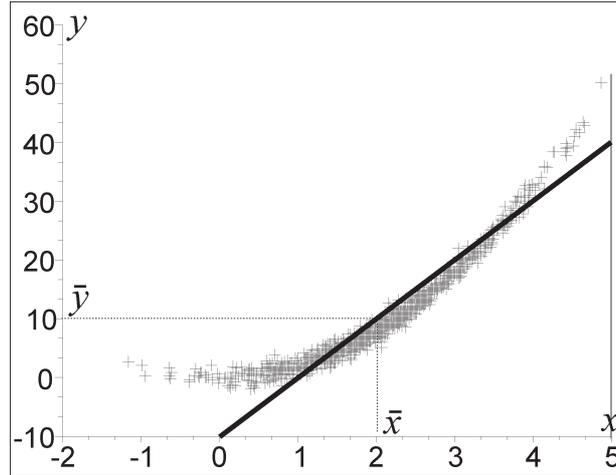


Figure 7.8 – Estimateur orthogonal linéaire et non biaisé

biaisé. Il est donné par

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \tag{7.3}$$

où

$$\mathbf{K} = \Gamma_{\mathbf{xy}} \Gamma_{\mathbf{y}}^{-1} \tag{7.4}$$

est appelé *gain de Kalman*.

Exemple. Considérons à nouveau l'exemple du paragraphe 7.1.1. Nous obtenons

$$\hat{x} = \bar{x} + \Gamma_{xy} \Gamma_y^{-1} \cdot (y - \bar{y}) = 2 + 0.1 * (y - 10).$$

Preuve du théorème. Nous avons

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = E(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \stackrel{(7.2)}{=} E(\mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{b} - \mathbf{x}) = \mathbf{K}E(\mathbf{y}) + \mathbf{b} - E(\mathbf{x}) = \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{b} - \bar{\mathbf{x}}.$$

L'estimateur est non biaisé si $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$, c'est-à-dire,

$$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}}. \tag{7.5}$$

Dans ce cas,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \stackrel{(7.2)}{=} \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{b} - \mathbf{x} \stackrel{(7.5)}{=} \mathbf{K}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{x} = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}. \tag{7.6}$$

L'estimateur est orthogonal si

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \tilde{\mathbf{y}}^T) = \mathbf{0} &\stackrel{(7.6)}{\Leftrightarrow} E((\mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}) \cdot \tilde{\mathbf{y}}^T) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow E(\mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^T - \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}^T) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{K}\Gamma_{\mathbf{y}} - \Gamma_{\mathbf{xy}} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{K} = \Gamma_{\mathbf{xy}} \cdot \Gamma_{\mathbf{y}}^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &\stackrel{(7.2)}{=} \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{b} \\ &\stackrel{(7.5)}{=} \mathbf{K}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\bar{\mathbf{y}} \\ &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}). \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Théorème. La matrice de covariance de l'erreur de l'estimateur linéaire orthogonal non biaisé est

$$\Gamma_{\varepsilon} = \Gamma_{\mathbf{x}} - \mathbf{K} \cdot \Gamma_{\mathbf{y}\mathbf{x}}. \quad (7.7)$$

Preuve. La matrice de covariance de ε est

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varepsilon} &= E(\varepsilon \cdot \varepsilon^T) \stackrel{(7.6)}{=} E\left((\mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}})^T\right) \\ &= E\left((\mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}) \cdot (\tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{K}^T - \tilde{\mathbf{x}}^T)\right) \\ &= E\left(\mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{K}^T - \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{K}^T - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{x}}^T + \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\right). \end{aligned}$$

Soit, en utilisant la linéarité de l'opérateur espérance,

$$\Gamma_{\varepsilon} = \mathbf{K}\Gamma_{\mathbf{y}}\mathbf{K}^T - \Gamma_{\mathbf{xy}}\mathbf{K}^T - \mathbf{K}\Gamma_{\mathbf{yx}} + \Gamma_{\mathbf{x}}. \quad (7.8)$$

Dans le cas de l'estimateur non biaisé orthogonal, d'après (7.4), on a $\mathbf{K} = \Gamma_{\mathbf{xy}}\Gamma_{\mathbf{y}}^{-1}$. Et donc, les deux premiers termes de (7.8) s'écrivent

$$\mathbf{K}\Gamma_{\mathbf{y}}\mathbf{K}^T - \Gamma_{\mathbf{xy}}\mathbf{K}^T = (\mathbf{K}\Gamma_{\mathbf{y}} - \Gamma_{\mathbf{xy}})\mathbf{K}^T = \mathbf{0}.$$

Et donc $\Gamma_{\varepsilon} = \Gamma_{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\Gamma_{\mathbf{yx}}$, ce qui termine la preuve. ■

Nous allons maintenant donner un théorème qui montre que l'estimateur linéaire orthogonal non biaisé est le meilleur parmi tous les estimateurs non biaisés. Pour comprendre cette notion de *meilleur*, il faut se souvenir des inégalités sur les matrices de covariances (voir paragraphe 7.1), qui dit que $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ si et seulement si $\Delta = \Gamma_2 - \Gamma_1$ est une matrice de covariance.

Théorème. Il n'existe aucun estimateur linéaire non biaisé qui permette d'obtenir une matrice de covariance sur l'erreur Γ_{ε} plus petite que celle donnée par l'estimateur orthogonal.

Preuve. Toute matrice \mathbf{K} possible pour notre estimateur linéaire s'écrit sous la forme $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \Delta$ avec $\mathbf{K}_0 = \Gamma_{\mathbf{xy}}\Gamma_{\mathbf{y}}^{-1}$ et Δ étant une matrice arbitraire. La matrice de covariance pour l'erreur s'écrit alors

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varepsilon} &= (\mathbf{K}_0 + \Delta)\Gamma_{\mathbf{y}}(\mathbf{K}_0 + \Delta)^T - \Gamma_{\mathbf{xy}}(\mathbf{K}_0 + \Delta)^T - (\mathbf{K}_0 + \Delta)\Gamma_{\mathbf{yx}} + \Gamma_{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{K}_0 + \Delta)\underbrace{(\Gamma_{\mathbf{y}}\mathbf{K}_0^T + \Gamma_{\mathbf{y}}\Delta^T)}_{=\Gamma_{\mathbf{yx}}} - \underbrace{(\Gamma_{\mathbf{xy}}\mathbf{K}_0^T + \Gamma_{\mathbf{xy}}\Delta^T)}_{=\mathbf{K}_0\Gamma_{\mathbf{yx}}} - (\mathbf{K}_0\Gamma_{\mathbf{yx}} + \Delta\Gamma_{\mathbf{yx}}) + \Gamma_{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{K}_0\Gamma_{\mathbf{yx}} + \Delta\Gamma_{\mathbf{yx}} + \underbrace{\mathbf{K}_0\Gamma_{\mathbf{y}}\Delta^T}_{=\Gamma_{\mathbf{xy}}} + \Delta\Gamma_{\mathbf{y}}\Delta^T - \mathbf{K}_0\Gamma_{\mathbf{yx}} - \Gamma_{\mathbf{xy}}\Delta^T - \mathbf{K}_0\Gamma_{\mathbf{yx}} - \Delta\Gamma_{\mathbf{yx}} + \Gamma_{\mathbf{x}} \\ &= -\mathbf{K}_0\Gamma_{\mathbf{yx}} + \Delta\Gamma_{\mathbf{y}}\Delta^T + \Gamma_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Puisque $\Delta\Gamma_{\mathbf{y}}\Delta^T$ est toujours symétrique positive, la matrice de covariance Γ_{ε} est minimale pour $\Delta = \mathbf{0}$, c'est-à-dire pour $\mathbf{K} = \Gamma_{\mathbf{xy}}\Gamma_{\mathbf{y}}^{-1}$, ce qui correspond à l'estimateur non-biaisé orthogonal. ■

7.3 Application à l'estimation linéaire

7.3.1 Principe

Supposons que \mathbf{x} et \mathbf{y} soient reliés par la relation

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta},$$

où $\boldsymbol{\beta}$ est vecteur aléatoire centré, non corrélé avec \mathbf{x} . La matrice de covariance de \mathbf{x} et $\boldsymbol{\beta}$ sont notées $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}$ et $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}}$. Utilisons les résultats établis au paragraphe précédent afin de trouver le meilleur estimateur linéaire non biaisé pour \mathbf{x} (voir [29] pour plus de détails sur l'estimation linéaire). Nous avons

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{y}} &\stackrel{(7.1)}{=} \mathbf{C}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\mathbf{C}^T + \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{xy}} &= E(\tilde{\mathbf{x}}.\tilde{\mathbf{y}}^T) = E\left(\tilde{\mathbf{x}}.(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\boldsymbol{\beta}})^T\right) = E\left(\tilde{\mathbf{x}}.\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{C}^T + \tilde{\mathbf{x}}.\tilde{\boldsymbol{\beta}}^T\right) \\ &= E(\tilde{\mathbf{x}}.\tilde{\mathbf{x}}^T)\mathbf{C}^T + \underbrace{E(\tilde{\mathbf{x}}.\tilde{\boldsymbol{\beta}}^T)}_{= \mathbf{0}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\mathbf{C}^T. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Par conséquent, le meilleur estimateur non biaisé pour \mathbf{x} avec la matrice de covariance sur l'erreur peuvent être obtenus à partir de $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}, \bar{\mathbf{x}}$ en utilisant les formules suivantes

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \hat{\mathbf{x}} &\stackrel{(7.3)}{=} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}} && \text{(estimée)} \\ \text{(ii)} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} &\stackrel{(7.7)}{=} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\mathbf{C}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}} && \text{(covariance de l'erreur)} \\ \text{(iii)} \quad \tilde{\mathbf{y}} &\stackrel{(7.9)}{=} \mathbf{y} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} && \text{(innovation)} \\ \text{(iv)} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{y}} &\stackrel{(7.9)}{=} \mathbf{C}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\mathbf{C}^T + \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}} && \text{(covariance de l'innovation)} \\ \text{(v)} \quad \mathbf{K} &\stackrel{(7.4,7.9)}{=} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\mathbf{C}^T\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{y}}^{-1} && \text{(gain Kalman)}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Remarque. La figure 7.5 illustre une situation où il est intéressant de ne pas prendre un estimateur linéaire. Ici, l'estimateur choisi correspond à $\hat{x} = E(x|y)$. Dans le cas particulier où le couple (\mathbf{x}, \mathbf{y}) est gaussien, l'estimateur $\hat{\mathbf{x}} = E(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ correspond à l'estimateur orthogonal non biaisé. Dans ce cas, nous avons d'après (7.10)

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{xy}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}.\boldsymbol{\varepsilon}^T|\mathbf{y}) &= E\left((\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T|\mathbf{y}\right) = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{xy}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{y}}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{yx}}. \end{aligned}$$

7.3.2 Equations linéaires

L'estimateur linéaire peut être utilisé pour résoudre des problèmes pouvant se traduire par des équations linéaires. Considérons à titre d'illustration le système suivant

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Comme on a plus d'équations que d'inconnues l'estimateur linéaire fait une sorte de compromis entre toutes ces équations. Supposons que la première équation est deux fois plus précise que les deux autres. Nous traduisons le problème de la façon suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}}.$$

Nous prenons

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

ce qui revient à dire qu'a priori, le vecteur \mathbf{x} est en gros dans l'intervalle $[-33, 33]$, que les β_i sont indépendants entre eux et la première équation est deux fois plus précise. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{y} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\mathbf{C}^T + \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 13001 & 12000 & -1000 \\ 12000 & 13004 & 1000 \\ -1000 & 1000 & 2004 \end{pmatrix} \\ \mathbf{K} &= \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\mathbf{C}^T\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{y}}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.09 & 0.288 & 0.311 \\ 0.355 & -0.155 & -0.24 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1.311 \\ 1.756 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\mathbf{C}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.722 & -0.517 \\ -0.54 & 0.44 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons représenter la solution de notre système linéaire par $\hat{\mathbf{x}}$ et l'incertitude quant à cette solution par la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

7.3.3 Moteur à courant continu

Reprenons l'exemple 6.2.4 du moteur à courant continu dont les paramètres avaient été estimés avec une méthode des moindres-carrés. Rappelons que dans cet exemple, la vitesse angulaire Ω d'un moteur à courant continu vérifie la relation :

$$\Omega = x_1 U + x_2 T_r,$$

où U est la tension d'entrée, T_r est le couple résistant et $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ est le vecteur des paramètres qu'il nous faut estimer. La table ci-dessous donne les mesures prélevées sur le moteur pour différentes conditions expérimentales.

$U(\text{V})$	4	10	10	13	15
$T_r(\text{Nm})$	0	1	5	5	3
$\Omega(\text{rad/sec})$	5	10	8	14	17

Nous supposons que la variance de l'erreur de mesure vaut 9 et ne dépend pas des conditions expérimentales. De plus, supposons que nous sachions que a priori que $x_1 \simeq 1$ et $x_2 \simeq -1$ avec une variance de 4. Appliquons les formules (7.10) avec

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{\Gamma}_x = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 10 & 1 \\ 10 & 5 \\ 13 & 5 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{\Gamma}_\beta = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Le programme MATLAB correspondant est donné ci-dessous.

```
y=[5;10;8;14;17];
C=[4 0;10 1;10 5; 13 5;15 3];
xbar=[1;-1];
G_x=4*eye(2,2);
G_Beta=9*eye(5,5);
ytilde=y-C*xbar
G_y=C*G_x*C'+G_Beta;
K=G_x*C'*inv(G_y);
xhat=xbar+K*ytilde
G_eps=G_x-K*C*G_x
```

Nous obtenons :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_y = \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_x\mathbf{C}^T + \mathbf{\Gamma}_\beta = \begin{pmatrix} 73 & 160 & 160 & 208 & 240 \\ 160 & 413 & 420 & 540 & 612 \\ 160 & 420 & 509 & 620 & 660 \\ 208 & 540 & 620 & 785 & 840 \\ 240 & 612 & 660 & 840 & 945 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Gamma}_x\mathbf{C}^T\mathbf{\Gamma}_y^{-1} = \begin{pmatrix} 0.027 & 0.0491 & -0.0247 & -0.0044 & 0.046 \\ -0.0739 & -0.118 & 0.148 & 0.092 & -0.077 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -0.58 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_\varepsilon = \mathbf{\Gamma}_x - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_x = \begin{pmatrix} 0.062 & -0.166 \\ -0.179 & 0.593 \end{pmatrix}.$$

7.4 Filtre de Kalman

Ce paragraphe présente le filtre de Kalman (voir [5] pour plus d'informations). Considérons le système décrit par les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\alpha}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\beta}_k, \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\alpha}_k$ et $\boldsymbol{\beta}_k$ sont des signaux aléatoires gaussiens indépendants entre eux et blancs dans le temps. Par blanc dans le temps, nous entendons que les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{k_1}$ et $\boldsymbol{\alpha}_{k_2}$ (ou bien $\boldsymbol{\beta}_{k_1}$ et $\boldsymbol{\beta}_{k_2}$) sont indépendants entre eux si $k_1 \neq k_2$. Le filtre de Kalman alterne deux phases : la *correction* et la *prédiction*. Pour comprendre la mécanique d'un tel filtre, plaçons nous à l'instant k et supposons que nous ayons déjà traité les mesures $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}$. A ce stade, le vecteur d'état est un vecteur aléatoire que nous allons noter $\mathbf{x}_{k|k-1}$ (car nous nous trouvons à l'instant k et que les mesures ont été traitées jusqu'à l'instant $k-1$). Ce vecteur aléatoire est représenté par une estimée notée $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ et une matrice de covariance $\boldsymbol{\Gamma}_{k|k-1}$.

Correction. Récoltons la mesure \mathbf{y}_k . Le vecteur aléatoire représentant l'état est désormais $\mathbf{x}_{k|k}$ qui est différent de $\mathbf{x}_{k|k-1}$ car $\mathbf{x}_{k|k}$ a connaissance de la mesure \mathbf{y} . L'espérance $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ et la matrice de covariance $\boldsymbol{\Gamma}_{k|k}$ associées à $\mathbf{x}_{k|k}$ sont données par les équations (7.10). Nous avons donc

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \cdot \tilde{\mathbf{y}}_k && \text{(estimée corrigée)} \\ \text{(ii)} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k|k} &= \boldsymbol{\Gamma}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{C}_k \boldsymbol{\Gamma}_{k|k-1} && \text{(covariance corrigée)} \\ \text{(iii)} \quad \tilde{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} && \text{(innovation)} \\ \text{(iv)} \quad \mathbf{S}_k &= \mathbf{C}_k \boldsymbol{\Gamma}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T + \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}_k} && \text{(covariance de l'innovation)} \\ \text{(v)} \quad \mathbf{K}_k &= \boldsymbol{\Gamma}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} && \text{(gain de Kalman)} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Prédiction. Sachant les mesures $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$, le vecteur aléatoire représentant l'état est désormais $\mathbf{x}_{k+1|k}$. Calculons son espérance $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ et sa matrice de covariance $\boldsymbol{\Gamma}_{k+1|k}$. Puisque

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\alpha}_k,$$

nous avons, d'après (7.1),

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{u}_k, \quad (7.12)$$

et

$$\boldsymbol{\Gamma}_{k+1|k} = \mathbf{A}_k \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{k|k} \cdot \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\alpha}_k}. \quad (7.13)$$

Filtre de Kalman. Le filtre de Kalman complet est donné par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &\stackrel{(7.12)}{=} \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{u}_k && \text{(estimée prédite)} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{k+1|k} &\stackrel{(7.13)}{=} \mathbf{A}_k \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{k|k} \cdot \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\alpha}_k} && \text{(covariance prédite)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &\stackrel{(7.10,i)}{=} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \cdot \tilde{\mathbf{y}}_k && \text{(estimée corrigée)} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{k|k} &\stackrel{(7.10,ii)}{=} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \boldsymbol{\Gamma}_{k|k-1} && \text{(covariance corrigée)} \\ \tilde{\mathbf{y}}_k &\stackrel{(7.10,iii)}{=} \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} && \text{(innovation)} \\ \mathbf{S}_k &\stackrel{(7.10,iv)}{=} \mathbf{C}_k \boldsymbol{\Gamma}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T + \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}_k} && \text{(covariance de l'innovation)} \\ \mathbf{K}_k &\stackrel{(7.10,v)}{=} \boldsymbol{\Gamma}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} && \text{(gain de Kalman)} \end{aligned}$$

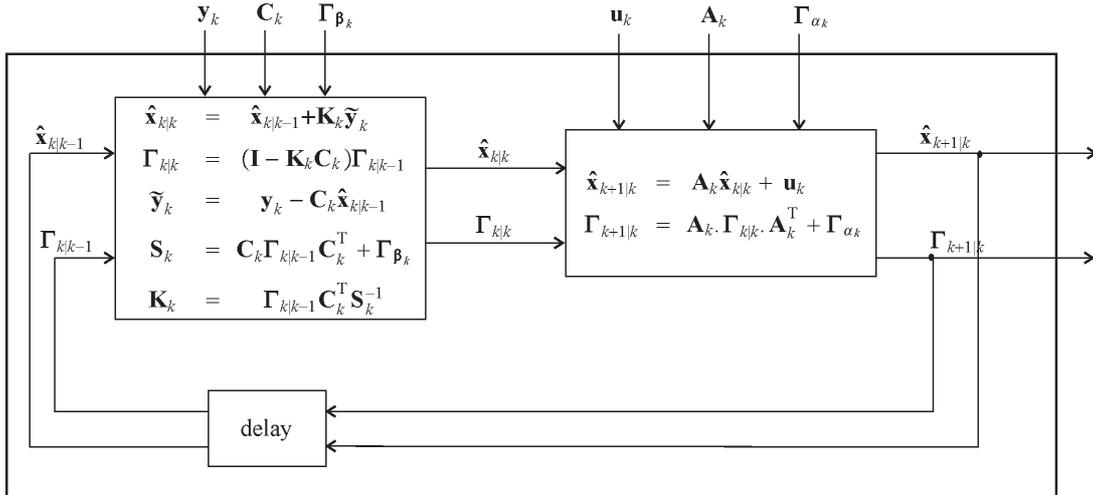


Figure 7.9 – Le filtre de Kalman est composé d’un correcteur suivi d’un prédicteur.

La figure 7.9 illustre le fait que le filtre de Kalman mémorise le vecteur $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ et la matrice $\Gamma_{k+1|k}$. Ses entrées sont \mathbf{y}_k , \mathbf{u}_k , \mathbf{A}_k , \mathbf{C}_k , Γ_{α_k} et Γ_{β_k} . Les quantités $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, $\Gamma_{k|k}$, $\tilde{\mathbf{y}}_k$, \mathbf{S}_k , \mathbf{K}_k sont des variables auxiliaires.

La fonction MATLAB ci dessous implémente le filtre de Kalman. Dans ce programme, nous avons les correspondances suivantes : $\mathbf{x}0 \leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, $\mathbf{G}1 \leftrightarrow \Gamma_{k|k-1}$, $\mathbf{x}1 \leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$, $\mathbf{G}1 \leftrightarrow \Gamma_{k+1|k}$, $\mathbf{x_up} \leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, $\mathbf{G_up} \leftrightarrow \Gamma_{k|k}$ (le terme up signifie *update* ou correction).

```
function [x1,G1]=kalman(x0,G0,u,y,G_alpha,G_beta,A,C) ;
S=C*G0*C'+G_beta ;
K=G0*C'*inv(S) ;
y_tilde=y-C*x0 ;
xup=x0+K*y_tilde ;
Gup=G0-K*C*G0 ;
x1=A*xup + u ;
G1=A*Gup*A'+G_alpha ;
end
```

Remarque. La covariance de l’innovation \mathbf{S}_k peut parfois, du fait de problèmes numériques, perdre le caractère définie positive. Si de tels problèmes surviennent, il est préférable de la remplacer l’équation pour covariance corrigée par

$$\Gamma_{k|k} = \sqrt{(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \Gamma_{k|k-1} \Gamma_{k|k-1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T}$$

qui elle, sera toujours définie positive, et ceci même si la matrice $\Gamma_{k|k-1}$ ne l’est pas. Les équations du filtre de Kalman seront alors plus stables dans le sens où une légère erreur sur le caractère défini positif des matrices de covariance s’efface à l’itération suivante.

7.5 Applications

7.5.1 Résolution d'équations linéaires

Considérons à nouveau les équations linéaires suivantes

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Comme pour le paragraphe 7.3.2 page 127, la première équation est supposée deux fois plus précises que les deux autres. Appliquons un filtre de Kalman pour résoudre ces trois équations. Pour cela, on génère le script MATLAB qui suit.

```
G_alpha=0*eye(2,2);
A=[1 0;0 1];
C0=[2 3]; C1=[3 2]; C2=[1 -1];
u=0;
xhat0=[0;0]; Gx0=1000*eye(2,2);
[xhat1,Gx1]=kalman(xhat0,Gx0,u,8,G_alpha,1,A,C0)
[xhat2,Gx2]=kalman(xhat1,Gx1,u,7,G_alpha,4,A,C1)
[xhat3,Gx3]=kalman(xhat2,Gx2,u,0,G_alpha,4,A,C2)
Nous obtenons les mêmes résultats que ceux du paragraphe 7.3.2.
```

7.5.2 Système dynamique simple

Considérons le système à temps discret décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\alpha}_k \\ y_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \beta_k \end{cases}$$

avec $k \in \{0, 1, 2\}$. Les valeurs pour les quantités $\mathbf{A}_k, \mathbf{u}_k, y_k$ sont données dans la table suivante.

k	\mathbf{A}_k	\mathbf{u}_k	\mathbf{C}_k	y_k
0	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$	7
1	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$	30
2	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 32 \\ -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$	-6

Supposons que les signaux $\boldsymbol{\alpha}_k$ et β_k sont blancs gaussiens avec une matrice de covariance unitaire, c'est-à-dire

$$\Gamma_{\alpha} = 1, \Gamma_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

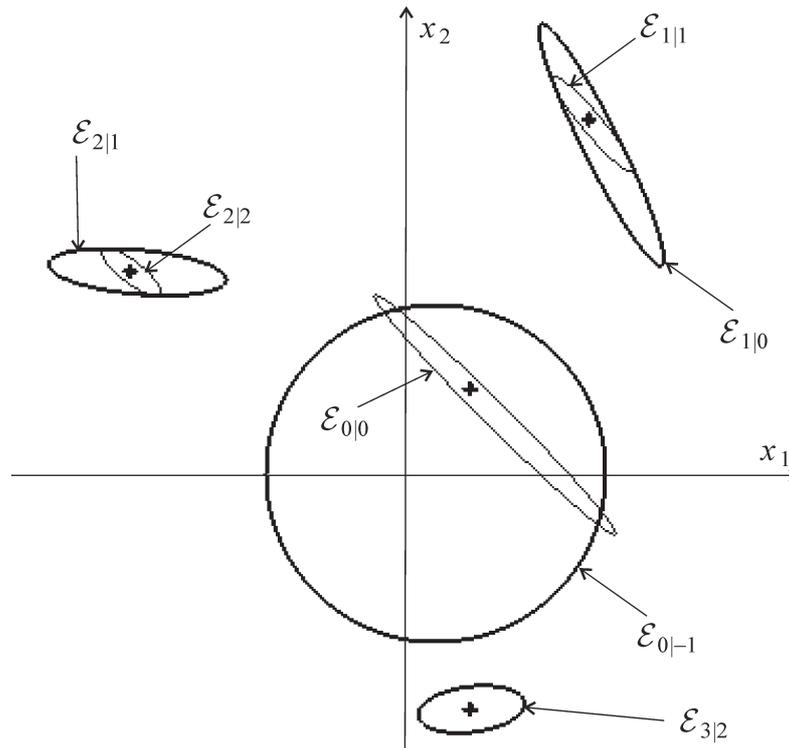


Figure 7.10 – Illustration graphique du filtre de Kalman sur un exemple simple

Le vecteur d'état initial est inconnu et est représenté par une estimation $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1}$ et une matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}_{0|-1}$. Prenons par exemple

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_{0|-1} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathcal{E}_{k|\ell}$ l'ellipsoïde de confiance de centre $\hat{\mathbf{x}}_{\ell|k}$ et associé à la matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}_{\ell|k}$. La figure 7.10 donne les ellipsoïdes de confiances obtenues par le filtre de Kalman.

Le programme MATLAB correspondant est donné ci-dessous.

```
A0=[0.5 0;0 1]; A1=[1 -1;1 1]; A2=[1 -1;1 1];
u0=[8;16]; u1=[-6;-18]; u2=[32;-8];
C0=[1 1]; C1=[1 1]; C2=[1 1];
y0=7; y1=30; y2=-6;
G_alpha=1*eye(2,2);
G_beta=1*eye(1,1);
xhat0=[0;0]; Gx0=100*eye(2,2);
[xhat1,Gx1]=kalman(xhat0,Gx0,u0,y0,G_alpha,G_beta,A0,C0);
[xhat2,Gx2]=kalman(xhat1,Gx1,u1,y1,G_alpha,G_beta,A1,C1);
[xhat3,Gx3]=kalman(xhat2,Gx2,u2,y2,G_alpha,G_beta,A2,C2);
```

7.5.3 Estimation de paramètres

Considérons à nouveau le moteur à courant continu de vitesse angulaire Ω . Nous avons

$$\Omega = x_1 U + x_2 T_r,$$

où U est la tension d'entrée, T_r est le couple résistant et $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ est le vecteur des paramètres à estimer. La table ci-dessous rappelle les mesures collectées pour différentes conditions expérimentales.

k	0	1	2	3	4
$U(\text{V})$	4	10	10	13	15
$T_r(\text{Nm})$	0	1	5	5	3
$\Omega(\text{rad/sec})$	5	10	11	14	17

Nous supposons toujours que la variance pour l'erreur de mesure vaille 9 et que $x_1 \simeq 1$ et $x_2 \simeq -1$ avec une variance de 4. Afin d'utiliser le filtre de Kalman, nous allons prendre les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_k} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\alpha}_k \\ y_k = \underbrace{\begin{pmatrix} U(k) & T_r(k) \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_k} \mathbf{x}_k + \beta_k. \end{cases}$$

Le programme MATLAB associé est donné ci-dessous

```
y=[5 ;10 ;11 ;14 ;17] ;
C=[4 0 ;10 1 ;10 5 ; 13 5 ;15 3]
xhat=[1 ;-1] ;
G_x=4*eye(2,2) ;
G_alpha=zeros(2,2) ;
G_beta=9 ;
A=eye(2,2) ;
u=zeros(2,1) ;
for k=1 :5,
[xhat,G_x]=kalman(xhat,G_x,u,y(k),G_alpha,G_beta,A,C(k, :)) ;
end ;
```

7.5.4 Capteur de température

La température d'une pièce x peut se modéliser, après discrétisation, par les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \alpha_k \\ y_k = x_k + \beta_k. \end{cases}$$

Nous supposons que α_k et β_k sont tous les deux gaussiens de variance $\Gamma_\alpha = 4$ et $\Gamma_\beta = 3$. Dans ce contexte, le filtre de Kalman s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{k+1|k} = \hat{x}_{k|k} \\ \Gamma_{k+1|k} = \Gamma_{k|k} + \Gamma_{\alpha_k} \\ \hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \tilde{y}_k \\ \Gamma_{k|k} = (1 - K_k) \Gamma_{k|k-1} \\ \tilde{y}_k = y_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ S_k = \Gamma_{k|k-1} + \Gamma_{\beta_k} \\ K_k = \Gamma_{k|k-1} S_k^{-1} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{k+1|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \frac{\Gamma_{k|k-1}}{\Gamma_{k|k-1} + \Gamma_{\beta_k}} (y_k - \hat{x}_{k|k-1}) \\ \Gamma_{k+1|k} = \left(1 - \frac{\Gamma_{k|k-1}}{\Gamma_{k|k-1} + \Gamma_{\beta_k}}\right) \Gamma_{k|k-1} + \Gamma_{\alpha_k} \end{array} \right.$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, nous avons $\Gamma_{k+1|k} - \Gamma_{k|k-1} \rightarrow 0$, c'est-à-dire, $\Gamma_{k+1|k} \rightarrow \Gamma_\infty$. Ainsi

$$\Gamma_\infty = \left(1 - \frac{\Gamma_\infty}{\Gamma_\infty + \Gamma_{\beta_k}}\right) \Gamma_\infty + \Gamma_{\alpha_k},$$

ou encore

$$\Gamma_\infty^2 - \Gamma_{\alpha_k} \Gamma_\infty - \Gamma_{\alpha_k} \Gamma_{\beta_k} = 0.$$

Il s'agit ici d'une équation du second degré qui devient une équation de Riccati dans le cas matriciel. Il existe une solution unique (ou définie positive dans le cas matriciel). Ici, elle donnée par

$$\Gamma_\infty = \frac{\Gamma_{\alpha_k} + \sqrt{\Gamma_{\alpha_k}^2 + 4\Gamma_{\alpha_k}\Gamma_{\beta_k}}}{2} = \frac{4 + \sqrt{16 + 4 * 4 * 3}}{2} = 6.$$

Donc l'estimateur est donné par

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \frac{2}{3} (y_k - \hat{x}_k).$$

La précision de l'estimateur est caractérisée par la variance $\Gamma_\infty = 6$. Considérons maintenant la situation où $\Gamma_{\alpha_k} = 0$. Nous obtenons $\Gamma_\infty = 0$. Ce qui signifie qu'après une durée suffisamment longue, le filtre de Kalman renvoie la température exacte.

7.5.5 Pendule simple

Reprenons le cas pendule simple déjà étudié page ?? pour la régulation. Ses équations d'état sont données par

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 + u \end{pmatrix}.$$

Pour implémenter la commande déjà trouvée, il est nécessaire que tout l'état soit disponible. Or, supposons que nous disposions uniquement d'un gyromètre positionné sur l'axe du pendule qui nous délivre une mesure de x_2 toutes les $\delta = 0.01$ sec, avec une erreur gaussienne blanche d'écart type 0.1rad/sec. Il nous faut donc reconstruire l'état \mathbf{x} du pendule pour implémenter notre commande. Ceci peut se

faire grâce à un observateur d'état. Ici, nous proposons d'utiliser un filtre de Kalman pour réaliser cet observateur. Auparavant, il faut linéariser ce système autour du point $\mathbf{x} = (0, 0)^T$ et le discrétiser avec une période d'échantillonnage de δ . afin de trouver les arguments $(y_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k, \Gamma_{\alpha_k}, \Gamma_{\beta_k})$ à donner au filtre de Kalman pour qu'à chaque itération k ce dernier nous génère une estimée $\hat{\mathbf{x}}$ de notre état. Linéarisons puis discrétisons le pendule. On a

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 + u \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + u \end{pmatrix}$$

Et donc, on peut dire au filtre de Kalman que le système qu'il observe est décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ -\delta & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_k} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \cdot u_k \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_k} + \boldsymbol{\alpha}_k \\ y_k &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_k} \mathbf{x}_k + \beta_k. \end{aligned}$$

Pour les matrices de covariance de l'état, nous devons prendre quelque chose de l'ordre de δ^2 et qui dépend de la précision de la prédiction (perturbation extérieure comme le vent, approximation de linéarisation, frottement négligé, ...). Nous pouvons prendre par exemple

$$\Gamma_{\alpha_k} = \begin{pmatrix} \delta^2 & 0 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix} \text{ et } \Gamma_{\beta_k} = 0.1^2,$$

mais d'autres valeurs sont possibles. Le réglage des matrices de covariance d'un filtre de Kalman est un problème délicat qui se fait souvent après quelques expérimentations.

7.5.6 Navigation à l'estime (ou dead reckoning)

La *navigation à l'estime* correspond au problème de localisation dans le cas où seuls des capteurs proprioceptifs sont disponibles. Ce type de navigation était utilisée par les navigateurs anciens qui cherchaient à se localiser pendant la traversée de l'Atlantique. Ils y parvenaient très approximativement en mesurant le cap du bateau, la vitesse à différents instants puis en intégrant sur tout le trajet déjà effectué toutes les variations de position correspondantes. Dans un contexte plus général, nous pouvons considérer qu'utiliser un observateur d'état en mode prédiction et sans correction, dans le cas particulier où l'état est la position du robot correspond à de la navigation à l'estime.

A titre d'exemple, considérons le robot représenté sur la figure 7.11. Les équations d'état associées sont données par

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \delta \cos \theta \\ v \cos \delta \sin \theta \\ v \sin \delta + \alpha_1 \\ u_1 + \alpha_2 \\ u_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des bruits blancs gaussiens à temps continu.

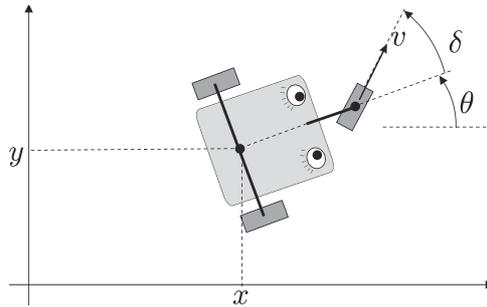


Figure 7.11 – Tricycle qui cherche à se localiser à l'estime

Nous supposons que le robot soit muni d'une boussole qui renvoie θ avec une bonne précision et d'un capteur d'angle qui renvoie l'angle δ de la roue avant. Supposons qu'à l'instant $t = 0$, nous ayons $x = 0, y = 0, v = 1$. Utilisons le filtre de Kalman afin de prédire l'état du système. Si nous posons $z = (x, y, v)$, nous obtenons

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \delta \cos \theta \\ 0 & 0 & \cos \delta \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Soit, après discrétisation,

$$\mathbf{z}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dt \cos \delta \cos \theta \\ 0 & 1 & dt \cos \delta \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z}_k + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ dt \cdot u_1(k) & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{u}_k} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dt \cdot \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

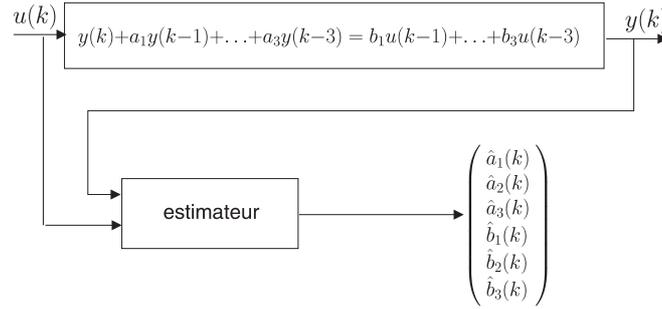
```
x=[0;0;%pi/3;1;0];
zhat=x([1;2;4]);
G_z=0*eye(3,3);
G_alpha=dt*diag([0.01;0.01;0.1]);
while sortie==%F,
u=[0;0;dt*uk(1)];
draw_voiture(x);
%y=x(4); Ck=[0 0 1]; G_beta=0.1; % si odometres
y=[]; Ck=[]; G_beta=[]; % si par d'odometres
Ak=[1 0 dt*cos(x(5))*cos(x(3)); 0 1 dt*cos(x(5))*sin(x(3)); 0 0 1];
[zhat,G_z]=kalman(zhat,G_z,u,y,G_alpha,G_beta,Ak,Ck);
noise_x=zeros(x); noise_x([1;2;4])=Randcov(G_alpha);
x=x+f(x,u)*dt+noise_x;
end;
```

7.5.7 Estimation des paramètres d'une fonction de transfert

Soit un système d'entrée $u(k)$ et de sortie $y(k)$ d'ordre 3 décrit par l'équation de récurrence

$$y(k) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + a_3y(k-3) = b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + b_3u(k-3).$$

On cherche à estimer en temps réel les coefficients de la fonction de transfert du système, sachant que ceux-ci évoluent doucement dans le temps.



Supposons que le vecteur $\mathbf{p} = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)^T$ est régi par l'équation d'évolution $\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{p}(k) + \mathbf{v}(k)$, où $\mathbf{v}(k)$ est un bruit blanc de matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}_v$. En utilisant le filtre de Kalman, on cherche un estimateur pour \mathbf{p} . Pour cela, on peut construire un observateur de Kalman basé sur le système

$$\begin{cases} \mathbf{p}(k+1) &= \mathbf{p}(k) + \boldsymbol{\alpha}(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{p}(k) + \beta(k) \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{C}(k) = (-y(k-1), -y(k-2), -y(k-3), u(k-1), u(k-2), u(k-3))$$

et où $\beta(k)$ est le bruit de mesure de variance $\mathbf{\Gamma}_\beta$.

7.6 Lisseur de Kalman

Le filtre de Kalman est causal. Cela signifie que l'estimée $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ ne prend en compte que le passé strict. Le *lissage* consiste en une estimation de l'état alors que toutes les mesures (futurs, présentes et passées) sont à notre disposition. Bien sûr, le futur est alors limité (car notre univers physique est lui causal) et donc, il existe un temps k maximal que nous noterons N . Ce temps correspond par exemple à la date terminale d'une mission effectuée par un robot et pour lequel, on cherche à estimer sa trajectoire. Pour effectuer un lissage, un suffit de relancer un filtre de Kalman dans le sens rétrograde et de fusionner pour chaque k l'information provenant du futur avec celle provenant du passé. Une version optimisée appelée *lisseur de Kalman* peut alors être obtenue en rajoutant aux équations du filtre de Kalman les équations suivantes.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k &= \mathbf{\Gamma}_{k|k} \cdot \mathbf{A}_k^T \cdot \mathbf{\Gamma}_{k+1|k}^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|N} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{J}_k (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|N} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\ \mathbf{\Gamma}_{k|N} &= \mathbf{\Gamma}_{k|k} + \mathbf{J}_k (\mathbf{\Gamma}_{k+1|N} - \mathbf{\Gamma}_{k+1|k}) \mathbf{J}_k^T. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Pour pouvoir effectuer un lissage, on doit tout d'abord lancer le filtre de Kalman pour k allant de 0 à N puis lancer de façon rétrograde les équations (7.14) pour k allant de N à 0. Notons que toutes les grandeurs $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, $\mathbf{\Gamma}_{k+1|k}$, $\mathbf{\Gamma}_{k|k}$, $\hat{\mathbf{x}}_{k|N}$ sont stockées dans les listes `x_forw{k}`, `x_up{k}`, `G_forw{k}`, `G_up{k}`, `x_back{k}`, `G_back{k}`, où `forw`, `up`, `back` signifient *forward*, *update*, *backward*. Les quantités \mathbf{u}_k , $\mathbf{\Gamma}_\alpha(k)$, \mathbf{y}_k , $\mathbf{\Gamma}_\beta(k)$, \mathbf{A}_k sont elles-aussi stockées dans des listes. La partie directe du lisseur, correspondant au filtre de Kalman, est donnée par le script suivant.

```
x_forw{1}=...; G_forw{1}=; % initialisation
for k=1 :kmax,
[x_forw{k+1},G_forw{k+1},x_up{k},G_up{k}]

=kalman(x_forw{k},G_forw{k},u{k},y{k},G_alpha{k},G_beta{k},A{k},C{k});
end;
```

Quant à la partie rétrograde du lisseur, elle est donnée par le script ci-dessous.

```
x_back{kmax+1-1}=xup{kmax+1-1};
G_back{kmax+1-1}=G_up{kmax+1-1};
for k=kmax-1 :-1 :1,
J=G_up{k}*A'/G_forw{k+1};
x_back{k}=x_up{k}+J*(x_back{k+1}-x_forw{k+1});
G_back{k}=G_up{k}+J*(G_back{k+1}-G_forw{k+1})*J';
end;
```

Notons que du fait de la spécificité de MATLAB, qui indice les listes à partir de 1, la condition initiale correspond à $k = 1$.