# Calcul par intervalles : état de l'art et applications industrielles

Luc Jaulin

DTN, ENSIETA,
2 rue François Verny, 29806 Brest Cédex 09
jaulinlu@ensieta.fr

## 1 Introduction

Le calcul par intervalles combiné à la propagation de contraintes, permet de fabriquer des contracteurs. Ces contrateurs permettent la résolution rapide et fiable d'une grande classe de problèmes ensemblistes. Le but de cet article est de donner quelques définitions sur les contracteurs qui nous permettrons alors de résoudre quelques exemples issus de l'automatique et de la robotique. Ces applications seront présentées lors de l'exposé qui se tiendra le jeudi 20 novembre 2008 lors des Journées de Rencontre Mathématiques, Entreprises et Innovations, à Mulhouse.

## 2 Contracteurs

Un intervalle est un ensemble compact et connexe de $\mathbb{R}$. Un pavé $[\mathbf{x}]$ de $\mathbb{R}^n$ est un produit cartésien de $n$ pavés. Notons $\mathbb{IR}^n$ l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^n$. Un pavé singleton formé de l'unique élément $\mathbf{x}$ sera noté sous la forme $\{\mathbf{x}\}$ et parfois même, par abus de langage, tout simplement $\mathbf{x}$. L'opérateur $\mathcal{C} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$ est un *contracteur* si

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \forall[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n, \mathcal{C}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{x}] & \text{(contractance)} \\ \text{(ii)} & (\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \mathcal{C}(\{\mathbf{x}\}) = \{\mathbf{x}\}) \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{C}([\mathbf{x}]) & \text{(consistance)} \\ \text{(iii)} & \mathcal{C}(\{\mathbf{x}\}) = \emptyset \Rightarrow (\exists\varepsilon > 0, \forall[\mathbf{x}] \subset B(\mathbf{x}, \varepsilon), \mathcal{C}([\mathbf{x}]) = \emptyset) & \text{(continuité faible)} \end{array} \quad (1)$$

où $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ désigne la boule de centre $\mathbf{x}$ et de rayon $\varepsilon$. Un pavé est dit *insensible* au contracteur $C$ si $\mathcal{C}([\mathbf{x}]) = [\mathbf{x}]$. La propriété (i) nous assure que par l'action d'un contacteur, un pavé ne peut que se contracter. La propriété (ii) nous dit que tout pavé gardera, après contraction, tous ses points $\mathbf{x}$ insensibles à ce même contracteur. Enfin, (iii) nous assure entre autre l'ensemble des $\mathbf{x}$ sensibles à $\mathcal{C}$ est un ensemble ouvert, et donc que l'ensemble des $\mathbf{x}$ insensibles est fermé.

L'*ensemble* (ou contrainte) associé à un contracteur $\mathcal{C}$ est l'ensemble formé par l'union des singletons insensibles à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire,

$$\operatorname{set}(\mathcal{C}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{C}(\{\mathbf{x}\}) = \{\mathbf{x}\}\}. \tag{2}$$

L'ensemble associé à un contracteur $\mathcal{C}$ est un ensemble fermé.

Soit $\mathbb{S}$ un ensemble fermé défini par des égalités ou des inégalités, le calcul par intervalles propose un ensemble de méthodes qui permettent la construction de contracteurs efficaces $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire polynomial en $n$) associés à $\mathbb{S}$, c'est-à-dire tels que $\operatorname{set}(\mathcal{C}) = \mathbb{S}$. Nous avons les définitions suivantes

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{C}$ est *monotone* si | $[\mathbf{x}] \subset [\mathbf{y}] \Rightarrow \mathcal{C}([\mathbf{x}]) \subset \mathcal{C}([\mathbf{y}])$ | |
| $\mathcal{C}$ est *minimal* si | $\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n,\ \mathcal{C}([\mathbf{x}]) = [[\mathbf{x}] \cap \operatorname{set}(\mathcal{C})]$ | (3) |
| $\mathcal{C}$ est *idempotent* si | $\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n, \mathcal{C}(\mathcal{C}([\mathbf{x}])) = \mathcal{C}([\mathbf{x}])$, | |
| $\mathcal{C}$ est *continu* si | $\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n, \mathcal{C}(\mathcal{C}^\infty([\mathbf{x}])) = \mathcal{C}^\infty([\mathbf{x}])$ | |

où $[\mathbb{A}]$ représente le plus petit pavé contenant $\mathbb{A}$. Tous les contracteurs minimaux sont idempotents.

# 3 Opérations sur les contracteurs

**Proposition**. Les opérations sur les contracteurs définies ci-dessous

| | | |
|---|---|---|
| intersection | $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)([\mathbf{x}]) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_1([\mathbf{x}]) \cap \mathcal{C}_2([\mathbf{x}])$ | |
| union | $(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)([\mathbf{x}]) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{C}_1([\mathbf{x}]) \cup \mathcal{C}_2([\mathbf{x}])]$ | |
| composition | $(\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2)([\mathbf{x}]) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_1(\mathcal{C}_2([\mathbf{x}]))$ | (4) |
| répétition | $\mathcal{C}^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \circ \dots$ | |
| intersection répétée | $\mathcal{C}_1 \sqcap \mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^\infty$ | |
| union répétée | $\mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)^\infty$ | |

sont des opérations internes, c'est-à-dire, qu'elles produisent nécessairement des contracteurs. On peut noter que la composition n'est pas commutative (i.e., $\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 \neq \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1$) contrairement à tous les autres $\cap, \cup, \sqcup, \sqcap$. Notons aussi que, du fait que le complémentaire d'un ensemble fermé ne soit pas fermé (sauf exception), la notion de contracteur complémentaire n'a pas de sens. On définit l'inclusion entre contracteurs comme suit

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n, \mathcal{C}_1([\mathbf{x}]) \subset \mathcal{C}_2([\mathbf{x}]). \tag{5}$$

On peut alors énoncer le résultat suivant.

**Proposition** : Si $\mathcal{C}$ est un contracteur motonone et continu, l'ensemble des pavés insensibles à $\mathcal{C}$ muni de l'inclusion forme un treillis. De plus, on a

$$\mathcal{C}^{\infty}([\mathbf{x}]) = \sup_{\subset} \{[\mathbf{a}], \mathcal{C}([\mathbf{a}]) = [\mathbf{a}]\} \tag{6}$$

c'est-à-dire que $\mathcal{C}^{\infty}([\mathbf{x}])$ correspond au plus grand sous pavé de $[\mathbf{x}]$ insensible à $\mathcal{C}$.

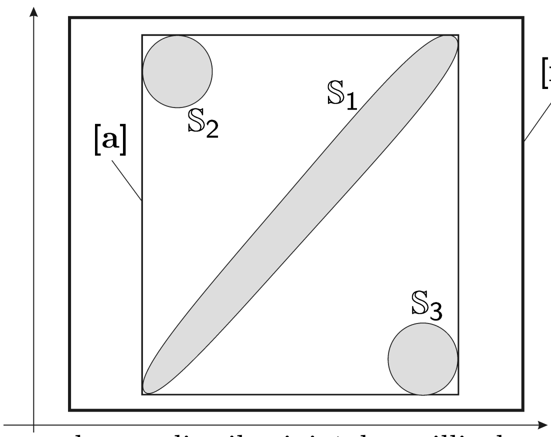
**Théorème** : L'ensemble des contracteurs idempotents, monotones et continus, muni de l'inclusion, forme un treillis complet que nous noterons $\mathcal{T}_C$. Ses deux lois internes (inf et sup) sont données par $\mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1 \sqcap \mathcal{C}_2$. Son plus petit élément $\mathcal{C}^{\perp}$ est le contracteur vide et son plus grand élément $\mathcal{C}^{\top}$ est l'identité :

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n,\ \mathcal{C}^{\perp}([\mathbf{x}]) = \emptyset \text{ et } \mathcal{C}^{\top}([\mathbf{x}]) = [\mathbf{x}]. \tag{7}$$

Malheureusement, ce treillis n'est pas distributif. Mais on a tout de même une propriété qu'on pourrait qualifier de sur-distributivité

$$(\mathcal{C}_1 \sqcap (\mathcal{C}_2 \sqcup \mathcal{C}_3)) \supset (\mathcal{C}_1 \sqcap \mathcal{C}_2) \sqcup (\mathcal{C}_1 \sqcap \mathcal{C}_3). \tag{8}$$

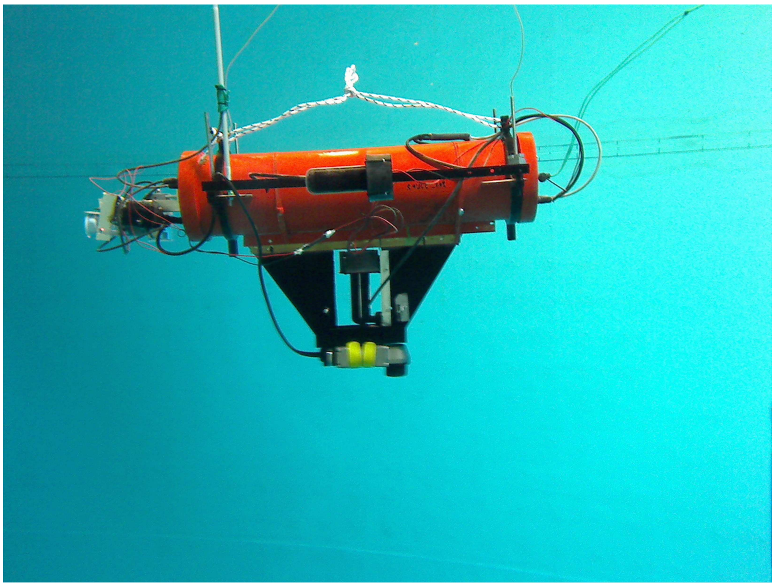
La figure ci-dessous donne un contre exemple à une éventuelle distributivité. A partir des trois ensemble $\mathbb{S}_1$,$\mathbb{S}_2$, $\mathbb{S}_3$ on peut fabriquer les trois contracteurs $\mathcal{C}_i([\mathbf{x}]) = [\mathbb{S}_i \cap [\mathbf{x}]]$. On a $(\mathcal{C}_1 \sqcap (\mathcal{C}_2 \sqcup \mathcal{C}_3))([\mathbf{x}]) = [\mathbf{a}]$ alors que $(\mathcal{C}_1 \sqcap \mathcal{C}_2) \sqcup (\mathcal{C}_1 \sqcap \mathcal{C}_3)([\mathbf{x}]) = \emptyset$.



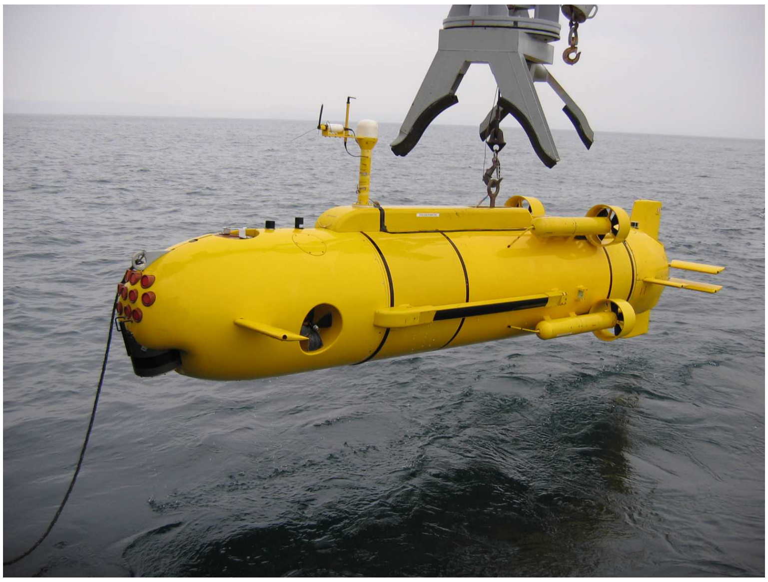

Contre-exemple montrant la non distributivité du treillis des contracteurs monotones idempotents

# 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons donné quelques définitions importantes sur les contracteurs. Lors de l'exposé je donnerai quelques des exemples d'application des contracteurs à la résolution de problèmes issus de l'automatique et de la robotique. Ainsi, nous nous intéresserons plus particulièrement à la localisation robuste du robot *Sauc'isse* et au SLAM (Simultaneous Localisation And Mapping) du robot *Redermor* (voir figures ci-dessous).



Robot *Sauc'isse* dans une piscine



Robot *Redermor* du GESMA
(Groupe d'Etude Sous-Marine de l'Atlantique, Brest)