



# Modélisation et commande d'un bateau à voile

Luc JAULIN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés, FRE 2656-CNRS,  
ISTIA, 62 avenue notre dame du lac,  
49000 Angers, France

luc.jaulin@univ-angers.fr  
http://www.istia.univ-angers.fr/~jaulin

*Résumé*— Cet article propose un modèle simple mais relativement réaliste d'un bateau à voile. Les équations du modèle sont très fortement non-linéaires et le système n'admet aucun point d'équilibre. Pourtant, nous allons chercher à effectuer une stabilisation globale du bateau autour d'un point donné de l'océan. Dans ce but, une stabilisation du cap, par une méthode de linéarisation par bouclage, est tout d'abord proposée. Ensuite, un régulateur de haut niveau à états discrets est rajouté. Ce dernier a pour but de générer la séquence de caps qui nous permettra de maintenir le bateau dans la zone désirée.

*Mots-clés*— bateau à voile, commande non-linéaire, linéarisation pour bouclage, modélisation, régulateur hybride, robotique.

## I. INTRODUCTION

Le bateau à voile est un système fortement non-linéaire dont la stabilisation globale ne rentre pas dans le cadre des techniques classiques de l'automatique. Par exemple, si l'on demande à notre bateau de se rendre en un point situé à un kilomètre en amont (par rapport au vent), ce dernier devra suivre une trajectoire en zig-zag et effectuer une série de virements de bord. Ce type de manoeuvre se traduit pour les régulateurs classiques par des rencontres de singularités (division par zéro) et des comportements discontinus de la commande.

Dans cet article nous allons proposer un régulateur par retour d'état qui nous permette d'aller et de rester dans une zone précise de l'océan. Pour cela, nous combinerons les techniques classiques de linéarisation par bouclage statique avec un automate à états discrets.

Nous allons, tout d'abord, dans le paragraphe II, proposer des équations d'état réalistes d'un bateau à voile. Notons que nous n'avons pas trouvé dans la littérature de telles équations. Cette modélisation s'effectuera principalement à partir du principe fondamental de la dynamique. Le paragraphe III propose un bouclage linéarisant et un automate permettant au bateau de graviter autour du point souhaité.

## II. MODÉLISATION

La figure 1 représente le bateau à voile que nous voulons modéliser. Le vecteur d'état  $\mathbf{x}$ , de dimension 7, est composé

- des coordonnées de position, c'est-à-dire les coordonnées  $x, y$  du centre de gravité  $G$  du bateau (la dérive se trouve en  $G$ ), l'orientation  $\theta$ , et les angles  $\delta_v$  et  $\delta_g$  de la voile et du gouvernail,
- et des coordonnées cinématiques  $v$  et  $\omega$  représentant

respectivement la vitesse du centre de gravité  $G$  et la vitesse angulaire du bateau autour de  $G$ .

Les entrées  $u_1$  et  $u_2$  du système sont les dérivées des angles  $\delta_v$  et  $\delta_g$ . Les paramètres (supposés connus et constants) sont

- $V$  la vitesse du vent,
- $r_g$  la distance du gouvernail à  $G$ ,
- $r_v$  la distance du mât à  $G$ ,
- $\alpha_g$  la portance du gouvernail (si le gouvernail se trouve perpendiculaire à la marche du bateau, l'eau exerce une force de  $\alpha_g v$  Newton sur le gouvernail),
- $\alpha_v$  la portance de la voile (si la voile se trouve immobile, perpendiculaire au vent, ce dernier exerce une force de  $\alpha_v V$  Newton),
- $\alpha_f$  le coefficient de frottement du bateau sur l'eau dans le sens de la marche (l'eau exerce sur le bateau une force opposée au sens de la marche égale à  $\alpha_f v$ ),
- $\alpha_\theta$  le coefficient angulaire de frottement (l'eau exerce sur le bateau un couple de frottement égal à  $-\alpha_\theta \omega$ ; étant donné la forme du bateau, plutôt profilé pour garder un cap,  $\alpha_\theta$  sera grand devant  $\alpha_f$ ),
- $J$  le moment d'inertie du bateau,
- $\ell$  la distance entre le centre de poussée de la voile et le mât,
- $\beta$  le coefficient de dérive (lorsque la voile du bateau est relâchée, le bateau tend à dériver, dans le sens du vent, à une vitesse égale à  $\beta V$ ).

Cherchons à obtenir des équations d'état pour notre système, c'est-à-dire, une équation différentielle de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

où

$$\mathbf{x} = (x, y, \theta, \delta_v, \delta_g, v, \omega)^T, \quad (2)$$

et

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T. \quad (3)$$

Pour cela, nous allons utiliser le principe fondamental de la dynamique [10] en translation (afin d'obtenir une expression de l'accélération tangentielle  $\dot{v}$ ) puis en rotation (afin d'obtenir une expression de l'accélération angulaire  $\dot{\omega}$ ).

**Accélération tangentielle  $\dot{v}$  :** Le vent exerce sur la voile une force orthogonale à celle-ci dont l'intensité peut être supposée égale à

$$f_v = \alpha_v (V \cos(\theta + \delta_v) - v \sin \delta_v). \quad (4)$$

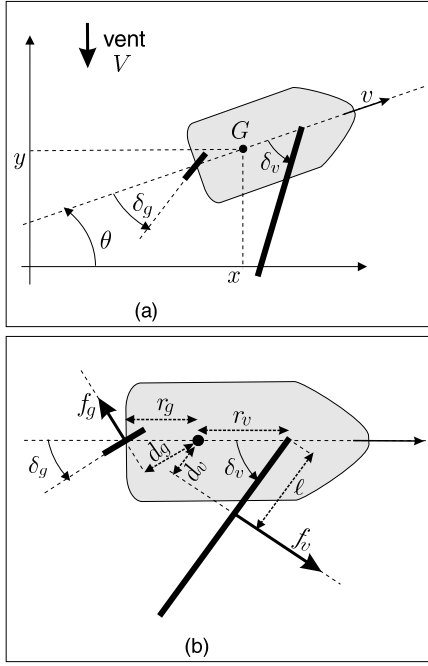


Fig. 1. Bateau à voile que l'on cherche à modéliser

Quant à l'eau, elle exerce sur le gouvernail une force égale à

$$f_g = \alpha_g v \sin \delta_g, \quad (5)$$

orthogonale à celui-ci. La force de frottement qu'il exerce sur le bateau est supposée visqueuse, c'est-à-dire d'intensité proportionnelle à la vitesse. L'équation fondamentale de la dynamique, projetée suivant l'axe du bateau, donne

$$m\dot{v} = \sin \delta_v f_v - \sin \delta_g f_g - \alpha_f v. \quad (6)$$

**L'accélération angulaire  $\dot{\omega}$**  : Parmi les forces qui agissent sur la rotation du bateau, on trouve les forces  $f_v$  et  $f_g$  exercées par la voile et le gouvernail, mais aussi une force de frottement angulaire que nous supposons visqueuse. L'équation fondamentale de la dynamique nous donne

$$J\dot{\omega} = d_v f_v - d_g f_g - \alpha_\theta \omega, \quad (7)$$

où

$$d_v = \ell - r_v \cos \delta_v \text{ et } d_g = r_g \cos \delta_g. \quad (8)$$

Le coefficient de frottement  $\alpha_\theta$  en en général assez élevé, car le bateau est profilé pour minimiser le frottement tangentiel et pour garder une direction donnée. Les équations d'état du bateau s'écrivent donc

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, & \text{(i)} \\ \dot{y} = v \sin \theta - \beta V, & \text{(ii)} \\ \dot{\theta} = \omega, & \text{(iii)} \\ \dot{\delta}_v = u_1, & \text{(iv)} \\ \dot{\delta}_g = u_2, & \text{(v)} \\ \dot{v} = \frac{f_v \sin \delta_v - f_g \sin \delta_g - \alpha_f v}{m}, & \text{(vi)} \\ \dot{\omega} = \frac{(\ell - r_v \cos \delta_v) f_v - r_g \cos \delta_g f_g - \alpha_\theta \omega}{J}, & \text{(vii)} \\ f_v = \alpha_v (V \cos(\theta + \delta_v) - v \sin \delta_v), & \text{(viii)} \\ f_g = \alpha_g v \sin \delta_g. & \text{(ix)} \end{cases} \quad (9)$$

Notons que les deux dernières équations ne sont pas différentielles mais algébriques. Elles devraient normalement

être éliminées si nous cherchons à faire apparaître des équations d'état. Cela se fait en substituant dans les lignes (vi) et (vii) de l'équation (9)  $f_v$  et  $f_g$  par leurs expressions (viii) et (ix). Nous allons toutefois garder les équations d'état sous leur forme (9) afin de conserver des expressions plus simples.

### III. COMMANDE

Nous allons chercher ici à stabiliser les valeurs de  $x$  et  $y$  autour de certaines valeurs désirées  $x_d$  et  $y_d$ . Notons tout d'abord qu'il n'est pas possible d'obtenir une stabilisation exacte si  $V \neq 0$ , même dans le cas idéal, car on ne peut annuler simultanément  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{v}$ . On peut le montrer formellement, bien que cette opération soit loin d'être triviale, même avec l'aide d'un logiciel de calcul formel comme MUPAD[1]. On peut aussi prouver l'absence de point d'équilibre grâce à un solveur numérique utilisant le calcul par intervalles comme PROJ2D[4]. Puisqu'une stabilisation exacte ne peut être envisagée, nous allons tenter une stabilisation approximative de  $x$  et  $y$  autour des valeurs de consigne.

Dans une première étape, nous allons utiliser une méthode de linéarisation par bouclage statique qui nous permettra de stabiliser le cap du bateau ainsi que l'ouverture de la voile. Dans une deuxième étape, nous proposerons un second régulateur à états discrets qui nous permettra de maintenir le bateau dans une zone autour du point  $(x_d, y_d)$ .

#### A. Dérivations successives des variables d'état

Rappelons que pour appliquer une méthode de linéarisation par bouclage (voir [6], [9]), il nous faut tout d'abord dériver les variables d'état, une ou plusieurs fois par rapport au temps  $t$ , et ceci jusqu'à faire apparaître les entrées  $u_1$  ou  $u_2$ .

Dans les quantités exprimées par les équations (9), seules  $\dot{\delta}_v$  et  $\dot{\delta}_g$  sont liées algébriquement à  $\mathbf{u}$ . Les autres quantités sont reliées à  $\mathbf{u}$ , mais indirectement (c'est-à-dire différenciellement). Il nous faut dériver uniquement celles qui ne dépendent pas algébriquement de  $\mathbf{u}$ , c'est-à-dire,  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{v}$  et  $\dot{\omega}$ . On obtient

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{v} \cos \theta - v \dot{\theta} \sin \theta, \\ \ddot{y} = \dot{v} \sin \theta + v \dot{\theta} \cos \theta, \\ \ddot{\theta} = \dot{\omega}, \\ \ddot{v} = \frac{\dot{f}_v \sin \delta_v + f_v u_1 \cos \delta_v - \dot{f}_g \sin \delta_g - f_g u_2 \cos \delta_g - \alpha_f \dot{v}}{m}, \\ \ddot{\omega} = \frac{u_1 r_v \sin \delta_v f_v + (\ell - r_v \cos \delta_v) \dot{f}_v}{J} \\ + \frac{r_g (u_2 \sin \delta_g f_g - \cos \delta_g \dot{f}_g) - \alpha_\theta \dot{\omega}}{J}. \end{cases} \quad (10)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{f}_v = -\alpha_v V (\omega + u_1) \sin(\theta + \delta_v) \\ -\alpha_v \dot{v} \sin \delta_v - \alpha_v v u_1 \cos \delta_v \\ \dot{f}_g = \alpha_g (\dot{v} \sin \delta_g + v u_2 \cos \delta_g). \end{cases} \quad (11)$$

Notons que, puisque les grandeurs  $\dot{v}, \dot{\theta}, \dot{\omega}$  sont des fonctions analytiques de l'état (voir (9)), on peut considérer que nous avons ici une expression analytique de  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\theta}, \ddot{v}, \ddot{\omega}$  en fonction de l'état et des entrées. Dérivons à nouveau toutes les quantités qui ne dépendent pas algébriquement de  $\mathbf{u}$ ,

c'est-à-dire  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  et  $\ddot{\theta}$ . On obtient

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \ddot{v} \cos \theta - 2\dot{v}\dot{\theta} \sin \theta \\ &- v\ddot{\theta} \sin \theta - v\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{y} &= \ddot{v} \sin \theta + 2\dot{v}\dot{\theta} \cos \theta + \\ &v\ddot{\theta} \cos \theta - v\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\omega}. \end{cases} \quad (12)$$

Puisque toutes ces quantités dépendent algébriquement de  $\mathbf{u}$ , on s'arrête ici de dériver. Notons à nouveau, que les équations (12) peuvent s'interpréter (via les équations (10) et (9)), comme des expressions analytiques des grandeurs  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{\theta}$  en fonction de l'état et des entrées.

## B. Quelles sorties choisir pour la linéarisation ?

### B.1 Vitesse et cap

Puisque nous avons deux entrées, il nous faut choisir deux sorties pour effectuer notre linéarisation par bouclage. Une première possibilité consiste à choisir pour sorties, la vitesse  $y_1 = v$  et le cap  $y_2 = \theta$ . Ce choix peut être justifié par le fait que  $\mathbf{y}$  forme une sortie plate pour le sous-système décrit par les 7 dernières équations de (9) (pour plus d'informations sur la notion de sorties plates, voir par exemple [8]). Une démonstration succincte peut se faire par l'algorithme d'extension dynamique (voir paragraphe 7.2.1 de polycopié [8]). Cette démonstration est une conséquence directe du calcul suivant qui a pour objectif de déterminer le bouclage linéarisant. On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}, \\ &= \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \dot{f}_v \\ \dot{f}_g \end{pmatrix} + \mathbf{b}_1(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (13)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{m} f_v \cos \delta_v & -\frac{1}{m} f_g \cos \delta_g \\ \frac{r_v}{J} f_v \sin \delta_v & \frac{r_g}{J} f_g \sin \delta_g \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sin \delta_v & -\frac{1}{m} \sin \delta_g \\ \frac{\ell}{J} - \frac{r_v}{J} \cos \delta_v & -\frac{r_g}{J} \cos \delta_g \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b}_1(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_f}{m} \dot{v} \\ -\frac{\alpha_\theta}{J} \dot{\omega} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

et

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_v \\ \dot{f}_g \end{pmatrix} = \mathbf{A}_3(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mathbf{b}_2(\mathbf{x}), \quad (15)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -\alpha_v (V \sin(\theta + \delta_v) + v \cos \delta_v) & 0 \\ 0 & \alpha_g v \cos \delta_g \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_2(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -\alpha_v (V \omega \sin(\theta + \delta_v) + \dot{v} \sin \delta_v) \\ \alpha_g \dot{v} \sin \delta_g \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a ainsi une relation de la forme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{u} + \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_3 \mathbf{u} + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1, \\ &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3) \mathbf{u} + \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1, \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{b}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (16)$$

Pour imposer les quantités  $(\ddot{y}_1, \ddot{y}_2)$  à une certaine consigne

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T, \quad (17)$$

il nous faut prendre pour entrée

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{v} - \mathbf{b}(\mathbf{x})). \quad (18)$$

Le système ainsi bouclé possède pour équations

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 &= v_1, \\ \ddot{y}_2 &= v_2. \end{cases} \quad (19)$$

Le système ainsi bouclé est de dimension 5 au lieu de 7 pour le système initial. Nous avons perdu le contrôle sur deux variables d'état :  $x$  et  $y$ . Les singularités de notre commande linéarisante sont solutions de l'équation

$$\det \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$$

qui admet de très nombreuses solutions. Pour cette raison, nous avons décidé de choisir une sortie qui nous génère moins de singularités.

### B.2 Ouverture et cap

Choisissons maintenant pour sorties l'ouverture de la voile  $y_1 = \delta_v$  et le cap  $y_2 = \theta$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\delta}_v \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \dot{f}_v \\ \dot{f}_g \end{pmatrix} + \mathbf{b}_1(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (20)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r_v f_v \sin \delta_v}{J} & \frac{r_g f_g \sin \delta_g}{J} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\ell - r_v \cos \delta_v}{J} & -\frac{r_g \cos \delta_g}{J} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b}_1(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha_\theta \dot{\omega}}{J} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

où  $\dot{f}_v$  et  $\dot{f}_g$  sont donnés par la relation (15). Ainsi, nous avons une relation de la forme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{u} + \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_3 \mathbf{u} + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1, \\ &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3) \mathbf{u} + \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1, \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{b}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (22)$$

Pour imposer  $(\dot{y}_1, \dot{y}_2)$  à une certaine consigne  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , il nous faut prendre

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{v} - \mathbf{b}(\mathbf{x})). \quad (23)$$

Le système ainsi bouclé est régi par les équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= v_1, \\ \dot{y}_2 &= v_2. \end{cases} \quad (24)$$

qui sont linéaires et découplées. Le système linéarisé est d'ordre 4 au lieu de 7. Nous avons donc perdu le contrôle sur 3 variables qui se trouvent être  $x$ ,  $y$  et  $v$ . La perte de contrôle sur  $x$  et  $y$  était prévisible (on veut que le bateau avance et il est naturel que cela corresponde à une instabilité pour ces deux variables  $x$  et  $y$ ). Quant à la perte de contrôle sur  $v$ , elle est sans conséquence car la dynamique

associée est stable. Comment en effet concevoir que le bateau puisse maintenir un cap et une ouverture de voile fixes, sans que sa vitesse ne converge vers une valeur finie ?

Déterminons maintenant les singularités de notre bouclage linéarisant. On montre aisément que

$$\det(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \frac{r_g}{J} (f_g \sin \delta_g - v \alpha_g \cos^2 \delta_g), \quad (25)$$

est nul si

$$v (2 \sin^2 \delta_g - 1) = 0, \quad (26)$$

c'est-à-dire si

$$v = 0 \text{ ou bien } \delta_g = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}. \quad (27)$$

Une telle configuration correspond à une singularité qu'il faudra tenter d'éviter.

### C. Commande du cap et de l'ouverture de voile

Notons  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$  la consigne pour  $\mathbf{y} = (\delta_v, \theta)$ . Nous noterons aussi  $\mathbf{w} = (\hat{\delta}_v, \hat{\theta})$  pour rappeler que  $w_1$  et  $w_2$  sont les consignes correspondant à l'angle d'ouverture de la  $\delta_v$  et au cap  $\theta$ . Au paragraphe précédent, nous avons proposé un bouclage linéarisant pour notre bateau, il nous reste à stabiliser correctement le système linéaire (voir équation (24)) ainsi obtenu.

Puisque le premier sous-système  $\dot{y}_1 = v_1$  est d'ordre 1, il peut être stabilisé correctement par un régulateur de type proportionnel. Quant au second sous-système ( $\ddot{y}_2 = v_2$ ), d'ordre 3, il peut être stabilisé par un régulateur de type PD<sup>2</sup> (proportionnel et dérivées deux fois). Ces deux régulateurs ont pour expressions

$$\begin{cases} v_1(t) &= \alpha_P (w_1(t) - y_1(t)), \\ v_2(t) &= \beta_P (w_2(t) - y_2(t)) + \beta_D (\dot{w}_2(t) - \dot{y}_2(t)) \\ &\quad + \beta_{D^2} (\ddot{w}_2(t) - \ddot{y}_2(t)). \end{cases} \quad (28)$$

Nous allons choisir les coefficients de ces deux régulateurs par placement de pôles de façon à n'avoir que des pôles égaux à  $-1$ . Puisque les deux systèmes linéaires bouclés sont décrits par les équations différentielles

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \alpha_P (w_1 - y_1), \\ \ddot{y}_2 &= \beta_P (w_2 - y_2) + \beta_D (\dot{w}_2 - \dot{y}_2) + \beta_{D^2} (\ddot{w}_2 - \ddot{y}_2), \end{aligned}$$

leur polynôme caractéristique sont respectivement

$$\begin{aligned} P_1(s) &= s + \alpha_P, \\ P_2(s) &= s^3 + \beta_{D^2} s^2 + \beta_D s + \beta_P. \end{aligned} \quad (29)$$

Afin que ces polynômes ne possèdent que des pôles égaux à  $-1$ , il nous faut

$$\begin{aligned} s + \alpha_P &= s + 1 \\ s^3 + \beta_{D^2} s^2 + \beta_D s + \beta_P &= (s + 1)^3 \\ &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \end{aligned} \quad (30)$$

soit

$$\alpha_P = \beta_P = 1, \beta_D = 3, \beta_{D^2} = 3. \quad (31)$$

En supposant la consigne  $\mathbf{w}$  constante, les équations d'état du régulateur par retour d'état pour notre système non-linéaire sont données par

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \left( \begin{pmatrix} w_1 - \delta_v \\ w_2 - \theta - 3\dot{\theta} - 3\ddot{\theta} \end{pmatrix} - \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right). \quad (32)$$

Or  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  sont des fonctions analytiques de l'état  $\mathbf{x}$ . En effet, d'après les équations (9) et (10)), on a

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \ddot{\theta} &= \frac{(\ell - r_v \cos \delta_v) f_v - r_g \cos \delta_g f_g - \alpha_\theta \omega}{J}. \end{aligned} \quad (33)$$

L'équation (32) peut se réécrire sous la forme

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}, \hat{\delta}_v, \hat{\theta}). \quad (34)$$

Ce régulateur peut être qualifié de *statique* car il n'admet aucune variable d'état.

### D. Régulateur hybride

Le régulateur  $\mathbf{r}(\mathbf{x}, \hat{\delta}_v, \hat{\theta})$  que nous venons de développer au paragraphe III-C permet de stabiliser notre bateau pour un cap  $\hat{\theta}$  et une ouverture de voile  $\hat{\delta}_v$  désirés. Un tel régulateur peut être qualifié de bas niveau. Or, ce qui nous intéresse est de stabiliser le bateau autour d'une zone centrée en un point de coordonnées  $(x_d, y_d)$ . En manoeuvrant le gouvernail et l'angle d'ouverture de la voile, nous allons montrer qu'il est possible de rester autour du point désiré.

Pour cela, nous allons proposer un automate hybride (voir [5]) capable de générer les consignes  $\mathbf{w} = (\hat{\delta}_v, \hat{\theta})$  pour notre régulateur  $\mathbf{r}(\mathbf{x}, \hat{\delta}_v, \hat{\theta})$  afin que le bateau se trouve comme attiré par le point  $(x_d, y_d)$ . Cet automate correspond donc à un régulateur de haut niveau. Contrairement aux autres approches de régulation classiques, l'élaboration de cet automate sera guidée par une connaissance empirique du pilotage d'un voilier, plus que par une prise en compte des équations d'état du système.

Ainsi, nous allons considérer quatre caps privilégiés (à  $2k\pi$  près) donnés par

$$\hat{\theta}_1 = \frac{7\pi}{4}, \hat{\theta}_2 = \frac{5\pi}{4}, \hat{\theta}_3 = \frac{\pi}{6} \text{ et } \hat{\theta}_4 = \frac{5\pi}{6}, \quad (35)$$

comme illustré par la figure 2. A chacun de ces caps désirés, nous associons un état discret  $q \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

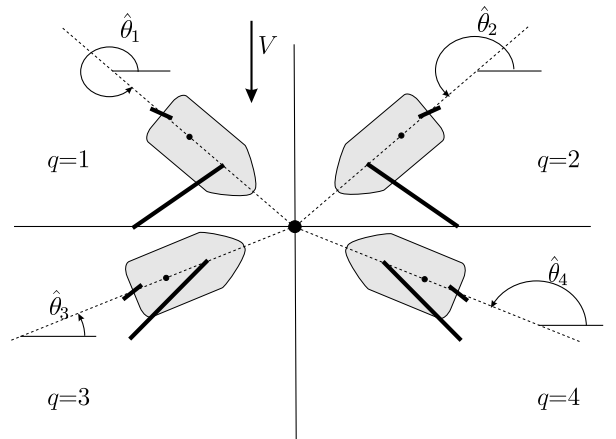


Fig. 2. Quatre caps privilégiés générés par l'automate

Les caps  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  correspondent à une situation de vent arrière alors que  $\hat{\theta}_3$  et  $\hat{\theta}_4$  correspondent à une situation de remonté au vent. Le passage d'un cap désiré à l'autre se fait suivant la position relative du bateau par rapport au point désiré. Par exemple, si  $q = 3$  et que  $x - x_d > a$  (où

$a$  est une constante de tolérance positive), alors,  $q$  prend la valeur 4 (qui fera décroître  $x$ ). Ce changement de cap correspond à un virement de bord. L'automate qui réalise ces changements d'état apparaît dans le bloc du bas de la figure 4. Afin d'éviter le passage brutal d'un cap désiré à l'autre, ce qui risque de nous faire rencontrer une singularité (voir équation (27)) ou bien de déstabiliser notre commande  $\mathbf{r}(\mathbf{x}, \hat{\delta}_v, \hat{\theta})$  (qui suppose une consigne constante), il convient d'imposer un changement en douceur du cap. C'est le rôle des systèmes du premier ordre situés dans les cases de l'automate. La fonction

$$\arg(\hat{\theta}, \hat{\theta}_i) = \hat{\theta}_i + 2\pi \cdot \text{round}\left(\frac{\hat{\theta} - \hat{\theta}_i}{2\pi}\right), \quad (36)$$

renvoie l'angle égal à  $\hat{\theta}_i$  (à  $2k\pi$  près), qui est le plus proche de  $\hat{\theta}$ . Son rôle est d'éviter les sauts brutaux dans la génération de  $\theta$  et le phénomène de déroulement, qui tend à faire tourner inutilement les éléments (voile et bateau). En effet, il n'est pas nécessaire de respecter scrupuleusement les égalités entre les angles alors qu'une égalité à  $2\pi$ -près suffit.

La sortie de notre automate est le cap désiré  $\hat{\theta}$ , il nous reste alors à trouver l'ouverture de la voile  $\hat{\delta}_v$  à demander à notre régulateur. L'angle d'ouverture de la voile ne servant qu'à la propulsion du bateau, il est concevable de la rendre fonction du cap. Une fonction assez naturelle est celle donnée par la figure 3.

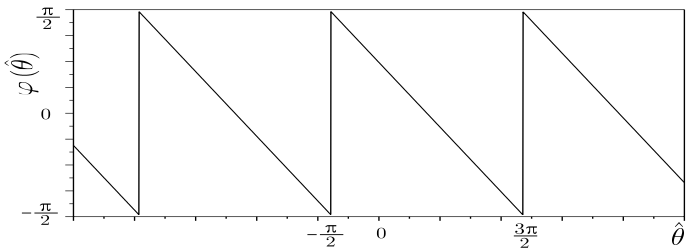


Fig. 3. Fonction d'ouverture  $\varphi(\hat{\theta})$  choisie

Son expression est donnée par

$$\hat{\delta}_v = \varphi(\theta) = \pi \cdot \text{floor}\left(\frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}, \quad (37)$$

où *floor* est la fonction qui renvoie la partie entière d'un réel. Notons que lorsque nous demandons au bateau d'aller face au vent ( $\hat{\theta} \simeq \pi/2 + k\pi$ ), l'angle d'ouverture demandé  $\hat{\delta}_v$  sera nul ( $\varphi(\hat{\theta}) \simeq 0$ ) alors qu'en vent arrière ( $\hat{\theta} \simeq -\pi/2 + 2k\pi$ ), la voile sera grande ouverte ( $\varphi(\hat{\theta}) \simeq \pi/2 + k\pi$ ). Les discontinuités de  $\varphi(\theta)$  autour des points  $-\pi/2 + 2k\pi$  correspondent aux points d'empannage<sup>1</sup>.

Le schéma complet du régulateur ainsi conçu est représenté en pointillé sur la figure 4. Le système bouclé admet pour entrées  $x_d$  et  $y_d$  et le régulateur se charge d'amener le bateau autour du point désiré et de l'y maintenir.

<sup>1</sup>Empanner : Virer de bord vent arrière, en faisant passer le vent d'une hanche à l'autre du bateau et la bôme d'un côté à l'autre

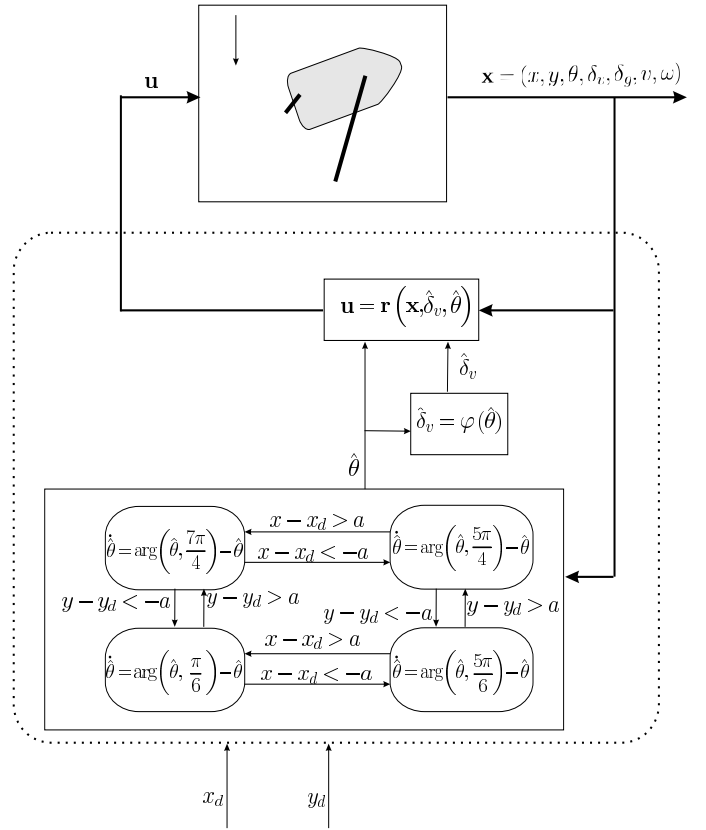


Fig. 4. Schéma du régulateur qui maintient notre bateau dans une zone désirée de l'océan

La figure 5 illustre le fait que pour toutes conditions initiales, le bateau régulé semble converger vers un cycle limite unique, centré sur le point de consigne.

#### IV. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons proposé un modèle dynamique simple pour un bateau à voile. Ce modèle comporte de nombreuses approximations (hypothèse de frottements visqueux, dérive constante, ...) et néglige de nombreux phénomènes (élasticité, courbure de la voile, ...). Ceci n'est pas acceptable lorsque l'on cherche à réaliser une simulation réaliste d'un système. En revanche, lorsque le but de la modélisation est la conception d'un régulateur, on cherche avant tout à obtenir un modèle à la fois simple et dont le comportement ressemble fortement à celui du système à réguler. En effet

- il est plus facile de concevoir un régulateur si le système est simple,
- comme le régulateur incorpore généralement les équations du modèle, les calculs résultant seront plus légers,
- le nombre de paramètres étant réduit, il nous sera plus facile de les identifier,
- enfin, une bonne régulation (efficace et robuste) d'un système complexe, comme un bateau à voile, se fonde davantage sur une bonne connaissance du comportement du système, que sur une connaissance fine de chacun des éléments qui le compose.

Une fois le régulateur conçu, sur la base de notre modèle simple, on peut espérer que ce régulateur soit capable de réguler un véritable bateau.

Rappelons que le régulateur que nous avons proposé est un régulateur par retour d'état qui suppose connus les paramètres de notre modèle. En pratique, l'identification des variables d'état (comme la vitesse angulaire du bateau lorsque des vagues viennent fausser le modèle) et des paramètres (comme la vitesse du vent) reste un problème difficile, où, du fait des très fortes non-linéarités, les techniques de propagation de contraintes [7], [3] pourraient s'avérer utiles.

Pour conclure, nous noterons que contrairement à la propulsion, la commande d'un bateau à voile requiert très peu d'énergie et pourrait être alimentée par une énergie solaire ou éolienne. Dans ce sens, le bateau à voile régulé peut être considéré comme un robot complètement autonome en énergie, tout comme les satellites. Ils pourraient peut être se rendre complémentaires de ces derniers pour des tâches demandant plus de proximité avec la terre (mesure de la température de l'eau, de la hauteur des vagues, surveillance de la faune marine, repérage des dégazages intempestifs ...)

**Note :** Le code source complet SCILAB[2] (environ 150 lignes) correspondant à l'exemple traité est disponible sur <http://www.istia.univ-angers.fr/~jaulin/bateauhybride.sce>.

#### RÉFÉRENCES

- [1] Mupad homepage, <http://www.mupad.com/>.
- [2] Scilab homepage, <http://www-rocq.inria.fr/scilab/scilab.html>.
- [3] X. Baguenard, M. Dao, and L. Jaulin. *Interval Peeler*, disponible sur <http://www.istia.univ-angers.fr/~baguenar/>. LISA, ISTIA, Université d'Angers, 2004.
- [4] M. Dao, X. Baguenard, and L. Jaulin. *Proj2d*, disponible sur <http://www.istia.univ-angers.fr/~dao/>. LISA, ISTIA, Université d'Angers, 2004.
- [5] R. L. Grossman, A. Nerode, A. P. Ravn, and H. Rischel, editors. *Hybrid Systems*. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, London, 1993.
- [6] A. Isidory. *Nonlinear Control Systems : An Introduction*, 3rd Ed. Springer-Verlag, New-York, 1995.
- [7] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied Interval Analysis, with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Springer-Verlag, London, 2001.
- [8] B. Laroche, P. Martin, and N. Petit. *Commande par platitude, Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*. Disponible sur <http://cas.ensmp.fr/~petit/ensta/main.pdf>, 2003.
- [9] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design : Geometric, Adaptive and Robust*. Prentice Hall, 1995.
- [10] D. Wells. *Lagrangian Mechanics*. Schaum's outlines, London, 1967.

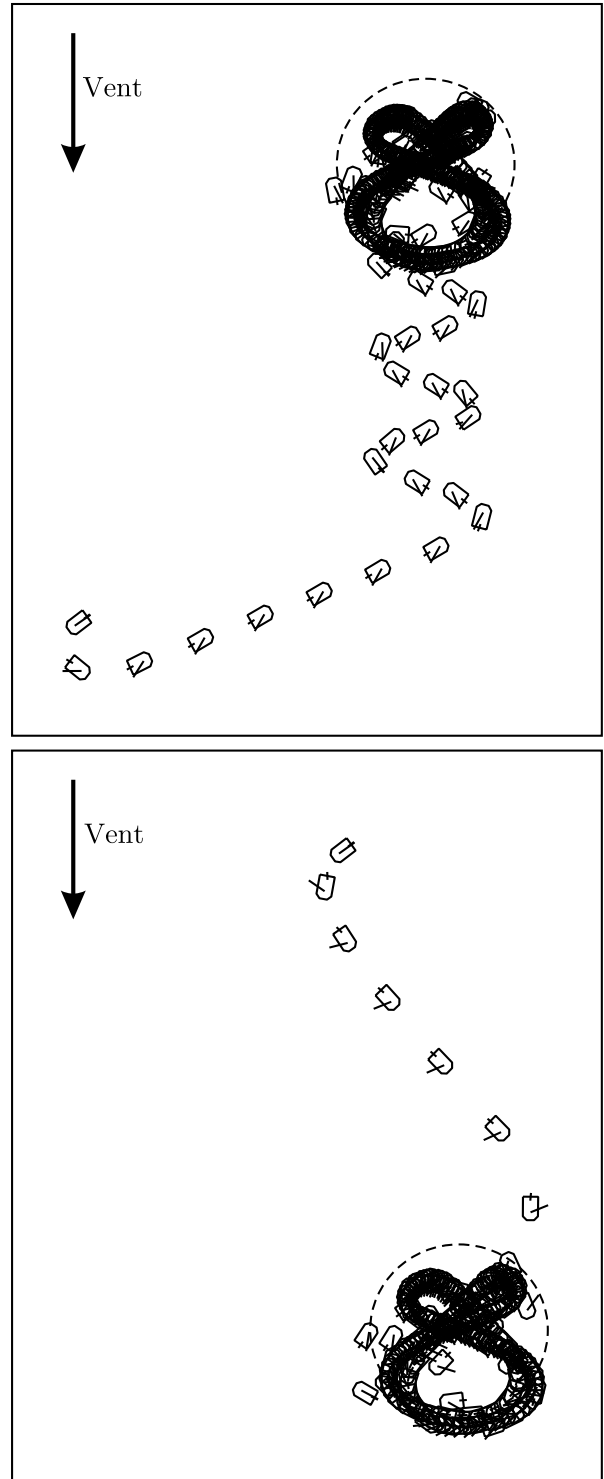


Fig. 5. Trajectoire du bateau à voile régulé pour deux conditions initiales différentes ; le cercle en pointillé est centré sur la consigne  $(x_d, y_d)$