



Projection d'ensembles pour l'estimation de paramètres, la conception de robot, et la commande robuste

Massa Dao¹, Xavier Baguenard¹ et Luc Jaulin²

LISA, FRE-2656,

Université d'Angers, 62 avenue notre Dame du lac, 49000 Angers, France

e-mail: ¹{dao, baguenar}@istia.univ-angers.fr

²jaulin@univ-angers.fr

Abstract: The aim of this paper is to show that many control problems can be cast into characterizing the projection of a set defined by nonlinear inequalities.

Keywords: Parameter estimation, set projection, robust control, robot design.

I. INTRODUCTION

Cet article porte sur l'application de la projection d'ensembles dans les domaines de la modélisation, de la commande et de l'identification des systèmes.

De nombreux problèmes d'automatique nécessitent l'identification de paramètres incertains qui obéissent à des contraintes de type équation ou inéquation non linéaire (voir par exemple [3] ou [1]). Pour résoudre ce genre de problèmes, il est possible de caractériser par un *sous pavage* (c'est-à-dire une union de pavés) l'ensemble des paramètres qui satisfont les contraintes imposées. Pour des raisons de rapidité de calcul, au lieu de chercher l'ensemble de tous les paramètres *acceptables*, nous allons chercher à encadrer leur projection.

Ce document est organisé de la façon suivante: la partie II. fait l'objet de quelques rappels sur le formalisme de la projection d'ensembles. Les parties III., IV., V. et VI. sont consacrées à la résolution de problèmes issus de la littérature. Nous avons fait le choix de présenter plusieurs exemples en apparence différents mais qui seront tous ici abordés dans le cadre de la projection d'ensembles. Enfin la partie VII. concerne les perspectives d'amélioration des méthodes employées.

II. PROJECTION D'ENSEMBLES

Considérons un sous ensemble de \mathbb{R}^n défini par :

$$\mathbb{Z} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in [\mathbf{p}] \times [\mathbf{q}], \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in [\mathbf{y}]\}, \quad (1)$$

avec \mathbf{f} une fonction vectorielle définie de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m , $[\mathbf{y}]$ un pavé de \mathbb{R}^m , $[\mathbf{p}]$ et $[\mathbf{q}]$ deux pavés respectivement de \mathbb{R}^{n_p} et de \mathbb{R}^{n_q} tel que $n_p + n_q = n$. La *projection* $\text{Proj}_{\mathbf{p}}(\mathbb{Z})$ de \mathbb{Z} suivant \mathbf{p} est donnée par

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \mid \exists \mathbf{q} \in [\mathbf{q}], (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{Z}\} \\ & = \{\mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \mid \exists \mathbf{q} \in [\mathbf{q}], \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in [\mathbf{y}]\}. \end{aligned} \quad (2)$$

La figure 1 constitue une illustration graphique des projections de \mathbb{Z} suivant \mathbf{p} et \mathbf{q} .

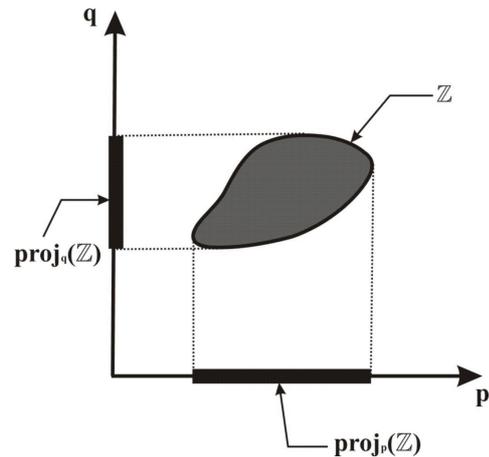


Figure 1 – Projections de l'ensemble \mathbb{Z} suivant \mathbf{p} et \mathbf{q} .

Il existe un algorithme dans [2], basé sur l'analyse par intervalles [8], qui permet de caractériser une telle projection. Ici, tous les problèmes dont la solution est sous la forme de l'expression (2) seront résolus grâce à cet

algorithme. Les exemples que nous exposerons ont été résolus à partir du solveur Proj2D. Nous avons développé ce solveur dans le but de caractériser la projection en 2 dimensions d'un ensemble défini par un système de contraintes. L'exécutable et les sources de Proj2D sont disponibles sur : <http://www.istia.univ-angers.fr/~dao/>.

Nous allons montrer dans les parties qui suivent en quoi le formalisme de projection d'ensembles constitue une approche intéressante pour traiter différents problèmes d'automatiques.

III. ESTIMATION À ERREURS BORNÉES

A. Problème de Milanese et Vicino

Ce premier exemple est tiré de la publication de Milanese et Vicino [7]. Un problème d'estimation à erreurs bornées est définie par deux caractéristiques principales :

a) **Modèle du processus :** Il s'agit ici d'un processus non linéaire qui dépend de la variable t et de 4 paramètres p_1, p_2, p_3, p_4 . Le modèle théorique du processus s'écrit

$$y_m(\mathbf{p}, t) = p_1 \exp(p_2 t) + p_3 \exp(p_4 t), \quad (3)$$

avec $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)^T$.

b) **Contraintes à satisfaire :** Les contraintes imposées au système s'écrit

$$y_m(\mathbf{p}, t_i) \in [y_i], \quad \forall i \in \{1, \dots, 10\}, \quad (4)$$

où $[y_i]$ correspondent aux intervalles d'incertitudes associés aux temps de mesure t_i . Les données du problème sont rassemblées dans le tableau ci dessous.

i	t_i	$[y_i]$
1	0.75	[6.9205, 7.8595]
2	1.5	[3.7855, 4.3945]
3	2.25	[1.553, 1.927]
4	3	[-0.00785, 0.20185]
5	6	[-2.7985, -2.3415]
6	9	[-2.9455, -2.4745]
7	13	[-2.2735, -1.8665]
8	17	[-1.612, -1.268]
9	21	[-1.129, -0.831]
10	25	[-0.793, -0.527]

Les paramètres sont supposés appartenir au pavé

$$[\mathbf{p}] = [2, 60] \times [0, 1] \times [-30, -1] \times [0, 0.5].$$

L'ensemble des paramètres acceptables est donc donné par

$$\mathbb{S} = \{ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \mid y_m(\mathbf{p}, t_i) \in [y_i], i = 1, \dots, 10 \}.$$

Milanese et Vicino ont proposé une méthode dans [7] pour déterminer un pavé qui contienne \mathbb{S} . Ils ont obtenu en 8mn sur un Compaq 386Mhz l'inclusion suivante

$$\mathbb{S} \subset [17.2, 26.9] \times [0.3, 0.49] \times [-16.1, -5.4] \times [0.077, 0.136].$$

Ici, notre approche consiste à caractériser les projections $\mathbb{P}_{j,k}$ de \mathbb{S} suivant les paramètres p_j, p_k avec j et $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ces projections s'écrivent :

$$\mathbb{P}_{j,k} = \text{Proj}_{(p_j, p_k)}(\mathbb{S}). \quad (6)$$

Proj2D génère les sous-pavages noir qui encadrent les ensembles $\mathbb{P}_{1,3}$ (figure 2a) et $\mathbb{P}_{2,4}$ (figure 2b). Les temps de calculs sont respectivement de l'ordre de 4mn et 20s sur un Pentium-250Mhz, avec une précision de $\varepsilon_r = 0.1$.

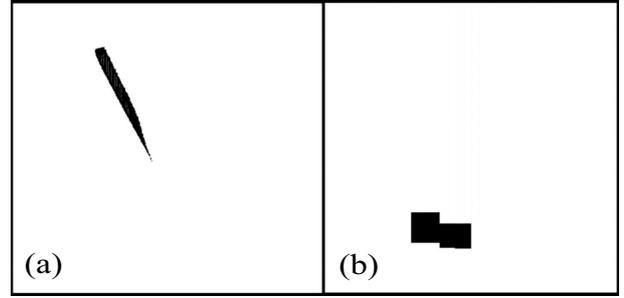


Figure 2 - (a) Caractérisation de l'ensemble $\mathbb{P}_{1,3}$, $((p_1, p_3) \in [2, 60] \times [-30, -1])$; (b) Pavage caractérisant l'ensemble $\mathbb{P}_{2,4}$, $((p_2, p_4) \in [0, 1] \times [0, 0.5])$.

B. Problème avec temps de mesure incertains

Nous allons maintenant traiter un cas influencé de l'exemple précédent où le modèle s'écrit

$$y_m(\mathbf{p}, t) = 20 \exp(-p_1 t) - 8 \exp(-p_2 t).$$

Mais cette fois-ci, les instants de mesure sont incertains. Le tableau des incertitudes sur t et y est donné ci dessous.

i	$[t_i]$	$[y_i]$
1	[-0.25, 1.75]	[2.7, 12.1]
2	[0.5, 2.5]	[1.04, 7.14]
3	[1.25, 3.25]	[-0.13, 3.61]
4	[2, 4]	[-0.95, 1.15]
5	[5, 7]	[-4.85, -0.29]
6	[8, 10]	[-5.06, -0.36]
7	[12, 14]	[-4.1, -0.04]
8	[16, 18]	[-3.16, 0.3]
9	[20, 22]	[-2.5, 0.51]
10	[24, 26]	[-2, 0.67]

La figure 3 constitue une représentation graphique des rectangles d'incertitudes associés.

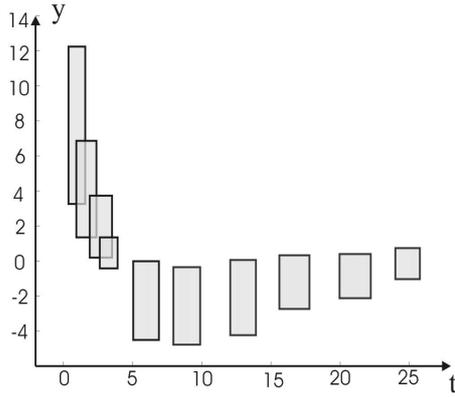


Figure 3 – Représentation des barres d'incertitudes associées aux vecteurs \mathbf{t} et \mathbf{y} dans le cadre $[1, 26] \times [-7, 13]$

L'ensemble des paramètres acceptables s'écrit

$$\mathbb{S} = \{ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \mid \exists t_1 \in [t_1], y_m(\mathbf{p}, t_1) \in [y_1], \dots, \exists t_{10} \in [t_{10}], y_m(\mathbf{p}, t_{10}) \in [y_{10}] \}.$$

En regroupant les quantificateurs existentiels, il vient

$$\mathbb{S} = \{ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \mid \exists t_1 \in [t_1], \dots, \exists t_{10} \in [t_{10}], y_m(\mathbf{p}, t_1) \in [y_1], \dots, y_m(\mathbf{p}, t_{10}) \in [y_{10}] \},$$

qui peut aussi s'écrire sous forme vectorielle

$$\mathbb{S} = \{ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \mid \exists \mathbf{t} \in [\mathbf{t}], \mathbf{y}_m(\mathbf{p}) \in [\mathbf{y}] \}. \quad (7)$$

On reconnaît l'expression de la projection d'un ensemble (*cf* expression (2)):

$$\mathbb{S} = \text{Proj}_{\mathbf{p}} \{ (\mathbf{p}, \mathbf{t}) \in [\mathbf{p}] \times [\mathbf{t}], \mathbf{y}_m(\mathbf{p}) \in [\mathbf{y}] \}. \quad (8)$$

Pour $[\mathbf{p}] = [0, 1.2] \times [0, 0.5]$ et une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$, Proj2D génère en 40 secondes, le sous-pavage de la figure 4. Les pavés noirs et blancs encadrent l'ensemble solution. Notons, que bien que ce problème ait été résolu, par des techniques similaires dans [4], nous venons ici de montrer pour la première fois que l'estimation avec temps de mesure incertains, dans un contexte à erreurs bornées, était un problème de projection d'ensembles.

IV. ANALYSE DE SENSIBILITÉ

Pour les notions sur l'identification et l'analyse de sensibilité, le lecteur pourra se référer au livre de Walter et Pronzato [9]. Nous nous intéressons ici à l'identification de paramètres incertains

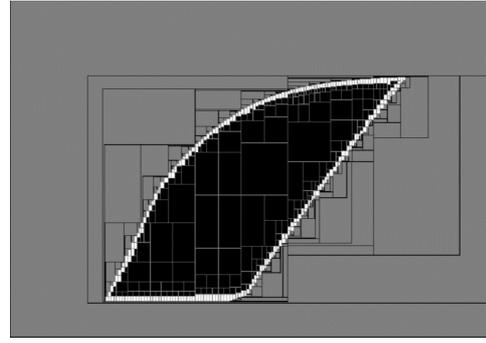


Figure 4 – Sous-pavage obtenu pour le problème d'estimation avec des temps de mesures incertains. Le pavé de recherche est $[0, 1.2] \times [0, 0.5]$.

d'un système par minimisation d'un critère non convexe. Les résultats obtenus par des méthodes d'optimisation locales dépendent le plus souvent des conditions initiales. Ces méthodes convergent parfois vers des optimums locaux qui peuvent être éloignés de ou des optima globaux. La démarche que nous adopterons nous permet de visualiser les variations du critère en fonction des paramètres à l'intérieur de différentes régions de confiance. Cela nous aidera à nous prononcer sur l'identifiabilité du système à analyser.

Soit un système non linéaire dépendant de 2 paramètres p_1 et p_2 défini par

$$y_m(\mathbf{p}, t) = 100 \exp(-p_1 t) + 101 \exp(-p_2 t). \quad (9)$$

Supposons qu'aux temps

$$\mathbf{t} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)^T,$$

nous avons déterminé le vecteur des valeurs en sortie \mathbf{y} de notre système en prenant comme paramètres $p_1^* = 0.5$ et $p_2^* = 1$. Ces valeurs de sortie sont ensuite volontairement "bruitées". Pour cet exemple nous avons choisi un bruit déterministe dans le but d'analyser le comportement du critère d'erreur. Les valeurs de sortie bruitées \hat{y}_i s'expriment en fonction des valeurs y_i du modèle (9) par la relation

$$\hat{y}_i = \Gamma(y_i + 0.5),$$

où $\Gamma(x)$ représente la partie entière du réel x et y_i correspond à $y_m(\mathbf{p}^*, t_i)$ pour $i = 1, \dots, 10$.

Nous déduisons de ce qui précède que l'ensemble des mesures bruitées est donnée par le vecteur

$$\hat{\mathbf{y}} = (201, 98, 50, 27, 15, 9, 5, 3, 2, 1)^T. \quad (10)$$

NB: il aurait été possible de choisir un bruit aléatoire de type uniforme, gaussien, *etc*.

Le critère d'erreur s'écrit

$$j(\mathbf{p}) = \|\mathbf{y}_m(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{y}}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,10} |y_m(\mathbf{p}, t_i) - \hat{y}_i|.$$

A priori, il pourrait exister plusieurs optimums globaux $\hat{\mathbf{p}}$ auquel cas le système ne serait pas globalement identifiable. Afin de visualiser le défaut d'identifiabilité ainsi que la sensibilité de cet optimum global pour une variation infinitésimale du critère, définissons l'épigraphe de $j(\mathbf{p})$

$$\mathbb{E} = \{ (\mathbf{p}, \tilde{j}) \in [\mathbf{p}] \times [\tilde{j}] \mid j(\mathbf{p}) \leq \tilde{j} \}, \quad (11)$$

avec $[\mathbf{p}] = [0, 3]^{\times 2}$ et $[\tilde{j}] = [0, 5]$. Retenons que notre objectif n'est pas de réaliser un estimateur robuste, nous voulons simplement observer les variations de l'épigraphe en fonction d'un bruit de mesure associé. Les sous-pavages blancs et noirs sur figure 5 caractérisent la projection de l'épigraphe \mathbb{E} suivant p_1 et \tilde{j} ($\text{Proj}_{p_1, \tilde{j}}(\mathbb{E})$). Ces résultats sont obtenus avec un temps de calcul d'environ 5mn et une précision de $\varepsilon_r = 0.1$ sur un Pentium 250Mhz. Cette figure suggère l'existence de deux minima globaux. Une analyse plus précise de ces sous-pavages montre l'existence d'un seul minimum global représenté par le pic de gauche, le pic de droite étant un minimum local. Cette figure illustre le fait qu'une infime variation du critère, par exemple due à une légère modification du bruit de mesure, peut engendrer un optimum global complètement différent.

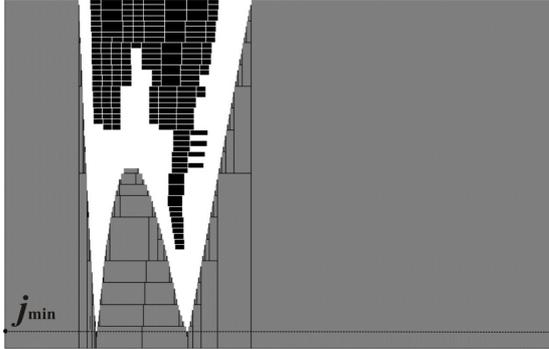


Figure 5 – Pavage caractérisant la projection de l'épigraphe du critère $j(\mathbf{p})$ dans l'espace $(p_1, \tilde{j}) \in [0, 3] \times [0, 5]$.

V. CONCEPTION DE ROBOT

Dans cette partie, nous allons montrer et ceci constitue une des contributions de notre article, que certains problèmes de conception de robots sont des problèmes de projection d'ensembles. A titre d'illustration, nous allons considérer un exemple inspiré de l'article [6]. Il s'agit de

concevoir un robot (type grue de chantiers) constitué de 2 axes et de 3 articulations rotoïdes (voir figure 6). Plus précisément, il nous faut déterminer les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des 2 axes qui permettent à l'organe terminal du robot d'atteindre simultanément un nombre m de points \mathbf{x}^i dans l'espace. Les couples (ℓ_1, ℓ_2) admissibles *a priori* sont contenus dans un pavé noté: $[\mathbf{l}] = [\ell_1] \times [\ell_2]$. Les angles de rotation des articulations θ_1, θ_2 , et θ_3 doivent appartenir respectivement aux trois intervalles $[\theta_1], [\theta_2]$ et $[\theta_3]$.

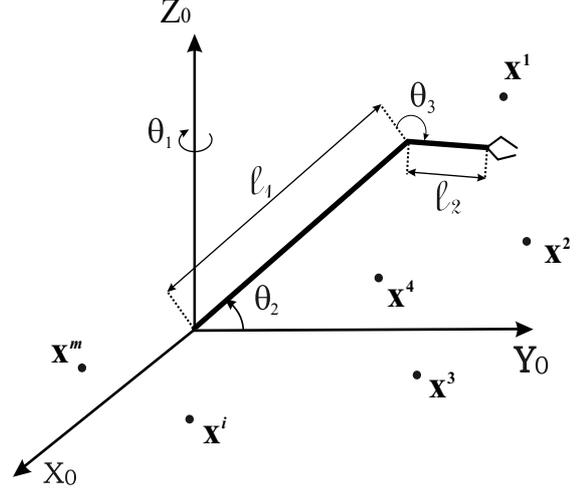


Figure 6 – Situation des axes du robot dans l'espace tridimensionnel

Le modèle géométrique direct du robot (voir W. Khalil et E. Dombre [5]) permet d'exprimer la position de l'organe terminal \mathbf{x} en fonction du vecteur $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ des variables articulaires et du vecteur des longueurs $\mathbf{l} = (\ell_1, \ell_2)^T$. L'expression associée s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}), \quad (12)$$

avec

$$\mathbf{f}(\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} (\ell_1 \cos \theta_2 - \ell_2 \sin(\theta_2 + \theta_3)) \cos \theta_1 \\ (\ell_1 \cos \theta_2 - \ell_2 \sin(\theta_2 + \theta_3)) \sin \theta_1 \\ \ell_1 \sin \theta_2 + \ell_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des vecteurs \mathbf{l} acceptables est

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \{ \mathbf{l} \in [\mathbf{l}] \mid \forall i \leq m, \exists \boldsymbol{\theta}^i \in [\boldsymbol{\theta}], \mathbf{x}^i = \mathbf{f}(\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}^i) \} \\ &= \{ \mathbf{l} \in [\mathbf{l}] \mid \exists \boldsymbol{\theta}^1 \in [\boldsymbol{\theta}], \mathbf{x}^1 = \mathbf{f}(\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}^1), \\ &\quad \dots, \exists \boldsymbol{\theta}^m \in [\boldsymbol{\theta}], \mathbf{x}^m = \mathbf{f}(\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}^m) \}. \end{aligned}$$

En rassemblant les quantificateurs existentiels, il vient

$$\mathbb{S} = \{ \mathbf{l} \in [\mathbf{l}] \mid \exists (\boldsymbol{\theta}^1, \dots, \boldsymbol{\theta}^m) \in [\boldsymbol{\theta}] \times \dots \times [\boldsymbol{\theta}], \mathbf{x}^1 = \mathbf{f}(\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}^1), \dots, \mathbf{x}^m = \mathbf{f}(\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}^m) \},$$

qui peut s'exprimer en terme de projection par

$$\mathbb{S} = \text{Proj}_{\mathbf{l}} \{ (\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}^1, \dots, \boldsymbol{\theta}^m) \in [\mathbf{l}] \times [\boldsymbol{\theta}]^{\times m} \mid \mathbf{x}^1 = \mathbf{f}(\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}^1), \dots, \mathbf{x}^m = \mathbf{f}(\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta}^m) \}.$$

Nous avons choisi 6 points \mathbf{x}^i à atteindre par le robot dont les coordonnées sont données dans le tableau ci-dessous.

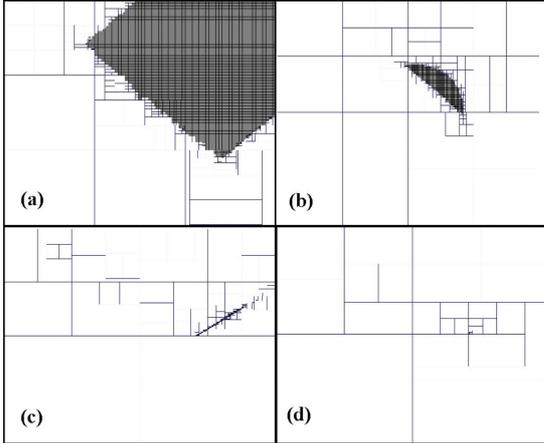
i	\mathbf{x}^i
1	$(1, 0, 0)^T$
2	$(0, 1, 0)^T$
3	$(0, 0, 1)^T$
4	$(1, 1, 0)^T$
5	$(1, 1, 1)^T$
$m = 6$	$(0, 1, 2)^T$

(13)

Considérons 4 situations pour lesquelles les angles de rotations θ^i sont soumis à des contraintes de bûtes.

- **Cas (a)**: $[\theta] = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$;
- **Cas (b)**: $[\theta] = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$;
- **Cas (c)**: $[\theta] = [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [-\pi, \pi]$;
- **Cas (d)**: $[\theta] = [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

L'espace de recherche des longueurs ℓ_1 et ℓ_2 choisi pour les 4 cas est à priori le pavé $[1] = [0, 2]^{\times 2}$. A la fin du calcul, les ensembles de couples (ℓ_1, ℓ_2) solutions sont délimités par les sous pavages en gris (cf. figure 7 a, b, c, d). Sur un pentium 250Mhz, les temps de calcul sont de l'ordre de: (a) 1h30mn, (b) 30mn, (c) 10mn, (d) 2mn et pour une précision fixée à $\varepsilon_r = 10^{-2}$.



Figure~7 - a, b, c et d Pavages caractérisant l'ensemble des longueurs (ℓ_1, ℓ_2) qui permettent au robot d'atteindre les points \mathbf{x}_i . Les cadres correspondent au pavé $[1] = [0, 2]^{\times 2}$

VI. COMMANDE ROBUSTE

Ce problème de commande robuste provient de [2]. Nous désirons stabiliser un système (Σ_1) dont la

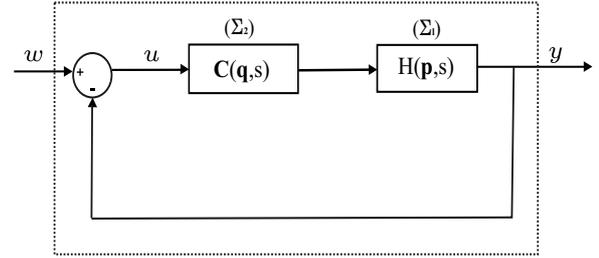
fonction de transfert est donnée par

$$(\Sigma_1) : H(\mathbf{p}, s) = \frac{p_1 p_2^2}{(p_2 s + 1)(s^2 + p_3 s + p_3^2)} \quad (14)$$

où $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ est le vecteur des paramètres incertains supposé appartenir au pavé $[\mathbf{p}] = [0.9, 1.1]^{\times 3}$. Afin de stabiliser ce système, nous utilisons une commande de type proportionnelle et intégrale

$$(\Sigma_2) : C(\mathbf{q}, s) = q_1 + \frac{q_2}{s} \quad (15)$$

dont les coefficients q_1 et q_2 peuvent être choisis arbitrairement dans le pavé $[\mathbf{q}] = [0, 1]^{\times 2}$.



Figure~8 - Système (Σ_1) régulé par une commande proportionnelle - intégrale

Le système bouclé, représenté sur la figure 8, possède pour fonction de transfert

$$(\Sigma) : F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s) = \frac{H(\mathbf{p}, s) \cdot C(\mathbf{q}, s)}{1 + H(\mathbf{p}, s) \cdot C(\mathbf{q}, s)} \quad (16)$$

Trouver une commande robuste consiste à déterminer les coefficients q_1 et q_2 de $C(\mathbf{q}, s)$, afin que le système en boucle fermée soit stable pour tous paramètres $(p_1, p_2, p_3)^T$ appartenant à $[\mathbf{p}]$. Définissons l'ensemble

$$\mathbb{S}_{\mathbf{q}} = \{ \mathbf{q} \in [\mathbf{q}] \mid \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], (\Sigma) \text{ est stable} \}. \quad (17)$$

La contrainte de stabilité du système (Σ) peut être transformée en inégalités de la forme $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) > \mathbf{0}$ grâce au critère de Routh. Ainsi,

$$\mathbb{S}_{\mathbf{q}} = \{ \mathbf{q} \in [\mathbf{q}] \mid \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) > \mathbf{0} \}. \quad (18)$$

Pour notre exemple, $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est donnée par

$$\left(\begin{array}{c} p_2 \\ 1 + p_2 p_3 \\ \left(p_3^2 p_2 + p_3 - \frac{p_2 p_3^2 (1 + q_2 p_1)}{1 + p_2 p_3} \right) \\ 1 + q_2 p_1 - \frac{(1 + p_2 p_3)^2 q_1 p_1}{(1 + p_2 p_3)(p_2 p_3^2 + p_3) - p_3^2 p_2 (1 + q_2 p_1)} \\ q_1 p_1 p_3^2 \end{array} \right),$$

Notons

$$r(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \min(g_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, g_5(\mathbf{q}, \mathbf{p})).$$

L'expression (18) devient :

$$\mathbb{S}_{\mathbf{q}} = \{ \mathbf{q} \in [\mathbf{q}] \mid \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], r(\mathbf{q}, \mathbf{p}) > \mathbf{0} \}. \quad (19)$$

Or, le complémentaire de $\mathbb{S}_{\mathbf{q}}$ dans $[\mathbf{q}]$ s'exprime par

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{S}}_{\mathbf{q}} &= \{ \mathbf{q} \in [\mathbf{q}] \mid \neg (\forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], r(\mathbf{q}, \mathbf{p}) > \mathbf{0}) \} \\ &= \{ \mathbf{q} \in [\mathbf{q}] \mid \exists \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], r(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \leq \mathbf{0} \} \\ &= \text{Proj}_{\mathbf{q}} \{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in [\mathbf{q}] \times [\mathbf{p}] \mid r(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \leq \mathbf{0} \}. \end{aligned}$$

Nous retrouvons l'expression d'une projection d'un ensemble. La caractérisation de $\overline{\mathbb{S}}_{\mathbf{q}}$ dans le pavé initial $[\mathbf{q}]$ nous donne un encadrement de $\mathbb{S}_{\mathbf{q}}$ par la même occasion.

La figure 9 représente 3 sous pavages. Les pavés noirs sont à l'intérieur de $\overline{\mathbb{S}}_{\mathbf{q}}$ donc à l'extérieur de $\mathbb{S}_{\mathbf{q}}$. De même les pavés gris sont à l'intérieur de $\overline{\mathbb{S}}_{\mathbf{q}}$ et donc à l'extérieur de $\mathbb{S}_{\mathbf{q}}$. Les pavés blancs indiquent la zone frontière ou encore la zone d'incertitude. Ces ensembles ont été obtenus par Proj2D en 35mn pour une précision $\varepsilon_r = 0.01$ sur Pentium 250Mhz.

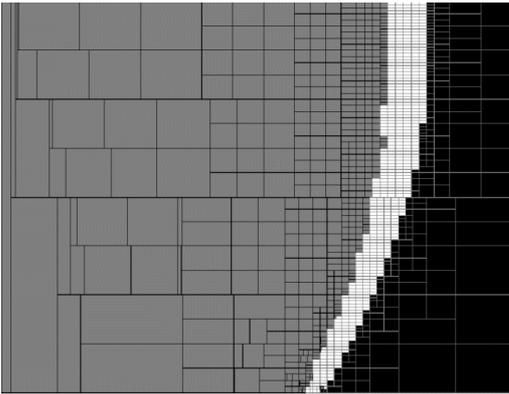


Figure 9 – Caractérisation de l'ensemble des commandes robustes $\mathbb{S}_{\mathbf{q}}$ par le sous-pavage gris. Le cadre correspond au pavé $[0, 1]^{\times 2}$ dans l'espace (q_1, q_2) .

VII. CONCLUSION

La contribution de notre article est de montrer que plusieurs problèmes d'automatique, a priori, complètement différents, se ramènent au calcul de la projection d'un ensemble défini par des contraintes de type inégalité.

Quelques exemples illustratifs ont été traités à l'aide du solveur Proj2D développé par les auteurs. Ce solveur utilise abondamment le calcul par intervalles et la propagation de contraintes qui permettent d'obtenir des résultats garantis. Les temps de calcul obtenus sont malheureusement très sensibles au nombre de paramètres, phénomène qui

a pu être observé à travers les exemples traités. Dans un avenir proche, il convient d'améliorer les performances de notre solveur afin d'atténuer cette sensibilité. Lorsque le nombre de paramètres à estimer est important (supérieur à 10), la stratégie que nous comptons adopter est la combinaison de méthodes intervalles et de certaines heuristiques. Ce procédé permettra de trouver en un temps raisonnable le ou les meilleurs jeux de paramètres au sens d'un critère qui reste à définir.

REFERENCES

- [1] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. MacMillan, New York, NY, 1994.
- [2] I. Braems. *Analyse par intervalles pour l'estimation et la commande robuste*. PhD dissertation, Université Paris Sud, Orsay, France, 2002.
- [3] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied Interval Analysis, with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Springer-Verlag, London, 2001.
- [4] L. Jaulin and E. Walter. Guaranteed bounded-error parameter estimation for nonlinear models with uncertain experimental factors. *Automatica*, 35(5): 849–856, 1999.
- [5] W. Khalil and E. Dombre. *Modélisation, identification et commande des robots*. Collection Robotique, Hermès, Paris, 1999.
- [6] J.-P. Merlet. Designing a parallel manipulator for a specific workspace. In *Internat. Symp. on Robotics and Manufacturing*, Montpellier, 1996.
- [7] M. Milanese and A. Vicino. Estimation theory for nonlinear models and set membership uncertainty. *Automatica*, 27(2): 403–408, 1991.
- [8] R. E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [9] E. Walter and L. Pronzato. *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. Springer-Verlag, London, UK, 1997.