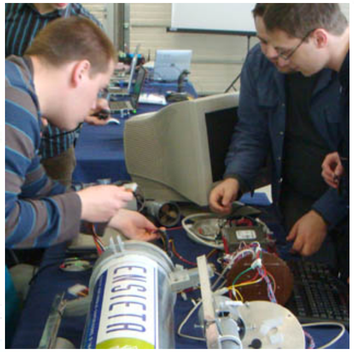
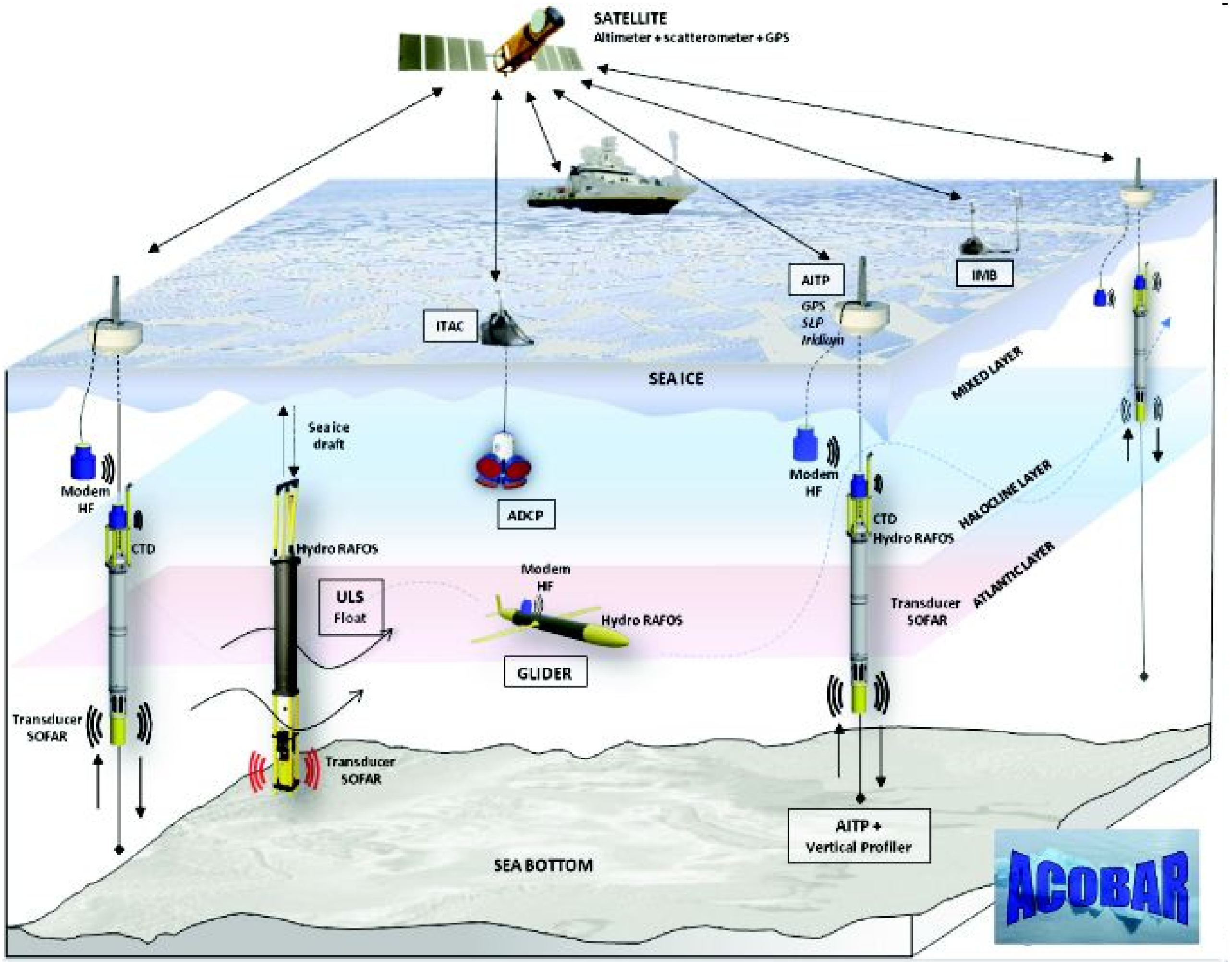


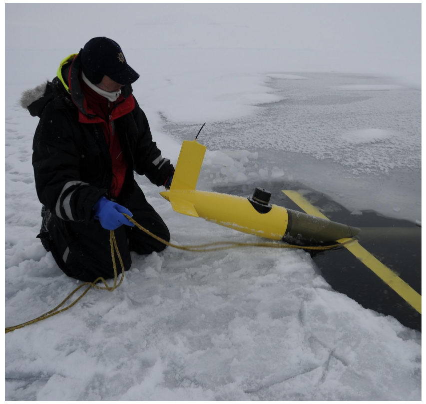
# Méthodes ensemblistes pour la robotique sous-marine

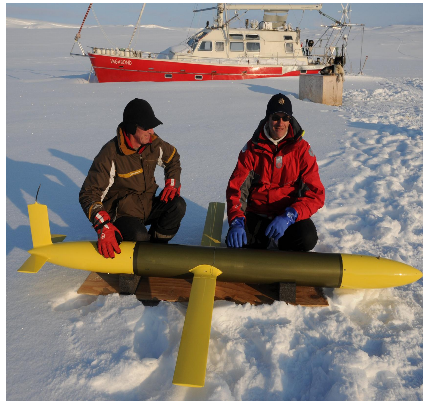
Fabrice LE BARS & Jan SLIWKA
Ingénieurs chercheurs ENSTA Bretagne

# Nos activités en robotique sous-marine

# Glider de l’ENSTA Bretagne



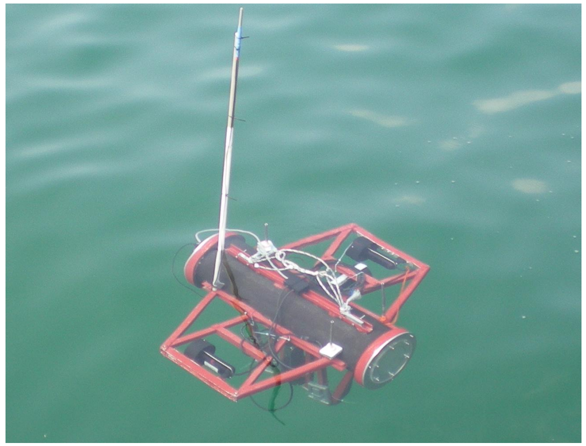


Une campagne de mesures de plusieurs mois sous la banquise

# Compétition de robotique sous-marine

- SAUC-E (Student Autonomous Underwater Challenge - Europe)





# Daurade - Redermor

Daurade

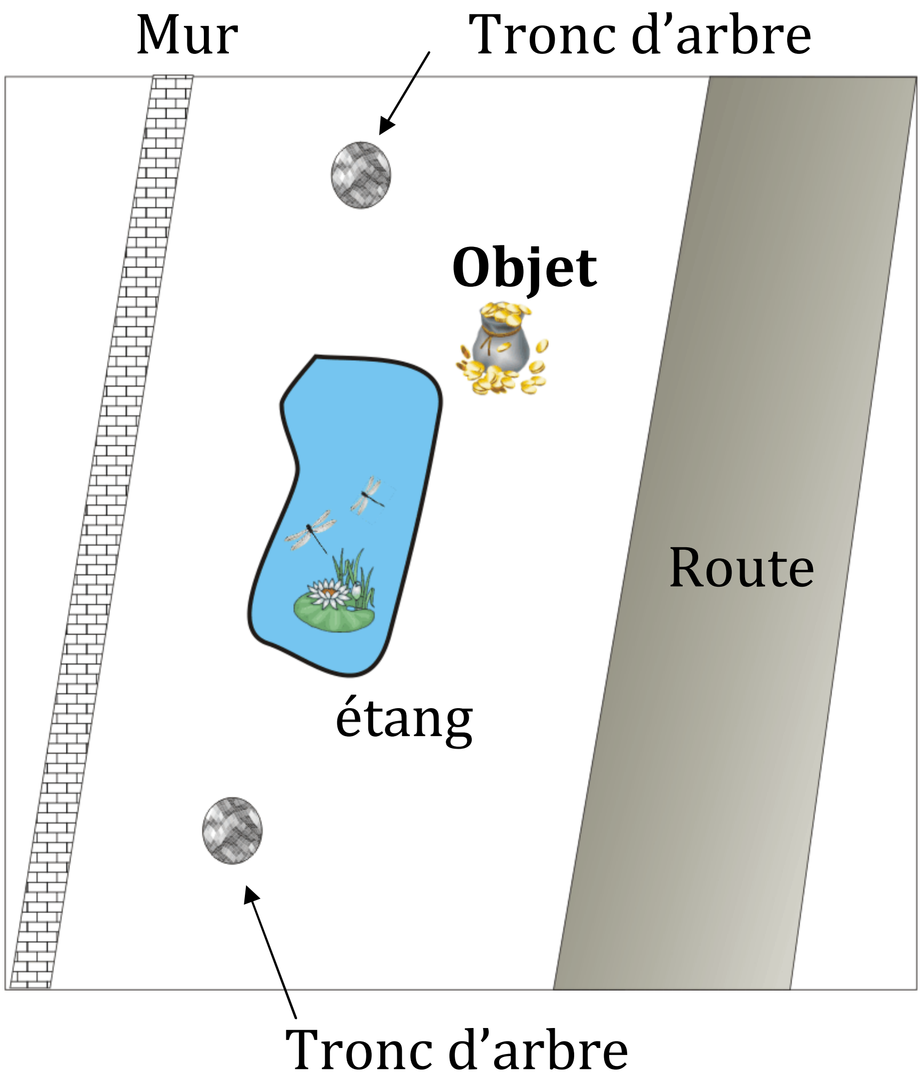
Redermor

# Plan

- Exemple introductif sur la localisation
- Outils théoriques ensemblistes
  - Les intervalles de trajectoires : Tubes
  - La robustesse : Accumulateurs et Polynômes ensemblistes
- Exemples applicatifs
  - Utilisation des tubes pour résoudre un problème de SLAM
  - Localisation robuste

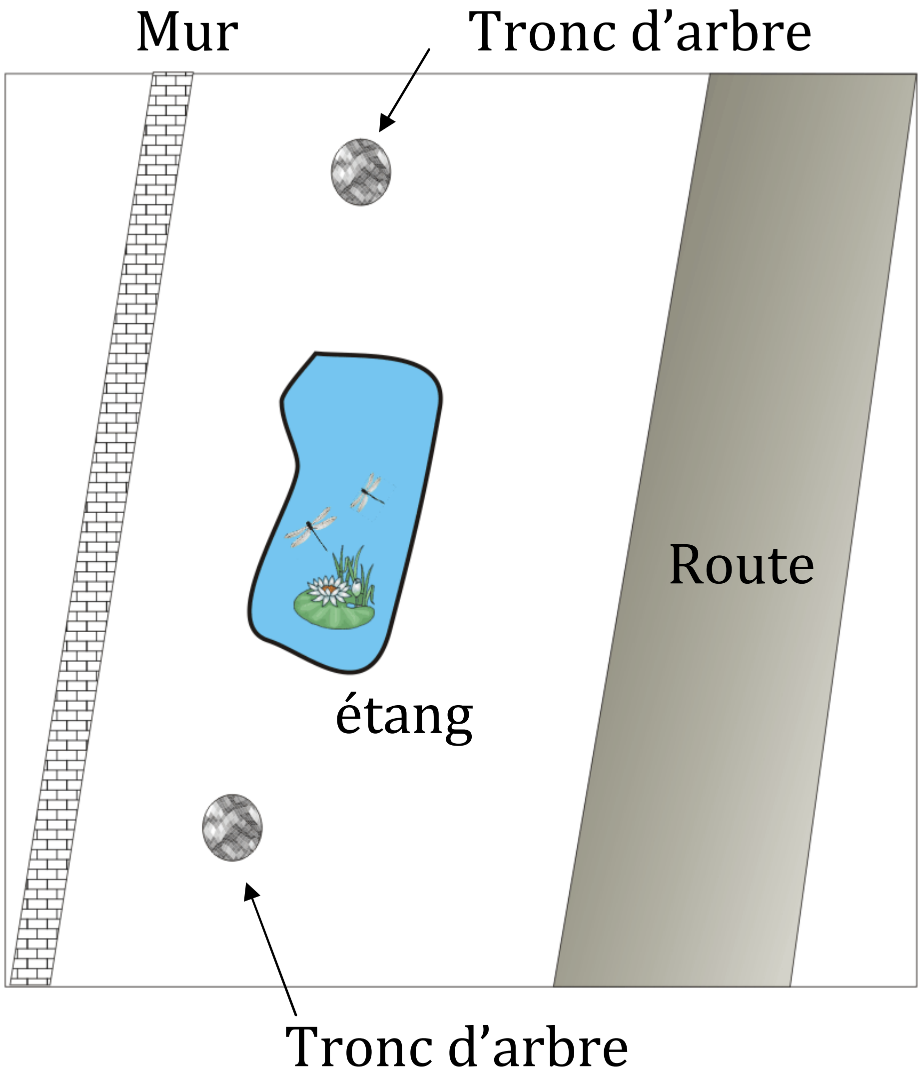
# Exemple introductif sur la localisation

# Exemple



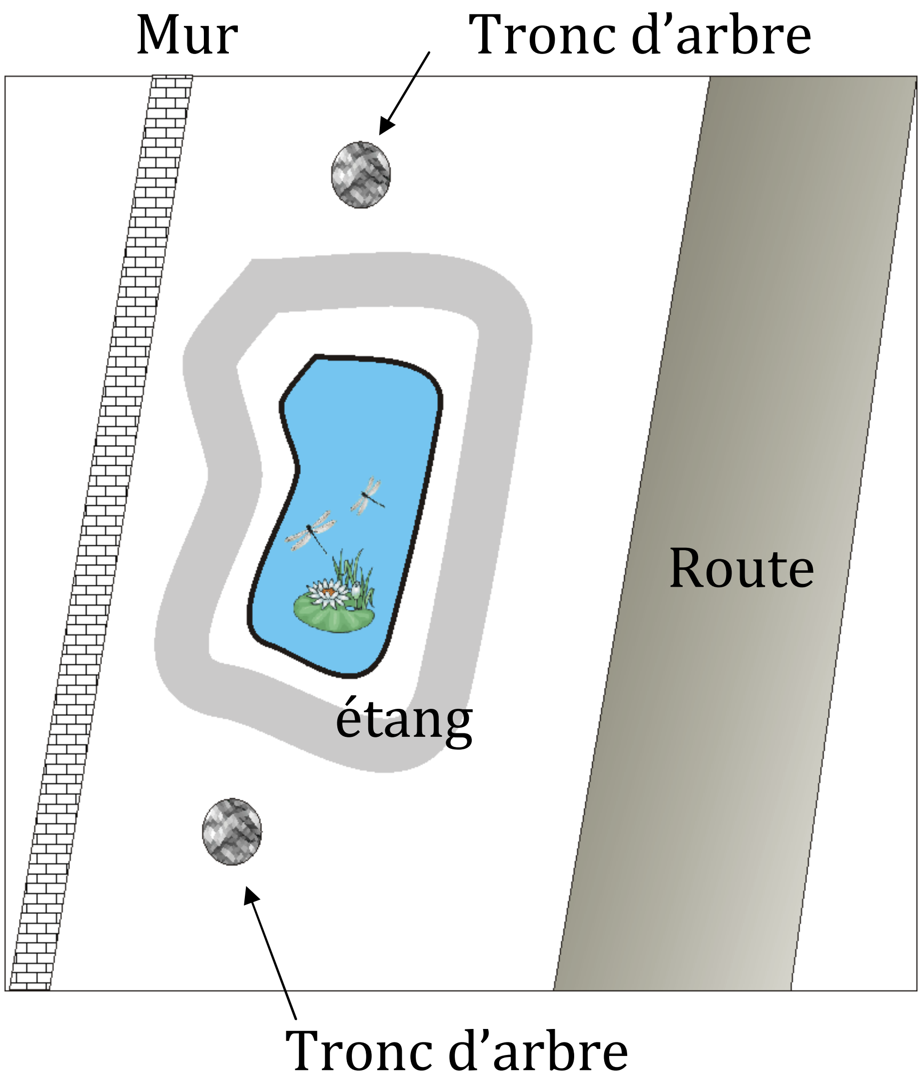

- **Environnement** : Parc connu
- **Objet** à localiser
- **Informations**?

# Exemple



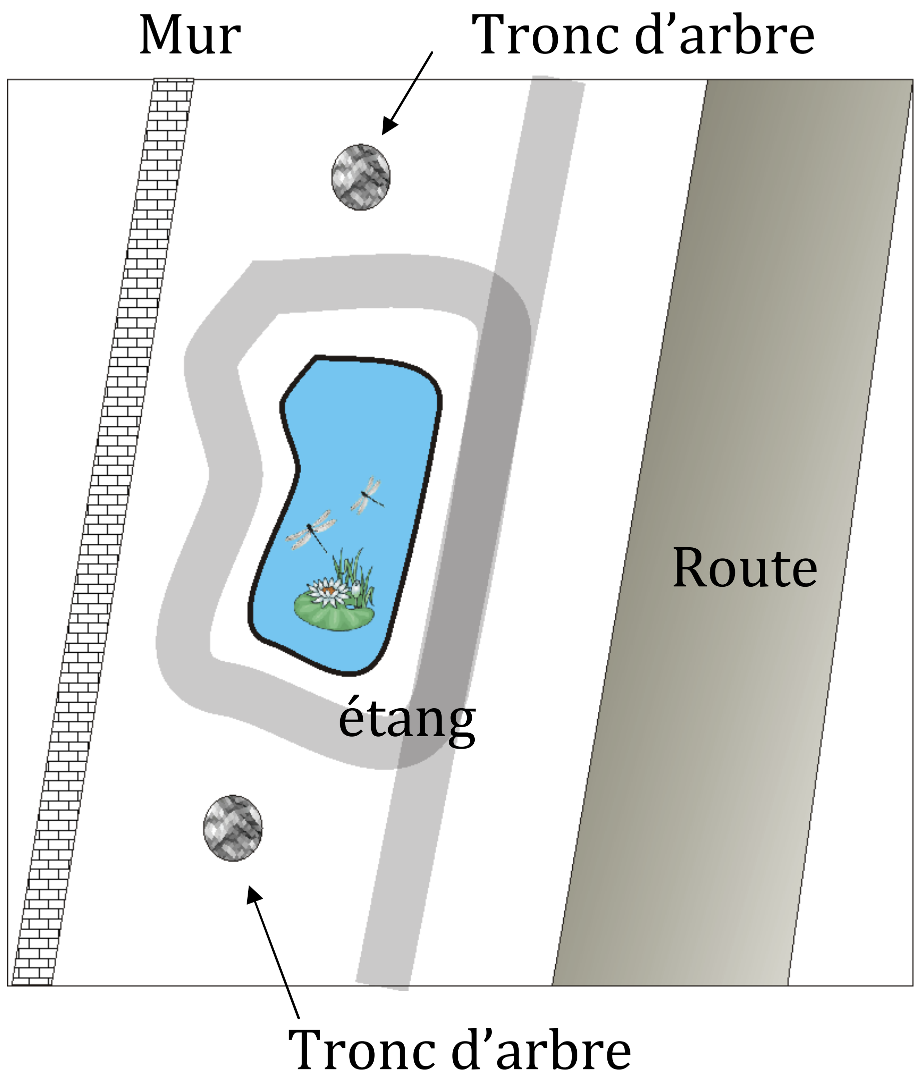

- Informations sur la position de l'objet
  - Rien

# Exemple



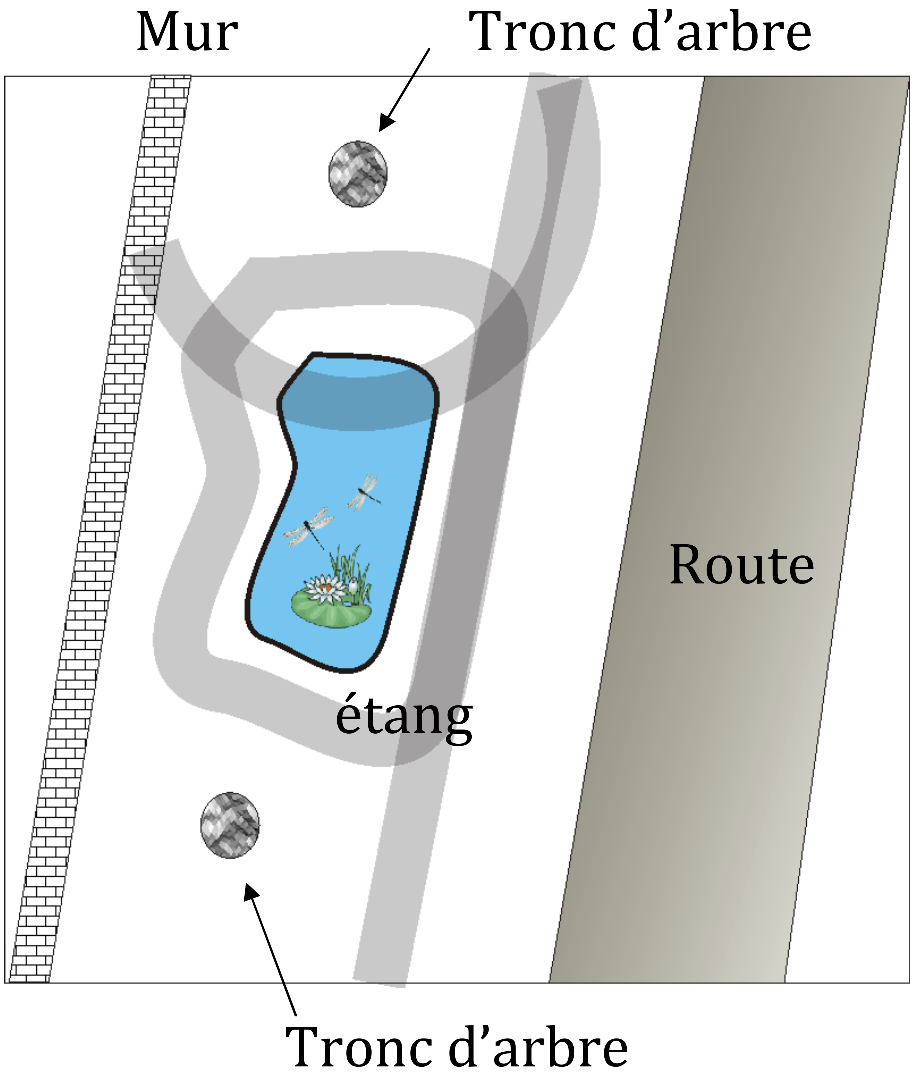

- Informations sur la position de l'objet
  - « A un pas de l'étang » ~

# Exemple



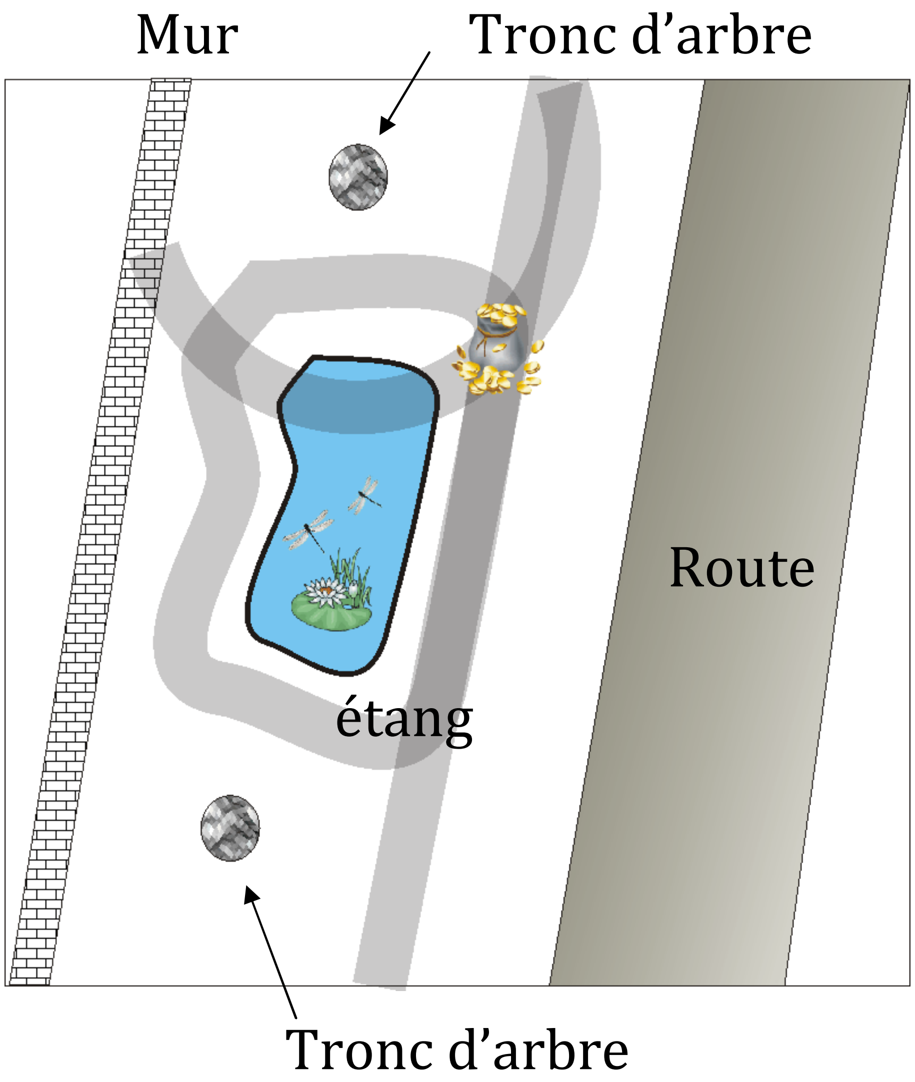

- Informations sur la position de l'objet
  - « A un pas de l'étang »
  - « A deux pas de la route »

# Exemple



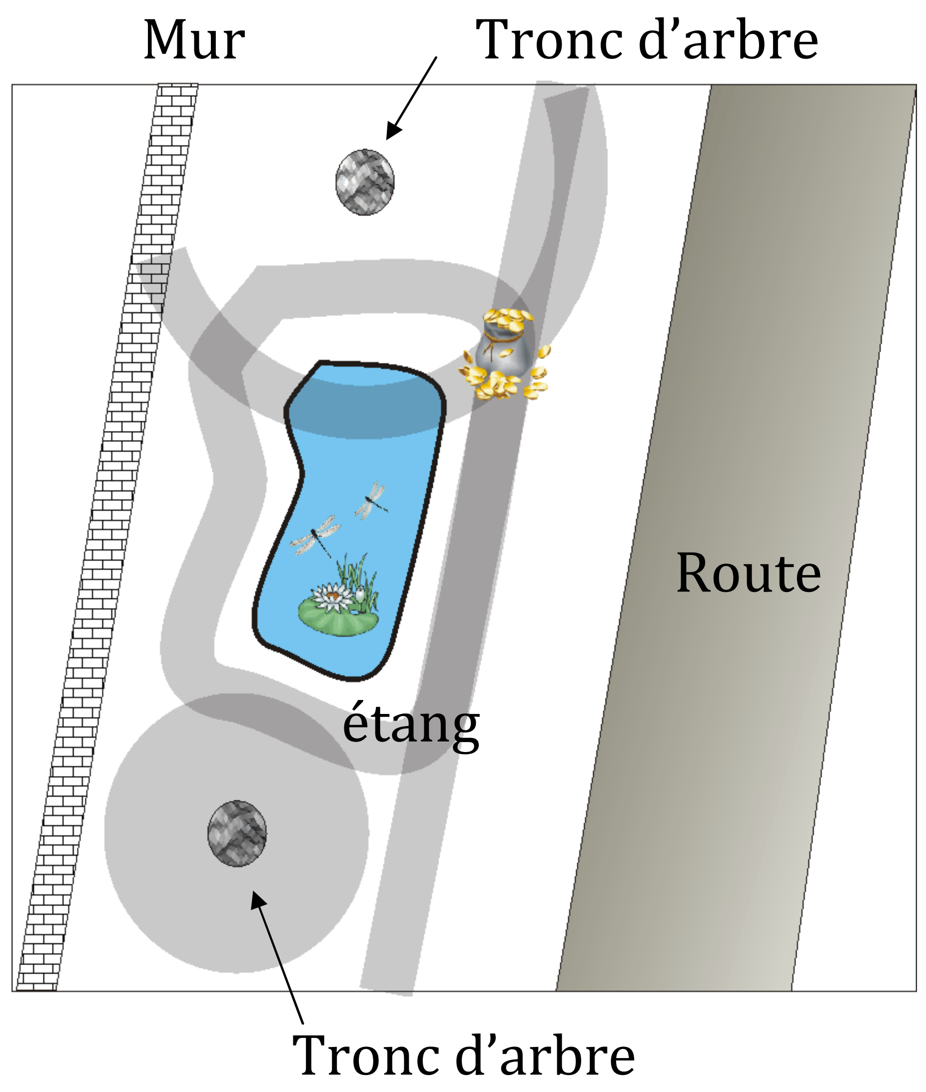

- Informations sur la position de l'objet
  - « A un pas de l'étang »
  - « A deux pas de la route »
  - « A trois pas de l'arbre nord »

# Exemple



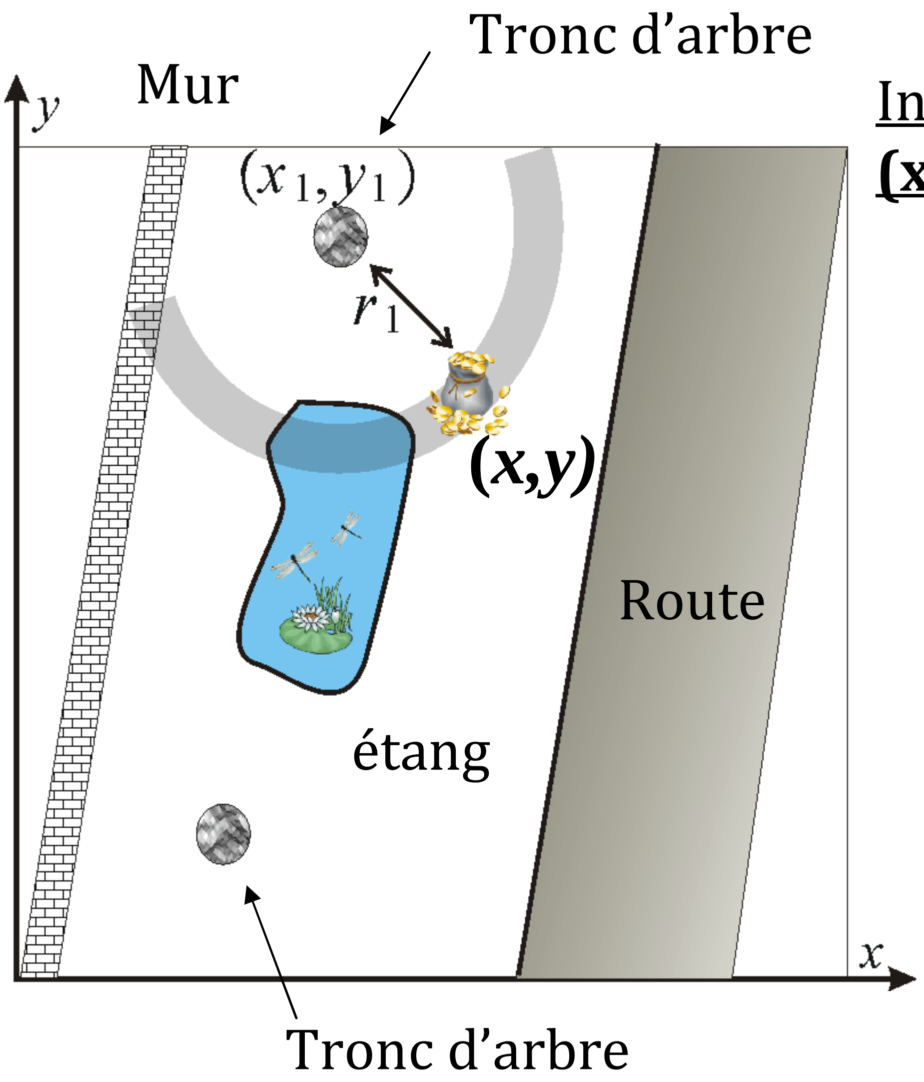

- Informations sur la position de l'objet
  - « A un pas de l'étang »
  - « A deux pas de la route »
  - « A trois pas de l'arbre nord »

# Exemple




- Informations sur la position de l'objet
  - « A un pas de l'étang »
  - « A deux pas de la route »
  - « A trois pas de l'arbre nord »
  - « Sous l'arbre sud »

# Modélisation mathématique




<u>Informations (**contraintes**) sur la position **(x,y)** de l'objet :</u>

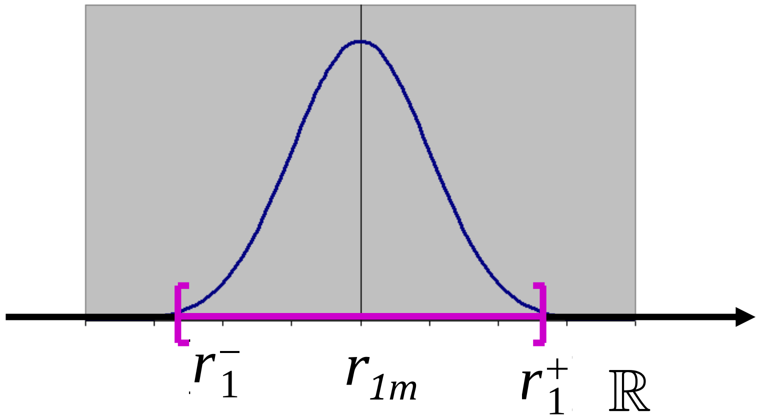
« A trois pas de l'arbre nord »

$$\boxed{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2}$$

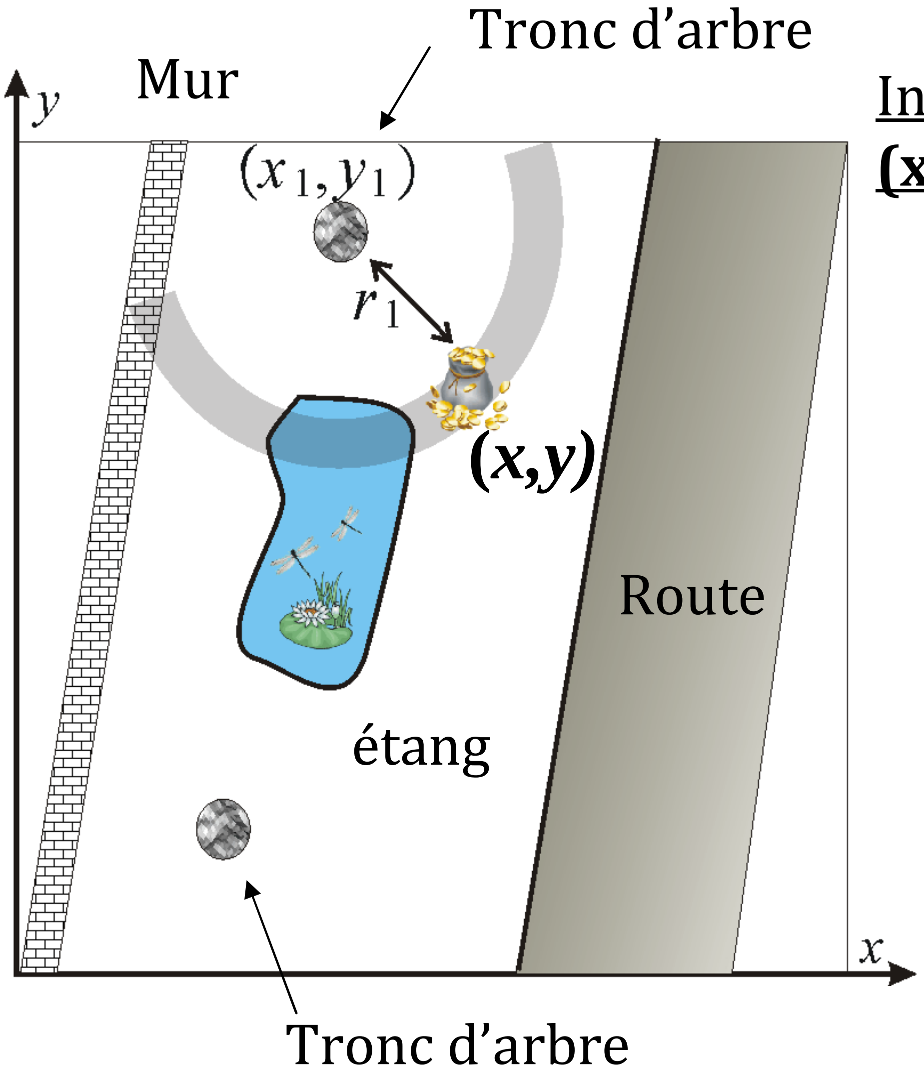
Incertitude sur la mesure de $r_1$

$$\boxed{r_1 \in [r_1^-, r_1^+]}$$

Gaussienne



# Modélisation mathématique




<u>Informations (**contraintes**) sur la position **(x,y)** de l'objet :</u>

« A trois pas de l'arbre nord »

$$\boxed{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2}$$

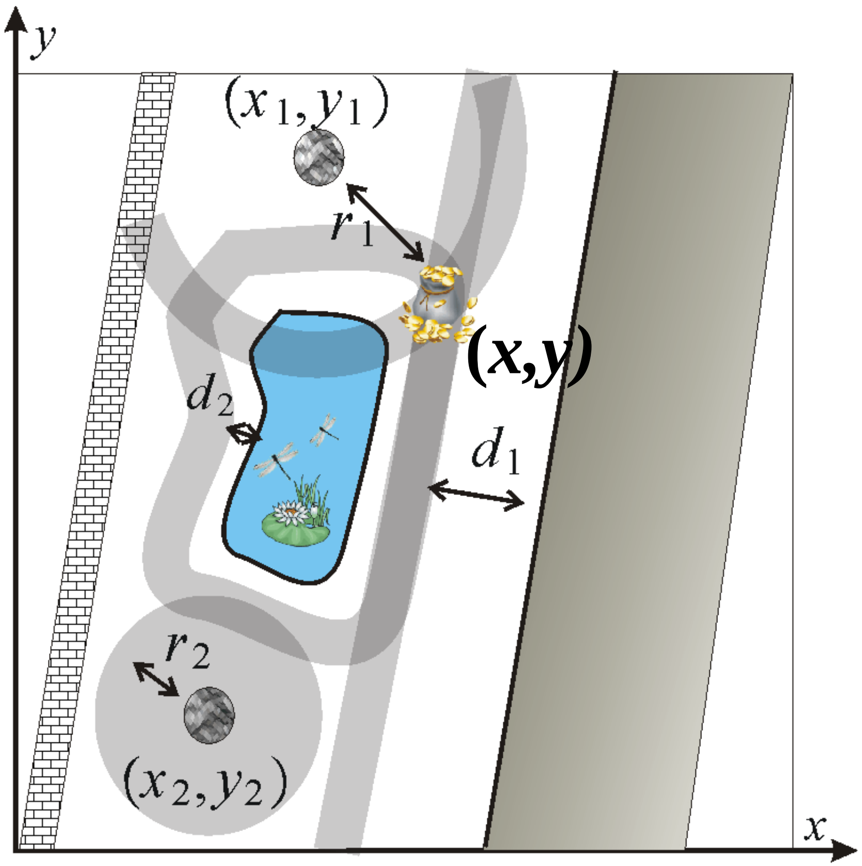
Incertitude sur la mesure de $r_1$

$$\boxed{r_1 \in [r_1^-, r_1^+]}$$

Incertitude sur les coordonnées du tronc

$$\boxed{x_1 \in [x_1^-, x_1^+], y_1 \in [y_1^-, y_1^+]}$$

# Modélisation mathématique




$y_3 = ax_3 + b$

**Informations (contraintes) sur la position (x,y) de l'objet :**

« A trois pas de l'arbre nord »

$$\boxed{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2}$$

« A deux pas de la route »

$$\boxed{y = ax + b + \frac{d_1}{\cos(\tan^{-1}(a))}}$$

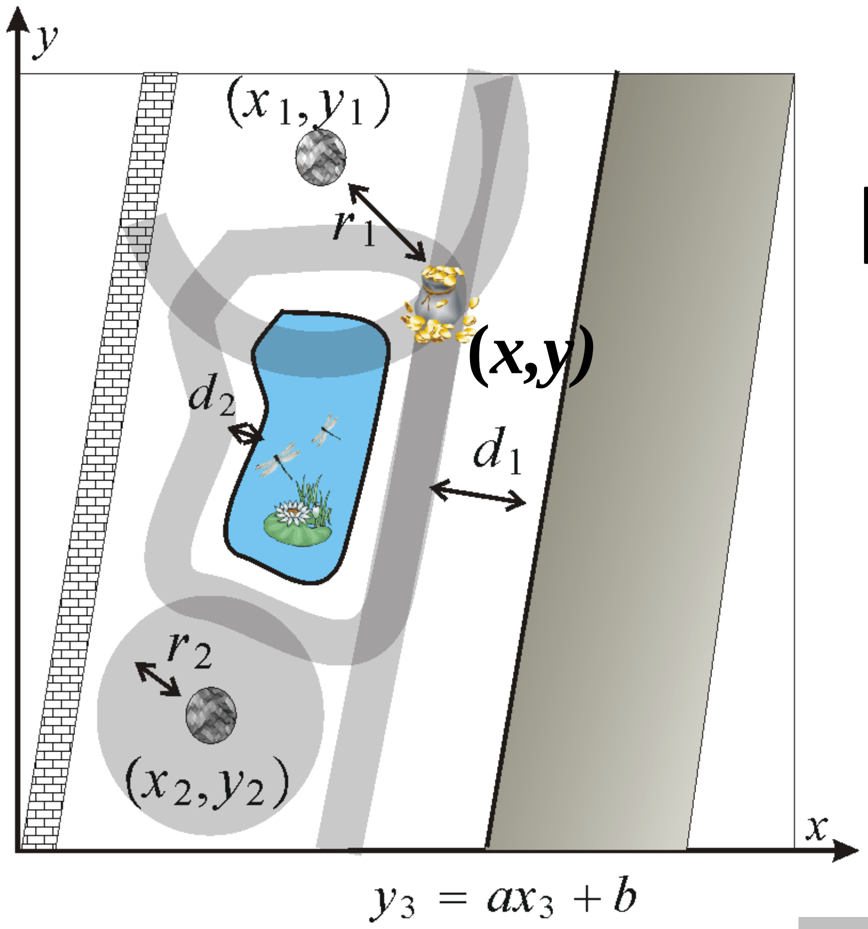
« A un pas de l'étang »

$$\boxed{distance((x,y), étang) = d_2}$$ *

« Sous l'arbre sud »

$$\boxed{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2}$$

# Modélisation mathématique




$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r_1^2 \\ y = ax + b + \dfrac{d_1}{\cos(\tan^{-1}(a))} \\ distance((x,y), étang) = d_2 \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

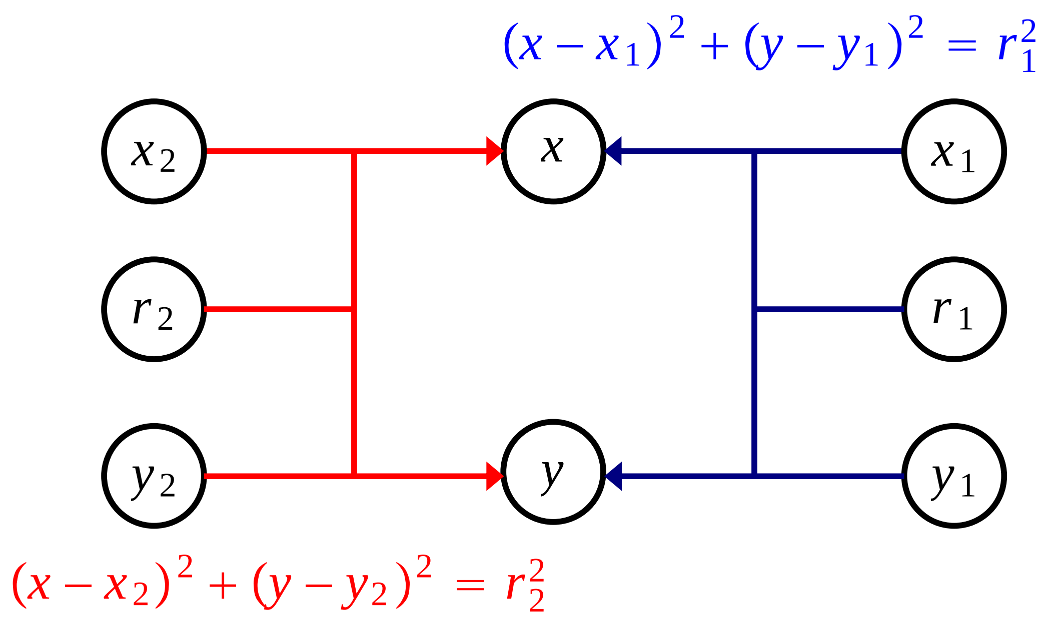
$$x \in [x^-, x^+], y \in [y^-, y^+]$$

$$r_1 \in [r_1^-, r_1^+], d_1 \in [d_1^-, d_1^+], \ldots$$

$$x_1 \in [x_1^-, x_1^+], y_1 \in [y_1^-, y_1^+], \ldots$$

**CSP** : Problème de satisfaction de **contraintes**

# Graphe des contraintes




$$\begin{cases} (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2 \\ y=ax+b+\dfrac{d_1}{\cos(\tan^{-1}(a))} \\ distance((x,y),étang)=d_2 \\ (x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2 \end{cases}$$

$$x\in[x^-,x^+],y\in[y^-,y^+]$$

$$r_1\in[r_1^-,r_1^+],d_1\in[d_1^-,d_1^+],\ldots$$

$$x_1\in[x_1^-,x_1^+],y_1\in[y_1^-,y_1^+],\ldots$$

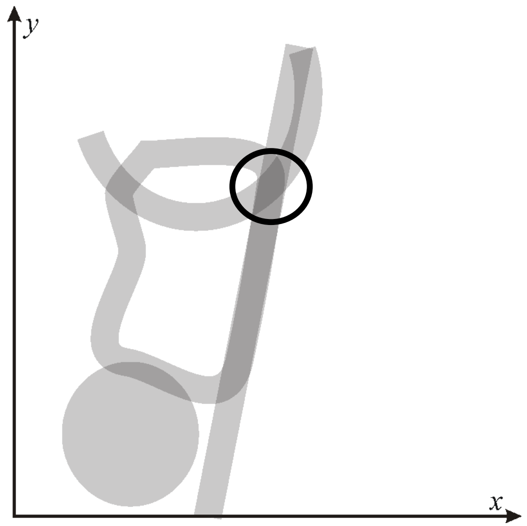
# Ce qu'il faut retenir

$$\begin{cases} (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = r_1^2 \\ y = ax+b+\frac{d_1}{\cos(\tan^{-1}(a))} \\ distance((x,y),étang) = d_2 \\ (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

$$x \in [x^-,x^+], y \in [y^-,y^+]$$

$$r_1 \in [r_1^-,r_1^+], d_1 \in [d_1^-,d_1^+], \ldots$$

$$x_1 \in [x_1^-,x_1^+], y_1 \in [y_1^-,y_1^+], \ldots$$

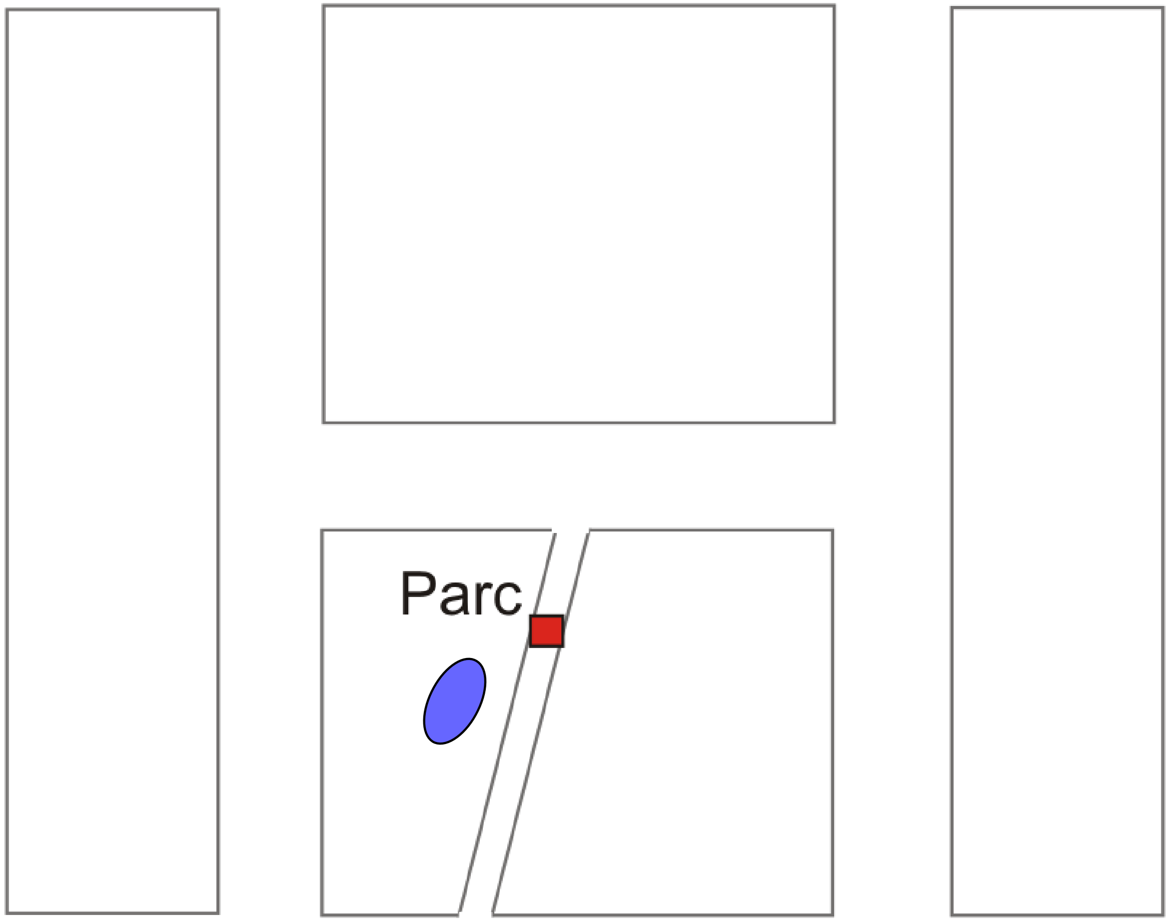



Problème de **localisation** **<u>statique</u>**

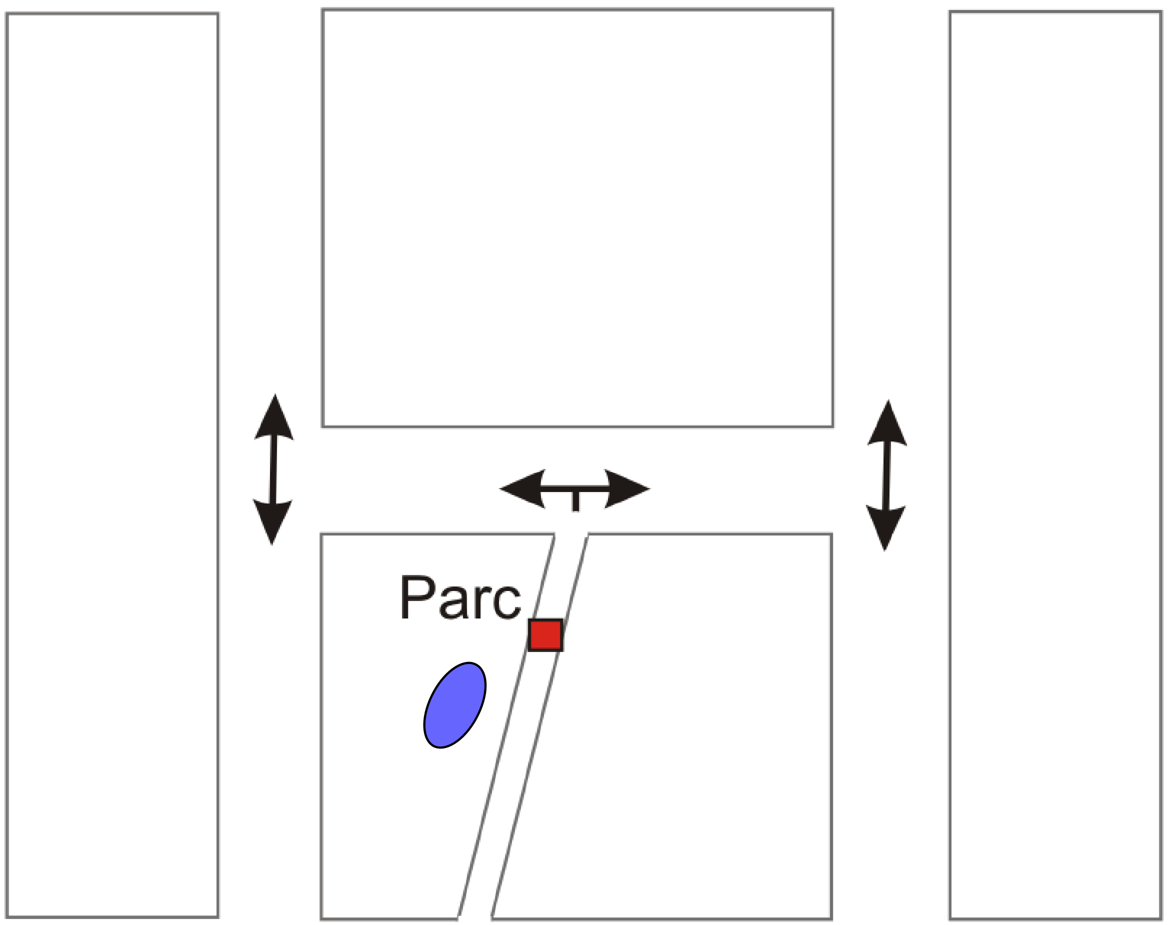
CSP
- contraintes sous forme d'équations
- contraintes **irrégulières**
- contraintes **inconsistantes**

Polynômes ensemblistes
Accumulateurs intervalles
Contracteur sur l'image

# Un système dynamique

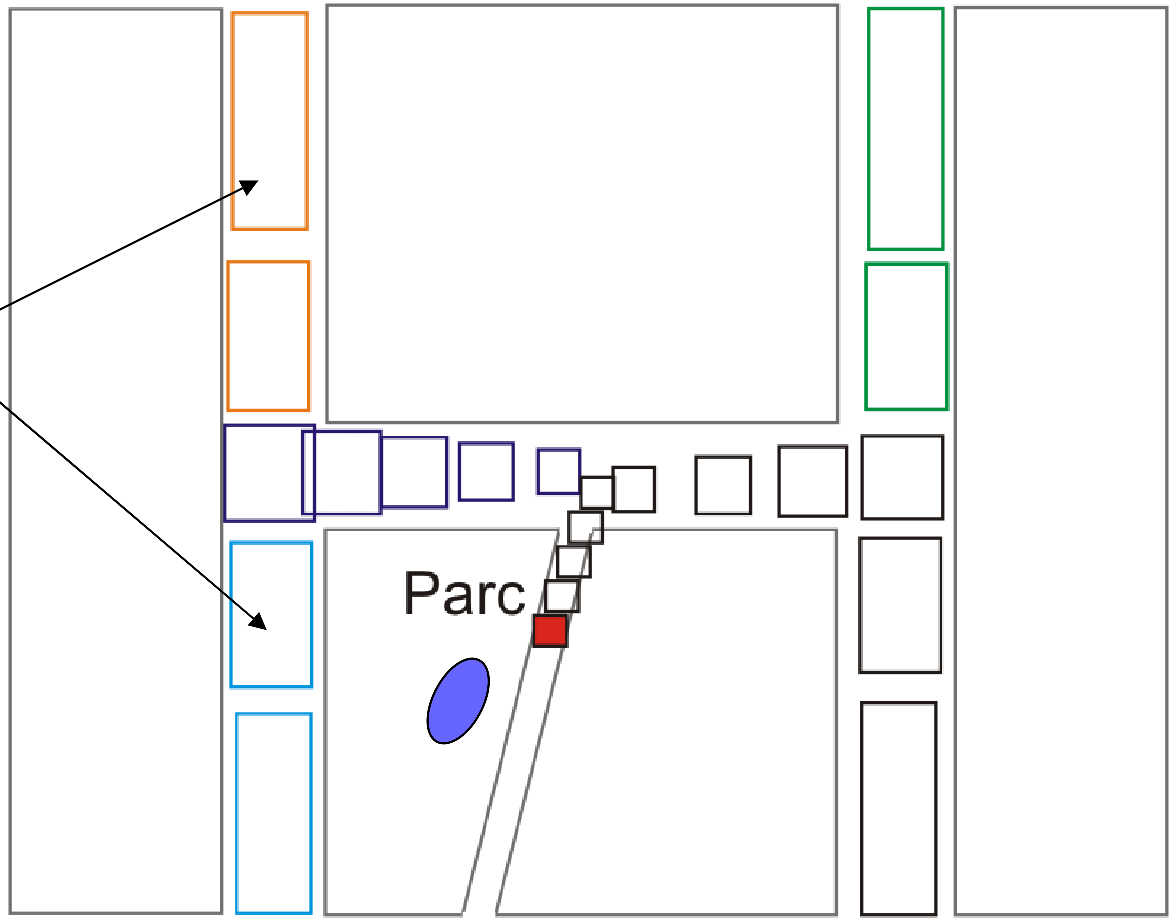


# Un système dynamique



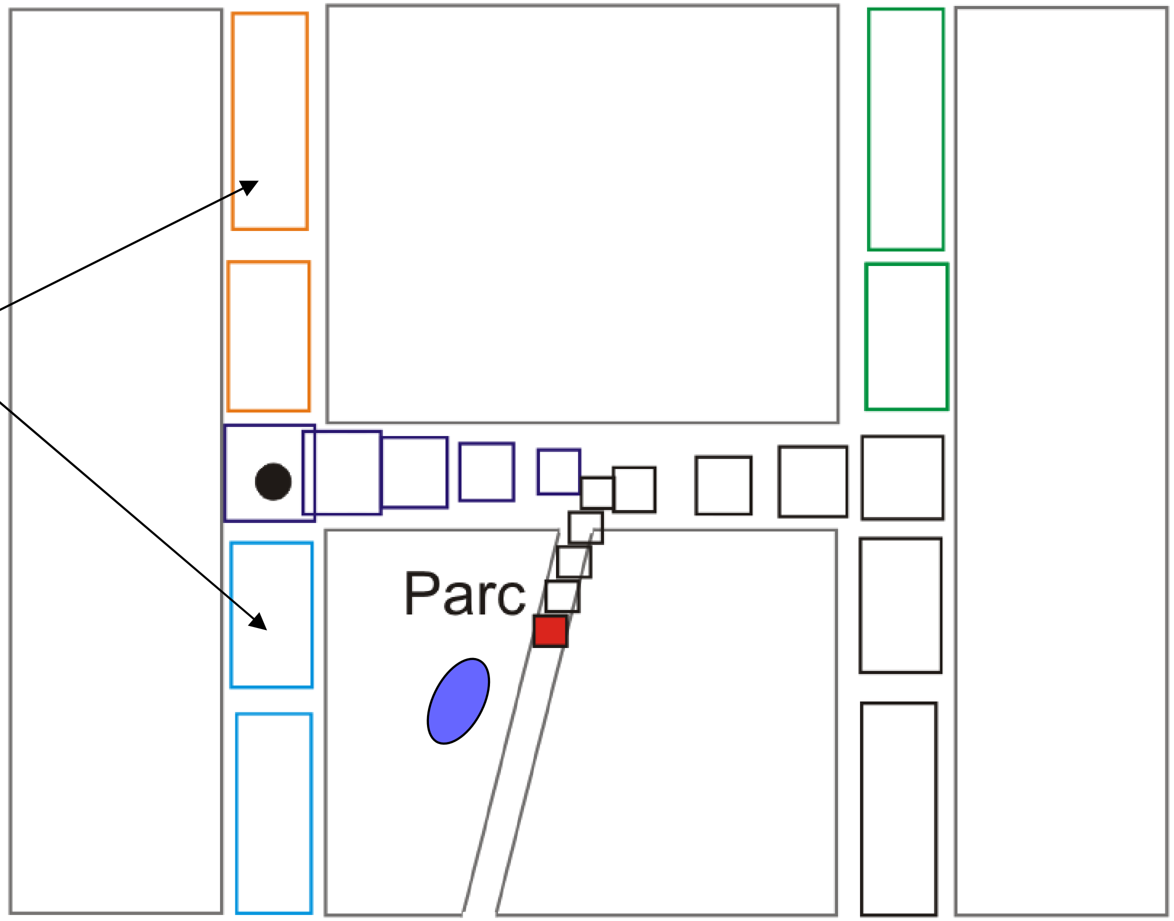
# Un système dynamique

Trajectoires ensemblistes

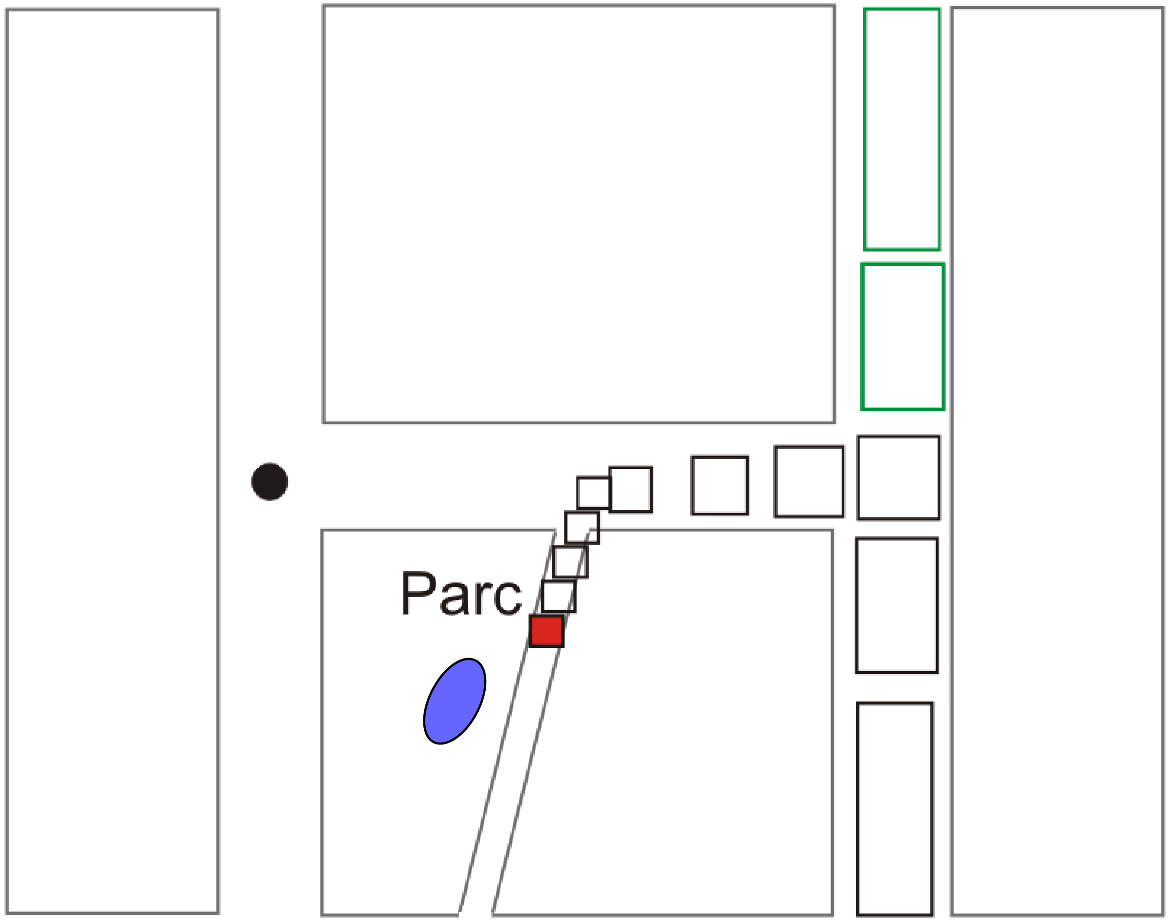


# Un système dynamique

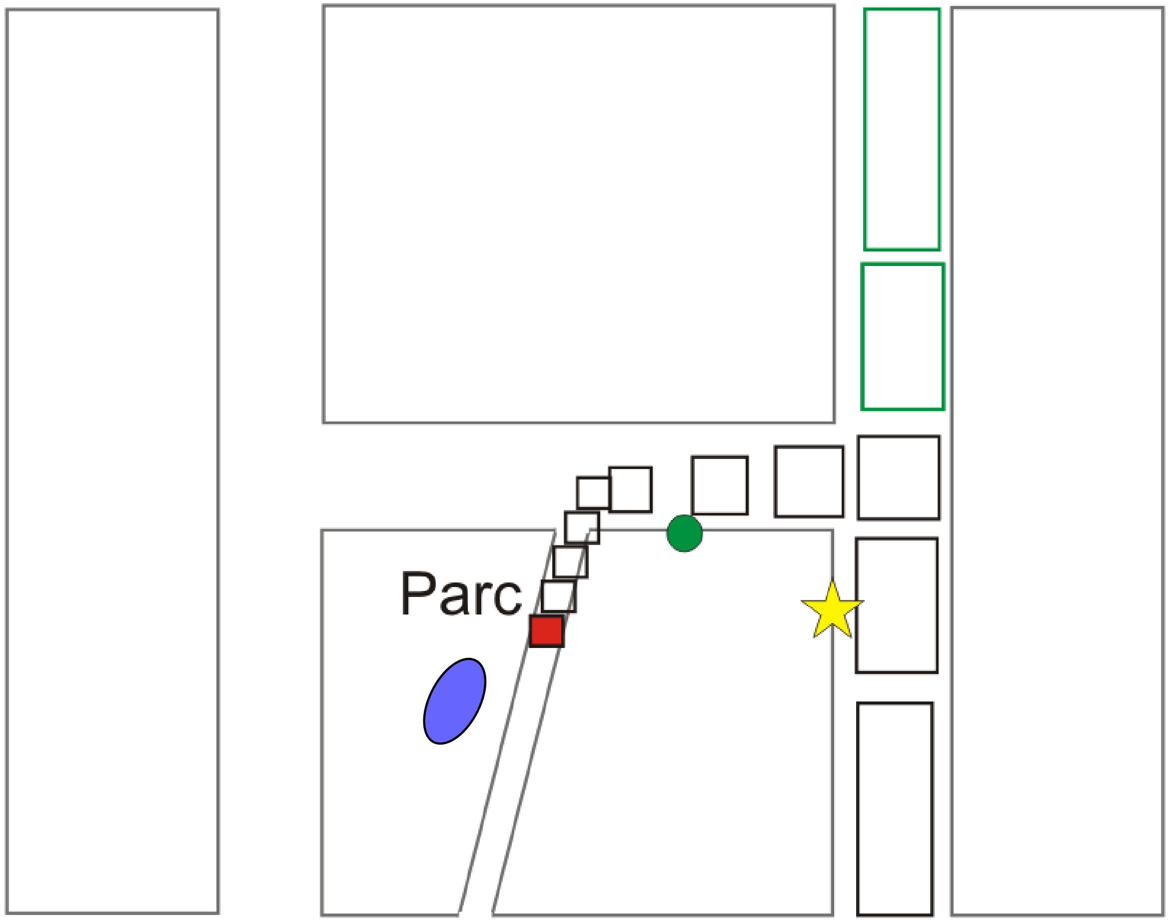
Trajectoires ensemblistes



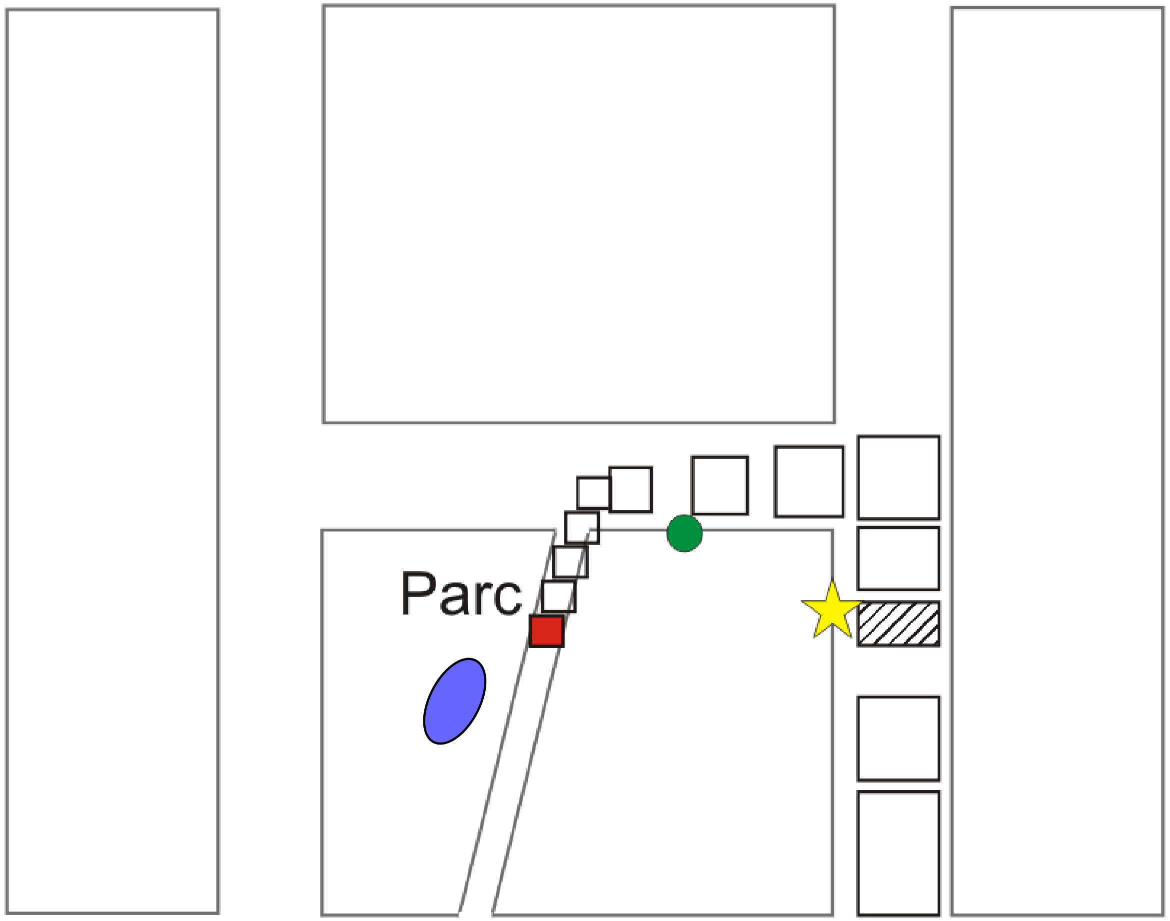
# Un système dynamique



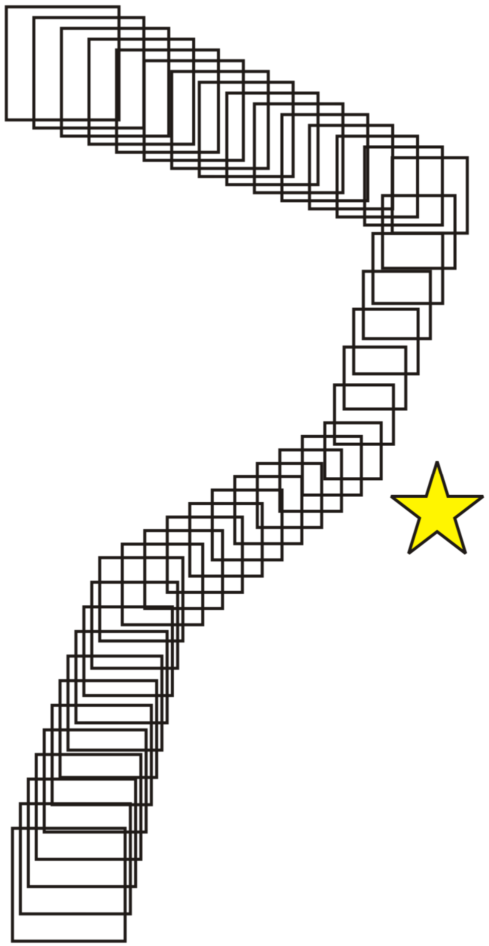
# Un système dynamique



# Un système dynamique



# Ce qu'il faut retenir



Problème de **localisation <u>dynamique</u>**

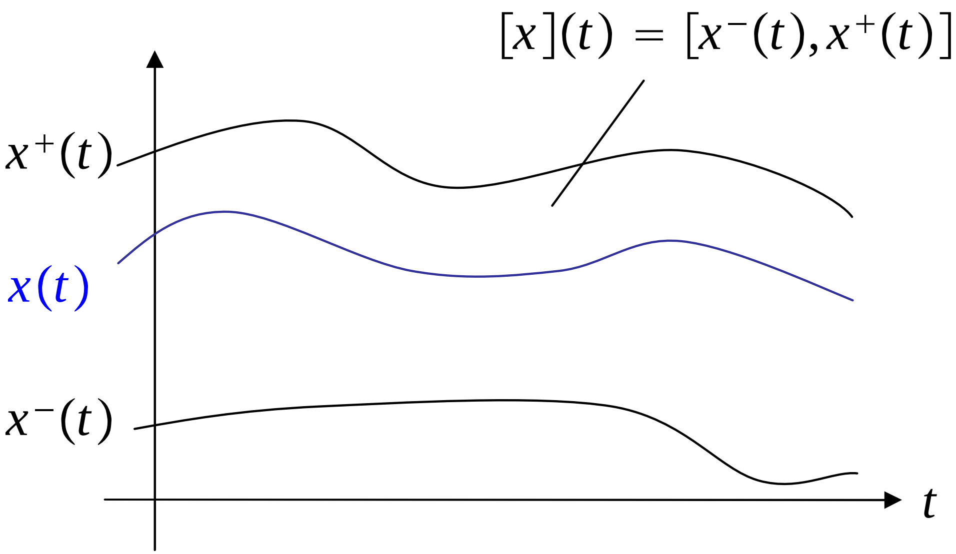
CSP
- contraintes sous forme d'équations
- contraintes **irrégulières**
- contraintes **inconsistantes**
- inconnues **variables** avec le temps

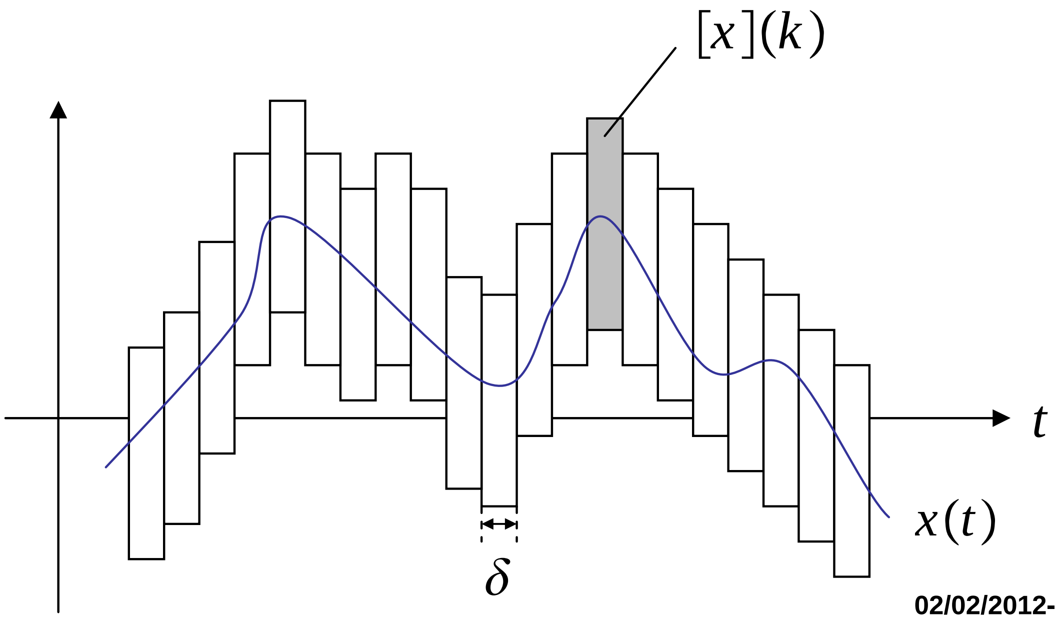
**Tubes** (intervalles de trajectoires/fcts)
Polynômes de Tubes

# Outils théoriques ensemblistes

# Tubes

- Tubes
  - *Trajectoire* : fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$
  - *Tube* : intervalle de fonctions



# Tubes

- Arithmétique des tubes
  - Addition, multiplication…
  - Intégrale

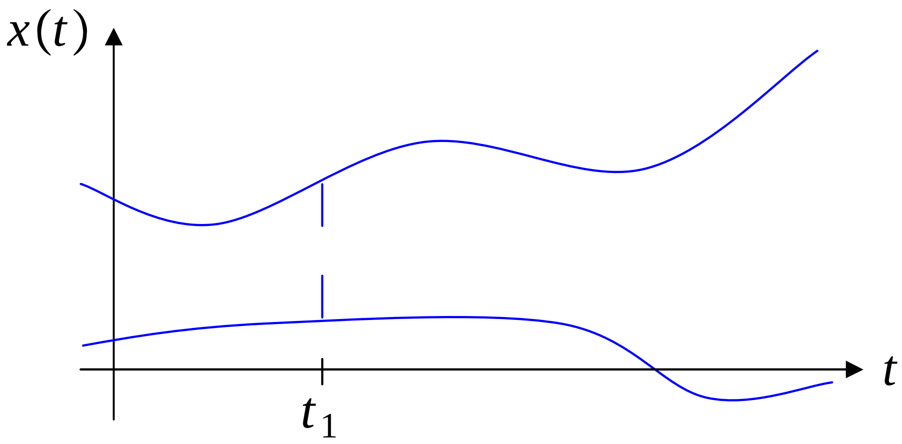
$$\int_{t_0}^{t} [\mathbf{x}](\tau)d\tau = \left[\int_{t_0}^{t} \mathbf{x}^{-}(\tau)d\tau, \int_{t_0}^{t} \mathbf{x}^{+}(\tau)d\tau\right]$$

  - On a

$$\mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}](t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \mathbf{x}(\tau)d\tau \in \int_{t_0}^{t} [\mathbf{x}](\tau)d\tau$$

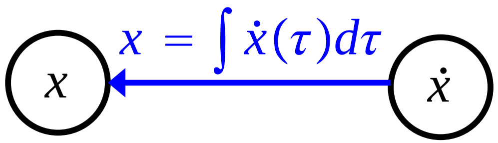
# Tubes

- Contraction et propagation
  - Contraction ponctuelle de tube

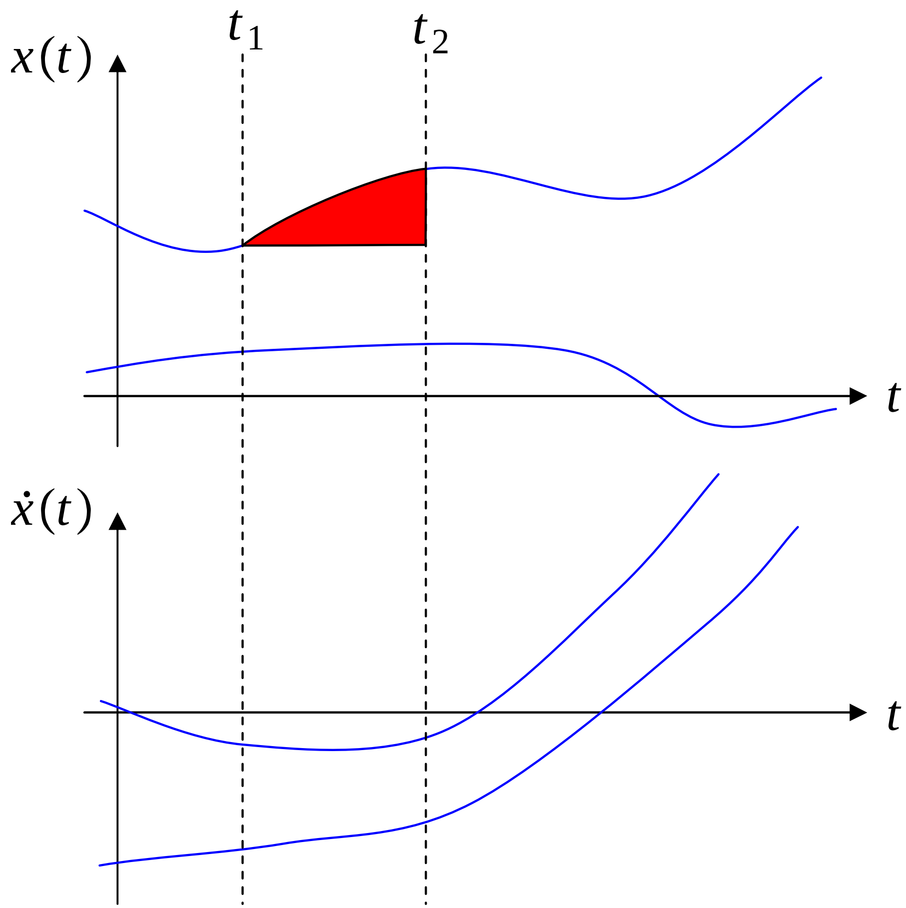


# Tubes

- Contraction et propagation
  - Contrainte intégrale : $x = \int \dot{x}(\tau)d\tau$

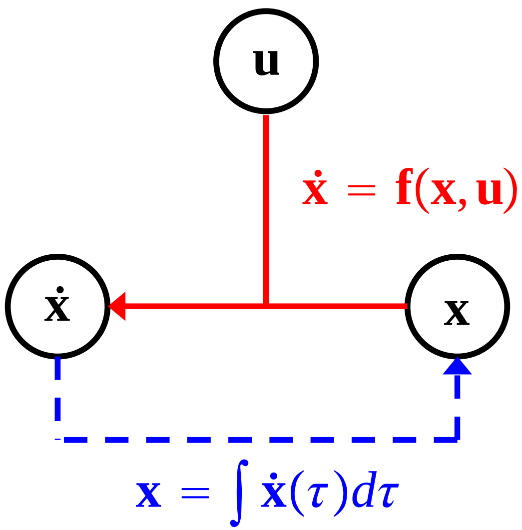



$$[x](t) = [x](t) \cap \left( [x](t_1) + \int_{t_1}^{t} [\dot{x}](\tau)d\tau \right)$$



# Tubes

- Contraction et propagation
  - Contrainte de type $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$
    - Décomposition : $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x} = \int \dot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau \end{cases}$



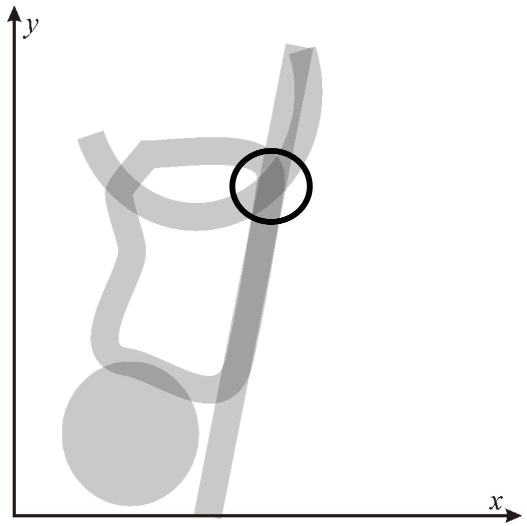
# Gérer le contraintes inconsistantes

$$\begin{cases} (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = r_1^2 \\ y = ax+b+\frac{d_1}{\cos(\tan^{-1}(a))} \\ distance((x,y),étang) = d_2 \\ (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

$x \in [x^-,x^+], y \in [y^-,y^+]$

$r_1 \in [r_1^-,r_1^+], d_1 \in [d_1^-,d_1^+], \ldots$

$x_1 \in [x_1^-,x_1^+], y_1 \in [y_1^-,y_1^+], \ldots$




Problème de **localisation** **<u>statique</u>**

CSP
- contraintes sous forme d'équations
- contraintes **irrégulières**
- contraintes **inconsistantes**

Polynômes ensemblistes
Accumulateurs intervalles
Contracteur sur l'image

# Polynômes ensemblistes : Introduction

**Soit le CSP suivant**

contrainte sur $\mathbf{x}$ : $C_i$

$$\mathbf{f}_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{p_i}$$

$$\boxed{\mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}_i],}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{X}_0, [\mathbf{y}_i] \in \mathbb{IR}^{p_i}, i \in \{1, .., n\}.$$

inconnue

connues

# Polynômes ensemblistes : Introduction

**Soit le CSP suivant**

contrainte sur **x** : $\mathbf{C_i}$

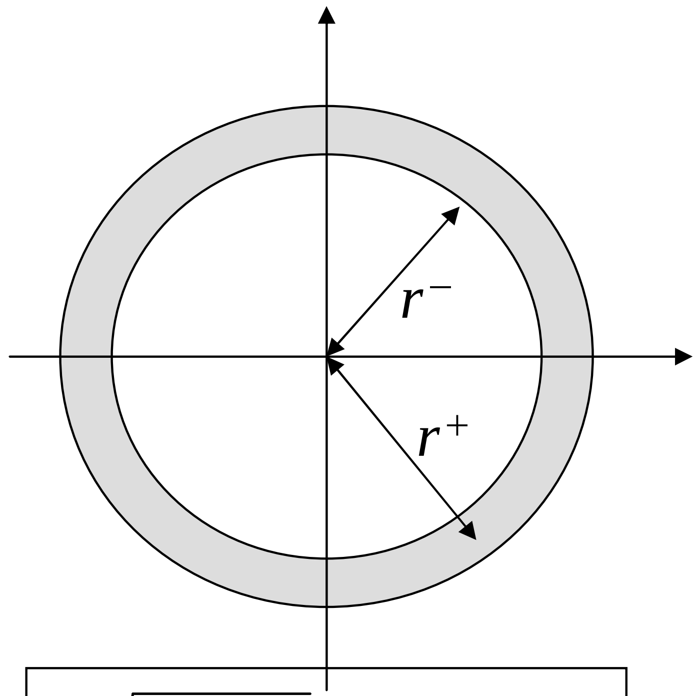
$$\mathbf{f}_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{p_i}$$

$$\boxed{\mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}_i],}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{X}_0, [\mathbf{y}_i] \in \mathbb{IR}^{p_i}, i \in \{1,..,n\}.$$

inconnue

connues



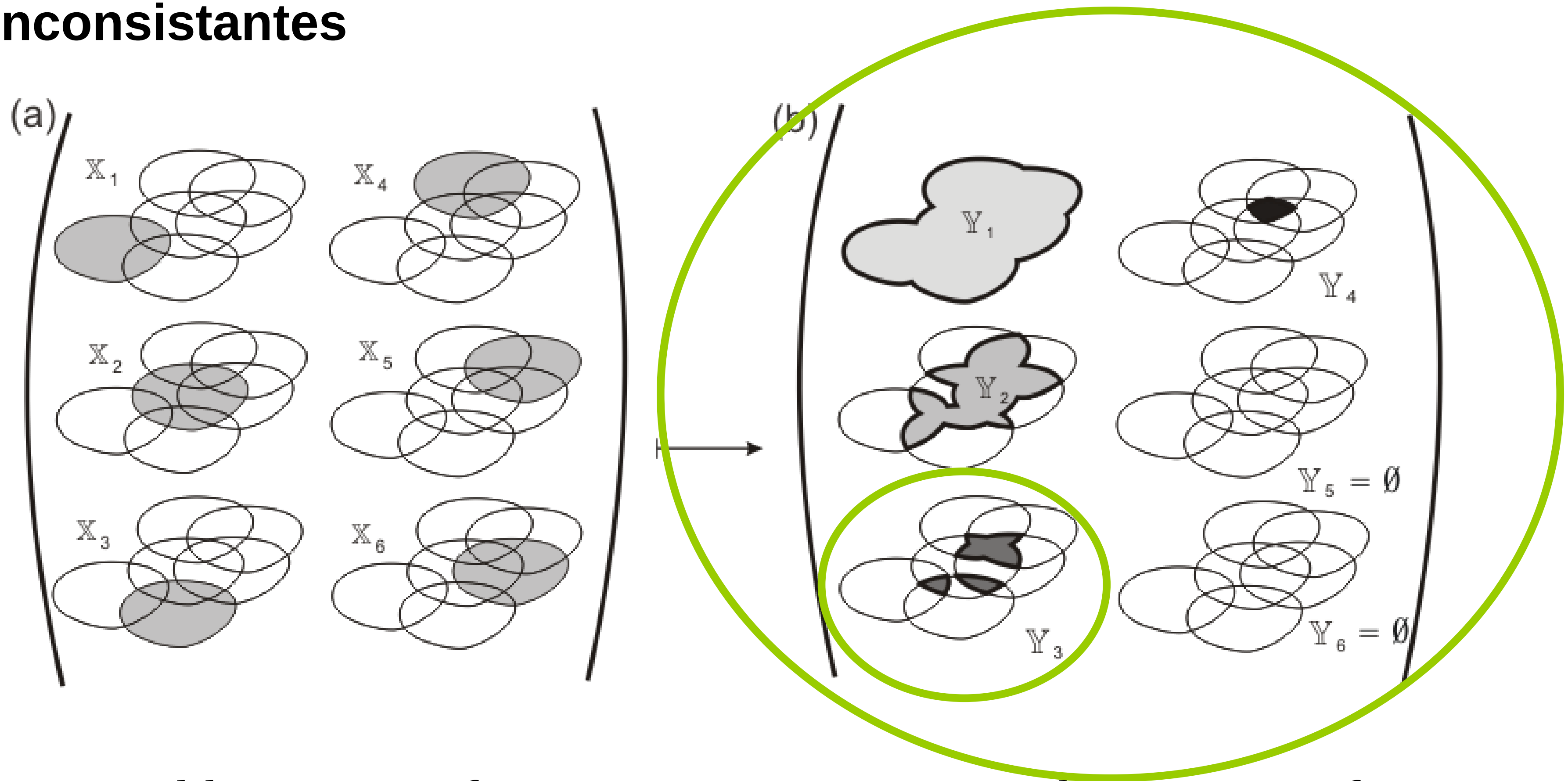

$$\boxed{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in [r^-, r^+]}$$

On définit l'ensemble des éléments qui satisfont **la ième** contrainte

$\mathbf{C_i}$ ⇒ $\mathbb{X}_i$

# Polynômes ensemblistes : Introduction

- Soit un CSP à 6 contraintes : $C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6$ avec 2 contraintes **inconsistantes**




Ensembles qui satisfont **une** contrainte à la fois

Ensembles qui satisfont un **certain nombre** de contraintes à la fois

# Notation polynomiale

- **Définition** : C'est un polynôme formel dont les **coefficients** sont des **ensembles**

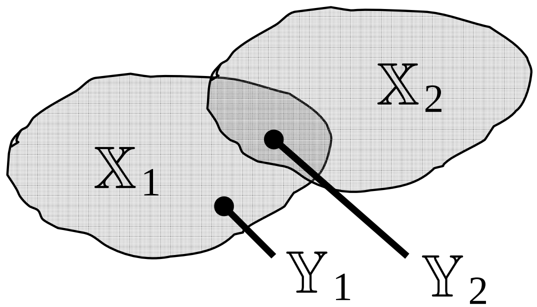
$$\boxed{X(s) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{X}_k s^k}$$

**Exemple.** $X(s) = [-2,3]s^3 + [1,\infty]s^2 + [2,4]s + [5,8].$

# Notation polynomiale

Un **CSP** à deux contraintes

$\mathbb{X}_0 = \mathbb{Y}_0$




$$
\begin{aligned}
X^*(s) &= (\mathbb{X}_1 s + \mathbb{X}_0) * (\mathbb{X}_2 s + \mathbb{X}_0) \\
&= (\mathbb{X}_1 * \mathbb{X}_2) s^2 + (\mathbb{X}_1 * \mathbb{X}_0 + \mathbb{X}_2 * \mathbb{X}_0) s + \mathbb{X}_0 * \mathbb{X}_0
\end{aligned}
$$

# Notation polynomiale

Pour chaque contrainte on définit les ensembles $\mathbb{X}_i$ ainsi que le polynôme

$$\boxed{X^*(s) = \prod_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i s + \mathbb{X}_0) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{Y}_k s^k}$$

# Notation polynomiale de la « Solution »

Pour chaque contrainte on définit les ensembles $\mathbb{X}_i$ ainsi que le polynôme

$$\boxed{X^*(s) = \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{X}_i s + \mathbb{X}_0) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{Y}_k s^k}$$

Solution

Soit une contrainte supplémentaire (la (n+1)ième )

$$\boxed{(\mathbb{X}_{n+1} s + \mathbb{X}_0) * X^*(s)}$$

Formulation récursive
Systèmes qui évoluent

$$\mathbb{Y}_{k+1}^{(n+1)} = \mathbb{X}_{n+1} * \mathbb{Y}_k^{(n)} + \mathbb{Y}_{k+1}^{(n)}$$

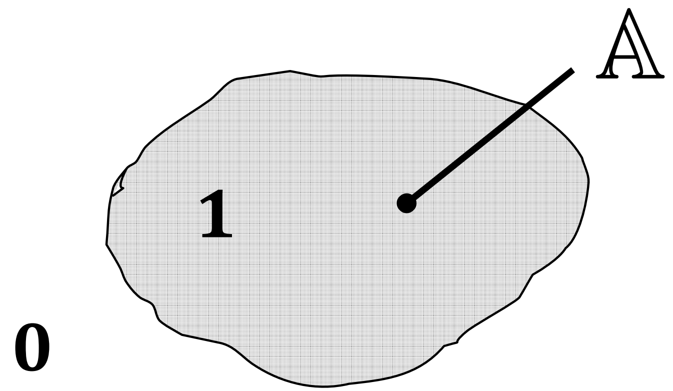
# Les accumulateurs

**Définition :** fonction caractéristique d'un ensemble :

Soit $\mathbb{A}$ un ensemble de $\mathbb{R}^m$.

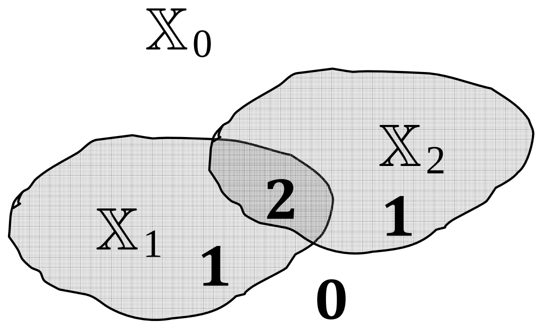
Soit $\chi(\mathbb{A})$ sa fonction caractéristique. On a

$$\begin{cases} \chi(\mathbb{A})(\mathbf{x}) = 1 \text{ si } \mathbf{x} \in \mathbb{A} \\ \chi(\mathbb{A})(\mathbf{x}) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$



# Les accumulateurs & CSPs

Un **CSP** à deux contraintes

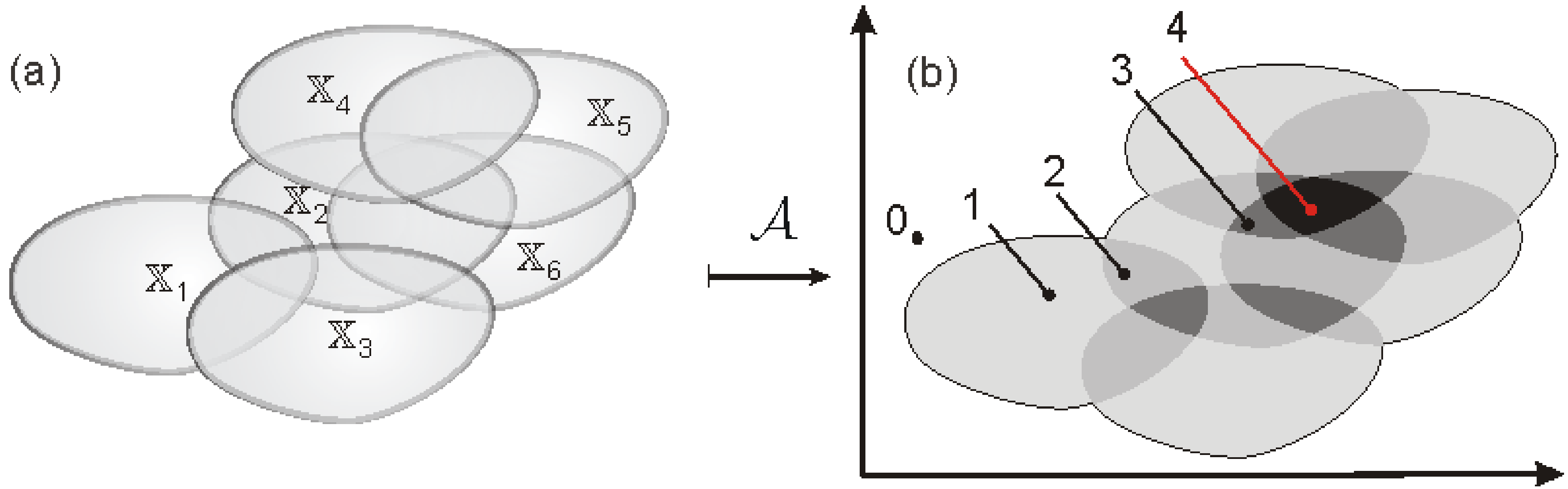



$$\mathcal{A} : \mathbb{X}_0 \to \mathbb{N},$$
$$\mathbf{x} \mapsto \chi(\mathbb{X}_1)(\mathbf{x}) + \chi(\mathbb{X}_2)(\mathbf{x}).$$

# Les accumulateurs

On définit l'**accumulateur**

$$\mathcal{A} : \mathbb{X}_0 \to \mathbb{N}, \mathcal{A} = \sum_{i\in\{1,..,n\}.} \chi(\mathbb{X}_i).$$

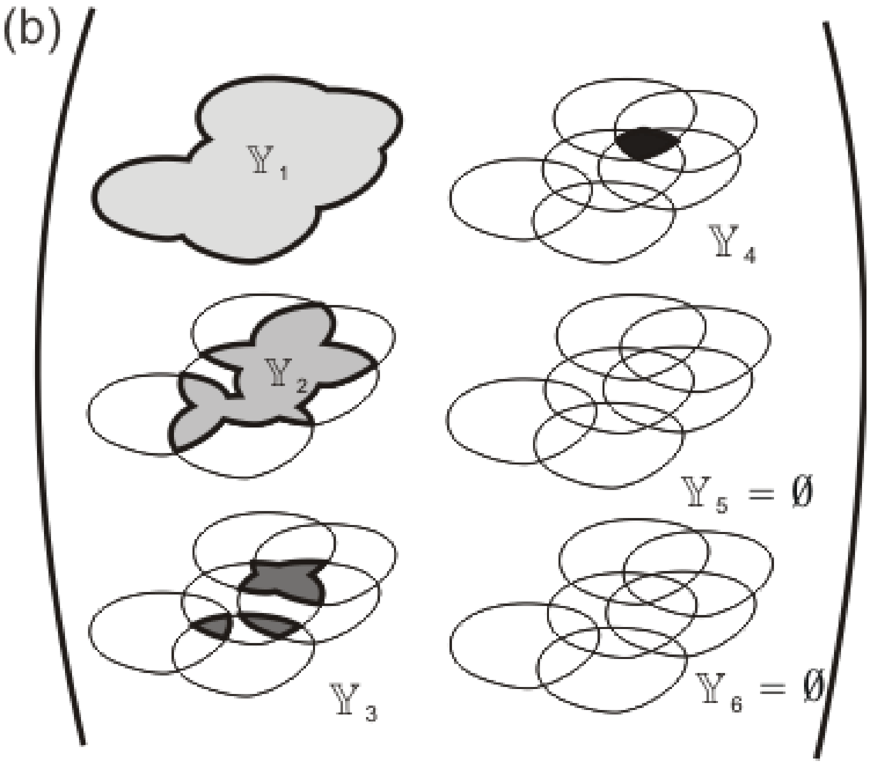



Ensembles qui satisfont **une** contrainte à la fois

Fonction qui retourne pour chaque **x** le **nombre** de **contraintes satisfaites**

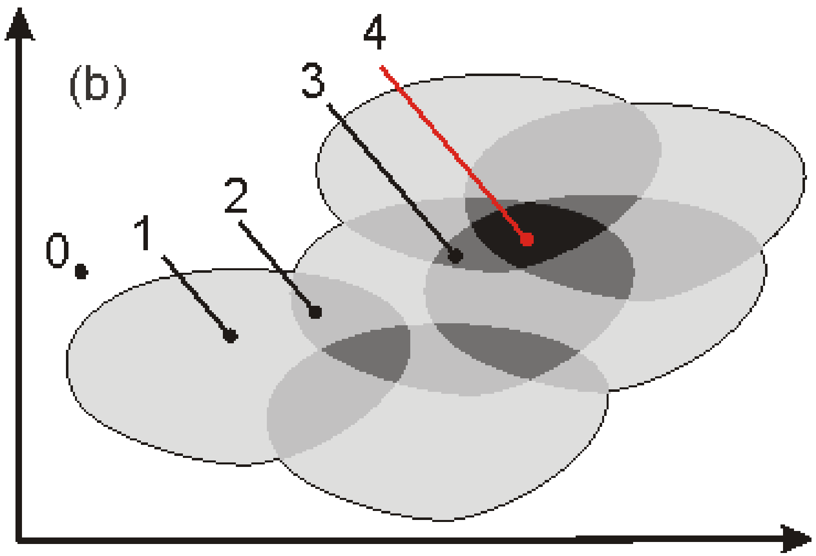
# Dualité : Accumulateurs / Polynômes

$$X^*(s) = \prod_{k=1}^{n} (\mathbb{X}_k s + \mathbb{X}_0) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{Y}_k s^k$$



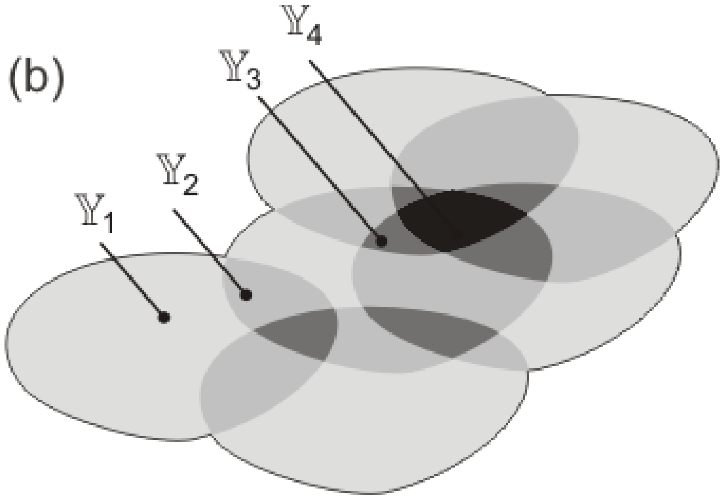

Nombre de contraintes satisfaites
→ ensemble

$$\mathcal{A} : \mathbb{X}_0 \to \mathbb{N}, \mathcal{A} = \sum_{i \in \{1,..,n\}.} \chi(\mathbb{X}_i).$$

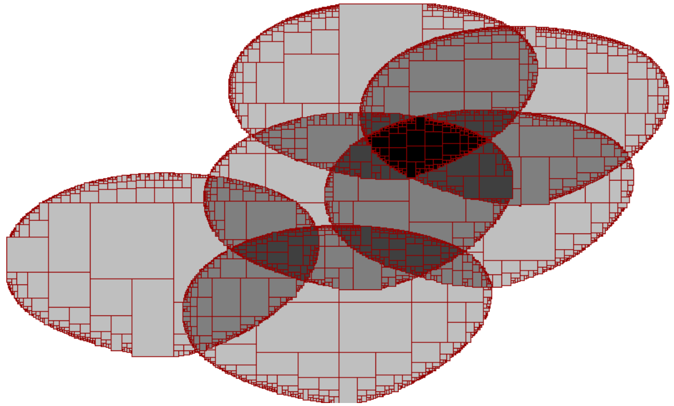



Point ou ensemble
→ Nombre de contraintes satisfaites

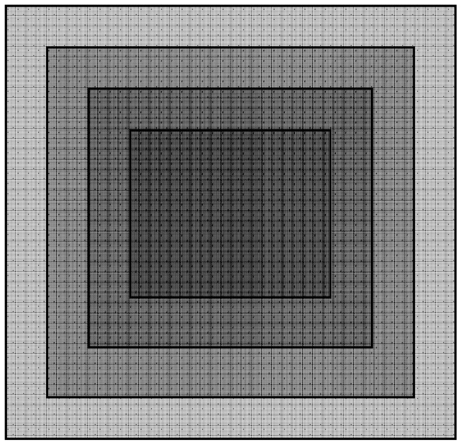
# Implémentation sur ordinateur




Polynôme
ou Accumulateur



Sous-pavage(s)

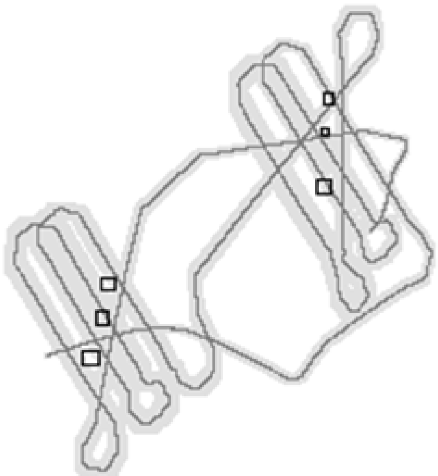


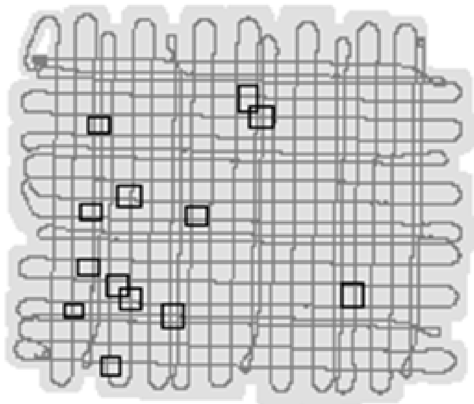
Polynôme
de boites

# Exemples applicatifs

# SLAM sous-marin pour la détection de mines

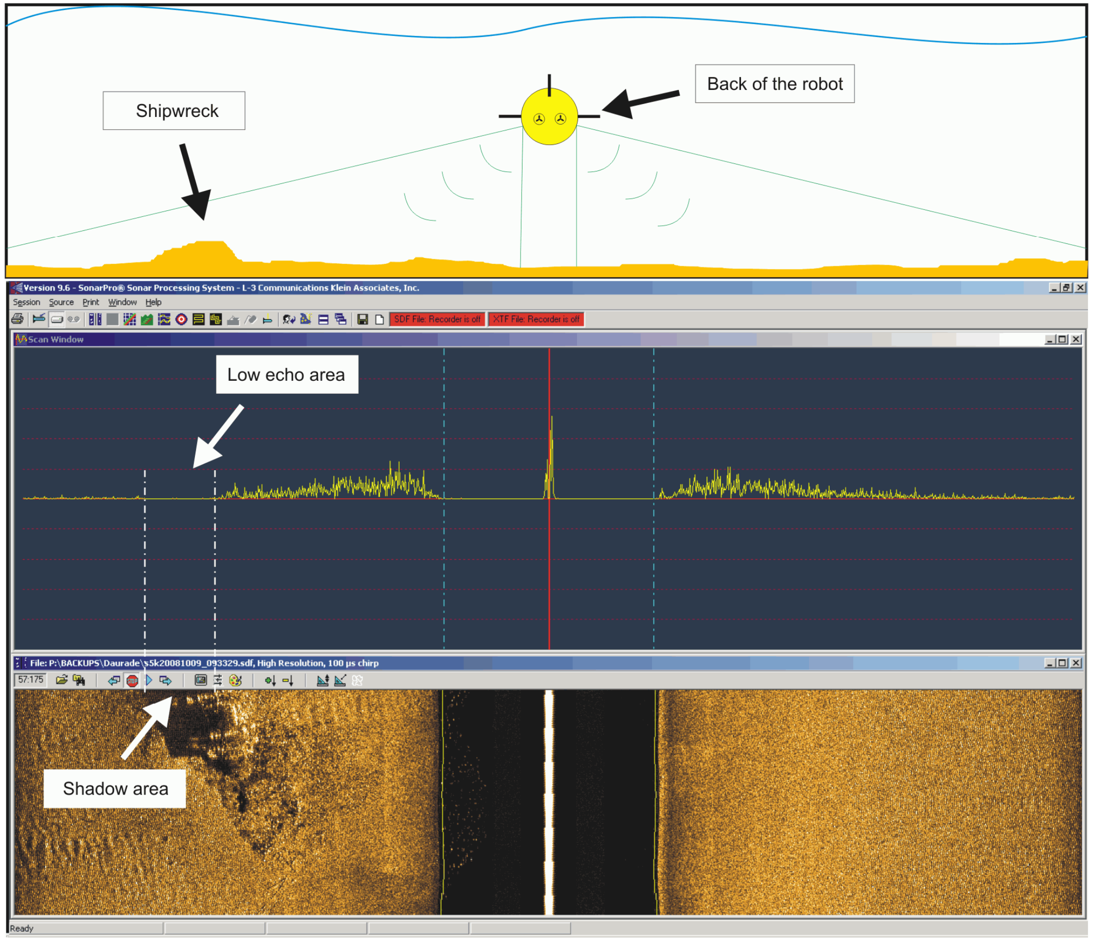
- Expériences avec la Daurade et le Redermor

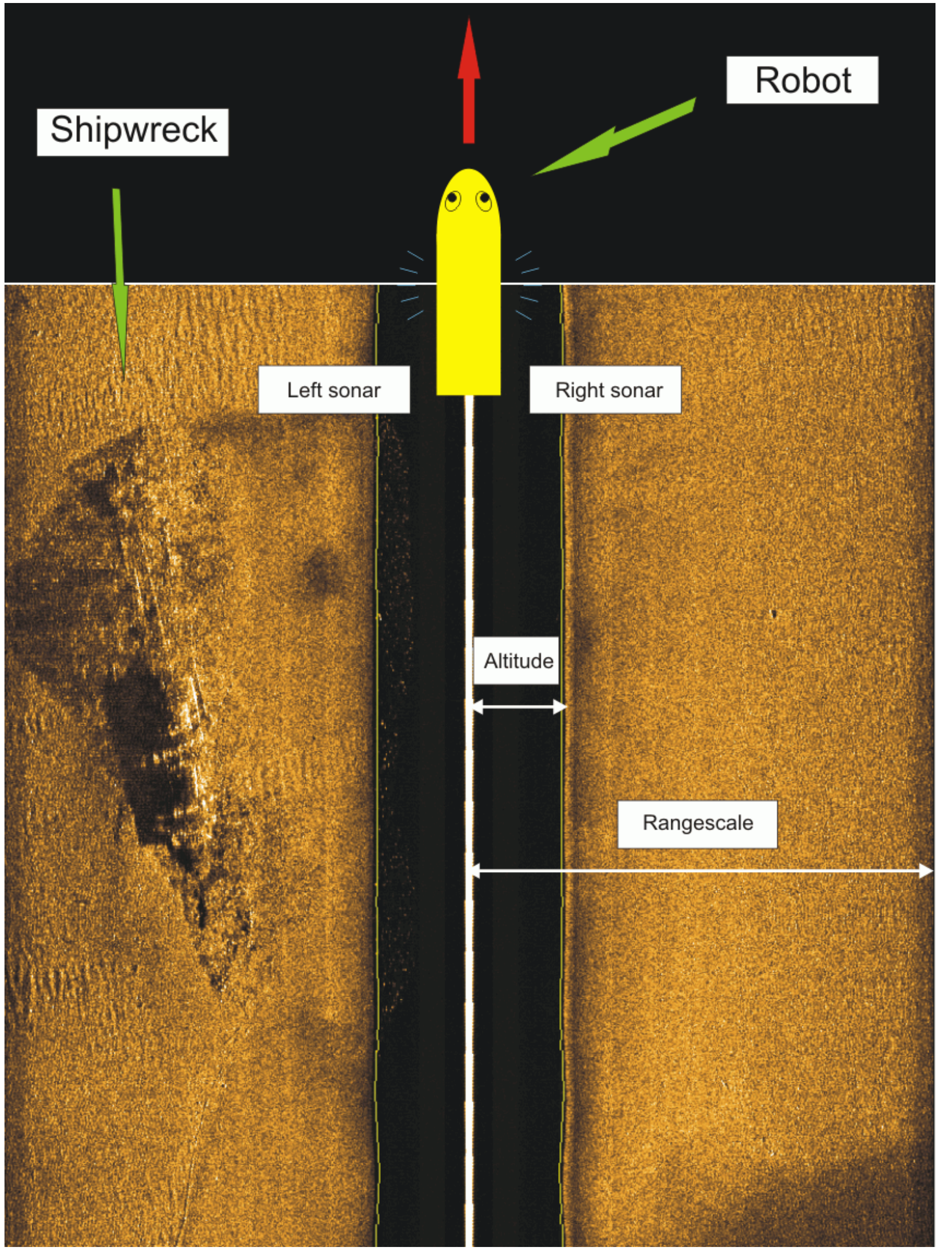





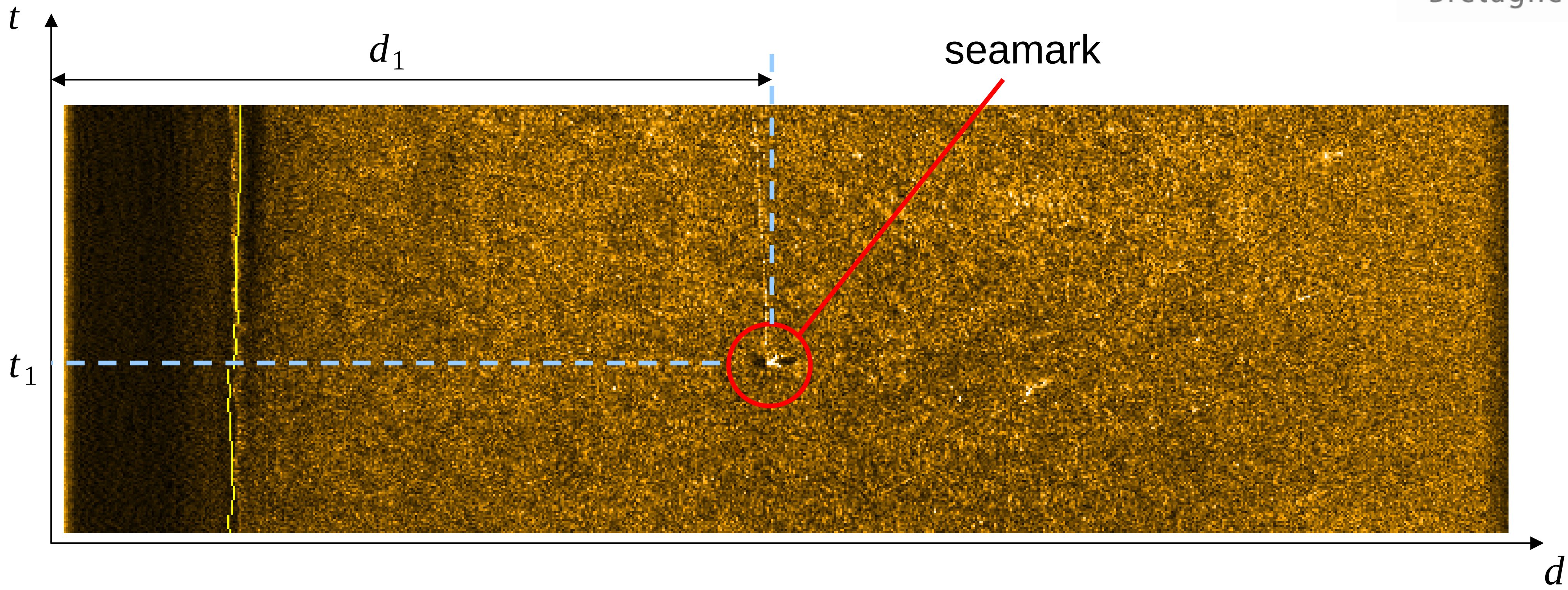
# Sonar et détection de mines

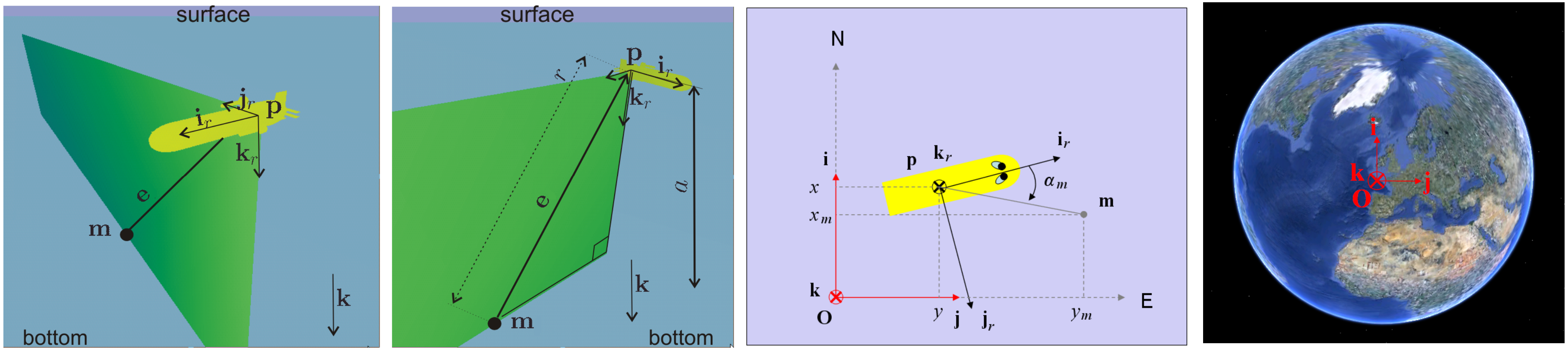
- Waterfall
  - Image de sonar latéral



# Sonar et détection de mines

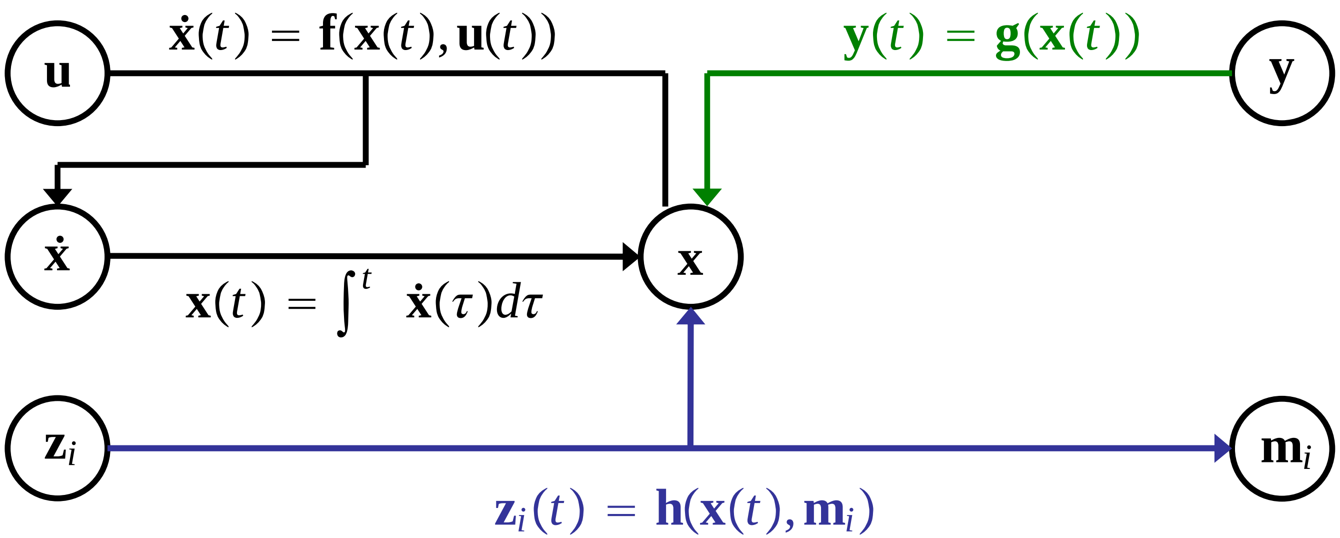


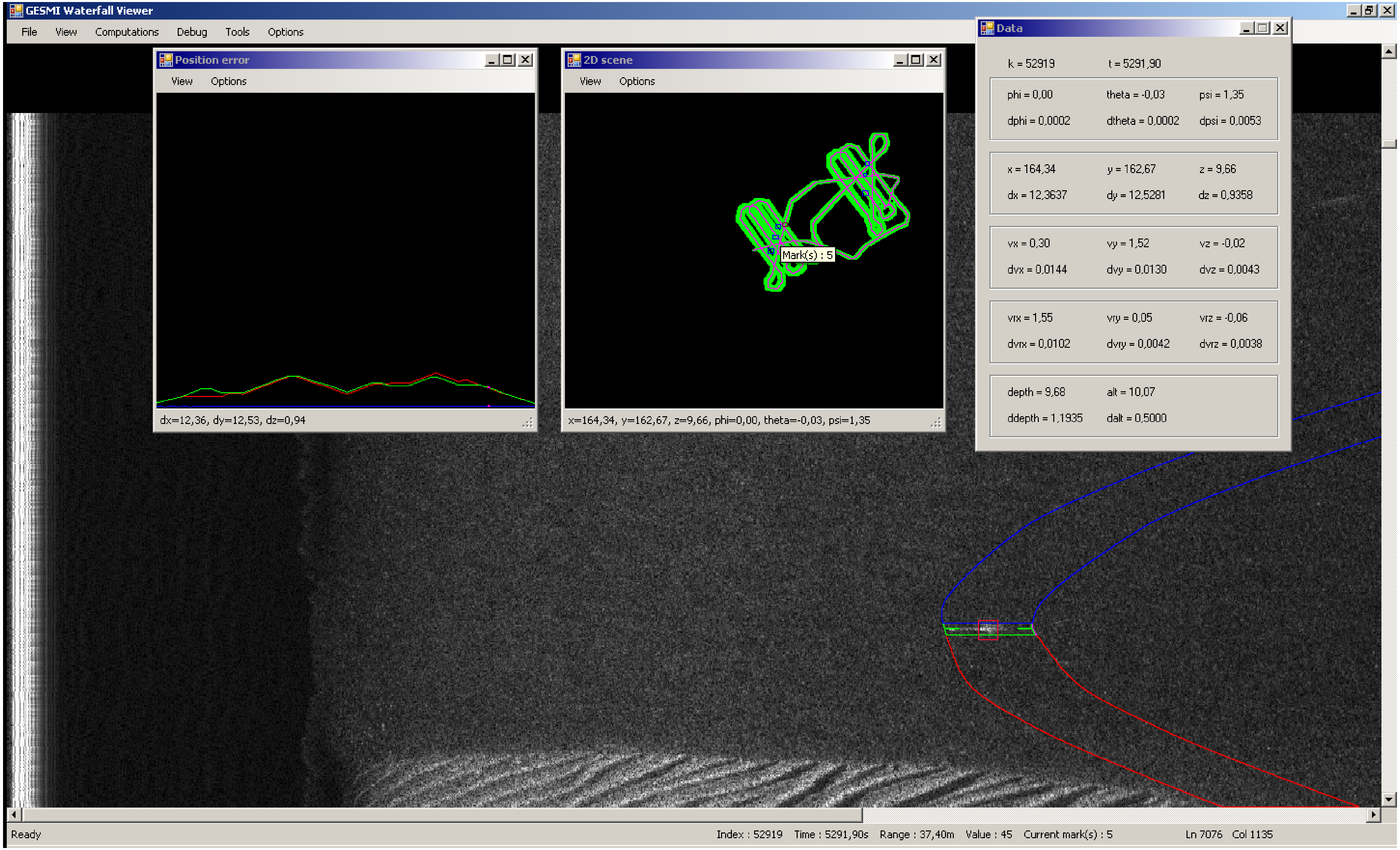
# SLAM sous-marin pour la détection de mines

- Contexte et hypothèses
  - SLAM offline
  - Amers immobiles et ponctuels
  - Sans données aberrantes
- But
  - Validation du système de navigation et détection de mines
- Outils
  - Calcul par intervalles et propagation de contraintes sur des tubes

# SLAM et contraction de tubes



# GESMI


GESMI Waterfall Viewer
File View Computations Debug Tools Options
Position error
View Options
dx=12,36, dy=12,53, dz=0,94
2D scene
View Options
Mark(s) : 5
x=164,34, y=162,67, z=9,66, phi=0,00, theta=-0,03, psi=1,35
Data
k = 52919 t = 5291,90
phi = 0,00 theta = -0,03 psi = 1,35
dphi = 0,0002 dtheta = 0,0002 dpsi = 0,0053
x = 164,34 y = 162,67 z = 9,66
dx = 12,3637 dy = 12,5281 dz = 0,9358
vx = 0,30 vy = 1,52 vz = -0,02
dvx = 0,0144 dvy = 0,0130 dvz = 0,0043
vrx = 1,55 vry = 0,05 vrz = -0,06
dvrx = 0,0102 dvry = 0,0042 dvrz = 0,0038
depth = 9,68 alt = 10,07
ddepth = 1,1935 dalt = 0,5000
Ready
Index : 52919 Time : 5291,90s Range : 37,40m Value : 45 Current mark(s) : 5
Ln 7076 Col 1135

# Exemple de localisation

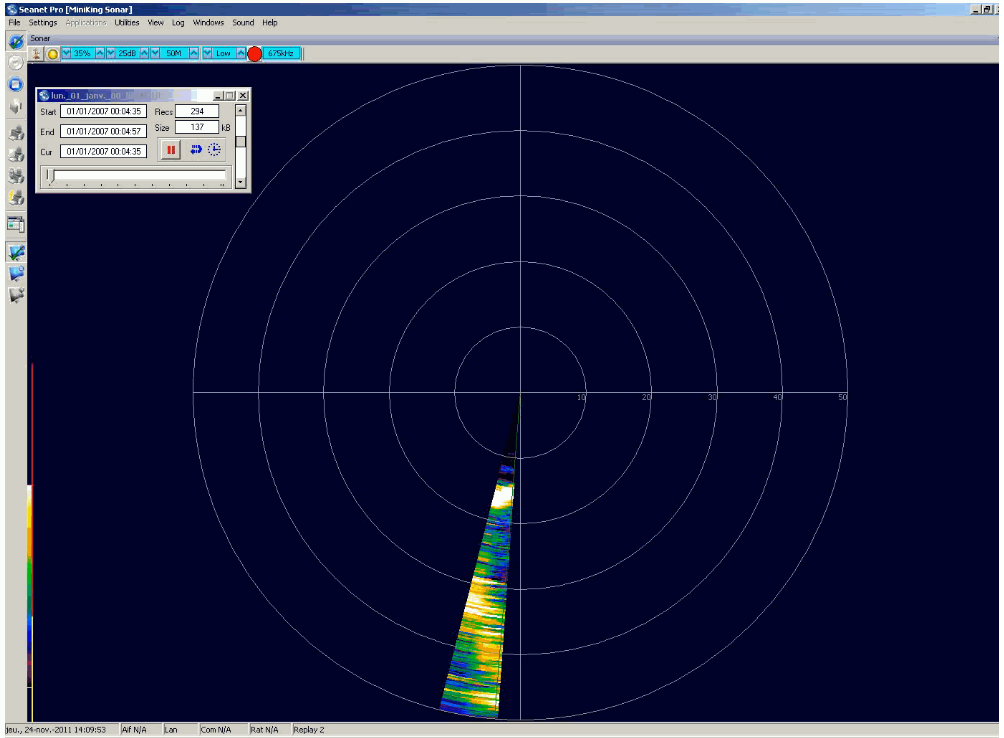
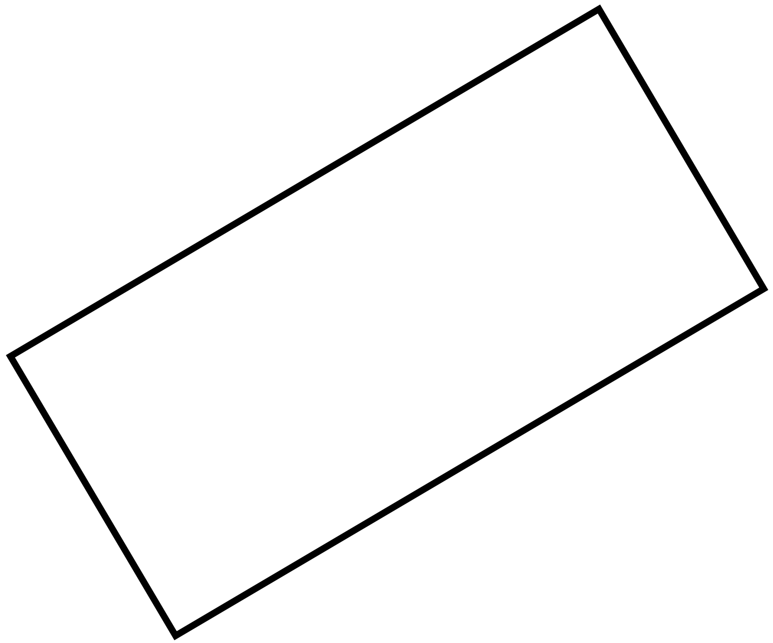
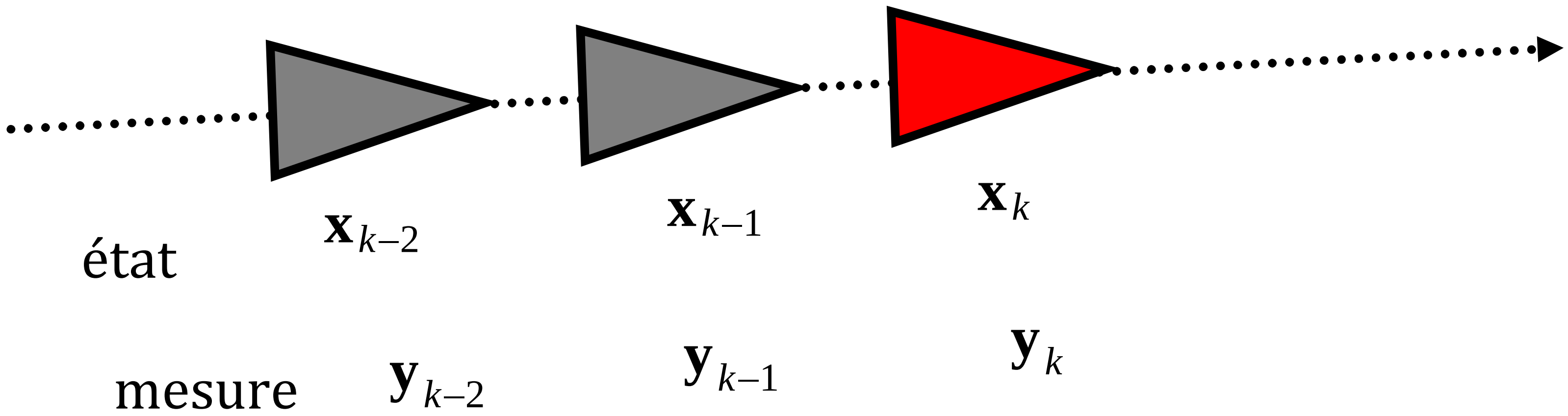



Image sonar dans un bassin



Carte du bassin

# Modélisation d'un problème dynamique



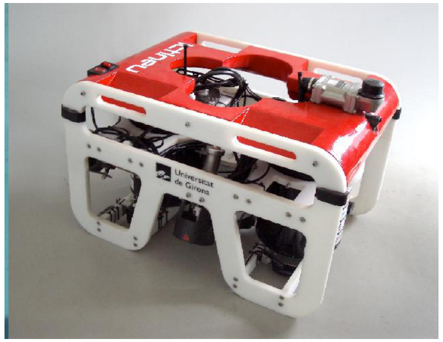

<u>A chaque instant k on a</u>

<u>**CSP**</u>

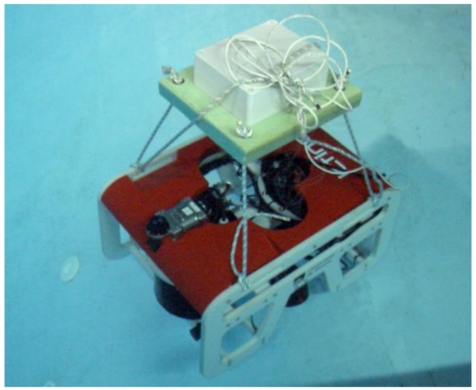
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x_{k+1}} &= \mathbf{f_k(x_k)} \\ \mathbf{y_k} &= \mathbf{g_k(x_k)}. \end{aligned}} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k \\ \mathbf{g}_{k-1} \circ \mathbf{f}_{k-1}^{-1}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_{k-1} \\ \dots \\ \mathbf{g}_{k-n-1} \circ \mathbf{f}_{k-n-1}^{-1} \circ \dots \circ \mathbf{f}_{k-1}^{-1}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_{k-n} \\ \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y}_i \in [\mathbf{y}_i], i \in \{k-n, .., k\}. \end{array} \right.$$

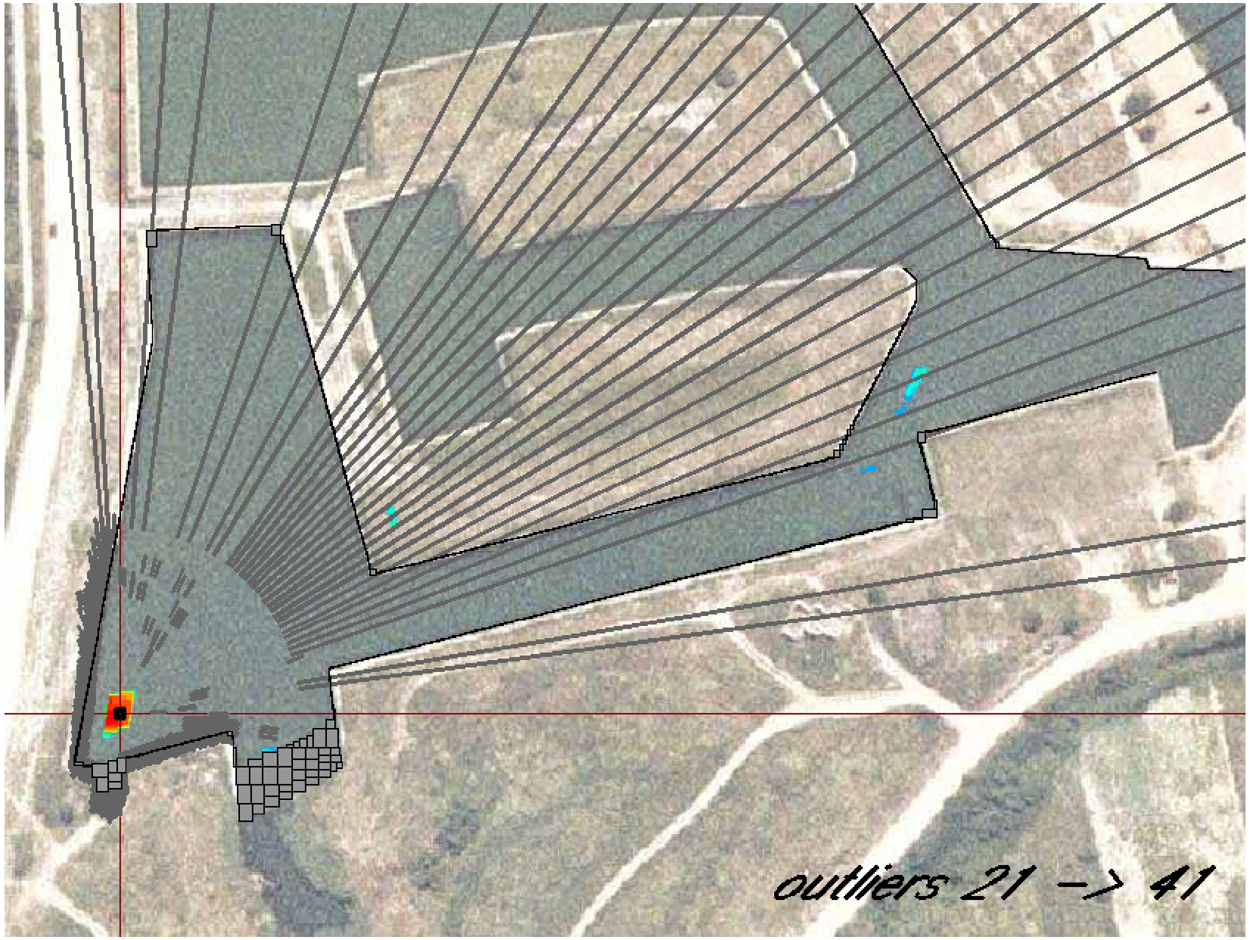
# Exemple de localisation

- Utilisation d'un jeu de données prises dans une marina de Costa Brava

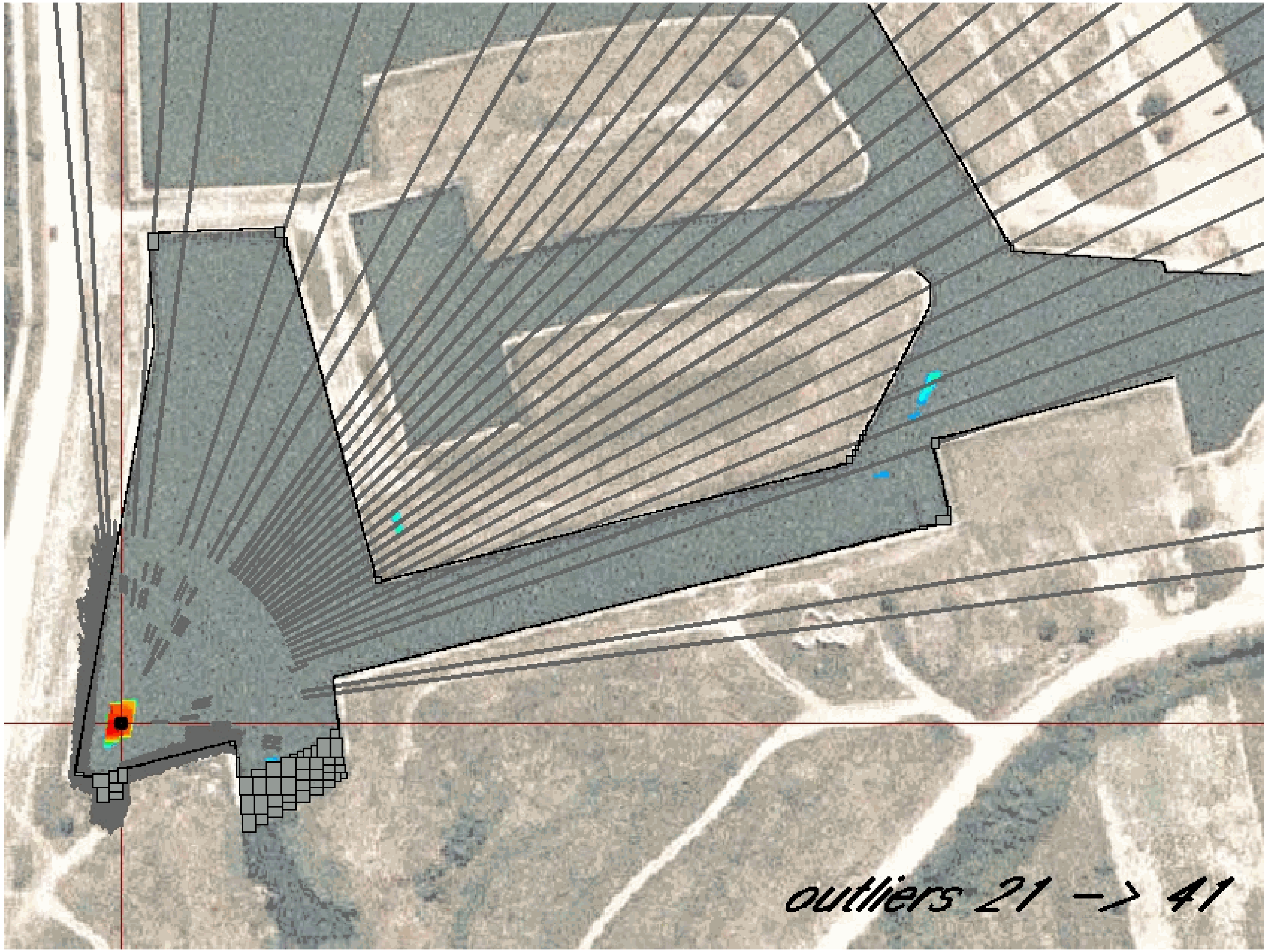


Ictineu AUV
Univ. de Girone





# Résultat de localisation



# Conclusion et perspectives

# Conclusion et perspectives

- Un formalisme qui peut incorporer des informations de natures différentes
  - Informations aberrantes
  - Equations non-linéaires
  - Equations différentielles
  - Informations difficilement modélisables par équations
- Des applications réelles
- Perspectives principales
  - SLAM **temps réel, robuste** par méthodes ensemblistes
  - SLAM avec meute de robots (AUV, ASV…)

# Questions?

- Contacts
  - fabrice.le_bars@ensta-bretagne.fr
  - jan.sliwka@ensta-bretagne.fr