

MASTER RECHERCHE  
Systèmes Dynamiques et Signaux

LA MODELISATION DES SYSTEMES DE PRODUCTION

par **RESEAUX DE PETRI**

Marc Bourcerie  
2010-2011

# Les systèmes de production

La description des architectures propres aux systèmes de production n'est pas une chose simple, vue la diversité des configurations. Ainsi, ces architectures sont de formes diverses, dépendant des configurations locales, du type de produit à fabriquer, des cahiers des charges et donc des objectifs. quantitatifs et qualitatifs.

Les solutions choisies pour atteindre les objectifs souhaités en terme de production amènent nécessairement à des structures différentes. Bien qu'il y ait des méthodologies qui aient été développées pour la construction des sites, on ne peut cependant pas observer de démarche systématique dans l'élaboration de tels projets.

Lorsque nous sommes amenés à visiter des sites industriels, il est vrai que nous retrouvons systématiquement des modes d'agencement communs qui nous semblent incontournables. Cependant, il est aussi vrai que chaque site de production a sa spécificité, liée à tout un historique de fabrication.

De nombreuses entreprises apparues au XIX<sup>ème</sup> siècle ont vu progressivement leurs structures se modifier. Ces mutations sont bien entendu liées à l'apport des nouvelles technologies, mais aussi à la dérive progressive des objectifs, des projets et des produits fabriqués. Au fil de l'évolution des marchés, ces entreprises se sont développées ou ont connu des périodes de récession, modifiant ainsi leurs organisations et leurs configurations matérielles.

Ce mouvement va s'accélération et l'entreprise doit s'adapter, en temps réel, suivant ainsi ces transformations technologiques et ces fluctuations quasi permanentes du marché. Ces transformations sont une composante de la flexibilité de l'entreprise.

Pour définir ce terme de flexibilité, il faut comprendre qu'elle représente les mouvements de l'entreprise sur plusieurs échelles temporelles : A l'échelle des décennies, où l'on observe un glissement des objectifs de production, à l'échelle de l'année ou des saisons, où les besoins en terme de production peuvent être périodiques ou irréguliers, éventuellement tributaires des événements politiques, sociaux ou économiques, à l'échelle quotidienne ou hebdomadaire, où l'organisation de la production est amenée à fluctuer en fonction de la demande, bien souvent de manière cyclique.

La configuration des systèmes de production est très diversifiée. Elle est pleinement tributaire du type d'opération à effectuer et de la catégorie d'objets à produire ou à traiter. De multiples critères entrent nécessairement en compte aussi bien en terme de quantité à fabriquer que de complexité de l'objet. Les notions de cadencement et de temps de production sont primordiales, autant que la prise en compte des aléas de fonctionnement ou autres perturbations qui viennent contrarier l'optimisation.

Ainsi, pour représenter le site de production, dans sa configuration matérielle, il va falloir prendre en compte une grande quantité de paramètres à des niveaux diversifiés de conceptualisation. Cela signifie qu'il sera nécessaire d'organiser des modèles représentant des structures de premier ordre, ou de premier degré (nous entendons par là, les structures essentielles telles que robots, machines d'assemblage, de traitement, d'usinage, stocks,...). A un niveau supérieur, nous devons représenter les systèmes de surveillance et de commande. Il est également indispensable de représenter les flux de production et les perturbations subies par les systèmes et les approvisionnements. Nous ne devons pas oublier également l'aspect temporel, dont la représentation et la prise en compte peut être abordée comme une couche supplémentaire de nos modèles.

Ces considérations nous amènent nécessairement à des architectures modulaires. Chaque cellule de base ayant ses propriétés comportementales et structurelles qui peuvent être amenées à se transformer dans l'environnement dans lequel elles seront placées..

Ne perdons pas de vue qu'une dualité forte doit apparaître entre le système et sa représentation par un modèle. Celui-ci doit être suffisamment proche de la réalité fonctionnelle du système afin de pouvoir s'y substituer pour la simulation et la vérification des projets. Un dialogue doit s'instaurer entre système et modèle de manière à faire évoluer le système de production et éventuellement le commander.

## Les composantes d'un système de production

Les machines et les robots

C'est dans la même rubrique que l'on classera ces deux éléments topologiquement très proches l'un de l'autre dans l'entreprise. Dans un premier temps on peut dire que la fonctionnalité d'une machine est de transformer un

objet par usinage ou par traitement. On peut en définir une (ou plusieurs) entrées et une sortie. La machine impose des contraintes liées à son rendement et à ses capacités en terme d'opérations. Les modèles devront être aptes à décrire la fonctionnalité de cette machine le plus simplement possible.

Le robot est un objet apte à fournir en temps voulu l'objet à la machine. Il est soumis à des contraintes liées aux flux des objets en amont et en aval. Là encore, les modèles devront être aptes à décrire ces comportements et ces contraintes le plus simplement, mais le plus rigoureusement possibles.

L'interconnexion entre robots et machines devra être assurée au niveau des modèles. A ce niveau, la notion de partage de ressources sera à considérer.

Les stocks, les convoyeurs et les approvisionnements

Cette rubrique regarde la disponibilité des objets à traiter et leur situation « géographique » sur le site de production. Il s'agit, concernant ces objets, des matières premières en approvisionnement, qui doivent être disponibles dans les meilleurs délais possibles. Il s'agit également des pièces en cours de traitement ou d'usinage.

Ces objets sont introduits dans la structure sous forme de « matière première » (pour le site de production) et peuvent être stockés à divers endroits (stocks d'entrée et de sortie du site, stock d'entrée et de sortie de chaque machine, stock intermédiaire). Ces objets circulent d'autre part à travers la structure grâce à des convoyeurs et sont transformés ou assemblés pour parvenir à l'état final souhaité.

Les flux et les perturbations

Les objectifs d'optimisation mènent fatalement à rechercher la meilleure solution pour une production de qualité à un meilleur coût dans les meilleurs délais. Il s'agit de respecter les contraintes, tant dans la qualité du produit que dans le respect des délais de livraison. Afin de respecter ces contraintes il faut nécessairement, en plus de l'assurance d'une qualité optimale, observer les flux d'objets dans la structure et prévenir les perturbations du système de production. La notion de traçabilité du produit sera aussi très importante, sachant que le produit est transformé. Il faut pouvoir le suivre et l'identifier au fil de son itinéraire sur le site et pouvoir faire le bilan à tout instant, de son historique au cours de la fabrication.

A ce niveau interviennent la dynamique du site, donc de son modèle, et les notions de prévention. La surveillance de ces flux et la prise en compte des perturbations doivent agir en temps réel sur le déroulement des opérations au sein du système de production.

### **La supervision, le contrôle et la commande**

A un niveau supérieur apparaissent les notions de contrôle, de commande, de surveillance et la supervision. Ces notions plus fines permettent d'agir sur le système selon les critères d'optimisations qui ont été définis.

En résumé, ce système de production peut être vu de manière tripartite. D'une part l'aspect « outillage », constitué de machines, de convoyeurs, de stocks, de robot », en second lieu, l'aspect « objet », qui se réfère à l'objet à produire et qui prend, au fil de la production divers aspects intermédiaires entre la « matière première » et le « produit final ». En troisième lieu, l'aspect « organisation » qui consiste à opérer selon un certain ordonnancement, en respectant certaines contraintes en utilisant des informations de disponibilités et de flux.

### **La complexité des sites**

L'architecture du site de production est évolutive. Elle part nécessairement, dans sa conception d'une structure relativement simple pour se complexifier au fur et à mesure que l'on prend en compte tous les éléments nécessaires pour la réalisation d'un produit finalisé. Cette complexité est de deux ordres : dans la structure du site, élément statique et dans l'organisation de la production, élément dynamique. Ces deux notions sont interactives car il est clair que la disposition des divers éléments constitutifs, ainsi que leur nombre dépendra de l'organisation qui sera choisie. A l'inverse, l'organisation de la production est dépendante des outils dont on dispose.

Un exemple simple permet d'éclairer ces propos : afin de produire un type donné d'objet, on pourra choisir de distribuer les tâches à un nombre donné de machines effectuant des opérations identiques sur plusieurs objets en parallèle. On pourra également affecter un robot à plusieurs opérations différentes sur plusieurs machines. Il s'agira alors d'organiser la production en vue de l'optimisation en fonction des choix matériels qui auront été faits.

Ces réflexions vont naturellement nous amener par la suite à aborder les problèmes récurrents du partage des ressources (robot par exemple), de la disponibilité des ressources et des matières premières, du séquençement des

tâches, de la prise en compte des événements extérieurs perturbateurs.

### **L'organisation de la production : divers point à aborder par la modélisation**

Le nombre de séquences d'assemblages d'éléments de base va croissant en fonction de la complexité du produit final. On parvient alors très rapidement à une description du déroulement des opérations à l'aide de l'utilisation de séquences plus ou moins complexes d'opérations ou de traitements. La nécessité de modéliser et d'étudier ces séquencements apparaît alors.

Les principes de base de la qualité impliquent nécessairement un suivi de l'objet tout au long de sa fabrication ou de son traitement, impliquant ainsi la notion de traçabilité. Tous ces critères sont interdépendants et ont des répercussions importantes sur le rendement de la production et la qualité du produit.

Il apparaît indispensable de se prémunir au mieux de tout désagrément lorsque l'on met en place un système de production élaboré. Cependant, la projection des comportements devient très difficile lorsque la complexité du site de production croît. L'idéal serait de surveiller en permanence les flux en tout point de ces sites, afin d'agir en temps réel pour les rééquilibrer dans l'objectif de répondre aux critères d'optimisation. Nous en sommes alors à créer des modèles complexes pour appréhender les comportements, en y intégrant tous les éléments qui nous permettent de prendre en compte le plus grand nombre possible de situations.

Ces modèles doivent être adaptés à une commande en temps réel des systèmes afin d'assurer une réactivité satisfaisante. C'est la flexibilité des modèles qui va nous permettre la prise en compte d'un maximum de situations évolutives.

### **Le choix des réseaux de Petri (RdP)**

Les Réseaux de Petri sont un outil de modélisation universellement connu et reconnu pour les possibilités d'analyse, de validation et de vérification dont ils font preuve. L'exploitation de la théorie associée aux RdP permet, par la recherche des P et T invariants de répondre à de nombreux problèmes. La diversité des configurations des systèmes de production et la demande de flexibilité de ces systèmes en temps réel, nous amènent à considérer l'évolutivité possible des modèles en vue de la simulation et de la commande éventuelle.

Cet outil de modélisation est particulièrement bien adapté à la représentation des systèmes de production. Il se prête en effet à une construction modulaire et permet, dans la globalité du modèle obtenu, de repérer tous les sous-ensembles. Ses propriétés mathématiques permettent un suivi de la conservation ou de la non conservation des propriétés individuelles de chaque sous-ensemble.

Avec cet outil de modélisation, on peut proposer également une simulation des fonctionnements. Ainsi, nous retrouvons cette dualité entre le système et son modèle, où l'élaboration du système se fait conjointement à l'observation préventive des comportements à travers le modèle. En toute logique, on doit concevoir alors le système par une série d'aller-retour entre le système en construction et son modèle en simulation.

Les Réseaux de Petri peuvent en outre apporter une contribution dans le domaine de la flexibilité : ainsi, comme nous allons le voir, les modèles sont tout à fait aptes à évoluer en fonction des événements et des contextes et ainsi répondre en temps réel aux contraintes imposées en terme de flexibilité.

# CHAPITRE I

## Notions essentielles

### 1 Définitions

Un Réseau de Petri (RdP) est une structure graphique comportant un ensemble de places et de transitions, reliées par des arcs orientés, éventuellement porteurs de poids. Ces arcs sont des liens entre place et transition ou entre transition et place exclusivement. Dans cette structure se déplacent des jetons (ou marques) qui apparaissent dans les places et sont susceptibles de franchir les transitions selon certains critères de franchissabilité et de franchissement.

Les figures 1.1, 1.2 et 1.3 représentent de tels réseaux. Le premier représente un processus à deux états (Arrêt-Marche, par exemple). Dans le deuxième réseau, le passage d'un état à l'autre mobilise une ressource, symbolisée par le jeton contenu dans la place qui a été rajoutée à partir de la figure 1.1. Le troisième modèle peut représenter l'assemblage et le désassemblage successifs de deux éléments.

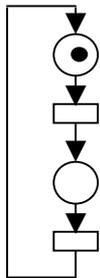


Figure 1.1

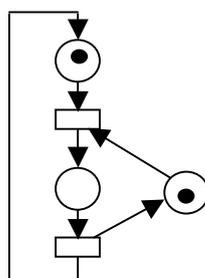


Figure 1.2

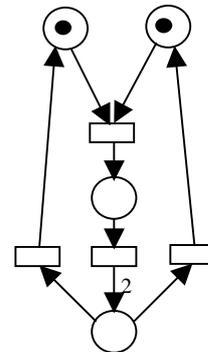


Figure 1.3

En général, les places sont repérées de  $P_1$  à  $P_n$  et les transitions de  $T_1$  à  $T_m$ . Les poids des arcs sont indiqués sur le modèle en regard des arcs. L'absence de notation signifie que l'arc en question est implicitement pondéré à 1.

### 1.1 Définition formelle

Un RdP est un quadruplet  $Q = \langle P, T, \text{Pré}, \text{Post} \rangle$  tel que :

$P = \{P_i\}, i \in \{1, \dots, n\}$  est appelé ensemble de places

$T = \{T_j\}, j \in \{1, \dots, m\}$  est appelé ensemble de transitions avec  $P \cap T = \emptyset$

Pré est une application de  $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  dite d'incidence avant.

Post est une application de  $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  dite d'incidence arrière.

Pré  $(P_i, T_j)$  est appelé poids de l'arc reliant  $P_i$  et  $T_j$ .

Post  $(P_i, T_j)$  est appelé poids de l'arc reliant  $T_j$  et  $P_i$ .

Cette définition permet d'aborder la description d'un RdP algébriquement et de transcrire chaque RdP sous forme de matrice  $W$ , dite d'incidence. L'évolution du marquage du RdP peut alors être observée. Le calcul algébrique est l'outil idéal pour gérer cette évolution de marquage. Chaque marquage et chaque séquence de franchissement sont représentés par un vecteur (dit de marquage, ou de franchissement). Ceci signifie que le

réseau de Petri, est loin de n'être qu'un outil graphique. Avant d'aborder cette écriture, voici quelques définitions élémentaires.

## 1.2 Franchissabilité

**Proposition 1 :** Pour qu'une transition soit franchissable, il faut et il suffit que l'on trouve dans toutes les places immédiatement amont à cette transition, le nombre de marques correspondant au poids des arcs reliant respectivement chacune de ces places à cette transition.

### 1.3 Franchissement

**Proposition 2 :** Toute transition franchissable est immédiatement franchie.

**Proposition 3 :** La transition franchie distribue dans chacune des places immédiatement aval, un nombre de marques égal au poids de l'arc qui relie cette transition à chaque place aval respectivement.



Figure 1.4 : Avant franchissement

Après franchissement

Les marquages sont les suivants :

Avant franchissement :  $m(P1) = 3$  ;  $m(P2) = 4$  ;  $m(P3) = 1$  ;  $m(P4) = 0$

Après franchissement :  $m(P1) = 1$  ;  $m(P2) = 3$  ;  $m(P3) = 2$  ;  $m(P4) = 3$

Remarques :

R(1) : Le franchissement d'une transition ne garantit pas la conservation de la quantité de marques globale. Dans l'exemple précédent, on a globalement un jeton de plus après franchissement de la transition.

Selon les poids attribués aux arcs liés à une transition donnée, les transitions sont : "Consommatrice", "Génératrice" ou "Conservatrice" de marques.

Soit une transition T reliée à un ensemble de places par n arcs amont et m arcs aval.

Soit  $\text{Pré}(i)$  le poids d'un arc amont i de la transition T. Soit  $\text{Post}(j)$  le poids d'un arc aval j de la transition T.

Si  $\sum_n \text{pré}(i) < \sum_m \text{post}(j)$ , alors T est génératrice. Si  $\sum_n \text{pré}(i) > \sum_m \text{post}(j)$ , alors T est consommatrice.

Si  $\sum_n \text{pré}(i) = \sum_m \text{post}(j)$ , T est conservatrice.

Dans le RdP de la figure 1.5, la transition est génératrice de jetons :

$$\sum_n \text{pré}(i) = 7, \quad \sum_m \text{post}(j) = 8$$

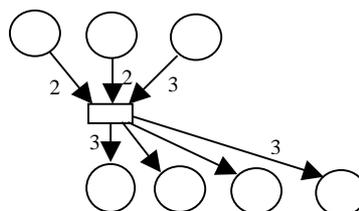


Figure 1.5 : Cellule génératrice

R(2) Les propositions P(1) et P(3) ne posent aucun problème, si ce n'est qu'elles sous-entendent les notions de transition génératrice ou consommatrice, donc que cela implique la création ou la disparition de jetons. Il apparaît alors que les jetons peuvent symboliser des objets physiques ou des états, des situations, des

validations...

R(3) La proposition P(2) est plus critique, puisqu'il s'agit de conférer à une transition un temps de franchissement nul, ce qui n'est acceptable que du point de vue purement théorique et en dehors de toute réalité physique.

R(4) Dans le principe initial des RdP, rien n'interdit le franchissement simultané de deux transitions du même réseau. Or, la simultanéité de deux événements n'est pas cohérente pour le physicien.

### 1.4 Problèmes pratiques

Les protocoles de franchissement et les conditions de franchissabilité décrites précédemment ne prennent pas en compte la notion de temps. En effet, on fait évoluer le marquage d'un RdP sans prendre en compte ni la chronologie ni la durée des événements. Il est donc indispensable, pour l'application, de fixer un certain nombre de règles qui vont être décrites plus loin. Ces règles sont issues des contraintes temporelles imposées par les systèmes physiques. Elles sont issues des deux considérations suivantes :

- Tout événement a une durée non nulle.
- Deux événements indépendants ne peuvent être simultanés.

L'évolution du marquage dans un RdP, peut alors dépendre du temps de séjour dans une place ou du temps de franchissement d'une transition donnés.

### 1.5 Règles complémentaires

Les règles suivantes sont issues des remarques précédemment faites, regardant l'aspect temporel. Les propositions essentielles concernant ces points sont abordées ici, laissant délibérément de côté les définitions plus spécifiques qui seraient utiles pour des applications bien particulières.

#### Occurrences externes

La possibilité est offerte de conditionner le franchissement d'une transition à un événement externe (occurrence). Le nom de l'occurrence est alors spécifié en regard de la transition considérée. Il est alors nécessaire de proposer un chronogramme sur lequel figurent toutes les occurrences en fonction du temps (figure 1.6).

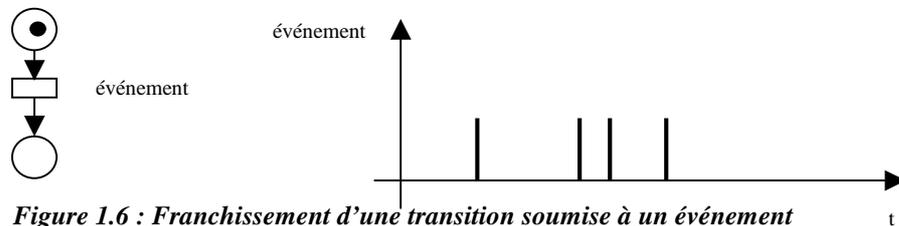


Figure 1.6 : Franchissement d'une transition soumise à un événement

Deux occurrences externes sont attachées aux deux transitions du réseau de la figure 1.7. Le chronogramme associé fournit d'une part la définition des deux occurrences et d'autre part, le suivi du marquage des deux places qui s'ensuit, selon ces deux occurrences  $e_1$  et  $e_2$ .

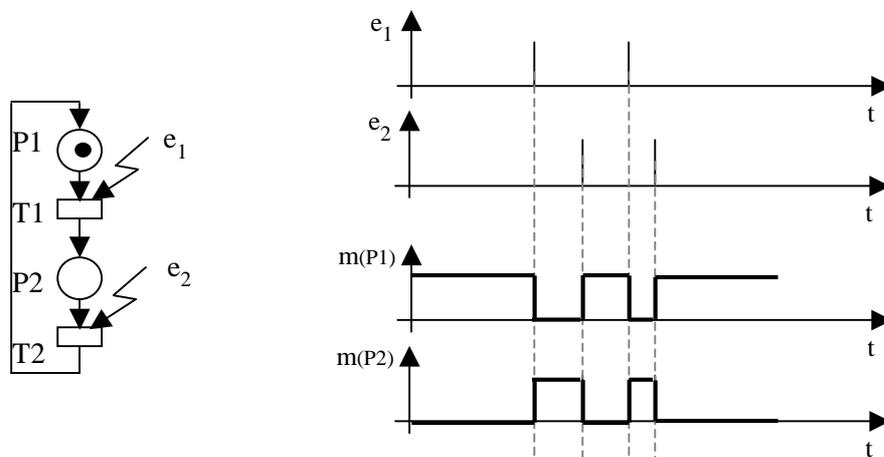


Figure 1.7 Réseau de Petri et chronogrammes de marquage associés

## Temporisations

Il est également possible d'adjoindre une temporisation à une place, une transition ou un arc du RdP. Ainsi les marques sont maintenues dans une place pendant un certain temps  $\tau$  avant tout franchissement de transition amont. On parle de RdP P-temporisé, T-temporisé, Arc-temporisé. Il faut noter que tout RdP T-temporisé peut se traduire en RdP P-temporisé et réciproquement. Ces réseaux de Petri nécessitent la définition d'une unité d'horloge.

La temporisation est indiquée en regard de l'élément temporisé. Conventionnellement, on ne peut pas trouver, au sein du même RdP, des places et des transitions temporisées.

Ainsi les temporisations permettent de rendre les modèles effectivement compatibles avec la réalité physique. Ce concept temporel est alors vu comme une couche complémentaire aux modèles initiaux.

Paradoxalement peut-être, la notion d'ordre mathématique, de chronologie, ne nécessitent pas a priori de définition d'horloge temporelle. Le temps devient alors un attribut complémentaire qui n'interfère pas nécessairement sur l'évolution des marquages.

Soit le RdP P-temporisé de la figure 1.8a. Ce réseau a été choisi suffisamment simple pour fournir un exemple clair mais cependant significatif. Les places P1, P2, P3 sont respectivement temporisées à 2, 3 et 1 unités de temps, comme il est indiqué sur le modèle.

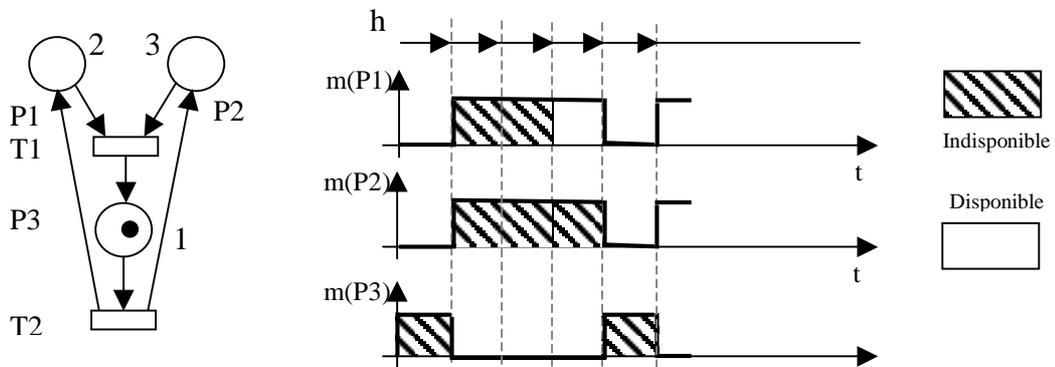


Figure 1.8a Réseau de Petri P-temporisé et chronogramme de marquage associé

Au début de la séquence, le jeton situé dans la place P3 y séjourne 1 unité de temps. T2 est franchie, distribuant un jeton dans chacune des places P1 et P2. Deux unités de temps plus tard, le jeton de P1 est disponible, mais ne peut franchir la transition T1 avant que le jeton de P2 soit disponible à son tour. T1 est alors franchie et l'on retrouve la situation initiale.

L'ordre des marquages est ici rigoureusement le même que celui qui serait obtenu sans temporisation. Cependant, une différence de comportement apparaît si l'état de disponibilité des jetons est considéré (ici, les jetons des places P1 et P2 ne sont pas tout le temps disponibles : le jeton de P1 est rendu disponible avant le jeton de P2 (temps d'horloge 4). Ainsi, si ce réseau est intégré dans un modèle plus important, les comportements globaux peuvent différer (figure 1.8 b).

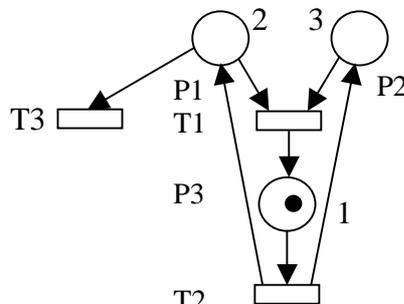
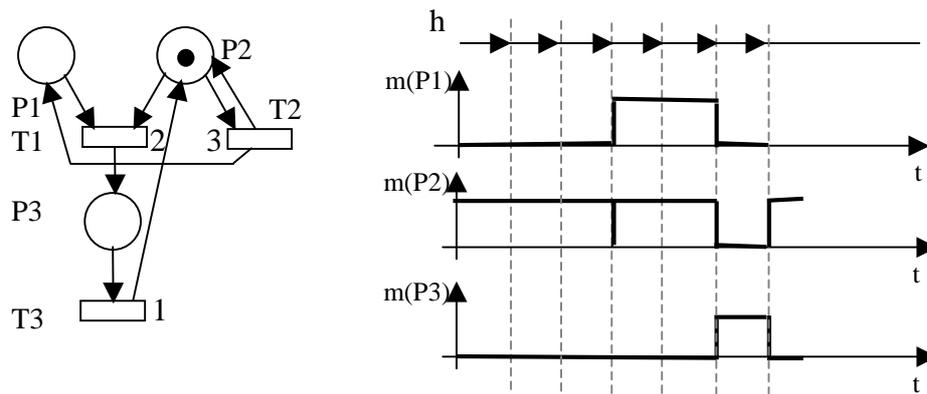


Figure 1.8b Réseau de Petri P-temporisé

Dans l'exemple de la figure 1.8b, le jeton qui apparaît dans la place P1 est capté par la transition T3 deux unités de temps après son arrivée dans cette place. Dans ce même réseau qui serait démuné de toute temporisation, la situation serait conflictuelle (ainsi que cela va être présenté plus loin § 1.6), et le marquage pourrait alors prendre deux évolutions différentes en fonction de la levée proposée pour ce conflit.

De manière similaire, voici un RdP T-temporisé permettant de présenter le principe de cette structure. Le

réseau a été choisi suffisamment simple pour fournir un exemple clair mais cependant significatif (figure 1.9).



**Figure 1.9 Réseau de Petri T-temporisé et chronogramme de marquage associé**

Au début de la séquence, la transition T1 n'est pas validée (pas de jeton dans P1). La transition T2 est validée, mais temporisée à 3 unités. Lorsque les trois unités sont écoulées, T2 est franchie et restitue immédiatement le jeton à la place P2, tout en donnant un jeton à la place P1. Les transitions T1 et T2 sont alors validées, mais cette fois, T1 est prioritaire puisque sa temporisation n'est que de 2 unités de temps. T1 est alors franchie, fournissant un jeton à la place P3, jeton qui y séjourne une unité de temps. T3 est alors franchie et fournit un jeton en P2. Le cycle recommence.

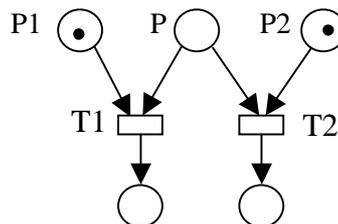
Le même réseau non temporisé serait maintenant conflictuel, la place P2 comportant deux arcs de sortie. Le comportement serait alors peu intéressant : T2 pourrait être systématiquement validée au détriment de T1, générant ainsi un nombre sans cesse croissant de jetons en P1.

Diverses solutions sont maintenant abordées pour s'affranchir de ce type de problème conflictuel. D'ores et déjà, la temporisation peut être une première solution.

### 1.6 Situations conflictuelles

Ce problème est directement issu de la structure même des RdP et reflète parfaitement les situations possibles des systèmes que représentent les modèles. Toutefois, une distinction doit nécessairement être faite entre conflit structurel et conflit effectif.

Soient deux transitions T1 et T2 ayant en amont une place commune P (Figure 1.10) Si une marque est placée en P, elle valide immédiatement les deux transitions T1 et T2, qui doivent être franchies instantanément, d'après la proposition P(2). La même marque doit donc franchir simultanément T1 et T2, ce qui n'est pas acceptable. Il y a ici conflit structurel, tant qu'aucune marque n'a été placée en P, puis conflit effectif lors de l'apparition d'une marque en P. Par ailleurs, ce conflit est levé si l'une des deux places P1 ou P2 ne comporte pas de jeton.



**Figure 1.10 : Situation conflictuelle**

Ce modèle peut effectivement évoquer une situation réelle, représentant par exemple le conflit effectif lors du partage d'une ressource commune entre deux entités (place P : robot sollicité par deux machines (places P1 et P2)). Le modèle doit aider à trouver des solutions pour lever ce conflit.

## 2 Outils mathématiques

La description algébrique du RdP est maintenant abordée, par l'intermédiaire de l'écriture de la matrice d'incidence. Cette écriture mathématique fait toute la richesse de l'outil en ce sens qu'elle va permettre d'aborder l'aspect évolutif du marquage. Ainsi, le marquage et les séquences de franchissement propres à un RdP peuvent être écrites sous forme de vecteurs. Cette présentation est faite à l'aide d'un exemple de RdP relativement simple.

Soit le cahier des charges suivant :

Une machine est tour à tour libre et occupée à une certaine tâche. Cette tâche nécessite un robot pour être accomplie. De manière générale, la machine peut être considérée comme « consommateur » de robot et le robot comme « ressource » pour la machine. Ces notions de « consommateur » et de « ressource » se retrouvent dans de multiples domaines de la production ou de l'informatique.

Le modèle de ce système de production est représenté figure 1.11 qui est à rapprocher de celui de la figure 1.2.

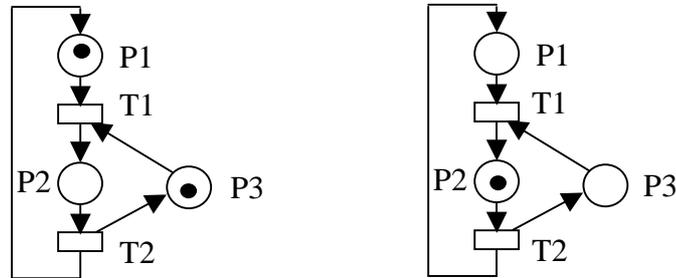


Figure 1.11 : a ; La machine est libre, le robot est disponible (marquage initial)  
b ; La machine est occupée et utilise le robot (marquage final).

## 2.1 Matrice d'incidence et vectorisation

Le réseau de Petri, objet initialement graphique, peu exploitable sous cet aspect malgré la convivialité qu'il apporte, peut être transcrit algébriquement. La matrice d'incidence qui va être décrite, fait la synthèse de tous les liens entre places et transitions du RdP. Cette matrice est en général rectangulaire et possède un nombre de colonnes égal au nombre de transitions du réseau, ainsi qu'un nombre de lignes égal au nombre de places du réseau. Chaque élément de la matrice témoigne de la présence ou de l'absence de lien entre chaque place et chaque transition, ainsi que du poids attaché à l'arc en question. La direction de cet arc est transcrite par le signe de l'élément en question.

En se référant aux définitions précédentes (§ 1.1), soient :

Matrice d'incidence avant, la matrice:

$$W^- = [w_{ij}^-] \text{ où } w_{ij}^- = \text{pré}(P_i, T_j)$$

Matrice d'incidence arrière, la matrice:

$$W^+ = [w_{ij}^+] \text{ où } w_{ij}^+ = \text{post}(P_i, T_j)$$

Ainsi la matrice  $W^-$  fait le bilan des liaisons amont aux transitions, et la matrice  $W^+$  fait le bilan des liaisons aval aux transitions. Pour le RdP de la figure 1.16, où tous les arcs sont de poids 1, on a:

$$W^- = \begin{matrix} & T_1 & T_2 \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad W^+ = \begin{matrix} & T_1 & T_2 \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ces matrices peuvent être lues ainsi :

D'après  $W^-$ , le tir de la transition T1 retire un jeton à chacune des places P1 et P3. Le tir de la transition T2 retire un jeton de la place P2.

D'après  $W^+$ , le tir de la transition T1 ajoute un jeton dans la place P2. Le tir de la transition T2 ajoute un jeton dans chacune des places P1 et P3.

La matrice d'incidence  $W$  est la matrice:

$$W = W^+ - W^- = \begin{matrix} & T_1 & T_2 \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & P_1 \\ & P_2 \\ & P_3 \end{matrix}$$

Cette matrice fait le bilan de l'action de toutes les liaisons du RdP sur le marquage. Il faut cependant noter que les termes issus des matrices d'incidence avant et arrière ne doivent pas se compenser par soustraction. Si tel est le cas, il y a perte d'information lors de la transcription du modèle sous la forme matricielle. Pour s'en affranchir, on devra exclure d'une telle analyse les RdP tels qu'une place et une transition soient reliés par deux arcs, l'un amont et l'autre aval à cette transition. Si cette condition est respectée, le RdP est dit *pur*. La figure 1.9 présente un exemple de RdP impur, en ce sens que la place P2 et la transition T2 sont un exemple de ce qui vient d'être décrit.

### Vectorisation

Cette écriture mathématique va permettre de suivre une évolution du marquage. Grâce à cet outil, la prédiction de l'état d'un système est possible. Afin de compléter l'outil, le marquage est écrit de manière vectorielle, ainsi que la séquence de franchissement. Pour le RdP précédent (figure 1.16), le marquage proposé figure 1.16 a, appelé *Marquage initial* se note:

$$M_i = (1,0,1)$$

le marquage proposé figure 1.16 b, appelé "Marquage final" se note:

$$M_f = (0,1,0)$$

Une séquence de franchissement s'écrit par exemple:

$$S = \langle T_1, T_2, T_1 \rangle$$

et signifie que le franchissement de ces deux transitions est validé dans cet ordre, validant la première à deux reprises. La séquence S est également notée sous forme de vecteur :

$$S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Chaque coordonnée de ce vecteur représente le nombre de fois où la transition a été tirée. Il faut noter que la notion d'ordre des franchissements est alors perdue.

Les propositions précédentes vont permettre de décrire l'évolution du marquage :

$$M_f = M_i + \delta M$$

Dans cette expression,  $M_i$  est le marquage initial proposé,  $M_f$  est le marquage final obtenu et  $\delta M$  est la variation de marquage impliquée par l'exécution de la séquence de franchissement S.

Cette variation de marquage  $\delta M$  se détermine en faisant le produit :  $\delta M = W.S$

Il vient :

$$(1) \quad M_f = M_i + WS$$

En reprenant l'exemple précédent, à partir d'un marquage initial

$$M_i = (1,0,1)$$

et la séquence de franchissement

$$S = \langle T_1, T_2, T_1 \rangle$$

il vient:

$$\delta M = WS = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, 1, -1)$$

d'où :

$$M_f = (0, 1, 0)$$

La signification de la matrice W apparaît ainsi plus clairement : le  $-1$  situé au croisement de la colonne  $T_i$  et de la ligne  $P_j$  signifie: "enlever une marque dans la place  $P_j$  lors du franchissement de la transition  $T_i$ ". De même, un  $1$  en cette position signifie: "ajouter une marque dans la place  $P_j$  lors du franchissement de la transition  $T_i$ ".

## 2.2 Caractérisation du RdP

### Vivacité du réseau

A partir du marquage initial, qui modélise l'état initial d'un processus, il doit être observé que toutes les transitions du réseau sont toujours franchissables, quelle que soit l'évolution du système. Si tel n'est pas le cas, cela signifie qu'un sous-ensemble du modèle proposé est inaccessible au marquage à partir d'un certain point d'évolution du système, donc non vivant. Dans la majeure partie des cas, il est alors estimé que le modèle a été mal conçu, puisqu'il devient en partie inutile à partir d'un certain stade. Seule une réinitialisation de ce système permet alors d'alimenter éventuellement ce sous-RdP. Tout concepteur de réseau aura à coeur d'en assurer la vivacité.

### Bornitude du réseau

Un RdP est dit borné si le nombre de marques de toutes ses places a une limite finie. Ceci confirme par exemple qu'il n'y a pas accroissement pléthorique du nombre de pièces dans un stock. Cette étude est abordée lors de la détermination du P-invariant ou invariant lié aux places (§ 2.3).

### Exclusion mutuelle

Les systèmes physiques présentent souvent une exclusion mutuelle des situations (position marche/arrêt) ou une exclusion de l'existence ou la non existence d'un objet sur un site. Ce principe de l'exclusion mutuelle se traduit dans le modèle réseau de Petri par la présence exclusive d'un jeton dans une place au détriment d'une ou de plusieurs autres places. Ainsi, le modèle peut gérer à l'aide d'un jeton, la disponibilité d'une ressource (machine, robot, stock). Un jeton peut également gérer le partage d'une ressource (jeton tournant dans le modèle).

### Réinitialisation

La réinitialisation est le fait de s'assurer que le système est apte à retrouver son état initial. Cette caractéristique est très souvent essentielle, puisqu'elle garantit la possibilité de retour aux conditions initiales d'un équipement, quelle que soit l'évolution de l'état de celui-ci. Au niveau du modèle qui représente ce système, ce problème est abordé grâce à l'étude des T-invariants ou invariants de transitions (§ 2.3).

## 2.3 Les invariants

### Les T-invariants

Soit un marquage initial  $M_i$  et un marquage final  $M_f$  issu de  $M_i$  après déroulement d'une séquence de franchissement de transitions  $S$ . Ceci s'écrit par convention :

$$M_i \subset S \rightarrow M_f$$

Par définitions,  $S$  est un T-invariant si et seulement si :

$$M_i \equiv M_f$$

Le vecteur T-invariant se note :

$$S = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

Chaque terme  $\alpha_i$  est le nombre de fois que la transition  $T_i$  est tirée au cours de la séquence S.

Donc, d'après (1) pour une telle séquence S, il vient nécessairement :

$$WS = 0$$

Autrement dit,  $S \in \text{Ker } W$  à droite, où  $\text{Ker } W$  est le noyau de la matrice. Il en découle alors que S est un T-invariant (en se limitant ici aux valeurs  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ , ensemble des entiers naturels).

Pour certains RdP, plusieurs T-invariants linéairement indépendants peuvent être déterminés. Ceci définit une base de T-invariants de  $\text{Dim Ker } W_D$  éléments, dimension du noyau à droite de la matrice W. Ce point va être approfondi à travers l'étude des P-invariants. C'est en effet une étude duale de la première qui va être abordée plus précisément.

### Les P-invariants

Il s'agit de déterminer une pondération des places qui permet d'étudier certaines caractéristiques, telles que la bornitude des systèmes.

Sur l'équation (1), un produit vectoriel à gauche par un vecteur  $P^T$  de pondération des places du RdP est effectué. Ceci s'écrit :

$$(2) \quad P^T M_f = P^T M_i + P^T WS$$

Soit à présent un vecteur  $P^T$  laissant invariant le vecteur de marquage pondéré par  $P^T$  quelle que soit la séquence de tir de transitions effectuée. Il vient :

$$P^T M_f = P^T M_i$$

La relation précédente est réalisable si et seulement si :

$$P^T WS = 0 \quad \forall S$$

Ce qui implique que:

$$P^T W = 0$$

et donc que, par définition :

$$P^T \in \text{Ker } W \text{ à gauche.}$$

Tous les marquages dont il est question dans ce développement sont des éléments de l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels. Déterminer les P-invariants du RdP, c'est déterminer le noyau de la matrice W à gauche.

L'ensemble du noyau  $\text{Ker } W$  à gauche est un  $\mathbb{Z}$ -module. L'étude des RdP ne concerne que des éléments à coordonnées toutes positives ou nulles de ce  $\mathbb{Z}$ -module (le marquage ne peut être négatif). C'est donc par abus de langage que l'on dit que l'ensemble des solutions représente un espace vectoriel dont il s'agit de déterminer une base. La base de cet espace vectoriel  $\text{Ker } W$  est un ensemble de vecteurs libres appelés P-invariants.

Le but est donc de déterminer une base de  $\text{Ker } W$ , à coordonnées toutes positives ou nulles, et la dimension de  $\text{Ker } W$ . La détermination de cette dimension permet d'affirmer que des solutions n'ont pas été omises. Il est nécessaire de connaître le rang r de la matrice W à p lignes (Le RdP possède alors p places). Il est établi que :

$$\text{Dim Ker } W_G = p - r$$

$$\text{Dim Ker } W_D = t - r$$

Des méthodes pratiques pour déterminer la dimension du noyau de W peuvent être établies dans certains cas, sans avoir nécessairement à développer l'outil mathématique. Des moyens assez conviviaux sont alors à disposition pour déterminer l'existence de tels P-invariants, ce qui facilite considérablement la tâche du concepteur.

Soit  $P_1^T, P_2^T, \dots, P_n^T$  une base de  $\text{Ker } W$  à gauche, tout P-invariant du RdP s'écrit comme une combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$P = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$$

Chaque P invariant permet l'écriture d'une équation de marquage.

Soit  $P^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  un P-invariant lié à  $n$  places du réseau.

Soient  $m_1, m_2, \dots, m_n$  les marquages respectifs de ces places :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i = K$$

Dans cette expression, K est une constante dépendante du marquage initial.

### 2.4 Dénombrement des invariants

A partir de la détermination du rang de la matrice W, il est établi que, de manière générale :

$$(4) \quad \text{Dim Ker } W_G - \text{Dim Ker } W_D = \text{Card}(P) - \text{Card}(T)$$

où  $\text{Card}(P) = p$  est le nombre de places du réseau et le nombre de lignes de la matrice d'incidence W, et  $\text{Card}(T) = t$  est le nombre de transitions du réseau et le nombre de colonnes de la matrice d'incidence W.

Ceci permet de comptabiliser facilement le nombre de P-invariants de base à partir du nombre de T-invariants de base et réciproquement. Ceci représente également un moyen de vérification des conclusions émises par ailleurs d'après un décompte empirique des invariants.

### 2.5 Exemples

Soient à nouveau les deux modèles des figures 1.2 et 1.3 : où les poids sont indiqués en regard des arcs lorsqu'ils ne sont pas égaux à 1.

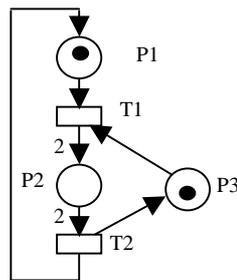


Figure 1.12 a

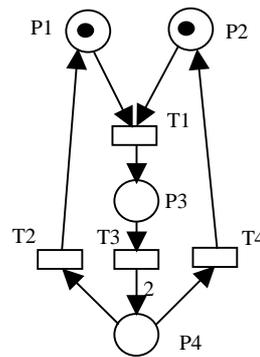


Figure 1.12 b

Les matrices d'incidence respectives de ces deux réseaux sont :

$$W_a = \begin{matrix} & T1 & T2 \\ \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$W_b = \begin{matrix} & T1 & T2 & T3 & T4 \\ \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ces réseaux sont caractérisés en dénombrant leurs invariants. Cette caractérisation implique un certain nombre de propriétés permettant l'évaluation et la validation du modèle sans aucune simulation par ailleurs.

### Les T-invariants

-- Pour le RdP de la figure 1.12 a :

Le vecteur  $S_{a1} = (1,1)$  répond au problème car  $W_a S_{a1} = 0$ . Ceci signifie que le tir successif de T1, puis T2 (séquence  $\langle S1, S2 \rangle$ ), replace le système dans sa configuration initiale. D'autre part,  $\text{DimKer}W_D = 1$ , ce qui signifie que tous les T-invariants de ce système s'écrivent  $S = \lambda S_{a1}$  où  $\lambda$  est un nombre entier positif.

Il faut cependant noter que l'ordre des franchissements des deux transitions n'est pas géré par cette étude. C'est seulement le marquage initial du réseau qui détermine les diverses possibilités de franchissement. Ainsi, pour cet exemple, l'ordre de tir T2 puis T1 (séquence  $\langle S2, S1 \rangle$ ) n'est pas possible à partir du marquage proposé alors que cette séquence est représentée par le même vecteur de franchissement.

-- Pour le RdP de la figure 1.12 b

Le vecteur  $S_{b1} = (1,1,1,1)$  répond au problème car  $W_b S_{b1} = 0$ . Ceci signifie que le tir successif de T1, T3, T2 puis T4 replace le système dans sa configuration initiale. D'autre part, la dimension du noyau à droite  $\text{DimKer}W_D = 1$ , ce qui signifie que tous les T-invariants de ce système s'écrivent  $S = \lambda S_{b1}$  où  $\lambda$  est un nombre entier positif.

Cette fois, le tir des transitions T2 et T4 peut se faire selon les deux ordres. Ainsi, deux séquences répondant au vecteur  $S_{b1}$  sont possibles :  $S = \langle T1 T3 T2 T4 \rangle$ ,  $S = \langle T1 T3 T4 T2 \rangle$ .

### Les P-invariants

-- Pour le RdP de la figure 1.12 a :

Les pondérations  $P_{a1}^T = (2,1,0)$  et  $P_{a2}^T = (0,1,2)$  répondent au problème, en effet :  $P_{a1}^T W_a = 0$  et  $P_{a2}^T W_a = 0$ . Les deux vecteurs  $P_{a1}^T$  et  $P_{a2}^T$  forment une base de  $\text{Ker}W$  à gauche, dont la dimension  $\text{DimKer}W_G = 2$ . Ceci signifie que tout P-invariant de ce RdP s'exprime comme une combinaison linéaire des deux précédents vecteurs libres.

Il reste alors à exprimer l'invariance de marquage sous la forme de deux expressions (voir expression (3)):

$$\begin{aligned} 2m_1 + m_2 &= K_1 \\ m_2 + 2m_3 &= K_2 \end{aligned} \quad \text{où}$$

$m_1, m_2, m_3$  sont les marquages des places  $P_1, P_2, P_3$

$K_1, K_2$  sont des constantes dépendantes du marquage initial.

D'après le marquage initial proposé, ces constantes sont égales à 2.

Il apparaît ici que la dimension du noyau à gauche de la matrice  $W$  est égale au nombre de boucles du RdP. Ce point de vue est abordé un peu plus loin (§3.3). Ceci signifie que, pour des configurations bien spécifiques, mais déjà plus élaborées que celles-ci, le concepteur peut déterminer visuellement, donc aisément cette dimension. Ceci lui permet alors de connaître a priori le nombre d'invariants de base qui caractérisent son système.

Il est aussi intéressant de noter que l'écriture de la base d'invariants ne dépend pas du marquage du réseau, contrairement aux expressions de marquage qui en découlent. L'écriture algébrique caractérise donc bien la structure sans prise en compte du marquage qui reflète alors l'état instantané d'un système et non son comportement général.

Les conditions initiales sont traduites par le marquage initial qui peut impliquer un comportement futur spécifique. Des structures dont le comportement varie selon la quantité de marques initiales sont abordées plus

loin (§3.1).

-- Pour le RdP de la figure 1.12 b :

La pondération  $P_b^T = (1,1,2,1)$  répond au problème, en effet :  $P_b^T W_b = 0$ .

$\text{DimKer}W_G = 1$ . Ceci signifie que tout P-invariant de ce RdP est de la forme  $P^T = \lambda P_b^T$

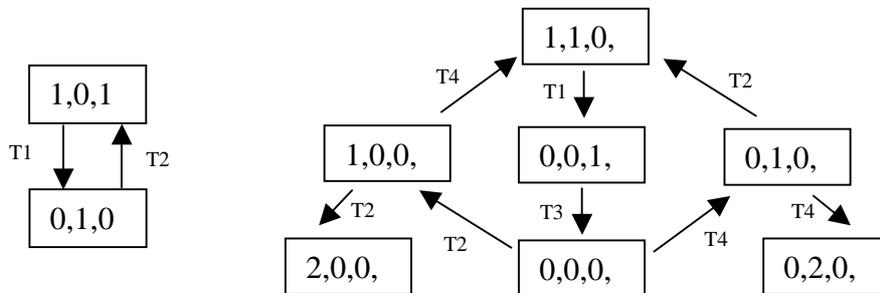
Il reste alors à exprimer l'invariance de marquage sous la forme de l'expression (voir expression (3)) :

$$m_1 + m_2 + 2m_3 + m_4 = K \quad \text{où :}$$

$m_1, m_2, m_3, m_4$  sont les marquages des places  $P_1, P_2, P_3, P_4$ ,  $K$  est une constante dépendante du marquage initial. D'après le marquage proposé, cette constante est égale à 2.

## 2.6 Arbre de marquage

Afin de suivre l'évolution du marquage au cours d'une séquence de tir de transitions, l'arborescence des marquages du réseau de Petri peut être représentée à partir d'un marquage initial donné. Ce procédé va être suivi à travers les deux exemples précédents. Les arbres représentés ici explorent toutes les possibilités à partir du marquage initial. L'objectif d'une telle exploration est la recherche d'accessibilité de marquage.

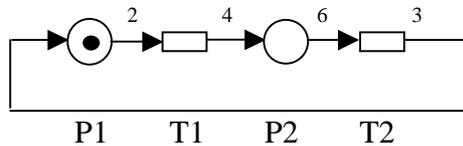


## 3 P-invariants et flux de marquage

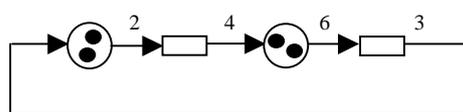
### 3.1 Notion de flux de marquage

Dans un RdP se déplacent des marques (ou jetons). Il est important de dissocier les notions de marquage et l'existence ou non d'invariants, ceux-ci étant propres à la structure. Les invariants vont traduire le devenir d'un système à partir de conditions initiales imposées par le marquage initial. Les notions, telles que blocage du système et *bornitude* vont dépendre du marquage initial. L'exemple de la figure 1.13 permet d'aborder les diverses possibilités d'évolution d'un système, selon le marquage initial, pour un même RdP possédant un P-invariant (ici, le vecteur  $P^T = (2,1)$ ).

Condition initiale 1



Condition initiale 2



Condition initiale 3

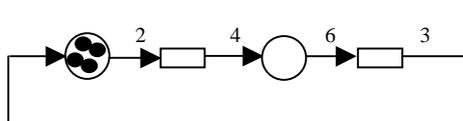


Figure 1.13 Différentes conditions initiales sur le même réseau

Voici alors les arbres de marquage obtenus à partir de ces trois conditions initiales :

Condition initiale 1 :

$(m_1, m_2) = (1,0) \rightarrow$  Le système est bloqué.

Condition initiale 2 :

$(m_1, m_2) = (2,2) \rightarrow (0,6) \rightarrow (3,0) \rightarrow (1,4) \rightarrow$  Le système est bloqué.

Condition initiale 3 :

$(m_1, m_2) = (4,0) \rightarrow (2,4) \rightarrow (0,8) \rightarrow (3,2) \rightarrow (1,6)$  Le système *oscille* indéfiniment.



Dans tous les cas les calculs fournissent l'invariant:  $2m_1 + m_2 = K_i$ , avec les valeurs :

$K_1 = 2 \quad K_2 = 6 \quad K_3 = 8$  pour les conditions initiales 1, 2 et 3 respectivement.

La notion de flux de marquage va à présent être introduite. Ainsi, il apparaît que, pour un tel RdP, possédant un P-invariant (ici, le vecteur  $(2,1)$ ), il peut y avoir une périodicité du marquage, donc un flux moyen constant de celui-ci, après une éventuelle phase transitoire. Lorsque le coefficient K est trop petit, le système a tendance à répartir les marques de manière à bloquer les deux transitions. Dans le dernier exemple (condition initiale 3), il y a toujours assez de marques en réserve pour valider une transition.

C'est sur cette dernière configuration qu'il convient de s'attarder. Au cours d'une période de marquage, chaque transition a vu passer le même nombre de marques. La matrice d'incidence de ce modèle s'écrit:

$$W = \begin{matrix} & T_1 & T_2 \\ \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} & P_1 \\ & & P_2 \end{matrix}$$

Le P-invariant est  $P^T = (2,1)$  et le T-invariant est  $S = (3,2)$ . Ce dernier signifie que la séquence  $\langle T_1, T_1, T_2, T_1, T_2 \rangle$  par exemple, laisse le marquage invariant. En effet :

$$P^T W = (2,1) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = (0,0) \quad WT = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (0,0)$$

Dans l'exemple de la figure 1.14, il apparaît en revanche que le nombre total de marques contenu dans la structure, à partir du marquage initial  $(1,0)$ , ne cesse de croître. Le système est non borné. Le flux moyen n'est pas constant, mais croît indéfiniment. En observant la matrice d'incidence de ce système, l'inexistence d'invariants est constatée. Ainsi, pour le réseau de la figure 1.19, selon le marquage initial  $(1,1)$ , l'une des branches de l'arbre s'écrit :

$(m_1, m_2) = (1,0) \rightarrow (0,2) \rightarrow (1,1) \rightarrow (2,0) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3,0) \rightarrow \dots$

Le nombre de marques croît indéfiniment dans les deux places, l'arborescence est infinie.

Dans l'exemple de la figure 1.15, le système conduit nécessairement à un état de blocage, quel que soit le marquage initial. Le nombre de jetons ne fait que diminuer au fil de l'évolution. Il n'y a pas de P-invariant. Ces notions de flux de marquage et d'invariants sont intimement liées.

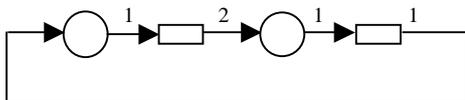


Figure 1.14

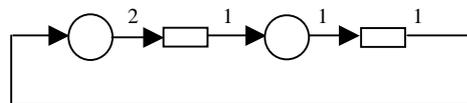


Figure 1.15

### 3.2 Cellule génératrice et cellule consommatrice

Par définition, une cellule est un ensemble constitué d'une place et d'une transition, reliées par un arc, comme le représente la figure 1.16. Les arcs amont et aval portent les poids respectifs  $x$  et  $y \in \mathbb{N}$ .

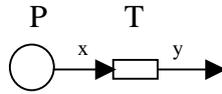


Figure 1.16 : Cellule élémentaire de RdP

L'étude qui suit a pour objet de traduire en pratique l'existence d'un P-invariant en partant d'un modèle constitué d'une seule boucle de  $n$  places et  $n$  transitions (figure 1.22) :

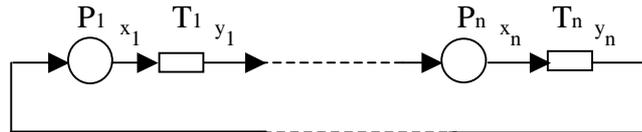


Figure 1.17 : Boucle de  $n$  places et  $n$  transitions

Ce réseau peut également être considéré comme étant constitué de  $n$  cellules élémentaires telles que celle de la figure 1.16. La question de l'existence de P-invariant peut être posée sous forme d'une conjecture :

**Proposition 4:**

Dans un RdP à une boucle (figure 1.22), il existe au plus un P-invariant de base ( $\text{DimKer}W_G = 0$  ou 1).

Ce P-invariant existe si et seulement si le produit des poids des arcs aval est égal au produit des poids des arcs amont, soit :

$$(5) \quad \prod_n x_k = \prod_n y_k$$

Le réseau de Petri de la figure 1.18 comporte un P-invariant (et donc un T-invariant), car il vérifie l'expression (5) ( $2 \times 6 = 3 \times 4$ ).

**Observation du flux de marques :**

Considérant à présent que ce RdP est constitué de  $n$  cellules de gain  $G_i = \frac{y_i}{x_i}$ ,

Le gain total de la boucle s'exprime comme étant le produit :

$$G = \prod_{i=1}^n G_i$$

Ce gain apparaît comme l'amplification de la quantité de marques dans la boucle. A présent, la conservation de flux de marques se traduit en écrivant (la boucle est alors de gain unitaire) :

$$(6) \quad G = \prod_{i=1}^n G_i = \frac{\prod_{i=1}^n y_i}{\prod_{i=1}^n x_i} = 1$$

Les relations (5) et (6) étant équivalentes, ceci montre que les notions de conservation de flux et d'existence de P-invariants sont intimement liées.

### 4 T-invariant et réinitialisation d'une boucle

**Proposition 5:**

Un RdP constitué d'une seule boucle possède un T-invariant si et seulement si il possède un P-invariant :

Le nombre de places d'une boucle semblable à celle de la figure 1.22 est égal au nombre de transitions de cette boucle ( $n - p = 0$ ). D'après (4) il en résulte que ce RdP constitué d'une boucle comporte au plus un T-invariant. Le T-invariant pouvant alors être déterminé représente la séquence de réinitialisation de la boucle. Ce RdP à une boucle est donc réinitialisable si et seulement si le flux des jetons y circulant est périodique.

## 5 Construction et caractérisation ascendante de RdP

A partir d'un premier élément de base, un RdP à une boucle vient d'être caractérisé de manière générale. En résumé, il peut être maintenant dit que ce RdP peut posséder au plus un P-invariant et un T-invariant (l'un n'allant pas sans l'autre). Si ce RdP possède un P-invariant et un T-invariant, il présente une périodicité du flux de jetons et il est réinitialisable.

Si il ne présente pas de P et T-invariant, il conduit, soit à une situation de blocage, soit à une production sans limite de jetons dans le modèle. Il n'est alors pas réinitialisable.

A partir de ces éléments, une démarche de caractérisation de RdP plus complexes peut être développée par construction ascendante en déterminant quelles propriétés vont pouvoir être conservées lors de l'assemblage ou du désassemblage de structures élémentaires.

### 5.1 Invariants et chaînes de RdP

D'après ce qui précède, l'existence d'un P-invariant dans un RdP constitué d'une seule boucle est conditionnée par les poids liés aux arcs reliant places et transitions. L'existence de T-invariant assure alors la possibilité de retrouver le marquage initial, après déroulement d'une séquence de franchissement donnée. Ceci exprime la possibilité de retrouver les conditions initiales, et donc de réinitialiser le système.

L'étude suivante permet de se pencher sur des systèmes non rebouclés tels que ceux représentés sur la figure 1.18, chaîne ininterrompue de places et de transitions commençant par une place et se terminant par une place. Une telle chaîne est dénommée chaîne P-P dans la suite du document.

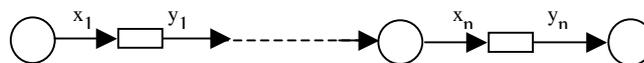


Figure 1.18 Chaîne P-P

#### Proposition 6 :

Une chaîne P-P présente nécessairement un P-invariant et un seul, quels que soient les poids affectés aux arcs et aucun T-invariant.

#### Démonstration :

Il convient d'ajouter une transition à ce RdP, reliée aux places  $P_n$  et  $P_1$  ainsi que le propose la figure 1.19:

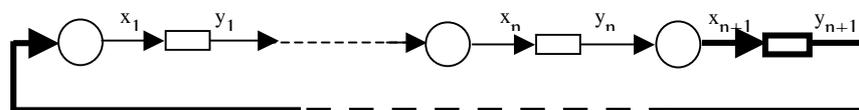


Figure 1.19

La condition d'existence d'un P-invariant s'écrit dans ce cas selon l'expression (5). Il convient d'imposer à présent  $x_{n+1} = y_{n+1} = 0$  (ce qui revient à dire que le RdP de la figure 1.19 se ramène à celui de la figure 1.18, la chaîne P-P). La condition (5) est alors toujours réalisée quelles que soient les valeurs des termes associés aux arcs. Ceci démontre l'existence systématique d'un P-invariant dans le RdP initial de la figure 1.18, similaire à celui de la figure 1.19, avec deux poids d'arcs nuls.

L'objectif de ce qui suit est de proposer l'écriture d'un P-invariant de base pour la structure chaîne P-P.

#### Proposition 7 :

Le P-invariant d'une chaîne P-P s'écrit :



Ce RdP présente nécessairement un P-invariant qui s'écrit, selon (7) :

$$P = (6/5, 3/5, 1), \text{ ou encore : } P' = (6, 3, 5).$$

En suivant l'évolution du marquage, il y a parmi les branches de l'arbre de marquage et à partir du marquage (3,0,0) la branche :

$$(3,0,0) \longrightarrow (0,6,0) \longrightarrow (0,1,3)$$

En effet, l'équation (3) est vérifiée, avec  $K = 18$  :

$$(3 \times 6 + 0 \times 3 + 0 \times 5) = (0 \times 6 + 6 \times 3 + 0 \times 5) = (0 \times 6 + 1 \times 3 + 3 \times 5) = 18$$

Ce réseau ne comporte pas de T-invariant.

Un raisonnement dual permet d'étudier ensuite la chaîne suivante, dite de type chaîne T-T (figure 1.20).

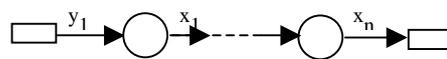


Figure 1.20 Chaîne T-T

**Proposition 8 :**

Une chaîne T-T présente nécessairement un T-invariant et un seul, quels que soient les coefficients affectés aux arcs et ne possède pas de P-invariant.

**Démonstration :**

Il convient de rajouter une place à ce RdP, reliée aux transitions  $T_n$  et  $T_1$  :

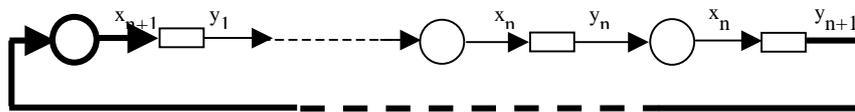


Figure 1.19b

La condition d'existence d'un T-invariant s'écrit dans ce cas selon l'expression (5). Il convient d'imposer à présent  $x_{n+1} = y_{n+1} = 0$  (ce qui revient à dire que le RdP de la figure 1.24b se ramène à celui de la figure 1.20, la chaîne T-T). La condition précédente est toujours réalisée quelles que soient les valeurs des termes associés aux arcs. Ceci démontre l'existence systématique d'un T-invariant dans le RdP initial de la figure 1.20, similaire à celui de la figure 1.19b, avec deux poids d'arcs nuls.

Afin de mener à bien la démonstration qui va suivre, il est nécessaire d'utiliser le type de cellule représentée figure 1.21, duale de la cellule de la figure 1.16.

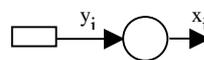


Figure 1.21

Considérons de manière duale le rapport :

$$H_i = \frac{x_i}{y_i}$$

**Proposition 9 :**

Le T-invariant d'une chaîne T-T s'écrit :

$$(8) \quad S = \left( \prod_{i=1}^n H_i, \prod_{i=2}^n H_i, \dots, \prod_{i=n-1}^n H_i, H_n, 1 \right)$$



T2, puis 2 tirs de T3 successivement. Il vient :

$$(0,0) \longrightarrow (20,0) \longrightarrow (0,10) \longrightarrow (0,0)$$

Cette séquence S' ramène le modèle au marquage initial (0,0).

Ce réseau ne comporte pas de P-invariant, une équation de type (3) ne peut pas être écrite.

## 5.2 P et T-Expansions

Les constatations qui ont été faites présentent une première approche concernant l'étude de la signification pratique des invariants. Il apparaît que deux cheminements sont envisageables pour déterminer les P-invariants. Soit développer l'outil algébrique classique, soit observer le flux de marques en en déterminant les conditions de conservation.

Le propos peut être généralisé, dans le but de l'appliquer à des structures de Petri plus complexes. Des RdP obtenus par *expansion* vont être observés et l'analyse des conditions de conservation d'invariants éventuels va être faite. Cette démarche permet la construction et la caractérisation ascendante de modèles. Elle va permettre, lors de l'élaboration de modèles de systèmes de production, d'assembler des modèles élémentaires et de suivre la conservation éventuelle de leurs propriétés.

### Expansion par les transitions ou T-expansion (figure 1.22)

**Définition:** Soit  $RdP_i$ , un Réseau de Petri initial constitué de  $p$  places et de  $t$  transitions. Un ensemble  $E_{xp}$  de places  $\{P_{p+1}, \dots, P_q\}$  et de transitions  $\{T_{t+1}, \dots, T_r\}$  tel que tout élément de  $E_{xp}$  n'est relié à  $RdP_i$  que par des arcs attachés aux transitions de  $RdP_i$  sera appelé T-expansion de  $RdP_i$ . Soit  $W_i$  la matrice d'incidence de  $RdP_i$  et  $RdP_f$  le Réseau de Petri final obtenu après cette T-expansion. Sa matrice  $W_f$  s'écrit:

$$W_f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} T_1 & T_t & T_{t+1} & T_r & & \\ \hline & W_i & & 0 & & \\ \hline & A & & B & & \end{array} \begin{array}{l} P_1 \\ P_p \\ P_{p+1} \\ P_q \end{array} \end{array}$$

où A et B sont des sous-matrices de  $W_f$ , et O la matrice nulle résultant de l'inexistence de liaisons entre les ensembles  $\{T_{t+1}, T_r\}$  et  $\{P_1, P_p\}$ .

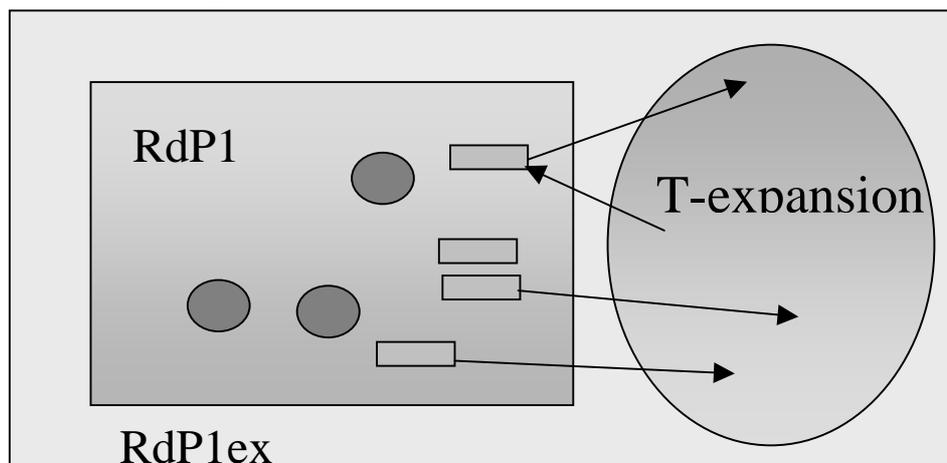


Figure 1.22 : T-Expansion

### Proposition 10 :

Une T-expansion conserve les P-invariants de  $RdP1$ .

**Démonstration :**

Soit  $P_i^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ , un P-invariant de  $RdP_i$ ; il vient :  $P_i^T \in Ker W_i \Rightarrow P_i^T W_i = 0$

Soit  $P_f^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^{p+q}$ , il vient :  $P_f^T W_f = 0$

Ceci démontre que  $P_f^T$  est un P-invariant de  $RdP_f$ .

*C'est en ce sens que l'on dit que le P-invariant est conservé après la T-expansion du RdP initial.*

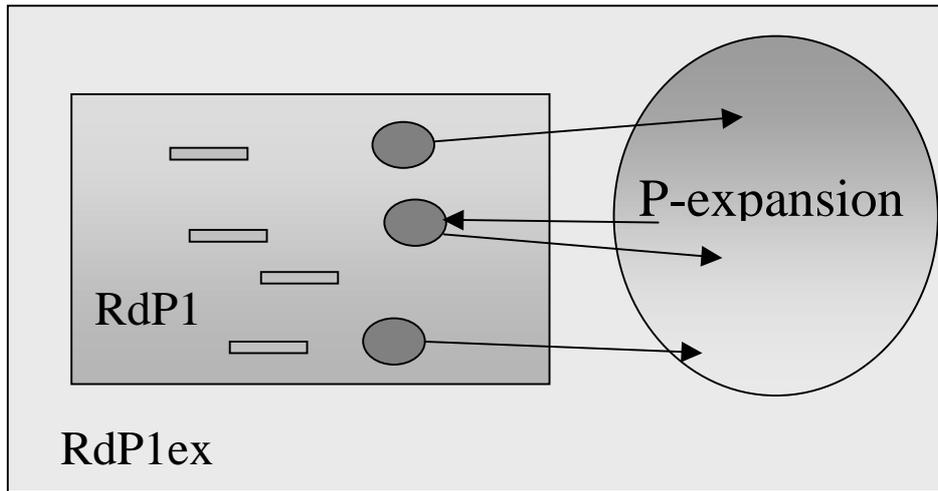
**Expansion par les places, ou P-expansion** (figure 1.23)

**Définition :**

Soit  $RdP_i$ , un Réseau de Petri initial constitué de  $p$  places et de  $t$  transitions. Un ensemble  $E_{xp}$  de places  $\{P_{p+1}, \dots, P_q\}$  et de transitions  $\{T_{t+1}, \dots, T_r\}$  tel que tout élément de  $E_{xp}$  n'est relié à  $RdP_i$  que par des arcs attachés aux places de  $RdP_i$  sera appelé P-expansion de  $RdP_i$ .

**Proposition 11:**

Une P-expansion conserve les T-invariants de  $RdP_i$ .



**Figure 1.23 : P-Expansion**

Soit  $W_i$  la matrice d'incidence de  $RdP_i$ . Soit  $RdP_f$  le réseau de Petri final obtenu après cette P-expansion. Sa matrice  $W_f$  s'écrit:

$$W_f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} & T_1 & T_t & T_{t+1} & T_r & \\ \hline & W_i & & & A & P_1 \\ \hline & 0 & & & B & P_{p+1} \\ & & & & & P_q \end{array} \end{array}$$

où A et B sont des sous-matrices de  $W_f$ , et O la matrice nulle résultant de l'inexistence de liaisons entre les ensembles  $\{T_1, T_t\}$  et  $\{P_{p+1}, P_q\}$ .

En suivant un raisonnement similaire au précédent, il est établi qu'une P-expansion conserve les T-

invariants du RdP initial.

### 5.3 P-Fusions et T-Fusions

#### P-Fusions

Les invariants d'un Réseau de Petri obtenu en fusionnant une place de deux Réseaux de Petri préalablement caractérisés sont maintenant étudiés.

**Proposition 12 :**

Une P-fusion conserve les T-invariants de chaque réseau dans le réseau résultant.

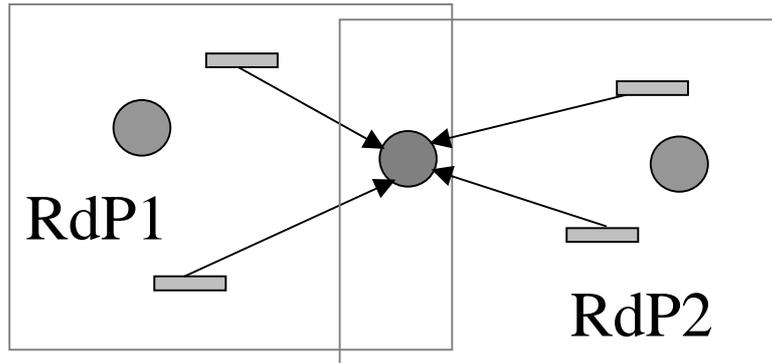


Figure 1.24 : P-fusion

**Proposition 13 :**

La P-fusion de deux réseaux de Petri possédant chacun un P-invariant, donne naissance à un nouveau réseau de Petri dont un P-invariant peut être déterminé.

#### Les T-Fusions

L'étude porte à présent sur les invariants d'un réseau de Petri obtenu en fusionnant une transition de deux autres réseaux de Petri qui ont été préalablement caractérisés.

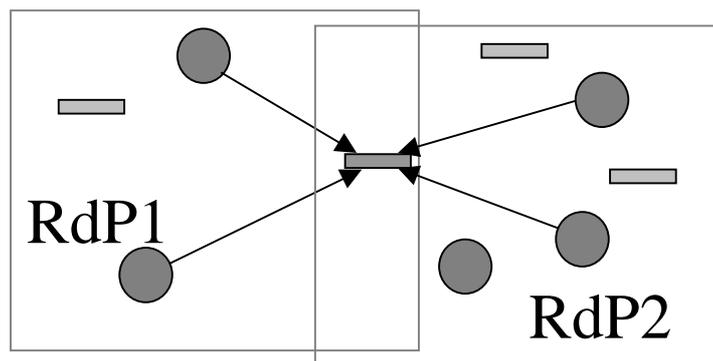


Figure 1.25 T-Fusion

**Proposition 14 :**

Une T-fusion conserve les P-invariants de chaque réseau dans le réseau résultant.

La démonstration de cette proposition est similaire à celle de la proposition 10.

**Proposition 15 :**

La T-fusion de deux réseaux de Petri possédant chacun un T-invariant, donne naissance à un nouveau réseau de Petri dont un T-invariant peut être déterminé.

**Proposition 16**

Soit un réseau de Petri de  $m$  places et  $n$  transitions ne possédant pas de T-invariant. Par P-fusion, il est toujours possible d'apporter un T-invariant au nouveau RdP ainsi obtenu.

Démonstration :

Soit  $W$  la matrice d'incidence de ce réseau de Petri :

$$W = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Soit  $W_T$  la matrice d'incidence obtenue en rajoutant à ce réseau une seule transition  $T_{n+1}$  liée éventuellement à toutes les places :

$$W_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & a_{1(n+1)} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & a_{mn} & a_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

Soit le vecteur de tir de  $m$  dimensions  $S = (1, 1, \dots, 1)$ , la résolution de l'équation  $W_T S = 0$  a toujours une solution qui se caractérise par:

$$a_{i(n+1)} = -\sum_{k=1}^n a_{ik} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Alors, il vient que le vecteur  $S = (1, 1, 1, 1, \dots, 1)$  est un T-invariant du réseau après fusion.

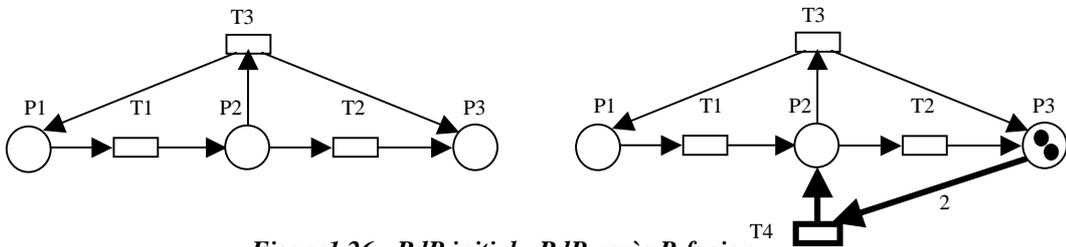


Figure 1.26 : RdP initial ; RdP après P-fusion

La matrice d'incidence  $W$  du RdP initial s'écrit :

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'équation  $WS = 0$  n'a pas de solution, ce RdP est donc sans T-invariant.

La matrice d'incidence  $W_T$  du RdP après P-fusion s'écrit :

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

L'équation  $WS = 0$  a pour solution :  $S = (1,1,1,1)$ .

Avec le marquage initial indiqué, une branche de l'arbre de marquage suivante, prouvant la réinitialisation possible de ce réseau est obtenue:

$$(0,0,2) \xrightarrow{T4} (0,1,0) \xrightarrow{T3} (1,0,1) \xrightarrow{T1} (0,1,1) \xrightarrow{T2} (0,0,2)$$

### Corollaire 1

Deux réseaux de Petri ne comportant pas de T-invariant peuvent, par leur P-fusion, donner un réseau de Petri possédant un T-invariant

### Proposition 17

Soit un réseau de Petri de  $m$  places et  $n$  transitions ne possédant pas de P-invariant. Par T-fusion, il est toujours possible d'apporter un P-invariant au nouveau RdP ainsi obtenu.

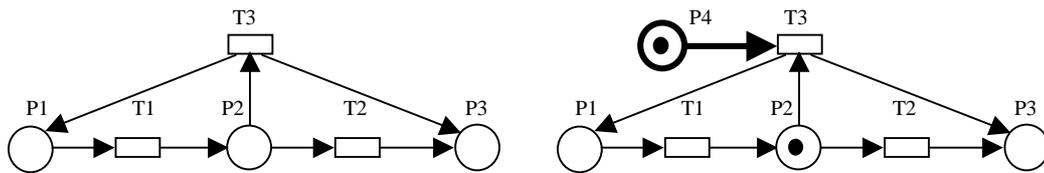


Figure 1.27 : RdP initial ; RdP après P-fusion

Le réseau de la figure 1.30 a été repris. La matrice d'incidence  $W$  du RdP initial s'écrit :

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'équation  $P^T W = 0$  n'a pas de solution, ce RdP est donc sans P-invariant.

La matrice d'incidence  $W_P$  du RdP après T-fusion s'écrit :

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'équation  $P^T W = 0$  a la solution  $P^T = (1,1,1,1)$ . A partir du marquage initial indiqué, la branche de l'arbre de marquage suivante est observée :

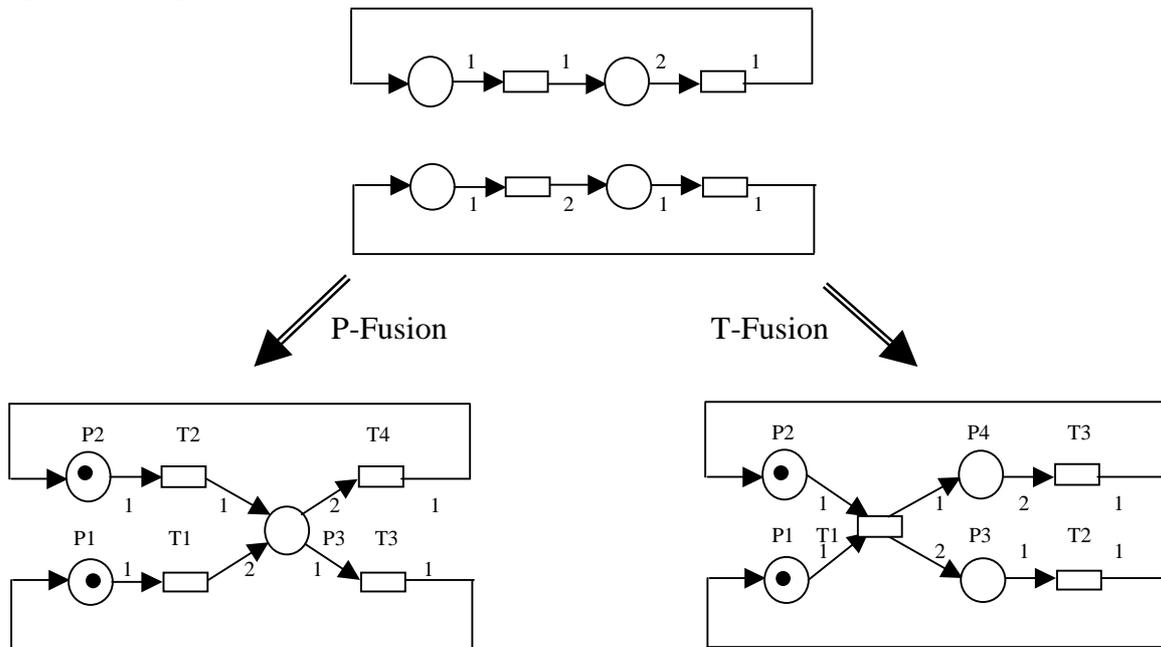
$$(0,1,0,1) \xrightarrow{T3} (1,0,1,0) \xrightarrow{T1} (0,1,1,0) \xrightarrow{T2} (0,0,2,0)$$

On note que l'équation de marquage  $m(P1) + m(P2) + m(P3) + m(P4) = 2$  est vérifiée quel que soit le marquage dans cette branche.

### Corollaire 2

Deux réseaux de Petri ne comportant pas de P-invariant peuvent, par leur T-fusion, donner un réseau de Petri possédant un P-invariant

Le double exemple de la figure 1.28 illustre les corollaires 1 et 2 à partir des deux mêmes réseaux (empruntés aux figures 1.19 et 1.20).



**Figure 1.28 : a) Deux réseaux de Petri initiaux b) P-fusion de ces deux réseaux c) T-fusion de ces deux réseaux.**

Les deux réseaux de Petri initiaux n'ont ni P-invariant, ni T-invariant (l'expression (5) n'est pas vérifiée). Le réseau de Petri de la figure b comporte 1 T-invariant et zéro P-invariant.

$$S = (1, 1, 1, 1)$$

Ainsi, à partir du marquage initial proposé figure 28b, l'une des branches suivante de l'arbre est obtenue :

$$(1,1,0) \xrightarrow{T1} (0,1,2) \xrightarrow{T2} (0,0,3) \xrightarrow{T3} (1,0,2) \xrightarrow{T4} (1,1,0)$$

Cette séquence  $\langle T1, T2, T3, T4 \rangle$  est bien une séquence de réinitialisation.

Le réseau de Petri de la figure 32c comporte 1 P-invariant et zéro T-invariant.

$$P^T = (1,2,1,1)$$

A partir du marquage initial proposé figure 32c, l'une des branches suivante de l'arbre est obtenue :

$$(1,1,0,0) \xrightarrow{T1} (0,0,2,1) \xrightarrow{T2} (1,0,1,1) \xrightarrow{T2} (2,0,0,1)$$

Pour chacun de ces quatre marquages, la relation suivante peut être écrite :

$$m(P1) + 2m(P2) + m(P3) + m(P4) = 3$$

Pour ces deux réseaux, l'expression (4) est vérifiée.

## 5.4 Exemples d'application

Voici quelques exemples illustrant les résultats obtenus pour les expansions :

Dans le RdP1, le sous-ensemble R2 est une T-expansion de R1, et le sous-ensemble R1 est une P-expansion de R2. La présence de ce lien ne perturbe donc pas l'existence du P-invariant éventuel de R1, alors que ce même lien perturbe l'existence du P-invariant de R2.

Dans le RdP2, le sous-ensemble R2 est une P-expansion de R1, et le sous-ensemble R1 est une T-expansion de R2. La présence de ce lien perturbe l'existence du P-invariant éventuel de R1, alors qu'il ne perturbe pas l'existence du P-invariant de R2.

Dans le RdP3, les sous-ensembles R1 et R2 sont des T-expansions l'une de l'autre, l'ensemble des P-invariants de chaque structure est donc conservé.

Cet assemblage peut également être considéré comme une T-fusion.

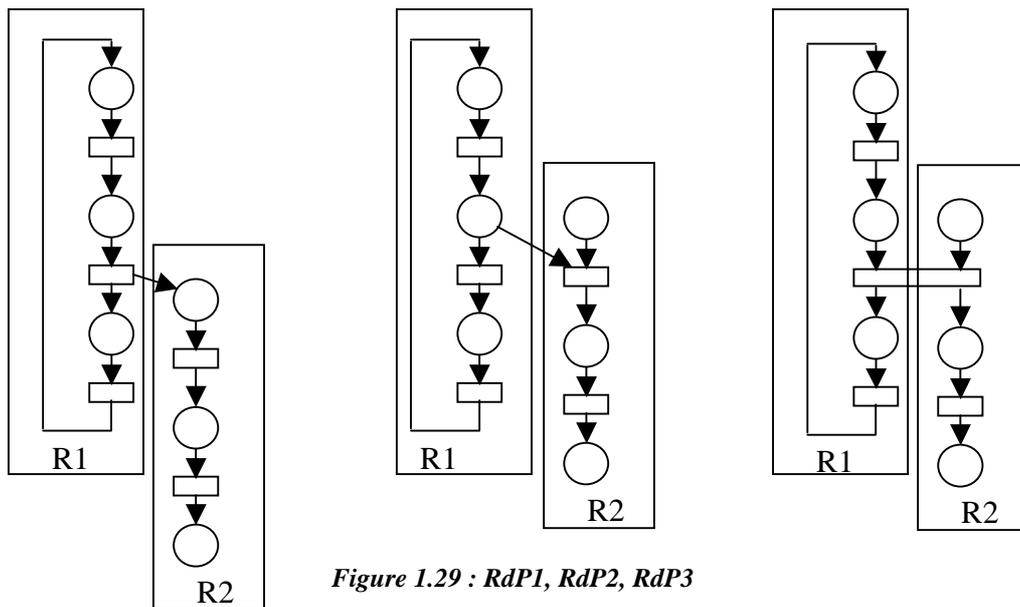


Figure 1.29 : RdP1, RdP2, RdP3

### Les P-Fusions

Soient les deux réseaux de Petri RdPi et RdPj et le réseau de Petri RdP résultant de la fusion de la place P5 de RdPi et P1 de RdPj (la numérotation des places a été effectuée pour une meilleure interprétation des écritures précédentes). Seul un arc du premier réseau et un arc du deuxième comportent un poids différent de 1.

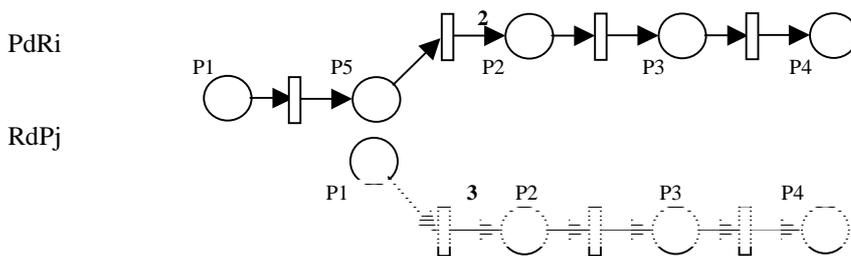


Figure 1.30 a et b

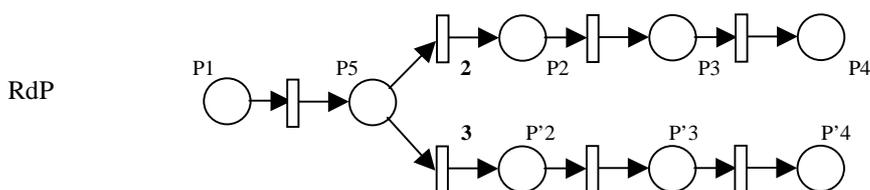


Figure 1.30c

D'après les propositions 6 et 7, le premier réseau de Petri comporte un P-invariant et un seul :  $P_1^T = (2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2)$ . Il est indispensable de bien suivre la numérotation des places pour une bonne interprétation.

Le deuxième réseau de Petri comporte un invariant et un seul :  $P_2^T = (3 \ 1 \ 1 \ 1)$

Ceci permet d'écrire les deux invariants étendus :

$$P_{1e}^T = (2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$P_{2e}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1)$$

D'après la proposition 13, le PPCM concerné est égal à 6. Il vient, pour le réseau final :

$$P^T = (6 \ 3 \ 3 \ 3 \ 6 \ 2 \ 2 \ 2)$$

#### Les T-Fusions

Soient les deux réseaux de Petri RdPi et RdPj et le réseau de Petri RdP résultant de la fusion de la transition T4 de RdPi et T1 de RdPj (la numérotation des places a été effectuée pour une meilleure interprétation des écritures précédentes).

D'après les propositions 8 et 9, le premier réseau de Petri (figure 1.31a) comporte un T-invariant et un seul :  $T_1 = (1 \ 2 \ 2 \ 1)$ . Le deuxième réseau de Petri comporte un T invariant et un seul :  $T_2 = (1 \ 3 \ 3)$

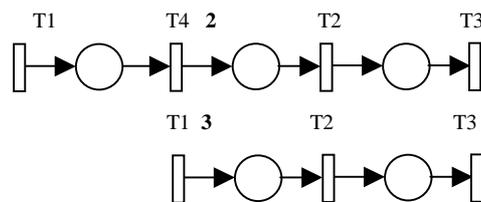


Figure 1.31 a et b

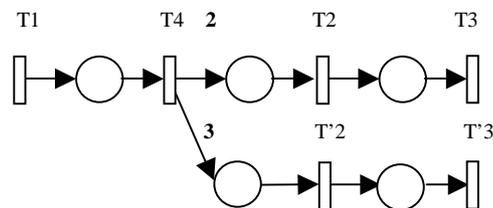


Figure 1.31 c

Ceci permet d'écrire les deux précédents invariants étendus :

$$T_{1e} = (1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0) \quad T_{2e} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 3)$$

D'après la proposition 15, le PPCM concerné  $\mu$  est égal à 1, ce qui permet d'écrire le nouveau T-invariant résultant des deux premiers :

$$T = (1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 3 \ 3)$$

# CHAPITRE II

## Modélisation pour les systèmes de production

### 1 Le partage de ressource

#### 1.1 Introduction

Le partage de ressources est un thème récurrent dans les systèmes de production. Les réseaux de Petri sont particulièrement bien adaptés à sa représentation. Les domaines d'application sont nombreux dans divers domaines et la notion de ressource partagée est présente sous plusieurs arguments en systèmes de production. Il peut s'agir d'un robot ou de tout autre outil utilisé sur plusieurs machines ou sur plusieurs lignes de fabrication. La représentation d'un problème donné se complexifie lorsque le partage de ressources multiples, à utiliser selon certaines précédences doit être représenté. L'utilisation synchrone ou asynchrone de certaines de ces ressources nécessite le développement de modèles variés. Dans les systèmes réels, toute ressource est partagée selon un protocole prédéfini. Ainsi des priorités fixes d'utilisation de la ressource ou des cycles d'utilisation de celle-ci sont définis.

Le terme d'ordonnancement est très exploité dans les domaines de la production selon une définition bien précise. Divers types de problèmes sont classés dans cette rubrique. Les réseaux de Petri apportent leur contribution dans un but de clarification des énoncés et de choix de solutions.

Ce chapitre permet la mise en application des résultats du premier chapitre dans ces domaines. La méthodologie est de construire des modèles à partir d'éléments simples aux caractéristiques connues pour élaborer des modèles plus complexes et en extraire les caractéristiques à partir de celles des éléments de base.

#### 1.2 Quelques modélisations de base

*Sites machine*

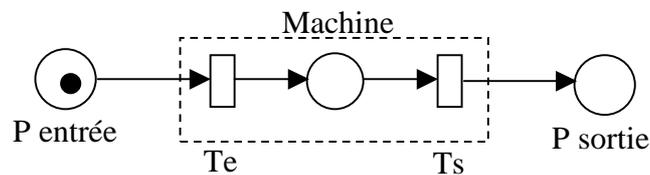


Figure 2.1 : Modélisation d'un site machine

Le modèle de la figure 2.1 représente le site d'une machine représentant un stock d'entrée *Pentrée*, l'emplacement de la machine proprement dite, entre les transitions *Te* et *Ts*, puis le stock de sortie *Psortie*.

Dans un deuxième temps, la validation de *Te* est conditionnée à la présence d'une ressource, par exemple un robot dont la disponibilité est nécessaire pour approvisionner la machine. Le modèle se complète alors comme suit (figure 2.2).

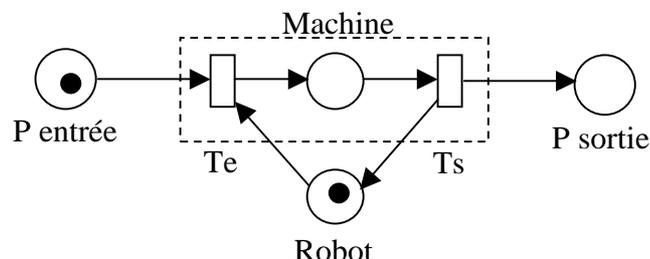


Figure 2.2 : Site machine nécessitant une ressource

Afin de représenter le partage d'un robot par deux machines, le modèle de la figure 2.3 est développé. Les sites des deux machines y sont représentés, constitués tous les deux d'une place d'entrée (stock d'entrée), d'une place de sortie (stock de sortie) et d'une place *machine* proprement dite.

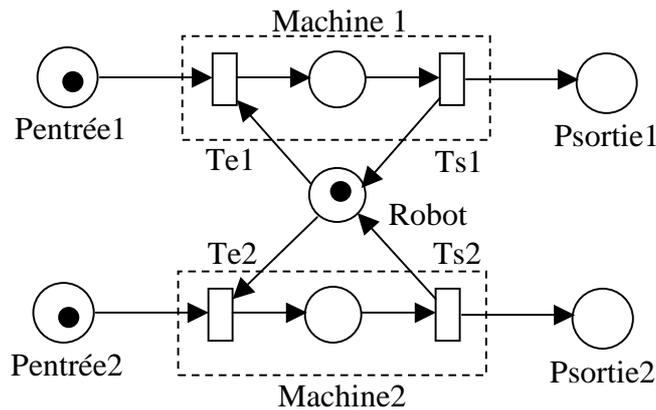


Figure 2.3 : Site deux machines en concurrence

#### Partage complexe de ressources

Une ressource peut également être partagée entre  $n$  utilisateurs, comme le montre la figure 2.5. Ici, plusieurs consommateurs sont soit occupés, utilisant la ressource, soit libres. Ce réseau de Petri est conflictuel. En effet, si aucune règle de partage n'est imposée, la ressource libre peut être dédiée à tout moment à chaque consommateur.

Le RdP possède  $n+1$  P-invariants signifiant :

*Chaque consommateur est soit libre, soit occupé* ( $n$  P-invariants)

*La ressource est soit libre, soit utilisée par un consommateur* (1 P-invariant).

Ce réseau de Petri comporte  $n$  T-invariants signifiant : *Lorsqu'un consommateur prend la ressource et la restitue, le système revient à sa position d'origine.*

La loi (4) est encore une fois bien vérifiée.

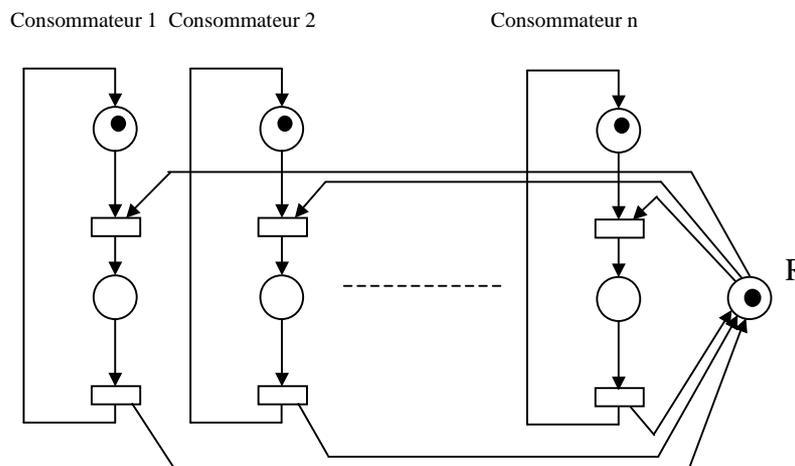


Figure 2.4 : Ressource partagée entre de multiples consommateurs

Ce réseau peut par exemple représenter le partage d'un robot entre plusieurs entités sur un site de production, ou encore le partage d'un espace mémoire entre plusieurs processeurs.

#### L'exemple des philosophes

L'étude d'un modèle très utilisé en pédagogie, le problème dit *des philosophes*, est maintenant présentée :

#### Cahier des charges :

Quatre philosophes sont rassemblés autour d'une table et peuvent être dans deux états fondamentaux : *penser* ou *manger*. Ils mangent avec des baguettes qui sont au nombre de quatre en tout, posées sur la table, chacune entre deux philosophes qui peuvent en disposer. Deux baguettes sont nécessaires à chaque philosophe pour manger : la première sera saisie à sa gauche, la deuxième à sa droite. Lorsqu'il a fini de *manger*, il pose

d'abord une baguette à sa gauche, puis une à sa droite. Un philosophe est en état de *penser* lorsqu'il a les mains libres.

**Analyse du modèle :**

La figure 2.5 traduit ce cahier des charges : chaque boucle verticale représente l'activité d'un philosophe.

Les places P13, 23, 33, 43 représentent l'état des philosophes entrain de *penser*. Chaque philosophe n'a plus de baguette en sa possession (il vient d'en déposer une à sa droite).

Chacune des places P14, 24, 34, 44 évoque le fait qu'un philosophe a pris la baguette située à sa gauche.

Chacune Les places P11, 21, 31, 41 évoque le fait qu'un philosophe a pris la baguette située à sa droite et qu'il est en état de *manger*.

Chacune des places P12, 22, 32, 42 évoque le fait qu'un philosophe a reposé une baguette à sa gauche.

Les places R12, 23, 34, 41 témoignent de la disponibilité des ressources (baguettes).

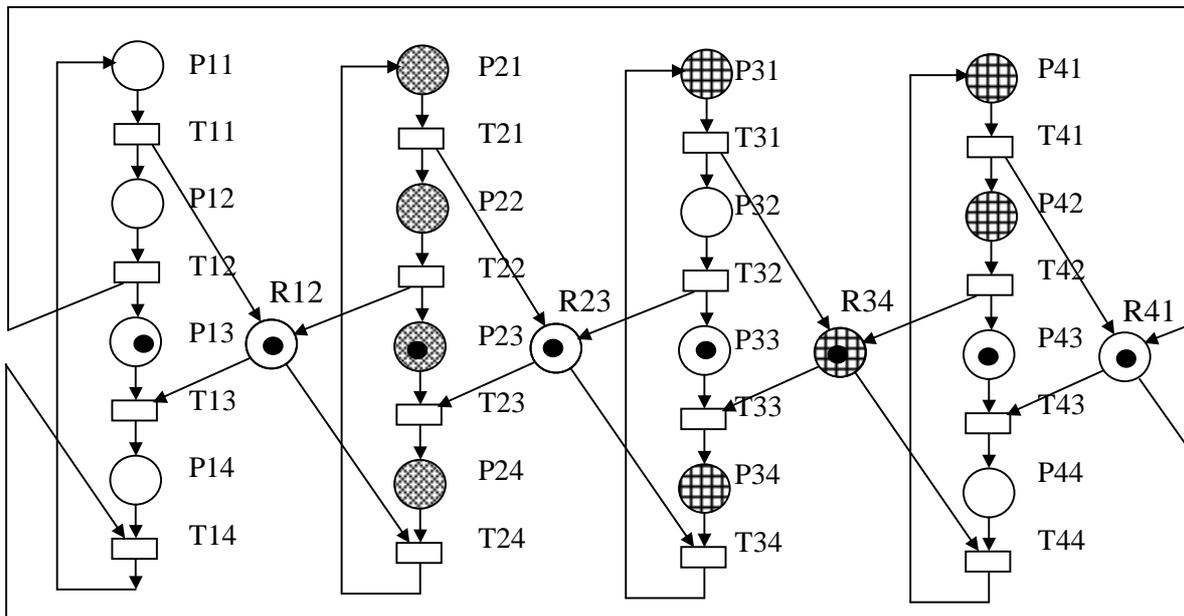


Figure 2-5 : Modèle des philosophes

Ce réseau de Petri possède 20 places et 16 transitions. L'étude complète révèle que le nombre de P-invariants de base est de 8 et que le nombre de T-invariants de base est de 4. L'équation (4) du chapitre I est vérifiée.

L'étude de ces invariants permet de se prononcer sur la vivacité et la *bornitude* de ce réseau.

**Modification du cahier des charges**

Afin d'éviter cette situation, il peut être décrété que chaque philosophe prend simultanément les deux baguettes qui lui sont dédiées. Les modèles des figures 2.6 qui sont strictement équivalents, décrivent ce nouveau cahier des charges.

Les invariants de ce réseau de Petri sont ainsi dénombrés :

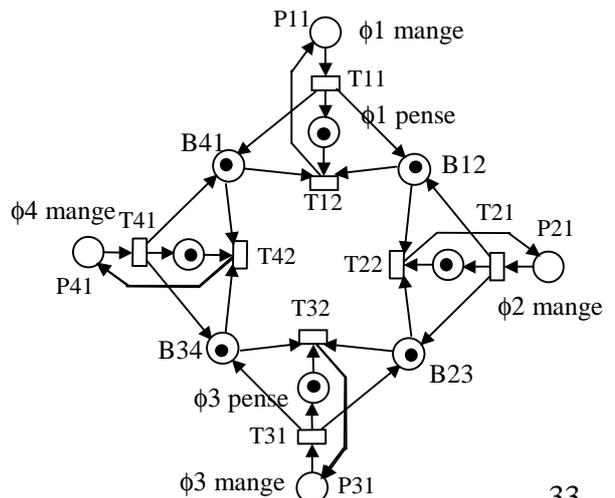
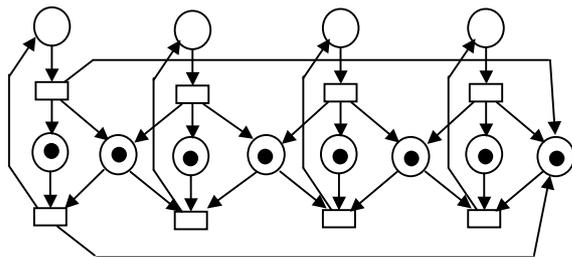


Figure 2.6 : Modèles des philosophes sans blocage

Ces réseaux de Petri sont fortement conflictuels, chaque philosophe étant en conflit avec son voisin de gauche et de droite. Ainsi, deux philosophes (qui se font face) peuvent monopoliser les ressources au détriment des deux autres qui se font également face. Il faudra alors imaginer des solutions pour lever ce conflit. La figure 2.7 représente une solution de protocole, par ajout de 4 places complémentaires (boucle centrale bleue, dite de *protocole*).

Ici, chaque consommateur ne peut pas bénéficier des ressources plus de deux fois consécutives sans que les autres consommateurs les aient utilisées. La présence de deux jetons (et non un seul) dans la boucle de protocole assure la possibilité d'optimiser l'utilisation des ressources (deux utilisateurs simultanément).

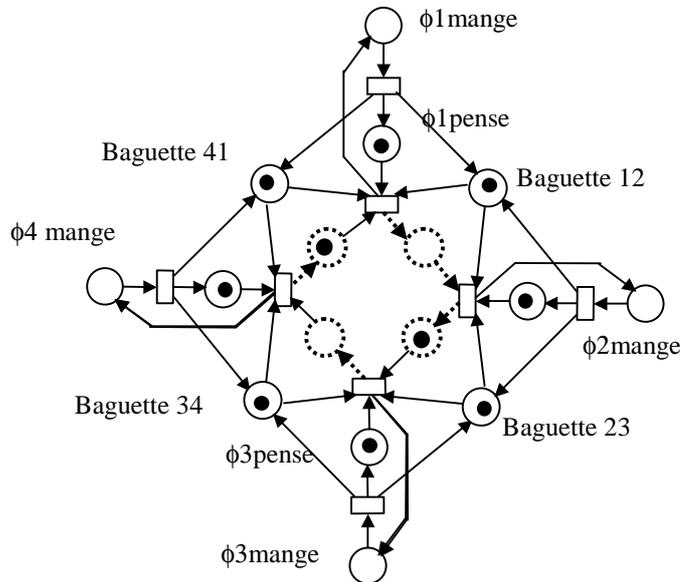


Figure 2.7 : Protocole de partage de ressource

### 1.3 Le séquençement simple, le séquençement complexe

#### Principes de base

La modélisation de processus industriels (au sens large) nécessite bien souvent la représentation de phénomènes séquentiels (par nature discrets). On représente alors une succession d'opérations, selon un principe souvent répétitif, générant ainsi une séquence plus ou moins longue. Ces problèmes peuvent à la fois se retrouver dans le domaine de l'électronique, par l'étude de séquences binaires plus ou moins complexes, dans le domaine de la production, par l'étude de la modélisation de gammes de production ou encore, dans des domaines plus variés, par l'étude de séquences pseudo-aléatoires. Les séquençements peuvent ainsi être classés de la façon suivante :

Séquences simples, séquences simples avec *attracteurs*, séquences complexes, séquences pseudo-aléatoires.

De manière générale, une succession périodique de nombres entiers est appelée *séquence*. L'ensemble de ces nombres appartient à une structure de groupe fini.

Une séquence pour laquelle chaque nombre ne se retrouve qu'une seule fois par période (diagramme 1) est appelée *séquence simple*. Le diagramme 1 présente une séquence de période 5 qui se note par convention :

$$S = \langle 02413 \rangle$$

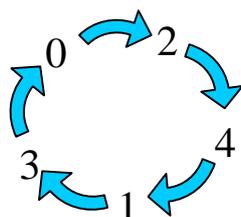


Diagramme 1. Séquence simple

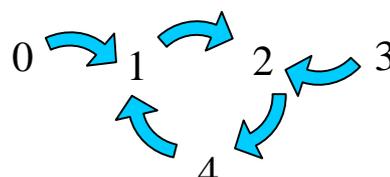


Diagramme 2. Séquence simple avec attracteur

Une séquence simple pour laquelle certains éléments peuvent être l'aboutissement d'une succession d'autres éléments appartenant au même groupe est appelée *séquence simple avec attracteur*.

Chaque élément n'apparaît qu'une seule fois dans le diagramme. La séquence évoquée diagramme 2 se note par convention :

$$S = \langle 124 \rangle, 3 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 1$$

Dans cet exemple, l'attracteur est la partie de ce graphe constituée de la boucle  $\langle 124 \rangle$ .

Les séquences débutant par 3 ou 0 comportent nécessairement un régime transitoire (ici à un seul élément) suivi d'un régime permanent (représenté par l'attracteur évoqué précédemment).

Une séquence dans laquelle apparaît plusieurs fois un ou plusieurs nombres au cours d'une période est appelée *séquence complexe*, par exemple :

$$S = \langle 0124213040 \rangle$$

où ces nombres se succèdent périodiquement dans cet ordre.

Une séquence de ce type, de période *suffisamment longue* pour permettre, en fonction de l'application, la simulation de séquence aléatoire de nombres est appelée *pseudo-aléatoire*. En particulier, si le groupe est le groupe binaire constitué des deux éléments 0 et 1, il s'agit des séquences binaires pseudo-aléatoires, très exploitées dans le domaine de l'électronique ou lors d'un choix exclusif binaire.

Par ailleurs, une *séquence pseudo-aléatoire* doit être vue comme le régime permanent d'une *séquence simple avec attracteur*. Le régime transitoire, de durée plus ou moins longue, est la succession d'états rencontrés depuis l'état initial jusqu'à l'arrivée à l'un des états du régime permanent (parmi les éléments de l'attracteur). Ce sont les notions de *régime transitoire* et *régime permanent* de la physique classique.

Chaque séquençement, classé dans l'une de ces précédentes rubriques, peut être associé à un réseau de Petri plus ou moins complexe dont la difficulté d'élaboration dépendra directement de la complexité de la séquence.

Ce dernier réseau de Petri est ensuite intégré à un réseau de Petri plus étendu, modélisant l'ensemble du système de production à représenter.

#### Modèles de séquenceurs simples

Soit le modèle de la figure 2.4 précédente, évoquant le partage d'une ressource commune entre plusieurs utilisateurs, ceci sans protocole. Ce réseau est conflictuel, puisqu'il ne gère pas le partage de la ressource. Le conflit apparaît à la sortie de la place R d'où sont issus autant d'arcs qu'il y a de consommateurs.

Il suffit maintenant de compléter le modèle par un séquenceur pour lever le conflit et distribuer la ressource à chacun selon l'ordre choisi. Le séquençement est ici (figure 2-8) un séquençement *simple* délivrant la séquence  $S = \langle 0123 \dots n \rangle$

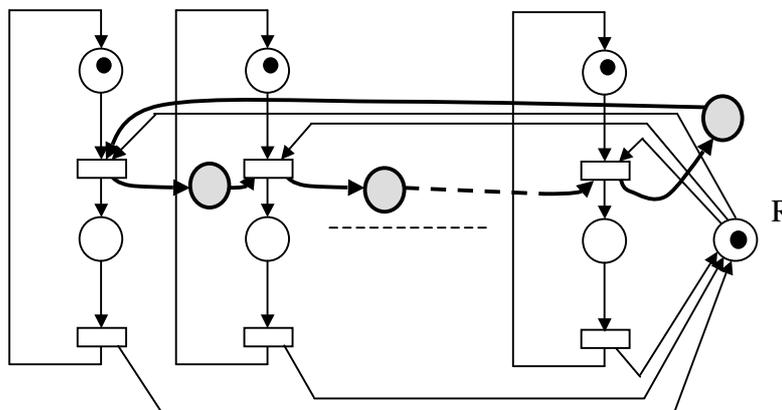


Figure 2.8 : Partage de ressource avec séquenceur

Le modèle de la figure 2-4 est ainsi complété par une boucle séquenceur (en gras sur la figure 2.8). Ce modèle est analysable et l'outil algébrique classique est utilisé pour le caractériser (détermination des invariants).

La figure 2.9 présente la solution d'un problème équivalent consistant à autoriser tour à tour la prise en charge d'objets par une ligne de production parmi cinq. Le séquenceur a été représenté sur la partie inférieure du modèle. Il s'agit ici d'un séquenceur *simple*.

En fait, chaque ligne (assimilable à un consommateur) traite des objets de manière strictement équitable parmi l'ensemble des lignes selon un cycle périodique.

Ce type de *séquenceur simple* ne pose pas de problème majeur pour la modélisation : Il suffit de modifier les liaisons en sortie des transitions T0 à T4 pour obtenir une autre séquence simple. A chaque réseau de connexions va correspondre une séquence simple déterminée :

Si le consommateur  $i$  a comme successeur le consommateur  $j$ , il s'agit de relier par un arc, la transition  $T_i$  à la place  $P_j$ , pour tout  $i$  et  $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Le jeton situé initialement dans le séquenceur (marquage initial représenté sur la figure), parcourt une boucle en fait constituée de 20 places et 20 transitions et constituant l'essentiel du réseau. Cette boucle définit un P-invariant signifiant que ce jeton se trouve nécessairement dans l'une de ces places et de manière unique.

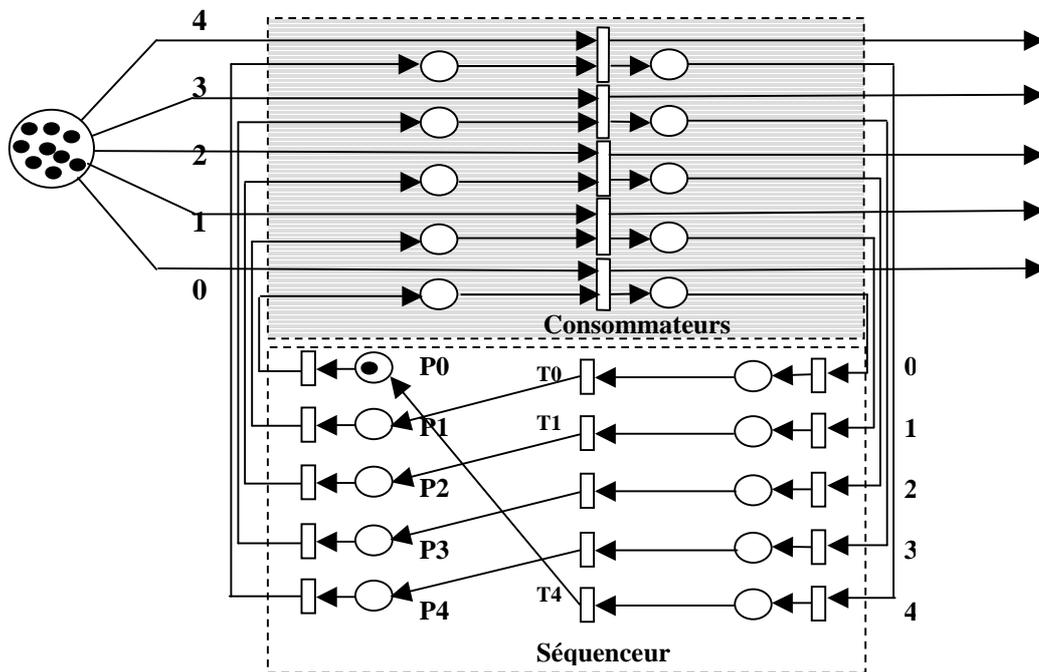


Figure 2.9 : Partage de tâches entre cinq lignes de production en séquence simple

#### Modèles de séquenceurs complexes

L'élaboration de séquenceurs complexes est plus difficile que la mise en place des précédents séquenceurs : une méthodologie, qui n'est pas présentée ici, est développée pour élaborer le réseau de Petri correspondant à une séquence. Il a été démontré que toute séquence complexe peut être modélisée par un réseau de Petri. La méthode consiste à établir, par un algorithme, la matrice d'incidence du séquenceur complexe.

Quoi qu'il en soit, il reste souvent possible de construire le modèle d'une séquence complexe de manière empirique, à l'aide d'un peu d'expérience.

Quelques modèles de séquenceurs complexes sont représentés ici. Ces séquenceurs permettent de partager la ressource entre plusieurs utilisateurs selon des protocoles plus élaborés que précédemment. Il faut noter que le modèle croît très vite en dimension selon la complexité de la séquence choisie, bien qu'il n'y ait pas de lien direct entre complexité de la séquence et densité du réseau.

Les exemples qui suivent montrent bien que la solution est rapidement complexe dès qu'il s'agit d'entreprendre la modélisation de séquences un peu originales.

Le séquenceur présenté sur les figures 2.10 a et b délivre la séquence notée  $S = \langle 0 \ 0 \ 1 \rangle$  autorisant l'avancée sur la ligne 0 deux fois plus souvent que sur la ligne 1.

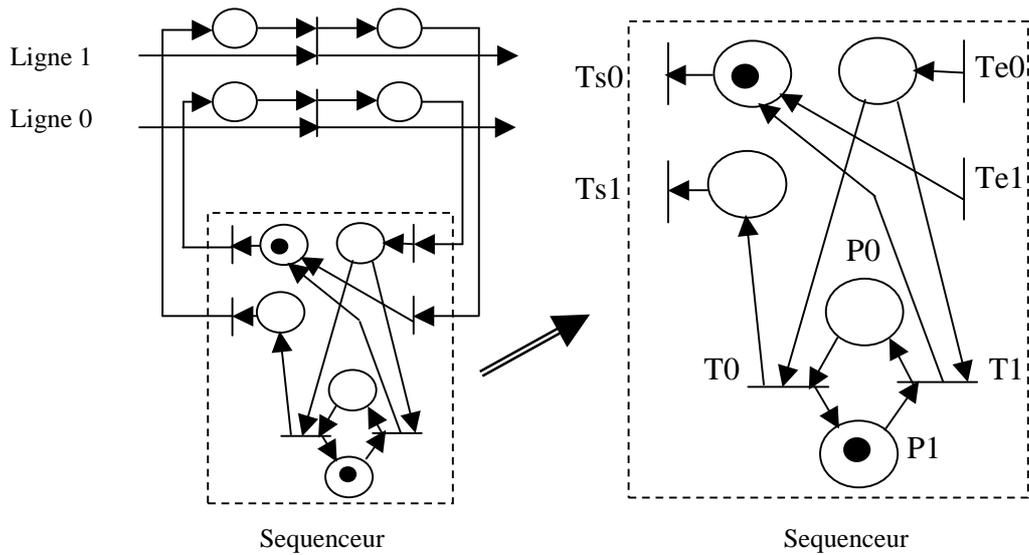


Figure 2.10 a : Séquenceur sur les lignes

Figure 2.10 b : Séquenceur <001>

**Analyse :**

Sur ces figures, le séquenceur (2.11b) a été extrait du modèle initial (2.11a). L'équation suivante, établie à partir de l'équation 4 du chapitre I, peut être écrite en comptant le nombre de places et de transitions :

$$\text{Dim Ker } W_G - \text{Dim Ker } W_D = \text{Card}(P) - \text{Card}(T) = -1$$

Il y a donc  $n$  P-invariants et  $n+1$  T-invariants.

Les places de la partie haute du modèle ne peuvent participer à un P-invariant, étant contenues dans des chaînes T-T (voir chapitre I). Il peut donc être admis qu'il n'y a ici qu'un seul P-invariant, concernant les places P0 et P1 et donnant l'équation :

$$m(P0) + m(P1) = 1$$

Il en résulte que  $n = 1$  et qu'en conséquence, ce réseau possède 2 T-invariants :

La séquence de franchissement  $S_1 = \langle \text{Te1}, \text{Ts0} \rangle$

La séquence de franchissement  $S_2 = \langle \text{Te0}, \text{T1}, \text{Ts0}, \text{Te0}, \text{T0}, \text{Ts1} \rangle$

Ces deux séquences assurent la réinitialisation du marquage du réseau. Ceci peut être confirmé, s'il en est besoin par le calcul en considérant la matrice d'incidence du réseau et le vecteur des séquences de tir S1 et S2. La preuve est alors atteinte en constatant que l'on a bien les équations :

$$W S_1 = 0 \quad \text{et} \quad W S_2 = 0$$

Lorsque le réseau de Petri du séquenceur est intégré dans la structure globale (figure 2.11 a), l'étude des invariants est à reconsidérer. En effet, il peut maintenant être établi que :

$$\text{Dim Ker } W_G - \text{Dim Ker } W_D = \text{Card}(P) - \text{Card}(T) = +1$$

Ce réseau présente en effet 2 P-invariants, le premier est relatif aux places P0 et P1, qui est la conservation de celui du réseau séquenceur. Le second est relatif à toutes les autres places où circule un jeton et un seul, quelles que soient les circonstances.

Le T-invariant est le tir de toutes les transitions une seule fois, exceptées les transitions Ts1, Te1 et la transition propre à la ligne 0 qui sont tirées 2 fois, ceci réalisant le cycle choisi initialement dans le cahier des charges.

A titre d'exemples, les figures 2.12 a et b présentent les modèles de deux autres séquenceurs délivrant respectivement les séquences

$$S1 = \langle 0011223344 \rangle \quad \text{et} \quad S2 = \langle 01020304 \rangle$$

Bien entendu, ces deux modèles peuvent figurer des systèmes industriels réels et il est maintenant possible d'imaginer d'autres cahiers des charges plus ou moins exigeants qui auront toujours une solution en terme de modélisation.

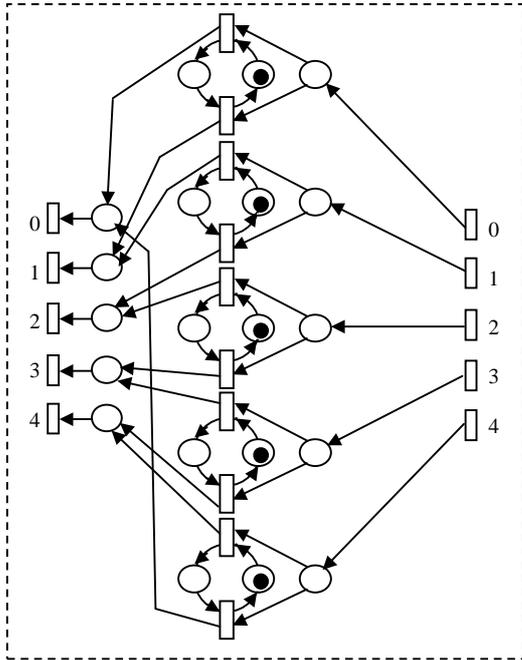


Figure 2.11 : Séquenceur S1

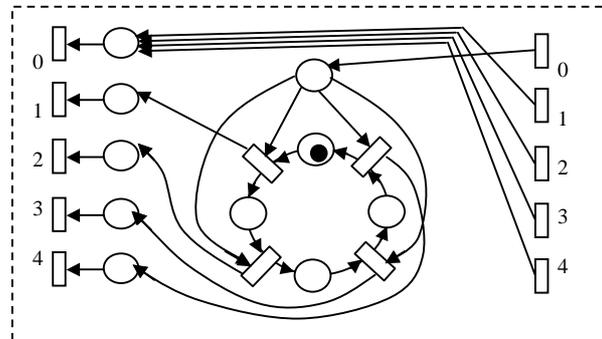


Figure 2.12 : Séquenceur S2

Ces deux modèles sont, au même titre que le précédent, à intégrer dans un modèle représentant plusieurs lignes de production (ici au nombre de 5) se partageant une charge de travail selon des protocoles définis respectivement par les séquences S1 et S2. Ces deux derniers modèles peuvent se substituer au séquenceur de la figure 2.9.

## 2 Quelques éléments pour la construction de modèles

### 2.1 Aiguilleur d'objets

En corollaire des développements précédents, il est également nécessaire de définir l'accessoire complémentaire qu'est l'aiguilleur.

La figure 2.13 représente la modélisation d'un aiguilleur. Les jetons arrivent sur la place E et sont orientés vers la sortie S1 ou la sortie S2 selon la commande exercée par C1 ou C2 qui sont des occurrences externes. Cette fonction peut être généralisée à  $n$  sorties pour un objet en entrée.

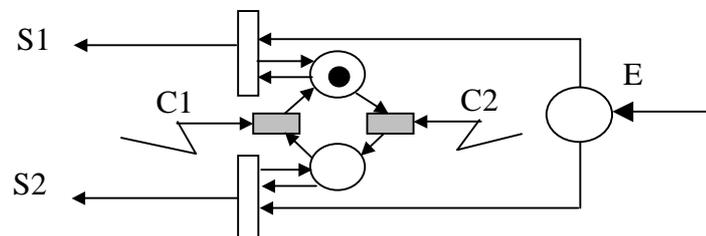


Figure 2.13 : Aiguilleur à deux sorties

Ce nouveau modèle est issu de la gamme des séquenceurs. Cependant, les occurrences externes rajoutent la notion de contrôle de l'orientation des jetons arrivant dans la place E. L'aiguillage de ces jetons vers les sorties S1 ou S2 est maintenant conditionnée par ces occurrences.

Il doit être noté que ce réseau n'est pas pur (chacune des deux places centrales est reliée à deux transitions par des arcs bidirectionnels). Ainsi, il n'est pas réellement possible de parler de matrice d'incidence d'un tel réseau. Les transitions considérées restituent ainsi spontanément les jetons qui les franchissent aux places émettrices.

Cette dernière considération suggère que l'orientation des jetons vers l'une ou l'autre des sorties n'est pas reconsidérée tant que l'occurrence idoine n'apparaît pas. Ainsi, si le marquage initial proposé est considéré, les jetons sont aiguillés vers la sortie S1 tant que l'occurrence C2 n'est pas avérée. A noter que les occurrences C1 qui pourraient apparaître n'ont alors aucune influence sur le fonctionnement, tant que l'occurrence C2 n'est pas apparue.

Après l'apparition de C2, les jetons sont orientés vers la sortie S2. Un comportement dual au précédent est alors observé.

L'analyse d'un tel réseau est rendue délicate de par le fait qu'il n'est pas pur. Il serait possible d'en envisager une étude partielle en déterminant sa matrice d'incidence qui correspond exactement à la matrice d'incidence du même réseau où seraient supprimés les arcs doubles. Un P-invariant concernant les deux places centrales serait alors clairement mis en évidence. Une telle démarche n'est en général pas abordée dans ce type de réseau.

Un tel modèle présente l'avantage d'intégrer des occurrences externes pouvant représenter des actions délibérées de changement d'aiguillage d'objets sur une chaîne de fabrication. Ces occurrences peuvent par ailleurs provenir d'un autre sous-modèle.

## 2.2 Mesure de flux absolu

Sur les chaînes de production, il est souvent nécessaire d'évaluer les flux. Il s'agit alors (figure 2.14a) de comptabiliser les jetons qui ont franchi une transition du modèle et d'émettre un jeton lorsqu'un certain seuil  $n$  de flux sera ainsi constaté (figure 2.14b). Il peut par ailleurs être imaginé une remise à zéro du marquage de cette place après un certain délai, réalisée par une occurrence externe.

Ceci est réalisé très simplement, comme le révèle cette figure. C'est un exemple où une information est prélevée sans pour autant perturber le système initial. De ce point de vue, seule une intervention au niveau d'une transition est envisageable a contrario d'une intervention sur une place qui capturerait un jeton.

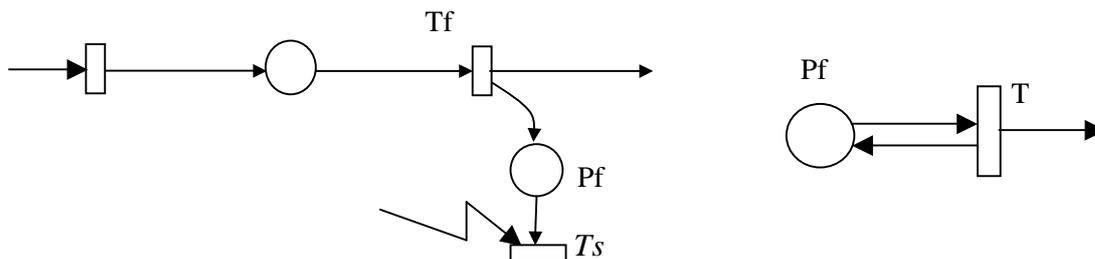


Figure 2.14 a : Mesure de flux absolu Figure 2.14 b : prélèvement d'information

Le plus délicat à réaliser est ensuite la captation de l'information dans la place Pf sans destruction de cette information. Cette place Pf contient en effet l'information de quantité de jetons ayant antérieurement circulé sur la ligne.

Pour capter cette information sans destruction, il n'y a d'autre moyen que de restituer le jeton après l'avoir capté. Autrement dit, il s'agit d'utiliser un couple *place-transition* uni par un arc bidirectionnel (figure 2.14 b). Il s'agit, pour ce problème de fusionner les deux places Pf des figures 2.14 a et b.

L'utilisation d'une cellule telle que celle de la figure 2.14 b comporte deux inconvénients :

En premier lieu, cette utilisation a pour conséquence que le réseau de Petri est non pur.

Par ailleurs, dans l'idéal théorique, la captation et le retour d'un jeton dans la place Pf est instantané. Or, si un logiciel est utilisé pour la validation ou l'utilisation (simulation, par exemple), cette opération *captation-retour* prend nécessairement un temps d'horloge système, ce que le concepteur doit considérer pour la synchronisation des événements liés au modèle.

## 2.3 Mesure de flux relatif

Par ailleurs, du point de vue de l'application, il est souvent intéressant de pouvoir comparer deux flux relatifs mesurés sur deux lignes de production ou encore le flux relatif observé à deux niveaux sur une même ligne de production.

La comparaison de deux ou plusieurs flux sur des lignes différentes du site en temps réel permet de réajuster en amont le débit d'objets en fonction du cahier des charges en vigueur. Ainsi, la notion de régulation

des flux est abordée. Le réseau de Petri devient un outil d'aide à la décision permettant de faire des choix de conception à partir du modèle et de sa simulation.

La méthode de mesure de flux relatif s'appuie sur le modèle précédent de mesure de flux absolu. Il est question de fusionner deux modèles identiques de flux absolu au niveau de la transition de sortie  $T_s$  (réception de l'information sur les flux) pour obtenir une mesure du flux relatif. Ceci est présenté figure 2.15.

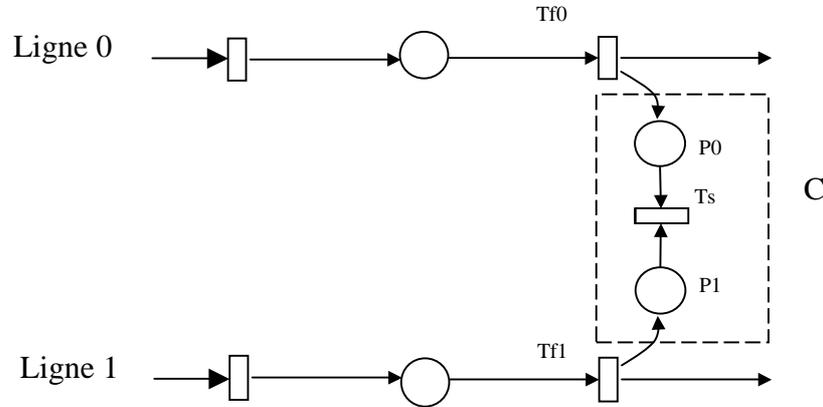


Figure 2.15 : Mesure de flux relatif

Ces deux modèles ayant fusionné par  $T_s$ , le réseau de Petri obtenu est notamment constitué par une cellule  $C$  (pointillés sur la figure 2.15) composée elle-même des places  $P_0$  et  $P_1$  et de la transition  $T_s$ . Cette transition a la particularité d'être reliée aux deux places  $P_0$  et  $P_1$  par des arcs amont sans avoir de liaison avec une place par arc aval.

Le comportement obtenu est alors assez particulier, puisque tout couple de jetons apparaissant dans les places  $P_0$  et  $P_1$ , disparaît spontanément en validant et franchissant la transition  $T_s$ . Cette spécificité permet de mesurer la différence des flux sur les deux lignes.

Soient  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$ , les flux réels sur les lignes 0 et 1, avec par exemple  $\varphi_0 > \varphi_1$ .

**Proposition :**

il vient, à la fin de la mesure :

$$m(P_0) = \varphi_0 - \varphi_1 \quad m(P_1) = 0$$

où  $m(P_0)$  et  $m(P_1)$  sont les marquages respectifs des places  $P_0$  et  $P_1$ .

**Démonstration :**

La cellule  $C$  est un sous-réseau de matrice d'incidence :

$$W = \begin{matrix} & T_s \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Le vecteur  $P^T = (1, -1)$  est un générateur de  $\text{Ker}W_G$ . Il s'ensuit qu'en conséquence, on peut écrire :

$$m(P_0) - m(P_1) = K$$

où  $K$  est une constante  $\in \mathbb{Z}$ .

Si il y a initialement  $\varphi_0$  jetons dans  $P_0$  et  $\varphi_1$  jetons dans  $P_1$  (correspondant à des flux antérieurs), ceci se note :

$$M_i = (\varphi_0, \varphi_1)$$

où  $M_i$  est le marquage initial.

La transition  $T_s$  étant alors validée  $n$  fois, avec  $n = \min(\varphi_0, \varphi_1)$ , le marquage final s'écrit d'après l'expression (1) du chapitre I :

$$M_f = M_i + WS = (\varphi_0, \varphi_1) + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} (\min(\varphi_0, \varphi_1))$$

Soit, par exemple  $\varphi_0 > \varphi_1$ , alors  $\min(\varphi_0, \varphi_1) = \varphi_1$ , il vient :

$$M_f = (\varphi_0, \varphi_1) - (\varphi_1, \varphi_1) = (\varphi_0 - \varphi_1, 0)$$

ce qui vérifie la proposition. Par ailleurs :

$$K = \varphi_0 - \varphi_1$$

Soit, par exemple  $\varphi_0 < \varphi_1$ , alors  $\min(\varphi_0, \varphi_1) = \varphi_0$

Il vient :

$$M_f = (\varphi_0, \varphi_1) - (\varphi_0, \varphi_0) = (0, \varphi_1 - \varphi_0)$$

Ces deux résultats prouvent que la différence des flux circulant sur les deux lignes apparaît dans la place correspondant à la ligne où le flux a été le plus grand.

La figure 2.16 représente une variante de la cellule C (en pointillés). La possibilité de surveiller en temps réel l'équilibre des flux sur les deux lignes est maintenant offerte. Si les deux flux antécédents sont égaux, on a :

$$(1) \quad m(P_{01}) = m(P_{10}) = K$$

$K$  ayant été préalablement choisi (ici  $K = 3$ ).

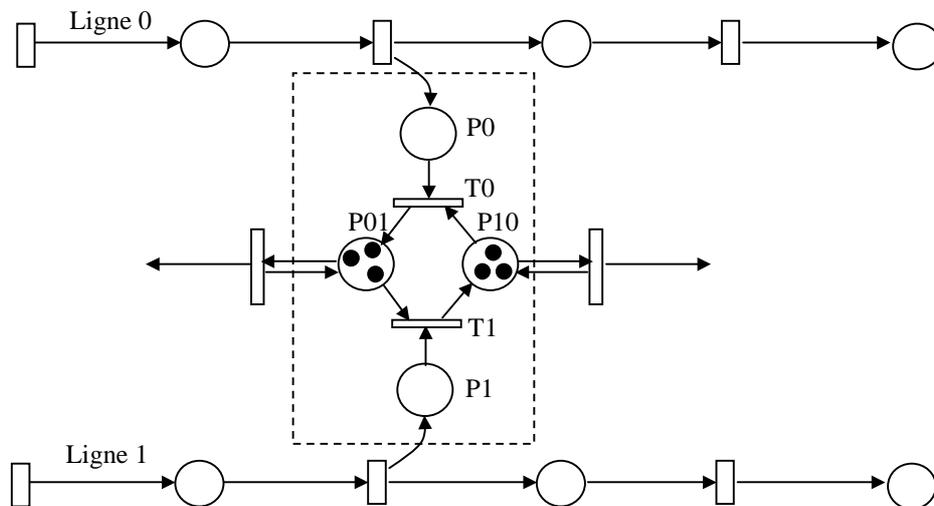


Figure 2.16 : Mesure de flux relatif

La matrice d'incidence de ce sous-réseau s'écrit :

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} T0 & T1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P0 \\ P01 \\ P10 \\ P1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Cette matrice a les caractéristiques suivantes :

$$\text{DimKer}WG = 2$$

les deux vecteurs  $P_1^T = (1, 1, 0, -1)$  et  $P_2^T = (-1, 0, 1, 1)$  forment une base de KerWG

Soit  $P^T = P_1^T + P_2^T = (0, 1, 1, 0)$ , le vecteur obtenu par combinaison linéaire des vecteurs de base et traduisant le fait que la somme des nombres de jetons contenus dans les deux places P01 et P10 regroupées est une constante. Cet invariant se traduit par l'expression :

$$m(P01) + m(P10) = 2K$$

Les deux vecteurs de base permettent par ailleurs d'écrire les équations :

$$m(P0) + m(P01) - m(P1) = K$$

$$-m(P1) + m(P10) + m(P0) = K$$

En supposant maintenant que  $\varphi_0$  jetons aient circulé sur la ligne 0 et  $\varphi_1$  jetons sur la ligne 1 avec une différence de flux telle que :

$$0 \leq \varphi_0 - \varphi_1 \leq K$$

où il est noté  $\varphi_0 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ , différence de flux entre les lignes 0 et 1,

le marquage initial du réseau avant la mesure de flux (c'est-à-dire avant le franchissement des transitions T0 et T1) s'écrit :

$$M_i = (\varphi_0, K, K, \varphi_1)$$

La transition T0 est alors franchissable et donc franchie  $\varphi_0$  fois.

La transition T1 est alors franchissable et donc franchie  $\varphi_1$  fois.

Ceci mène à exprimer le marquage final traduisant la mesure de flux :

$$M_f = (\varphi_0, K, K, \varphi_1) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = (0, K + \Delta\varphi, K - \Delta\varphi, 0)$$

Après la mesure de flux, le marquage des place P01 et P10 est déséquilibré, la place Pij, avec  $i, j \in \{0, 1\}$  voit son marquage varier de  $\varphi_i - \varphi_j$  jetons, ce qui permet de visualiser la différence de flux.

L'équilibre des flux est avéré lorsque l'équation (1) est vérifiée.

Il est à noter que ce modèle ne fonctionne correctement qu'à la condition que :

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \Delta\varphi < K$$

Il est alors indispensable de choisir K suffisamment grand en présumant de la différence de flux possible entre les deux lignes.

Ce modèle présente l'avantage, par rapport au précédent (figure 2.15) de mieux visualiser l'évolution dynamique du flux relatif.

## 2.4 Taux d'occupation des sites

Il est tout aussi important de connaître le taux d'occupation d'une partie du réseau, dans l'objectif de prendre des décisions pour éviter les engorgements ou les carences. Les méthodes de lecture de ces taux d'occupation sont assez intuitives et se décrivent relativement simplement.

Ainsi, à partir du modèle d'un site, possédant  $n$  entrées et  $m$  sorties, il s'agit de rajouter une place reliée à l'entrée et à la sortie souhaitées par deux arcs. Cette place va alors comptabiliser la différence de jetons entrés et de jetons sortis dans le modèle.

#### Les modèles initiaux

Dans l'exemple de la figure 2.17a, la place *Pocc* comptabilise le nombre de jetons sur le site (limité ici à la place P1 munie de son entrée *Te* et de sa sortie *Ts*). Un site peut posséder plusieurs entrées ou plusieurs sorties, ce qui peut nécessiter des structures plus élaborées (figure 2.17 b et c).

Dans chacun de ces exemples, la place *Pocc* comptabilise les jetons contenus sur le site (supposé initialement vide). Le site étant dans cet exemple constitué d'une seule place P1, les deux places P1 et *Pocc* possèdent couramment le même nombre de jetons. Ceux de la place *Pocc* seront utilisés par ailleurs comme source d'information en temps réel.

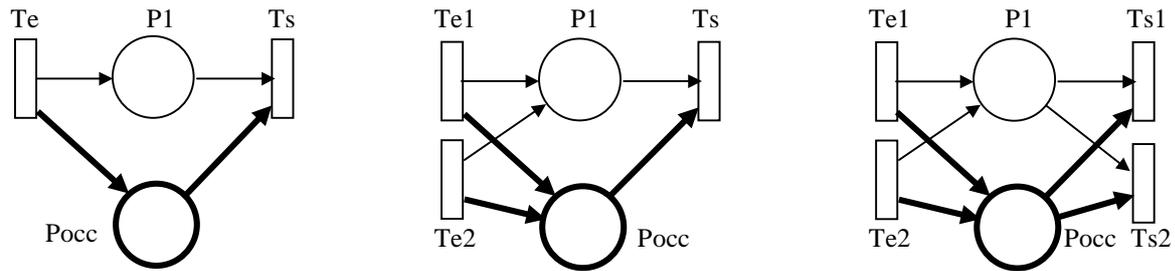


Figure 2.17a : Site une entrée    b : Site deux entrées    c : Site deux entrées, deux sorties

## 2.5 Contrôle de flux

Il s'agit à présent de modéliser un processus d'interdiction d'accès sur l'entrée d'un site au-delà d'une certaine capacité d'accueil de ce site. Il est par exemple question de la capacité d'un stock, à l'entrée d'une machine, où le nombre d'objets doit être limité. Le principe qui suit est emprunté à celui de la *cellule Kanban*.

Le réseau de Petri de la figure 2.18 représente le principe couramment utilisé pour assurer le contrôle de flux sur une partie du modèle (ici les places P2, P3, P4 sont contrôlées dans leur ensemble). L'objectif d'une telle cellule, dite *cellule Kanban* est de limiter le nombre de jetons dans une partie du réseau (représentant ainsi, par exemple la limitation d'objets sur une ligne de fabrication ou dans un stock).

Ainsi, l'entrée sur le site n'est autorisée qu'à la condition qu'il y ait au moins un jeton dans la place *Pcont*. Le marquage de cette place *Pcont* est incrémenté dès qu'un jeton sort du site considéré.

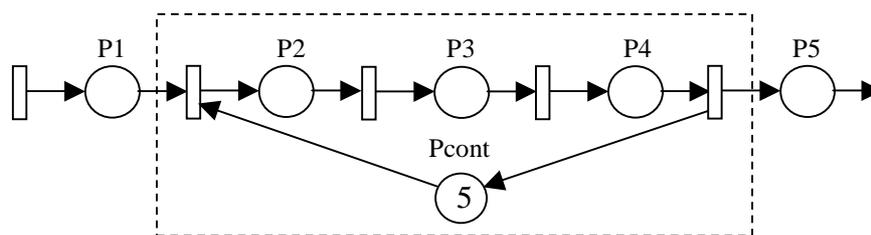


Figure 2.18 : Contrôle de flux d'entrée sur un secteur

Une analyse du RdP délimité par les pointillés sur la figure 2.19 montre qu'il possède un P-invariant :

$$P^T = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

En considérant le marquage initial proposé sur la figure 2.19, ceci permet d'écrire l'équation de marquage :

$$m(P2) + m(P3) + m(P4) + m(Pcont) = 5$$

d'où il est nécessairement déduit :

$$m(P2) + m(P3) + m(P4) \leq 5$$

ce qui montre que le marquage dans l'ensemble de ces trois places est limité à 5 jetons.

Il est ainsi possible de modéliser une contrainte sur l'entrée du secteur, provenant d'une information issue de la sortie de ce même secteur.

Des modèles plus élaborés peuvent être conçus, où plusieurs boucles de contrôle sont imbriquées, ainsi que le représente la figure 2.19. Dans ce modèle, il y a deux limitations de flux sur deux secteurs dont l'intersection n'est pas vide.

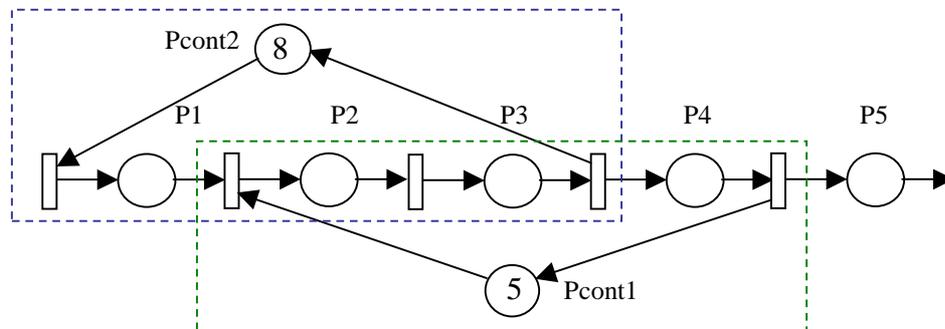


Figure 2.19: Contrôle de flux d'entrée sur deux secteurs imbriqués

Chacun des sous-réseaux délimités par des pointillés engendrent 1 P-invariant (selon ce qui vient d'être dit concernant la figure 2.18). Le reste du modèle est, pour ces deux sous-réseaux, une T-expansion. Il en découle que ces deux P-invariants sont conservés sur l'ensemble du réseau. Ce RdP possède donc deux P-invariants qui aboutissent aux équations de marquage suivantes:

$$m(P1) + m(P2) + m(P3) + m(Pcont2) = 8$$

$$m(P2) + m(P3) + m(P4) + m(Pcont1) = 5$$

Ainsi, il y a une double limitation des quantités de jetons : au plus, 8 jetons sur les places P1, P2, P3, au plus 5 jetons sur les places P2, P3, P4.

Cette méthode de contrôle peut être généralisée sur des problèmes plus complexes où il s'agit de limiter le nombre total d'objets sur un site plus important, par exemple sur deux branches parallèles (figure 2.20). Ainsi, dans cet exemple, le nombre d'objets comptabilisé globalement dans les deux branches du RdP n'excède pas 5.

Un tel réseau (partie en pointillés) a pour vocation de représenter la circulation d'objets dans une structure. Toute transition, lorsqu'elle est franchie, ne délivre qu'un seul jeton. Cette structure est un graphe d'états dont tous les arcs sont pourvus d'un poids de 1.

Ce dernier résultat peut être établi par le développement du calcul de la matrice d'incidence et de la recherche des vecteurs annulateurs à gauche (KerWG) de cette matrice.

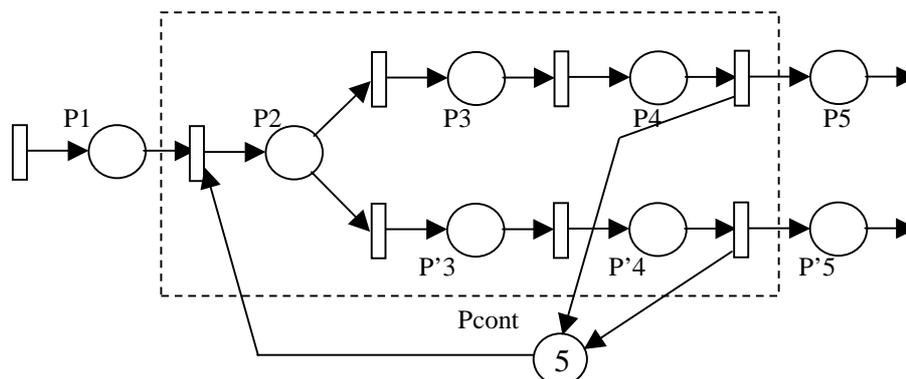


Figure 2.20 : Contrôle de flux d'entrée sur un site à deux branches

Ces deux réseaux possèdent chacun 1 P-invariant :

les places P2, P3, P4, Pcont sont concernées et fournissent l'équation de marquage :

$$m(P2) + m(P3) + m(P4) + m(Pcont) = 5$$

les places P2, P'3, P'4, Pcont sont concernées et fournissent l'équation de marquage :

$$m(P2) + m(P'3) + m(P'4) + m(Pcont) = 5$$

## 2.7 Surveillance de flux

Il s'agit à présent de comptabiliser le nombre de jetons dans une branche donnée de RdP. Le RdP de la figure 2.21 est tel que le nombre de jetons dans la place  $P_s$  est égal au nombre total de jetons dans l'ensemble des places  $P_2, P_3, P_4$ . Il n'y a pas ici de contrôle de flux, mais surveillance de flux. Il n'y a pas de P-invariant (à coefficients positifs).

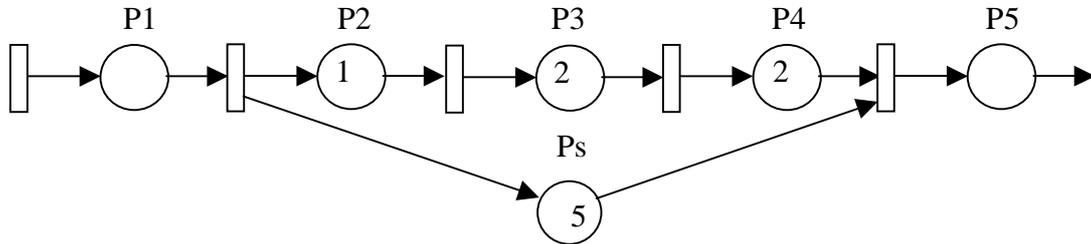


Figure 2.21 : Comptabilisation des jetons sur une ligne

Comme précédemment, le propos peut être généralisé pour des modèles plus complexes (figure 2.22 et 2.23) où sont comptabilisés les nombres d'objets dans certains sous-ensembles du réseau dont le marquage initial est nul.

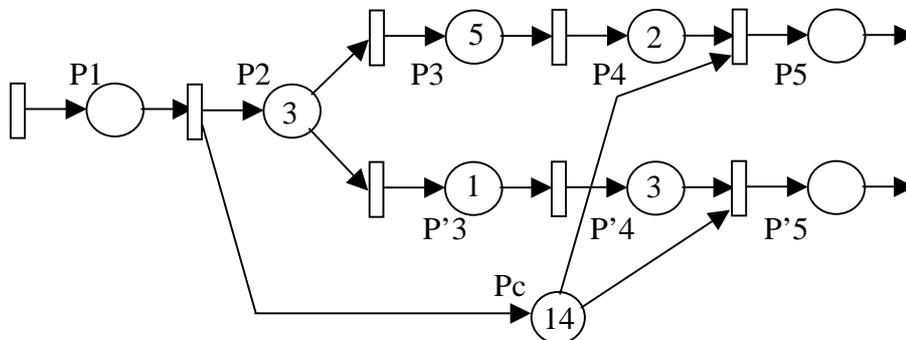


Figure 2.22 : Comptabilisation des jetons sur un site

$$m(P_c) = m(P_2) + m(P_3) + m(P_4) + m(P'_3) + m(P'_4),$$

ce qui n'est pas une équation résultant d'un P-invariant (à coefficients positifs).

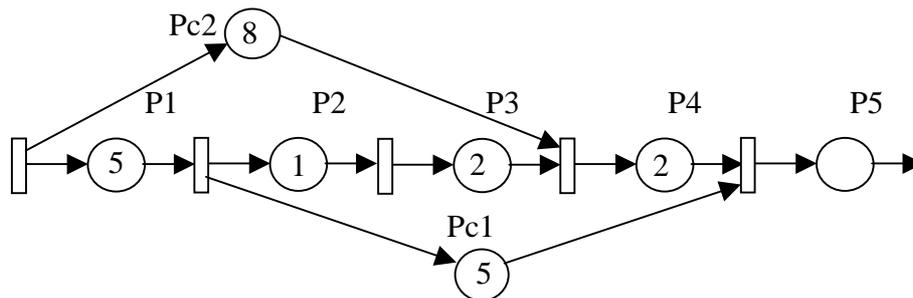


Figure 2.23: Comptabilisation imbriquée sur une ligne

$$m(P_{c2}) = m(P_1) + m(P_2) + m(P_3)$$

$$m(P_{c1}) = m(P_2) + m(P_3) + m(P_4)$$

Ces deux équations ne résultent pas de P-invariants (à coefficients positifs).

### 3 Exemples d'assemblages

#### 3.1 Séquenceur dynamique

Le séquenceur dynamique présenté maintenant, permet la permutation de deux séquences données :

$$S1 = \langle 01234 \rangle \quad \text{et} \quad S2 = \langle 02134 \rangle$$

Grâce à trois cellules aiguilleur (A1, A2, A3), il est possible de gérer la permutation des deux séquences S1 et S2 choisies (figure 2.24). Les entrées de ce séquenceur sont sur la droite de la figure, les sorties sont à gauche, par souci d'homogénéité avec la structure de la figure 2.10.

Il suffit alors de valider la transition TS1 pour passer de la séquence S2 à la séquence S1 et de valider la transition TS2 pour passer de la séquence S1 à la séquence S2. Il y a nécessité d'utiliser trois aiguilleurs, puisque dans le présent exemple, trois couleurs (0, 1 et 2) ont un successeur différent selon la séquence validée (S1 ou S2). Les transitions grisées sont prioritaires. Le réseau de Petri obtenu reste relativement simple et sa méthode de construction revêt une forme relativement standardisée.

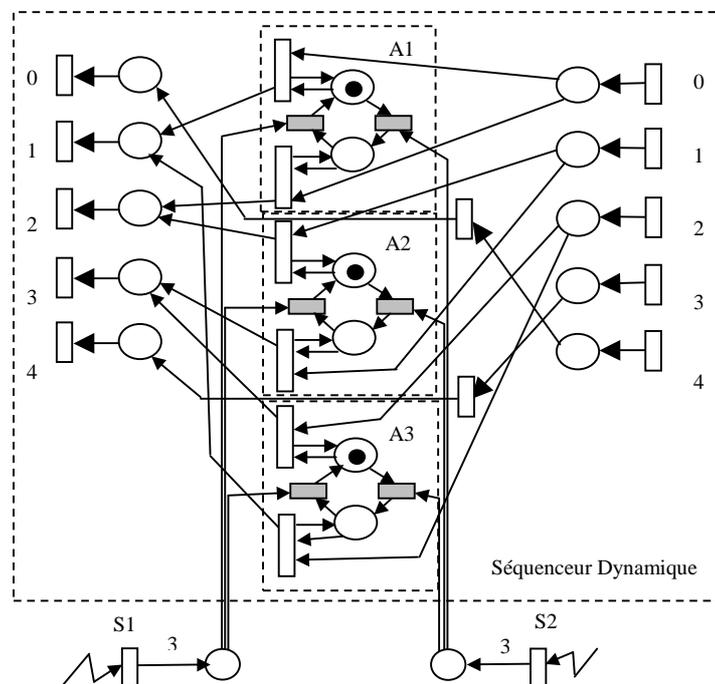


Figure 2.24 : Séquenceur simple dynamique RdP

#### 3.2 Régulateur de flux par construction ascendante

**Première phase :** construction d'un séquenceur binaire, comptabilisation globale des objets.

La figure 2.25a représente cette première étape, où les jetons arrivant sur l'entrée E sont distribués alternativement vers les lignes 0 et 1. Les deux places et les deux transitions centrales constituent le séquenceur binaire.

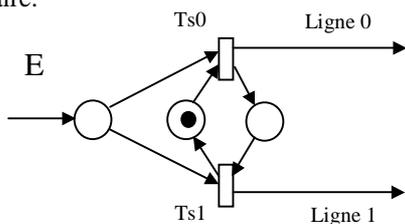


Figure 2.25a : Séquenceur binaire

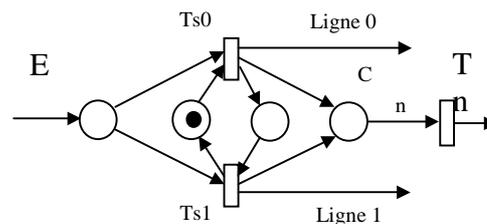


Figure 2.25b : Séquenceur avec comptage global des pièces

Le modèle précédent est maintenant complété (figure 2.27b). Une place C permet le comptage global des jetons dirigés vers les lignes 0 et 1.

**Deuxième phase :** construction d'un séquenceur binaire dynamique.

Le modèle précédent est complété par l'ajout de deux transitions  $Ts'0$  et  $Ts'1$  prioritaires et de deux places  $Psup0$  et  $Psup1$  (figure 2.26).

Tant qu'il n'y a pas de jeton dans l'une de ces deux places, le fonctionnement de ce modèle est identique au précédent. Si un jeton parvient en  $Psup1$  (*resp*  $Psup0$ ), le jeton de  $P1$  (*resp*  $P0$ ) est détourné et directement rendu en  $P0$  (*resp*  $P1$ ) faisant perdre ainsi la priorité à la ligne 0 (*resp* 1).

Le séquenceur est donc maintenant dynamique, en ce sens qu'il permet la modification de la séquence de répartition des jetons.

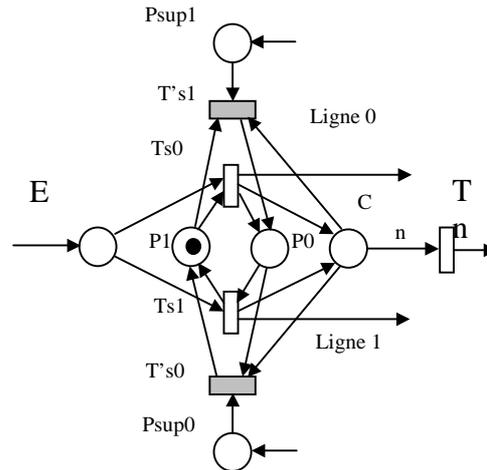


Figure 2.26 : Séquenceur dynamique

**Troisième phase :** construction du régulateur : jauge + séquenceur

La figure 2.27 représente le modèle final du régulateur. Dans ce modèle, la perturbation proposée est l'extraction de jeton sur la ligne 0. Il y a alors plus de jetons qui circulent sur la ligne 1 que sur la ligne 0. Il s'ensuit à terme un déséquilibre de la jauge effectuant une mesure différentielle des flux se traduisant par un accroissement du nombre de jetons en  $P10$  au détriment du nombre de jetons en  $P01$ .

Si le nombre de jetons de la place  $P10$  atteint le seuil prédéfini  $k$ , un jeton est injecté dans la place  $Psup0$ , ce qui a pour effet de donner une fois de plus la priorité à la distribution de jetons vers la ligne 0, par l'intermédiaire du séquenceur binaire dynamique.

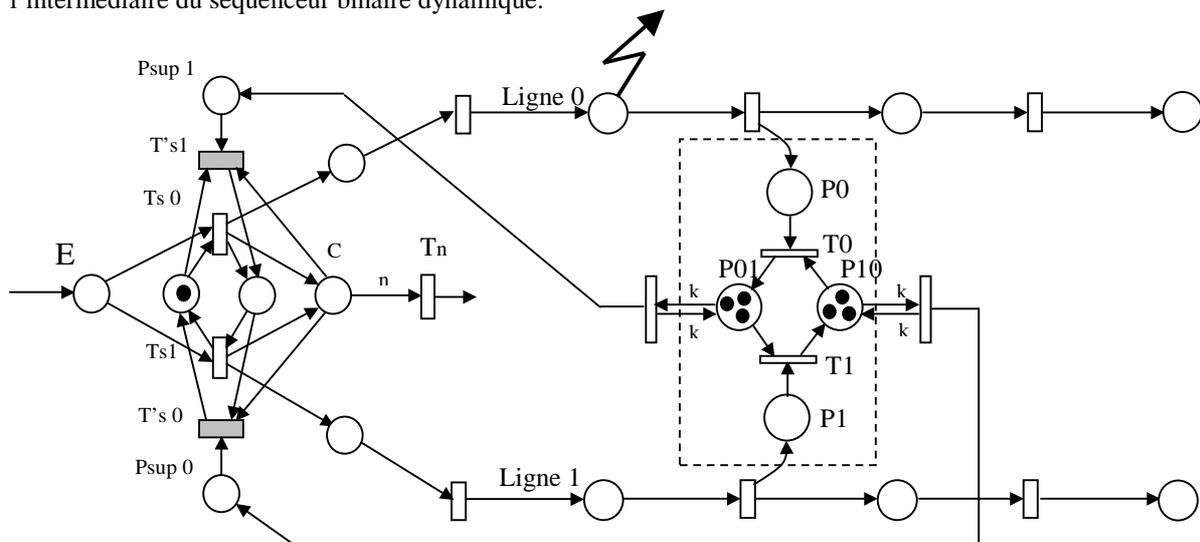


Figure 2.27: Régulateur

# CHAPITRE III

## Les réseaux de Petri colorés

### 1 Présentation des Réseaux de Petri Colorés (RdPC)

Dans les chapitres précédents, les réseaux de Petri et leur caractérisation ont été abordés. Ces réseaux sont fréquemment constitués de sous-ensembles présentant des structures identiques entre elles ou de fortes similitudes.

Si l'utilisation d'une ressource commune par plusieurs utilisateurs dans des conditions similaires est à représenter, le modèle est ainsi constitué de motifs récurrents. Lorsque, par exemple, le nombre de consommateurs est faible (2 ou 3), il est souvent suffisant ou préférable de se cantonner à l'utilisation de ces précédentes techniques de modélisation. En revanche, si le nombre des consommateurs est plus important, le modèle construit avec des réseaux de Petri *ordinaires* s'alourdit sensiblement, comportant alors un nombre important de structures redondantes.

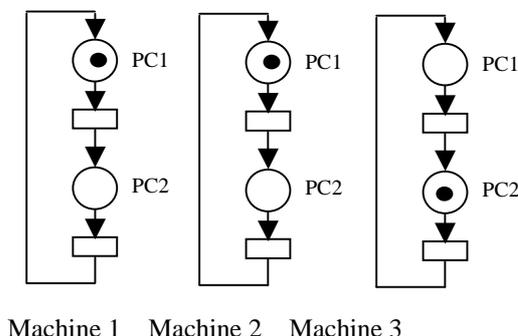
Lorsque les modèles deviennent ainsi volumineux ou complexes et qu'ils contiennent des sous-modèles présentant des similarités structurelles, il devient intéressant d'utiliser le principe de coloration.

La coloration des modèles comporte une autre facette très intéressante qui consiste en ce fait que les jetons gagnent une identité. Lors de leur circulation dans la structure, les jetons sont toujours identifiables, ceci assurant leur suivi en temps réel. Par ailleurs, il apparaîtra dans les paragraphes suivants que ces jetons peuvent changer de couleur, permettant ainsi la représentation de multiples situations dans les domaines d'applications précités.

Les réseaux de Petri colorés sont très utilisés dans le domaine de l'informatique. Les multiples applications des RdPC ont conduit à développer des méthodes de colorations spécifiques et très variées, sans qu'il ne soit ici question de toutes les inventorier. Il ne sera en fait question que d'en présenter les principes généraux, ainsi que quelques méthodes de colorations présentées à titre d'exemples.

L'exemple proposé à présent va permettre une première approche de la démarche de coloration.

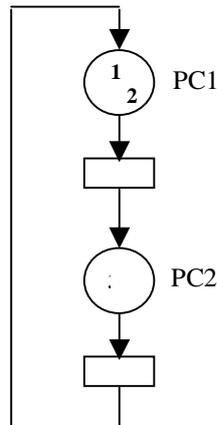
Il s'agit d'étudier la modélisation de l'état de trois machines similaires traitant tour à tour deux types de pièces C1 et C2. La première modélisation (figure 3.1) se base sur l'utilisation de réseaux de Petri *ordinaires*. Ce RdP se présente sous la forme de trois boucles similaires et totalement indépendantes. Le marquage initial indique que les machines 1 et 2 sont entrain de traiter une pièce de type 1, alors que la machine 3 traite une pièce de type 2.



**Figure 3.1 : Réseau de Petri pour trois machines**

Si maintenant il est question de représenter la situation de  $n$  machines identiques, il apparaît que le graphisme du modèle va se dupliquer et qu'il serait souhaitable que l'information soit alors plus condensée.

La figure 3.2 modélise le même problème par un réseau de Petri coloré. Le principe des RdPC va être de traduire l'idée suivante: En fait, dans le RdP initial, le même modèle est utilisé, dupliqué 3 fois. Il est alors intéressant de concentrer toutes les informations dans une seule boucle.



**Figure 3.2 : Réseau de Petri Coloré**

Dans ce nouveau type de réseau de Petri, les jetons sont dits *colorés* de par le fait qu'ils ont maintenant chacun une identité propre. Chaque jeton de ce modèle représente à présent une machine spécifique. Les deux premières machines, symbolisés par les couleurs  $\langle 1 \rangle$  et  $\langle 2 \rangle$ , sont entrain de traiter des pièces de type C1. La machine 3 traite une pièce de type C2. Les jetons  $\langle 1 \rangle$ ,  $\langle 2 \rangle$  et  $\langle 3 \rangle$  sont alors respectivement situés dans les places PC1, PC1 et PC2.

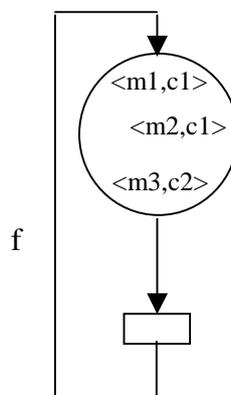
Les transitions représentent, pour chaque machine le passage d'un type d'usinage à l'autre. Ces franchissements sont indépendants pour chaque couleur. Le RdPC est plus synthétique, mais les marques contiennent plus d'information puisqu'elles possèdent une identité. Les couleurs sont dites ici, à une dimension, couleur de chaque machine.

Il faut noter que, pour cet exemple de coloration, les couleurs restent toujours identiques à elles-mêmes. Autrement dit, elles ne sont pas amenées à être transformées, elles sont simplement déplacées dans le modèle, occupant tour à tour, soit la place PC1 ou la place PC2 selon leur état de travail.

Il sera vu plus loin que des fonctions peuvent être attribuées aux arcs d'un réseau coloré. Ces fonctions ont pour rôle de transformer les couleurs des jetons et sont indiquées en regard de l'arc concerné. En l'occurrence, pour cet exemple, les jetons n'étant donc pas transformés, les fonctions appliquées sur ces arcs seront les fonctions dites *Identité*. Par défaut, la mention *Identité* (Id), pourra être éludée.

Dans ce réseau, les jetons  $\langle 1 \rangle$ ,  $\langle 2 \rangle$ ,  $\langle 3 \rangle$  circulent indépendamment les uns des autres, transcrivant bien ainsi le cahier des charges initial.

Il est encore possible de colorer à un niveau supérieur ce RdPC, en redonnant une dimension supplémentaire à l'*espace des couleurs*. Ce RdPC est à nouveau coloré en le *repliant* et obtenant le RdPC de la figure 3.3.



**Figure 3.3 : Coloration bidimensionnelle**

L'unique place de ce réseau se substitue aux deux places précédentes PC1 et PC2. Chaque jeton coloré, de type  $\langle m_i, c_j \rangle$  représente une machine et spécifie son état. La couleur à deux dimensions  $\langle m_i, c_j \rangle$  indique que la machine  $m_i$  traite une pièce de type  $c_j$ . Les marques, colorées à deux dimensions, possèdent alors toute l'information concernant l'état de fonctionnement de chaque machine. La quantité d'information contenue dans chaque marque est accrue. Le franchissement de la transition entraîne cette fois un changement de couleur, tout au moins sur l'une de ses dimensions, la *dimension pièce*. Une fonction différente de la fonction identité est maintenant affectée à l'un des deux arcs, transformant ainsi les couleurs. La fonction  $f$  est définie ainsi :

$$f\langle m_i, c_1 \rangle = \langle m_i, c_2 \rangle$$

$$f\langle m_i, c_2 \rangle = \langle m_i, c_1 \rangle$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Pour toute représentation par RdPC, il convient de définir les fonctions attachées aux arcs, en précisant quelles transformations impliquent chaque fonction vis-à-vis de chaque couleur.

Lors de l'élaboration du RdPC, il faut également spécifier pour quelle couleur chaque transition est franchissable. Cette spécification peut être conventionnellement portée sur le graphe, en regard de chaque transition concernée. Ainsi pour cet exemple, la transition est franchissable pour toute couleur de type  $\langle m_i, c_j \rangle$  telle que  $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2\}$ .

## 2 Fonctions arcs aval, fonctions arcs amont

Ce premier paragraphe avait pour objet de présenter le principe de la coloration à l'aide d'un premier exemple d'utilisation. Il est maintenant nécessaire de définir plus précisément une fonction sur un arc aval à une transition. C'est la fonction qui transforme une couleur *après franchissement de cette transition*. Or, cette définition est encore insuffisante pour traiter tous les cas possibles et il est nécessaire d'introduire la notion de fonction attachée à un arc amont aux transitions. Ainsi, la manipulation des couleurs bénéficie de plus de souplesse.

La figure 3.4 représente quelques exemples de franchissement d'une transition par plusieurs couleurs. Les arcs amont et aval à la transition portent des fonctions.

Dans ce réseau de Petri à quatre places et une transition circulent des jetons de trois couleurs différentes  $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle$ . Les arcs sont affectés de quatre types de *fonctions*  $f, g, h$  et  $Id$  (fonction Identité).

Il convient de définir ces fonctions, par leur action sur chacune des couleurs du réseau. Ces fonctions sont ainsi définies dans l'exemple qui va être traité :

$f\langle a \rangle = \langle b \rangle$	$g\langle a \rangle = \langle c \rangle$	$h\langle a \rangle = \langle a \rangle$	$Id\langle a \rangle = \langle a \rangle$
$f\langle b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$	$g\langle b \rangle = \langle b \rangle$	$h\langle b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$	$Id\langle b \rangle = \langle b \rangle$
$f\langle c \rangle = \langle b \rangle + \langle c \rangle$	$g\langle c \rangle = \langle a \rangle$	$h\langle c \rangle = \langle c \rangle$	$Id\langle c \rangle = \langle c \rangle$

### 2.1 Conditions de franchissabilité de la transition

Pour qu'une transition  $T$  soit franchissable pour une couleur  $\langle c \rangle$ , il faut trouver dans chaque place  $P_i$  amont à  $T$ , un ensemble de couleurs  $\{C\}_i$  tel que  $f_i\langle c \rangle = \{C\}_i$ ; où  $f_i$  est la fonction portée par l'arc amont reliant la place  $P_i$  à la transition  $T$ . Dans l'exemple traité, les fonctions  $f, g$  et  $h$  sont définies sur les trois couleurs  $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle$ .

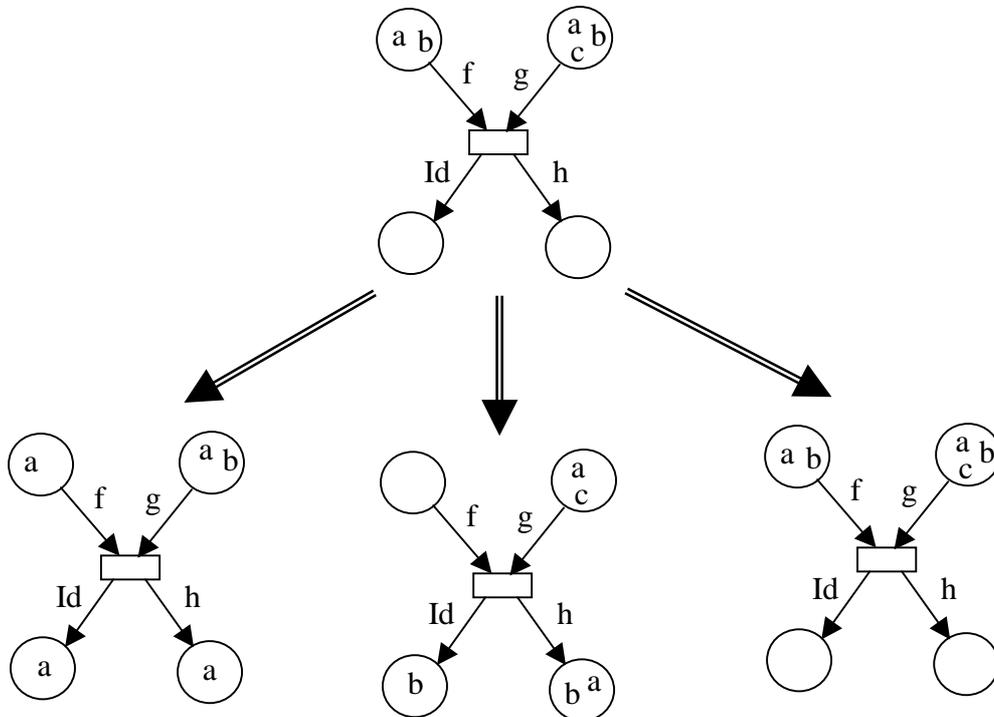
### 2.2 Franchissement de la transition

Lorsque les conditions de franchissabilité précédemment évoquées sont remplies, la transition est franchie par la couleur  $\langle \lambda \rangle$ , captant dans les places amont les jetons ayant permis la franchissabilité et donnant dans chaque place avale à la transition, les jetons  $f_j\langle \lambda \rangle$ ; où  $f_j$  est la fonction portée par l'arc amont reliant la transition  $T$  à la place  $P_j$ .

La figure 3.4 représente la situation avant et après le franchissement de la transition pour chaque couleur indépendamment. Les définitions précédentes des fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , ont été utilisées. Ici la transition est franchissable pour les deux couleurs  $\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$ , mais non pour la couleur  $\langle c \rangle$  : la place amont de gauche ne comporte pas les 2 jetons  $\langle b \rangle$  et  $\langle c \rangle$  nécessaires au franchissement de la transition.

*Remarque :*

La symbolique empruntée aux opérations d'addition et de multiplication est en fait ici une notation ensembliste, puisqu'il n'y a pas de structure algébrique de l'ensemble des couleurs. De même, parler d'espace des couleurs est un abus de langage.



Franchissement pour  $\langle a \rangle$  Franchissement pour  $\langle b \rangle$  Non franchissement pour  $\langle c \rangle$

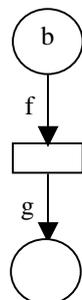
**Figure 3.4 : franchissement de transition pour trois couleurs différentes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .**

De manière générale, chaque fonction est précisément définie, et ceci spécifiquement pour chaque couleur. L'action des fonctions attachées aux arcs amont est plus délicate à interpréter que pour ce qui concerne les arcs aval. Ainsi, la configuration de la figure 3.5 permet de clarifier le principe de ce fonctionnement.

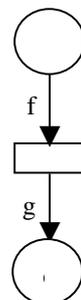
Ici, le réseau est constitué d'une transition reliée à deux places, une en amont, une en aval. Les arcs portent chacun une fonction ainsi définie :

$$f\langle a \rangle = \langle b \rangle$$

$$g\langle a \rangle = \langle c \rangle$$



**Figure 3.5a : Avant franchissement**



**Figure 3.5b : Après franchissement**

La transition est franchissable pour la couleur  $\langle a \rangle$ , qui n'apparaît cependant pas dans le réseau. Lors du franchissement de la transition, la couleur  $\langle b \rangle$  est captée dans la place amont, selon la définition de la fonction  $f$ .

Après le franchissement de cette transition, la place amont est vide, alors que la place avale est occupée par un jeton  $\langle c \rangle$  résultant de la transformation de la couleur  $\langle a \rangle$  par la fonction  $g$ .

Ce mode de traitement des couleurs, qui peut à juste titre paraître paradoxal, permet de résoudre des problèmes complexes de modélisation dans les domaines d'applications déjà cités précédemment.

Quelques fonctions standard sont cependant couramment définies, ceci permettant d'éviter les lourdeurs d'écriture des définitions de fonctions spécifiques. Ces fonctions standard, qui sont peu nombreuses, permettent de modéliser les situations les plus simples. Le paragraphe suivant en propose la définition.

### 2.3 Les fonctions courantes

Les fonctions appliquées sur un ensemble de couleurs *unidimensionnelles* sont ainsi définies de manière courante :

Fonction	Symbole	Définition
L'identité	Id	Id $\langle c_i \rangle = \langle c_i \rangle$
La décoloration	Dec	Dec $\langle c_i \rangle = \langle \bullet \rangle$
Le successeur	Succ	Succ $\langle c_i \rangle = \langle c_{i+1} \rangle / n$
Le prédécesseur	Prec	Prec $\langle c_i \rangle = \langle c_{i-1} \rangle / n$

La description de la fonction identité a déjà été abordée. Conformément au principe énoncé, il est fréquent que l'indication de cette fonction soit éludée sur les arcs des réseaux. Il s'agit donc d'interpréter comme tel tout arc non accompagné d'une indication.

La décoloration permet de dépersonnaliser un jeton. Ainsi,  $\langle \bullet \rangle$  représente le jeton décoloré. Cette fonction permet par exemple de dédier une ressource à tous les utilisateurs potentiels.

L'ensemble des couleurs sur lequel s'appliquent les deux fonctions suivantes (*Succ* et *Prec*) est par définition un ensemble fini à  $n$  éléments.

Il est nécessaire d'introduire à présent la notion d'ordre dans cet ensemble de couleurs en les indiquant par un nombre de 1 à  $n$ . La notion d'ordre utilisée est la notion classique d'ordre dans l'ensemble des entiers naturels.

L'écriture  $/n$  se lit *modulo n*. La fonction successeur (*resp* prédécesseur) transforme chaque couleur en la suivante (*resp* précédente) selon la notion d'ordre établi. Le successeur de la couleur  $\langle c_n \rangle$  est la couleur  $\langle c_1 \rangle$ . Le prédécesseur de la couleur  $\langle c_1 \rangle$  est la couleur  $\langle c_n \rangle$ .

Les fonctions appliquées sur un ensemble de couleurs *bidimensionnelles* sont ainsi définies de manière courante :

Fonction	Symbole	Définition
Le successeur sur la dimension 1	Succ1	Succ1 $\langle c_i, c_j \rangle = \langle c_{i+1}, c_j \rangle / n$
Le successeur sur la dimension 2	Succ2	Succ2 $\langle c_i, c_j \rangle = \langle c_i, c_{j+1} \rangle / m$
Le prédécesseur sur la dimension 1	Prec1	Prec1 $\langle c_i, c_j \rangle = \langle c_{i-1}, c_j \rangle / n$
Le prédécesseur sur la dimension 2	Prec2	Prec2 $\langle c_i, c_j \rangle = \langle c_i, c_{j-1} \rangle / m$
La projection 1	Proj1	Proj1 $\langle c_i, c_j \rangle = \langle c_j \rangle$
La projection 2	Proj2	Proj2 $\langle c_i, c_j \rangle = \langle c_i \rangle$

Les définitions relatives aux fonctions successeur et prédécesseur découlent directement des définitions précédentes. L'ensemble des couleurs sur la dimension 1 comporte  $n$  éléments et l'ensemble des couleurs de la dimension 2 comporte  $m$  éléments.

Le principe de la projection consiste à ramener une couleur bidimensionnelle à une couleur monodimensionnelle.

Ces notions peuvent se généraliser sur un *espace multidimensionnel* de couleurs. Par ailleurs, la fonction décoloration peut participer à l'élaboration d'une fonction appliquée aux couleurs multidimensionnelles.

Il faut noter que, de manière générale, le concepteur de RdPC peut compléter ces ensembles par des fonctions nécessaires à une application précise.

### 3 Application au partage de ressource

La représentation du partage d'une ressource entre  $n$  utilisateurs a déjà été partiellement abordée dans le chapitre 2 en utilisant les réseaux de Petri *ordinaires*. Ainsi, il a été vu que la représentation de ce partage sans protocole pouvait se faire selon le réseau de la figure 3.6. La ressource est dédiée sans distinction à chaque consommateur.

Il apparaît que chacune des boucles représentant l'activité d'un consommateur est identique. Le principe de coloration est recommandé, surtout si le nombre de consommateurs est grand.

Par ailleurs, la ressource libre n'a pas d'identité propre et le modèle doit traduire qu'elle n'est pas dédiée spécifiquement à l'un des consommateurs, quelle que soit l'évolution du marquage. En revanche, la prise de la ressource par un consommateur lui donne momentanément une identité.

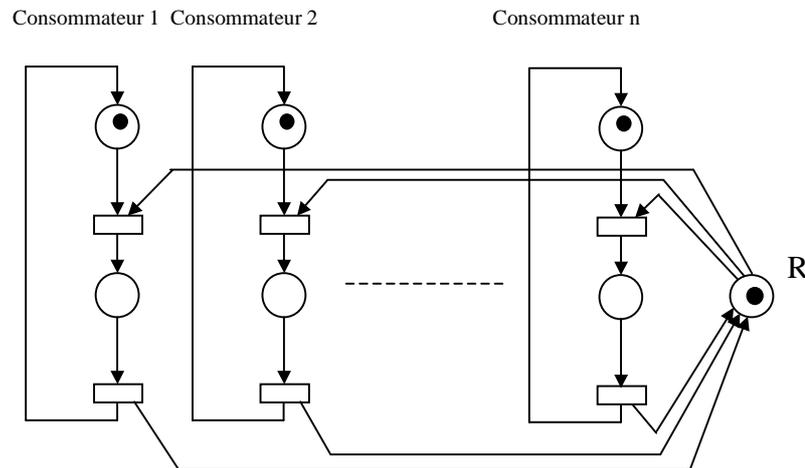


Figure 3.6 : Partage de ressource sans protocole par RdP

La coloration proposée est celle de la figure 3.7.

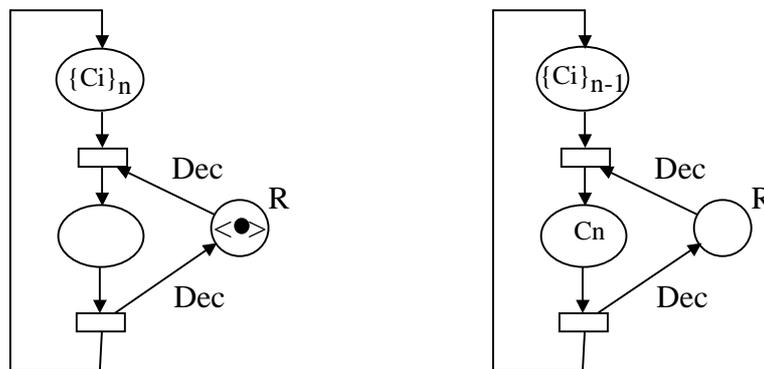


Figure 3.7 : Partage de ressource sans protocole par RdPC

a) Ressource libre b) Ressource utilisée par le consommateur  $C_n$

Chaque consommateur  $C_i$  appartient à un ensemble de  $n$  éléments  $\{C_i\}_n$ . La boucle de gauche ne mentionne pas de fonction. Les arcs sont donc agrémentés de fonctions identité : les couleurs représentant les

consommateurs ne sont pas altérées durant l'évolution du marquage. Initialement, tous les consommateurs sont inactifs et sont prêts à utiliser la ressource pour devenir actifs (figure 3.7a). Ce réseau est conflictuel.

En effet, la ressource, représentée par un jeton décoloré, est disponible pour toutes les couleurs : La fonction *Dec* attachée à l'arc aval à la place ressource permet sa capture pour chaque couleur.

Si le consommateur  $C_n$  se saisit de la ressource, celle-ci quitte la place R et le marquage devient celui de la figure 3.7b, où apparaît un jeton  $C_n$  indiquant que le consommateur  $C_n$  utilise la ressource. La place supérieure ne possède plus que  $n-1$  jetons.

Afin de lever le conflit effectif de ce réseau, il est indispensable d'instaurer un protocole de distribution de la ressource. Ainsi, le protocole le plus simple consiste à se faire succéder dans l'ordre tous les consommateurs, et ceci cycliquement (protocole *successeur*). Le modèle précédent est ainsi modifié (figure 3.8).

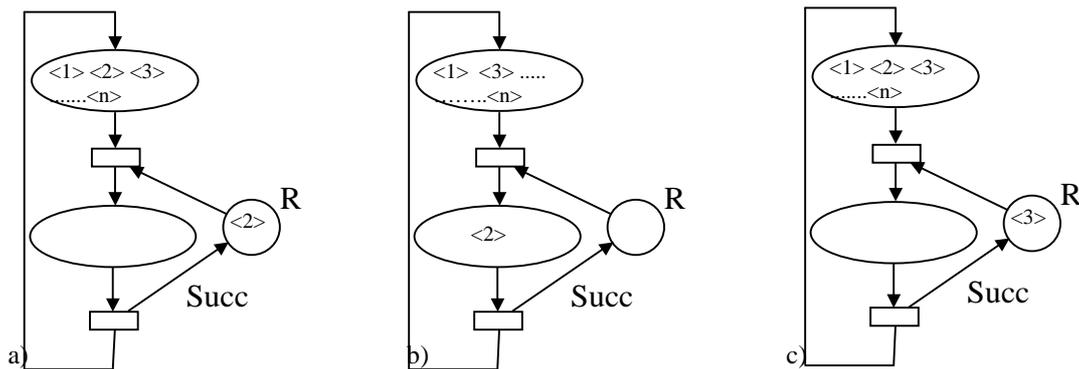


Figure 3.8 : Partage de ressource avec protocole « successeur » par RdPC

Le marquage initial (figure 3.8a) prévoit la prise de la ressource par le consommateur 2 (les consommateurs sont ici simplement repérés par leur numéro d'ordre). Le consommateur capte alors la ressource qui n'est plus disponible pour les autres consommateurs (figure 3.8b) Le consommateur 2 est le seul qui soit occupé, tous les autres sont libres, comme l'indique le marquage de la place supérieure.

Enfin, lorsque le consommateur 2 a fini d'utiliser la ressource, il retourne à la position libre, restitue la ressource qui est dédiée maintenant au consommateur 3, grâce à la fonction *Succ* (figure 3.8c).

Tout autre fonction pourrait se substituer à la fonction *Succ* dans l'objectif de représenter une autre séquence simple au sens où elle a été définie dans le chapitre II).

## 4 Ecriture mathématique

### 4.1 La matrice d'incidence

A partir de l'exemple du réseau de Petri de la figure 3.8 (repris figure 3.12) pour trois consommateurs ( $n = 3$ ), et par analogie avec ce qui a été énoncé pour les RdP, il est à présent proposé une transcription mathématique des RdPC. Ainsi va être défini un ensemble F de fonctions. Il s'agit de définir une matrice d'incidence W de ce RdPC, à coefficients dans F.

Sur cet ensemble sont définies deux opérations :

La loi  $\circ$ , dite de composition des fonctions telle que  $f \circ g (C) = f(g(C))$ .

La loi  $+$ , dite d'addition ensembliste des couleurs (complétée par la notation de soustraction des couleurs  $-$ ), telle que  $C - C = \emptyset$

Par ailleurs, la fonction Identité (Id) est l'élément neutre pour la loi  $\circ$  :

$$f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f = f$$

De manière analogue aux RdP, les fonctions attachées aux arcs amont et aval aux places forment les coefficients des matrices d'incidence avant et arrière. Leur soustraction permet l'obtention de la matrice d'incidence W. Ainsi est obtenue pour le RdPC :

$$W = \begin{pmatrix} T1 & T2 \\ -Id & Id \\ Id & -Id \\ -Id & Succ \end{pmatrix} \begin{matrix} P_L \\ P_O \\ R \end{matrix}$$

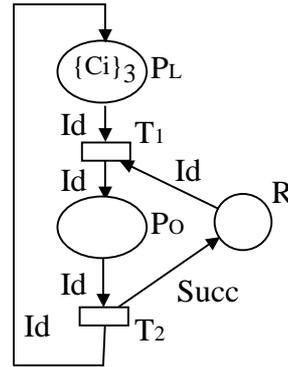


Figure 3.9 : Partage de ressource avec protocole « successeur » par RdPC

## 4.2 Modèle de la pile FIFO

### Les applications du modèle

Le modèle qui est présenté est commun à plusieurs applications. Son origine et son appellation proviennent de l'application à l'informatique où il s'agit de représenter l'empilage et le dépilage d'une pile de données (ou ensemble de cases mémoires) selon le protocole dit de First In First Out. Ainsi, la première donnée entrée est la première à sortir de la pile. Sa représentation classique est donnée figure 3.10 a.

Les figures 3.10b et 3.10c sont les représentations respectives du registre à décalage (domaine de l'électronique) et du convoyeur (domaine des systèmes de production). Ces applications peuvent être modélisées par les mêmes RdP.

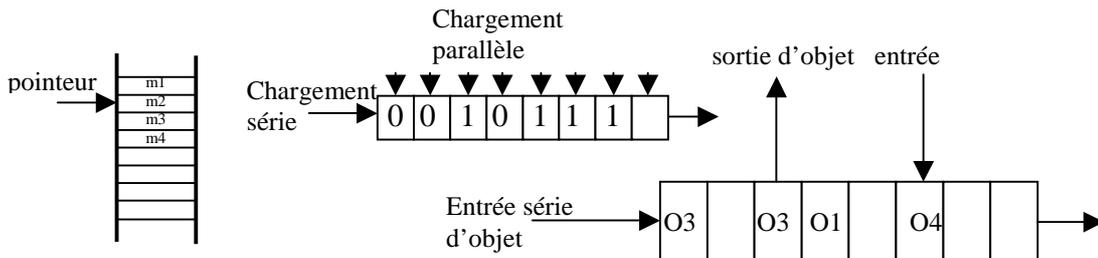


Figure 3.10 a : Pile FIFO    b : Registre à décalage    c : Convoyeur

Sur cette figure, le pointeur indique la position mémoire où se trouve le message 2. En incrémentant la position du pointeur, le message 3 est pointé, en le décrémentant, c'est le message 1 qui est pointé. Le registre à décalage de la figure 3.10b est à chargement parallèle ou série. Il véhicule des bits 0 ou 1 qui se décalent ici de la gauche vers la droite. Le convoyeur de la figure 3.10c est chargé de déplacer divers objets (ici, objet 1 à 4) d'emplacement en emplacement. Les objets sont en général chargés à une extrémité (ici, à gauche) et déchargés à l'autre extrémité (ici à droite). Cependant, il est envisageable de venir prélever ou déposer des objets sur chaque emplacement du convoyeur. Certains emplacements peuvent être inoccupés.

### Présentation du modèle

Il s'agit de représenter ici les déplacements d'objets, au nombre de quatre, à titre d'exemple, sur un convoyeur à huit emplacements, ainsi que l'évoque la figure 3.25a.

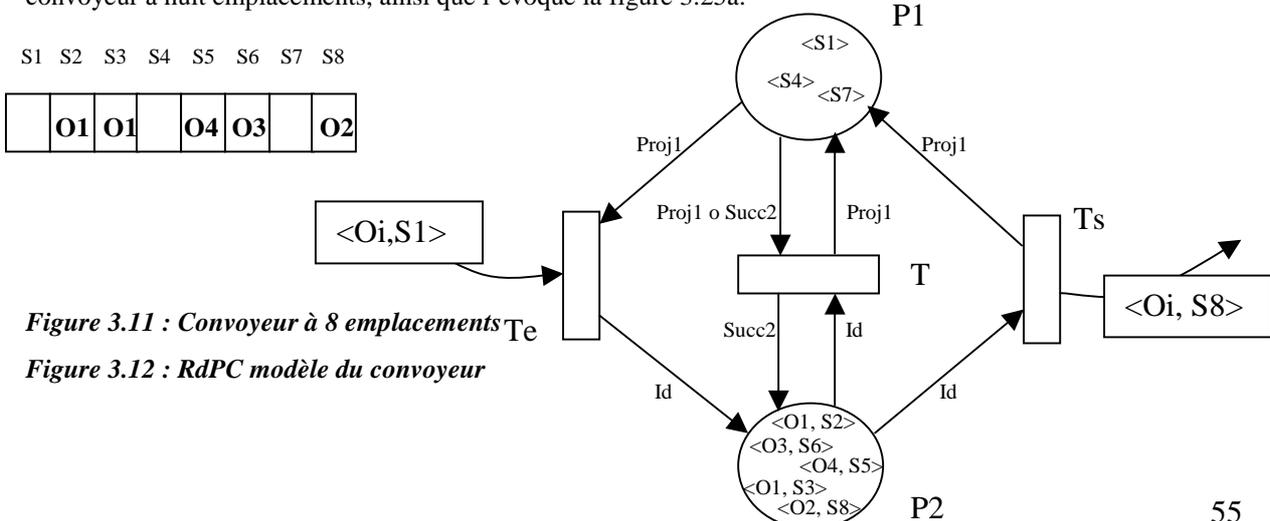


Figure 3.11 : Convoyeur à 8 emplacements

Figure 3.12 : RdPC modèle du convoyeur

Te est la transition d'entrée sur le convoyeur

Ts est la transition de sortie du convoyeur

T est la transition qui gère les déplacements des objets en interne, d'emplacement à emplacement.

P1 est la place qui regroupe les emplacements (secteurs) libres (ici S1, S4, S7).

P2 est la place qui regroupe les secteurs occupés par un objet. Ainsi, les couleurs bidimensionnelles qui s'y situent indiquent en première dimension la nature de l'objet et en deuxième dimension, le secteur où se situe cet objet.

La transition d'entrée Te est franchissable pour toute couleur du type  $\langle O_i, S_1 \rangle$  ( $i \in \{1, \dots, 4\}$ ), ce qui signifie que tout objet (O1 à O4) qui parvient à l'entrée du convoyeur est déposé sur ce premier secteur S1.

De manière duale, la transition de sortie Ts permet l'évacuation de tout objet (O1 à O4) qui se situe sur le secteur 8.

La richesse et la complexité du présent modèle apparaît lors de l'étude des conditions de franchissement des trois transitions du réseau. Ainsi, en premier lieu il est nécessaire d'analyser l'action des diverses fonctions sur les couleurs. C'est ce qui est maintenant proposé à travers quelques exemples.

La transition T est franchissable pour toute couleur bidimensionnelle  $\langle O_i, S_j \rangle$  signifiant que le secteur  $S_j$ , où  $j \in \{1, \dots, 8\}$  est occupé par un objet  $O_i$ , où  $i \in \{0, \dots, 4\}$ .

Action des diverses fonctions sur la couleur  $\langle O_3, S_6 \rangle$  :

$\text{Id} \langle O_3, S_6 \rangle = \langle O_3, S_6 \rangle$

$\text{Succ2} \langle O_3, S_6 \rangle = \langle O_3, S_7 \rangle$

$\text{Proj1} \langle O_3, S_6 \rangle = \langle S_6 \rangle$

$\text{Proj1oSucc2} \langle O_3, S_6 \rangle = \text{Proj1} \langle O_3, S_7 \rangle = \langle S_7 \rangle$

Ces propositions sont faites d'après les définitions données en début de chapitre.

Dans l'état actuel du marquage présenté figure 3.25b, la transition Te est franchissable pour la couleur  $\langle O_i, S_1 \rangle$  : le secteur 1 est libre pour recevoir tout objet.

La transition Ts est franchissable pour la couleur  $\langle O_2, S_8 \rangle$ , ce qui signifie que l'objet O2 actuellement sur l'emplacement 8 va être évacué.

La transition T est, entre autres, franchissable pour la couleur  $\langle O_3, S_6 \rangle$ , ce qui signifie que l'objet O3 va être déplacé de l'emplacement S6 à l'emplacement S7. En effet :

Les deux arcs entrant sur T, issus de P1 et P2 portent les fonctions précédemment étudiées. La place P1 renferme la couleur  $\langle S_7 \rangle$  et la place S2 renferme la couleur  $\langle O_3, S_6 \rangle$ , ces deux éléments suffisent à rendre T franchissable pour la couleur  $\langle O_3, S_6 \rangle$  ( $\text{Proj1oSucc2} \langle O_3, S_6 \rangle$  se trouve initialement dans P1 et  $\text{Id} \langle O_3, S_6 \rangle$  dans P2).

Lorsque T est franchie,  $\langle S_7 \rangle$  disparaît de P1 et  $\langle O_3, S_6 \rangle$  disparaît de P2. Par ailleurs, les fonctions portées sur les arcs de sortie de T vers ces mêmes places font que la couleur  $\langle S_6 \rangle$  apparaît en P1 et que la couleur  $\langle O_3, S_7 \rangle$  apparaît en P2.

La transition a bien géré le transport de l'objet O3 des secteurs S6 à S7. Ce transfert a été possible par le fait que l'emplacement S7 est libre (se référer d'une part au modèle de la figure 3.25b et à la représentation du convoyeur de la figure 3.25a).

De proche en proche, ce modèle est en mesure de représenter le déplacement des objets sur le convoyeur. Le modèle qui vient d'être présenté est susceptible d'être intégré à un modèle plus ample de système de production manufacturière.

## 5. Autres types de coloration

La présentation proposée précédemment est une définition standard de la coloration. Il peut être utilisé d'autres systèmes de coloration, ceci dépendant du type d'application qui doit être développé. A titre d'exemple, deux formes sont maintenant proposées :

L'une plus spécifiquement dédiée à la représentation du séquençement, l'autre plus spécifiquement dédiée à la traçabilité des produits.

### 5.1 Couleurs algébriques

L'inconvénient majeur de la précédente solution est que l'ensemble des couleurs n'est pas mathématiquement structuré. Il s'ensuit qu'il n'est pas possible d'agir sur les couleurs à l'aide des opérateurs classiques (addition, multiplication). La transformation des couleurs est donc alors tributaire de l'utilisation de fonctions qui doivent alors être définies par ailleurs (Id, Succ, Proj,...). A noter que la fonction Dec est plus spécifique, puisqu'elle fait correspondre à toute couleur de l'ensemble de départ, une seule et unique couleur (jeton décoloré), atypique vis-à-vis des autres couleurs.

Cette technique de coloration implique nécessairement de définir au coup par coup une fonction pour chaque problème de séquençement si celui-ci ne peut être décrit par une fonction simple (par exemple Succ). Ainsi, en imaginant par exemple qu'il y ait à gérer la séquence simple répétitive <S1, S3, S2, S5, S6, S4> (voir chapitre II, §1.3), il sera indispensable de créer la fonction spécifique f ainsi définie :

$$f\langle S1 \rangle = \langle S3 \rangle ; f\langle S3 \rangle = \langle S2 \rangle ; f\langle S2 \rangle = \langle S5 \rangle ; f\langle S5 \rangle = \langle S6 \rangle ; f\langle S6 \rangle = \langle S4 \rangle ; f\langle S4 \rangle = \langle S1 \rangle$$

Ceci peut se présenter sous forme de table de successeurs :

S1	S2	S3	S4	S5	S6
S3	S5	S2	S1	S6	S4

Le problème est bien plus difficile s'il s'agit de traiter une séquence complexe telle qu'elle a été précédemment définie (chapitre II).

Pour répondre à ce type d'application, il est préférable d'utiliser une structure algébrique de couleurs. Chacune de ces couleurs, en nombre fini, est représentée par un nombre entier sur lequel peuvent agir les opérateurs habituels. La structure qui est utilisée est la structure d'anneau fini  $A_p$  à p éléments muni des lois d'addition (+) et de multiplication (\*).

Les fonctions qui opèrent sur chaque couleur peuvent alors être des polynômes à coefficients dans cet anneau qui représentent ainsi une séquence cyclique.

Soit  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  l'ensemble de ces couleurs. L'addition se définit par récurrence tel que  $(p-1) + 1 = 0$ . A chaque couleur correspond, par le polynôme, le successeur de cette couleur dans l'ensemble  $A_p$ . Généralement, le nombre p est choisi premier, on a  $A_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Il est ainsi possible de valuer les arcs d'un réseau de Petri par des polynômes. Les couleurs qui circulent alors dans les réseaux sont des éléments de  $A_p$  et sont transformées par ces polynômes. La figure 3.13 est un exemple de ce qui est ainsi proposé. Le monôme X représente la fonction unité, le polynôme P(X) fait apparaître dans la place inférieure, le successeur de la couleur initialement positionnée dans la place supérieure.

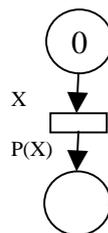


Figure 3.13 : RdPC à couleurs dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Ainsi, par exemple, il est possible d'obtenir les séquences suivantes grâce aux polynômes correspondants dans le corps  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ .

$S = \langle 01234 \rangle$	$P(X) = X+1$
$S = \langle 02413 \rangle$	$P(X) = X+2$
$S = \langle 142 \rangle, 3 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 1$	$P(X) = 2X^2 + X + 1$

Les divers exemples de séquenceurs abordés lors du chapitre II peuvent être remplacés par des séquenceurs colorés (figure 3.14). Le modèle y gagne en compacité.

### Dualité Séquence-Polynôme

La recherche du polynôme correspondant à une séquence donnée nécessite l'utilisation d'une matrice de passage pour aller du vecteur séquence au vecteur coefficients du polynôme. Inversement, l'utilisation de la matrice de passage inverse permet d'obtenir la séquence correspondant à un polynôme donné.

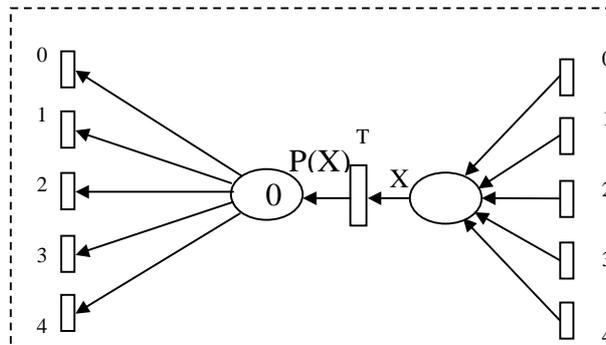


Figure 3.14 : Séquenceur coloré

Le vecteur de séquence est établi par simple lecture de la table des successeurs. Ainsi, à titre d'exemple, la séquence  $S = \langle 142 \rangle$ ,  $3 \rightarrow 2$ ,  $0 \rightarrow 1$  se représente par le vecteur des successeurs :

$$S_5 = (1, 4, 1, 2, 2)$$

où il apparaît bien que le successeur de 0 est 1, le successeur de 1 est 4, le successeur de 2 est 1, etc....

Le vecteur des coefficients du polynôme prend les coefficients par ordre décroissant. Ainsi, le polynôme  $P(X) = 2X^2 + X + 1$  se représente par le vecteur  $C_5 = (0, 0, 2, 1, 1)$  dans le corps  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ , affectant ainsi un coefficient 0 aux deux premiers termes  $X^4$  et  $X^3$ .

Il est démontré que, quelle que soit la séquence à représenter les vecteurs  $S$  et  $C$  sont liés par les relations :

$$(14) \quad C = SM_p \quad \text{et} \quad S = CM_p^{-1}$$

où  $M_p$  est une matrice de passage carrée et  $M_p^{-1}$  est sa matrice inverse. Il existe une matrice  $M_p$  pour chaque caractéristique  $p$  du corps.

Ainsi, pour  $p = 5$ , on a :

$$M_5 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_5^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de l'exemple précédent, il est vérifié que  $C_5 = S_5 M_5$  et  $S_5 = C_5 M_5^{-1}$

### 5.2 Couleurs mots binaires

La traçabilité des produits est un problème important répertorié dans l'ensemble des thèmes évoqués pour l'étude des systèmes de production manufacturière. Il s'agit, à tout instant sur le site, de pouvoir repérer l'état d'un objet (d'un produit) et d'avoir une information sur son origine et son cheminement.

L'objectif est à présent de représenter le suivi d'objet sur une chaîne de production en dédiant à cet objet une couleur bien adaptée. L'idée qui est maintenant développée est relativement simple en ayant comme image le code barre que pourrait éventuellement porter un objet sur un site de production. Ce code barre est susceptible

de donner une information sur l'origine de l'objet et sa nature. L'information peut être prélevée en tout point de la ligne de production, assurant ainsi le suivi.

L'image comparative du code barre dans les modèles qui suivent est le mot binaire, dont la longueur peut varier en fonction des applications. La couleur ainsi définie est un mot binaire de n bits.

Afin de répondre au mieux aux besoins, en particulier en termes de traçabilité, il est nécessaire que l'outil développé réponde à certains critères :

L'objet doit être au départ étiqueté de manière à préciser son origine et sa nature.

Le code généré au départ est susceptible de changer en fonction des transformations ou de l'acheminement du produit qu'il représente.

#### Etiquetage : Coloration d'un jeton

L'étiquetage proposé est un mot binaire de n bits. A titre d'exemple, ce mot peut être sous forme d'octet :

$$m = [00111010]$$

Ce mot peut constituer l'identité, la provenance ou l'emplacement de l'objet. Il peut aussi indiquer l'orientation que doit prendre l'objet sur le site. Il est alors nécessaire, pour en assurer le suivi, de modifier ce code en fonction des déplacements sur le site, donc dans le modèle.

#### Franchissement de Transition : Aiguillage des jetons.

Chaque arc amont à une transition peut être valué selon le type de jeton que cette transition est susceptible de prélever dans la place correspondante en amont. Ainsi la couleur du jeton oriente celui-ci vers la destination qui lui a été préalablement attribuée.

Soit le problème suivant : le cahier des charges dicte d'orienter tous les jetons dont le code commence par [0011... et finissant par ..0] selon la direction A, et tous les jetons dont le code commence par [0011... et finissant par ..1] selon la direction B. Le modèle de la figure 3.15a donne la solution à ce problème, en spécifiant que les bits marqués X sont indéterminés. Cette méthode revient à filtrer par un masque les jetons selon leur code.

Par ailleurs, chaque arc peut aussi porter plusieurs valuations, autorisant ainsi le franchissement de plusieurs types de couleur (figure 3.15b).

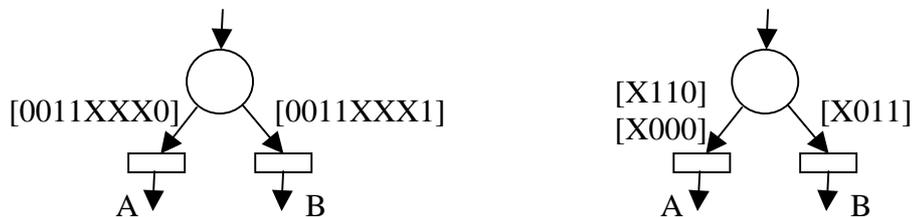


Figure 3.15 a et b : Filtrage de jetons

Ainsi, le jeton dont le code m a été mentionné plus haut est orienté dans la direction A (figure 3.28a).

Les jetons dont le code se termine par 000] ou 110] sont dirigés vers A figure 3.28b et les jetons dont le code se termine par 011] sont dirigés vers B.

#### Changement de couleur d'un jeton : changement d'état d'un objet.

Selon l'orientation de l'objet, son étiquetage peut être modifié : ceci est réalisé par une valuation des arcs du modèle (figure 3.16). Un arc valué par exemple [XXXX1XXX] force le cinquième bit à 1 sans intervenir sur les autres qui sont donc inchangés.

Cette transformation du jeton peut être commandée par une action externe ainsi que le montre la figure 3.16.

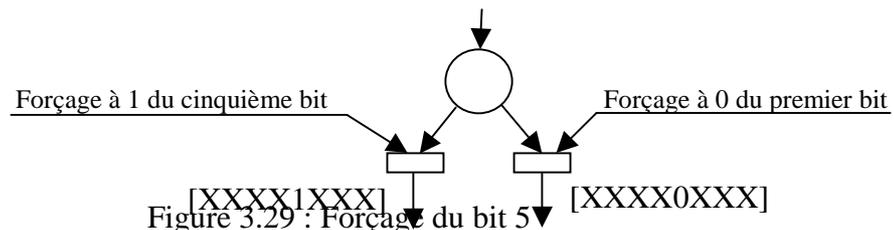


Figure 3.29 : Forçage du bit 5

# CHAPITRE IV

## Elaboration de modèles

L'objectif de ce chapitre est de se familiariser avec la construction de modèles, à partir d'un cahier des charges. A travers divers exemples, il est question de s'orienter vers un type de modèle donné. L'analyse des divers modèles n'est en revanche pas présentée intégralement. Il est nécessaire de compléter l'ensemble des outils développés en abordant l'aspect temporel, indispensable à l'élaboration de modèles dédiés aux systèmes de production manufacturiers.

### 1 La couche temporelle

#### 1.1 RdP temporisés, RdP temporels

Le premier chapitre a présenté la possibilité de l'introduction de la notion de temps dans les modèles. La suite de l'ouvrage a décrit l'outil réseau de Petri en vue de la modélisation des systèmes de production sans aborder la notion de temps.

Délibérément, la notion d'ordre assurant une chronologie des événements a été disjointe de la notion temporelle en tant que telle. C'est seulement pour une application de la pile FIFO à la fin du chapitre III qu'a été évoquée la notion d'horloge, impliquant ainsi implicitement l'idée de représenter le temps.

Le principe des RdP temporisés (soit par les places, soit par les transitions) demeure cependant généralement insuffisant. En effet, il apparaît que les différentes étapes de la fabrication nécessitent de valider des transitions, non pas à une date fixe, mais plutôt selon un intervalle de temps au cours duquel la transition peut (ou doit) être validée. Il est même envisageable d'intégrer dans les modèles le fait que ces dates (ouverture et fermeture de l'intervalle) sont incertaines, donc définies de manière floue.

#### 1.2 Les réseaux de Petri temporels

L'une des solutions possibles pour modéliser le comportement des systèmes est d'affecter aux places un intervalle de temps de séjour du jeton. Ainsi, sur le modèle, un intervalle, ouvert ou fermé est indiqué en regard de chaque place concernée. Pour des raisons de facilité de lecture, ces intervalles peuvent être indiqués dans une table annexe au modèle.

Ainsi, un modèle tel que celui de la figure 4.1 est obtenu. Le jeton arrivant dans la première place doit impérativement y séjourner 1 unité de temps avant de la quitter, il doit séjourner entre 35 et 45 unités de temps dans la deuxième place.

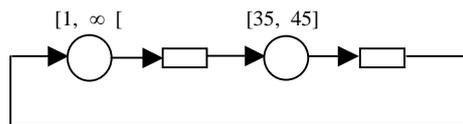


Figure 4.1 : Modèle de réseau de Petri temporel

### 2 Structure linéaire

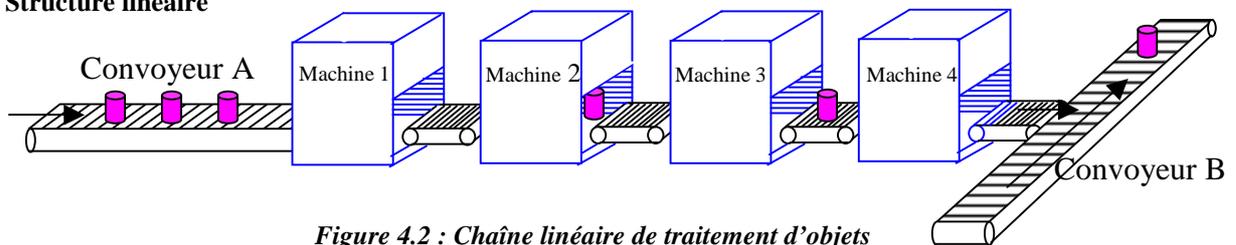


Figure 4.2 : Chaîne linéaire de traitement d'objets

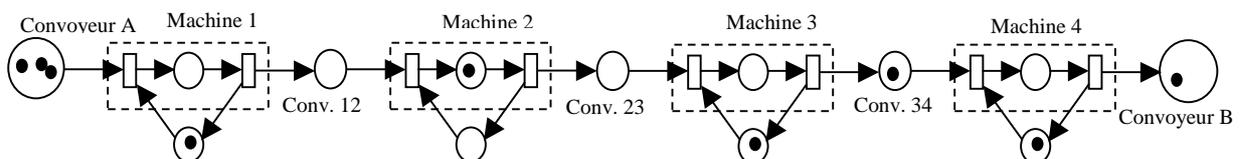


Figure 4.3 : Modélisation de la chaîne linéaire de la figure 4.2

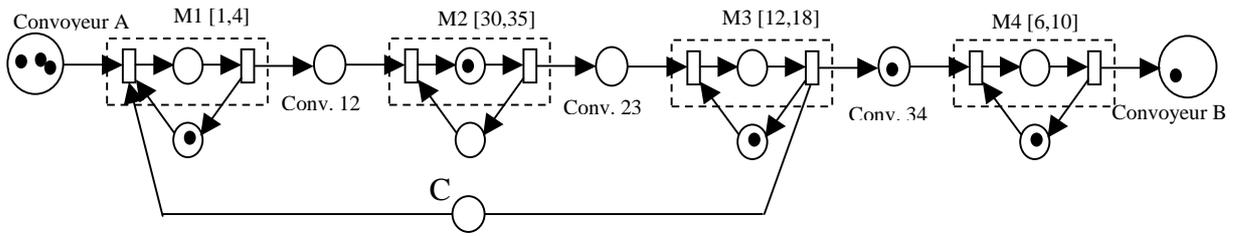


Figure 4.4 : Ajout de contrainte et de couche temporelle

### 3 Structure engageant des partages de ressource

#### 3.1 Partage de machines

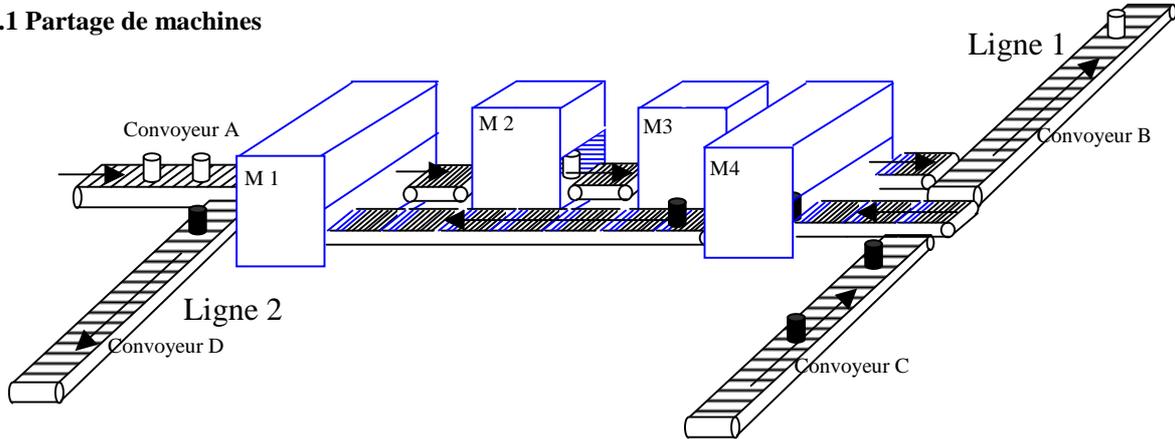


Figure 4.5 : Lignes de traitement de deux types de pièces avec partage de machines

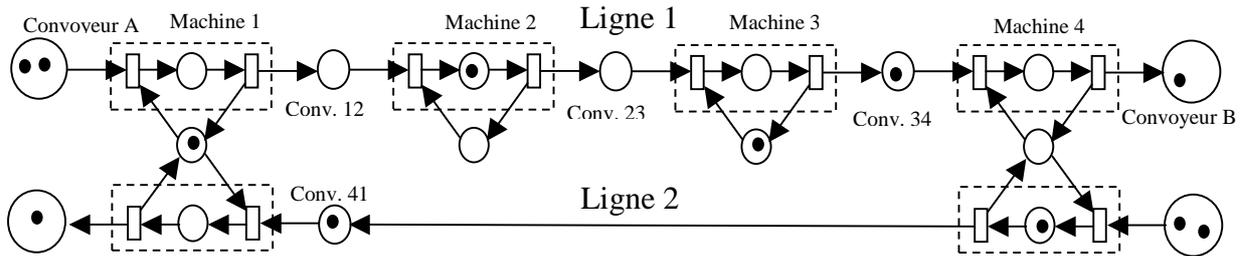


Figure 4.6 : Modèle de l'atelier de la figure 4.5 sans protocole de partage

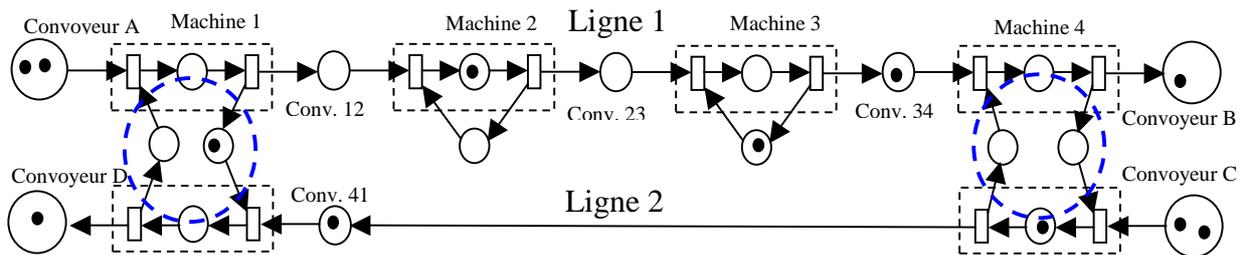


Figure 4.7 : Modèle de l'atelier de la figure 4.5 avec protocole de partage

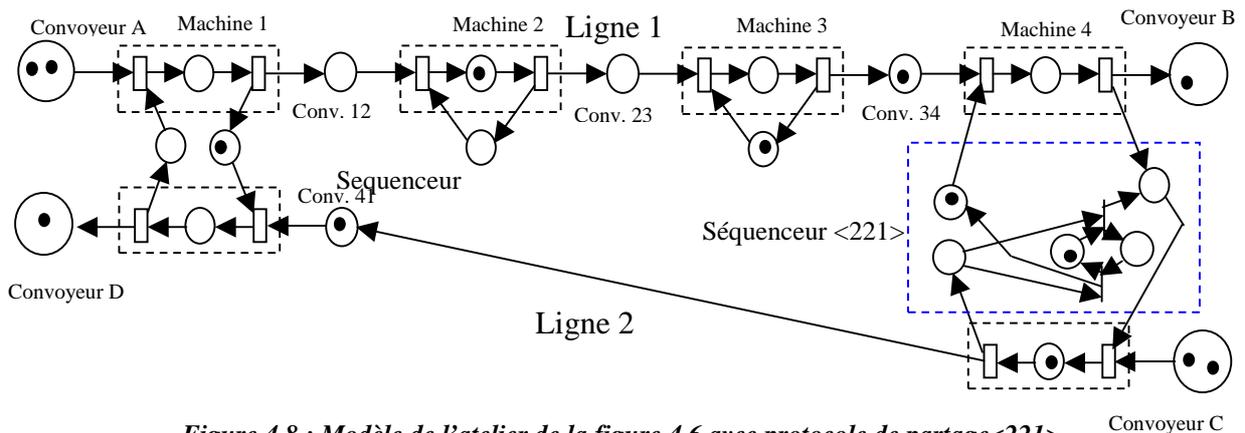


Figure 4.8 : Modèle de l'atelier de la figure 4.6 avec protocole de partage <221>

### 3.2 Partage de robot

La figure 4.9 représente la configuration d'un site traitant le même type d'objets sur deux lignes parallèles.

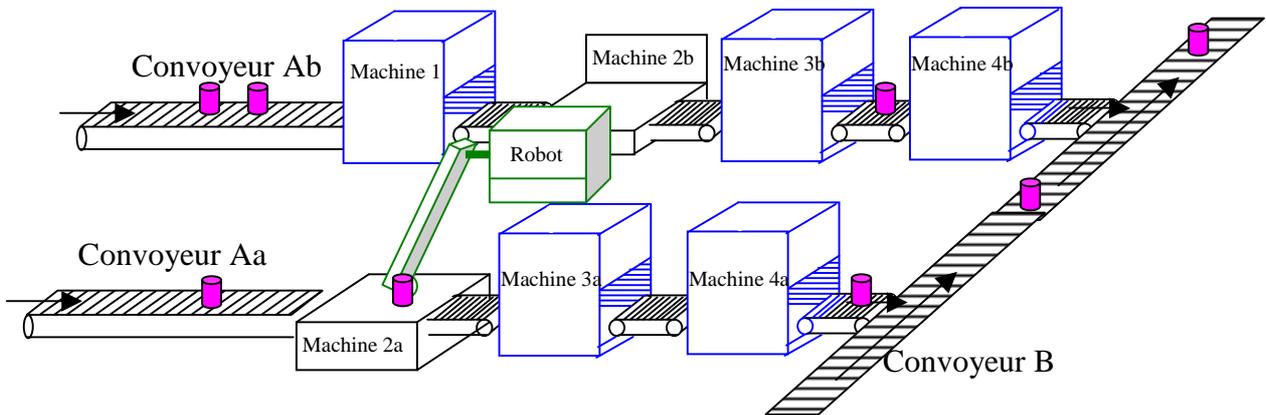


Figure 4.9 : Partage d'un robot par deux machines

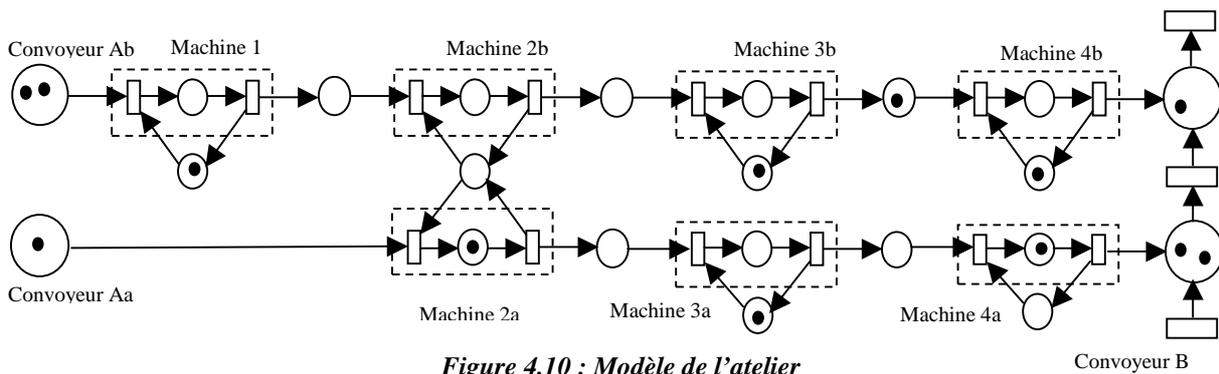


Figure 4.10 : Modèle de l'atelier

### 4 Structures impliquant un séquençement

Les postes de travail 0 et 4 sont sur la ligne de fabrication A. Les postes 1 et 3 sont sur la ligne de fabrication B. Le poste 2 est un poste d'initialisation où le robot se situe en position de repos, ou d'inactivité.

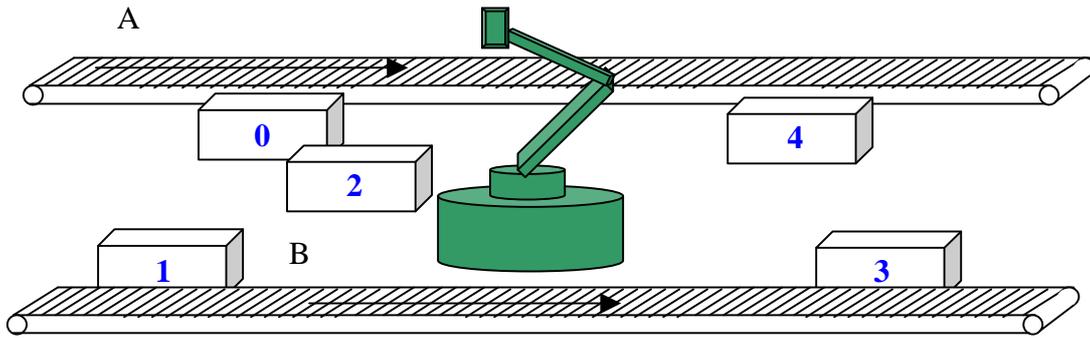


Figure 4.11 : Atelier à cinq sites partageant un robot

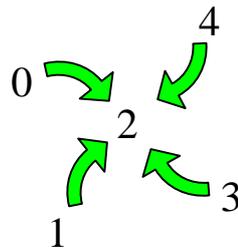
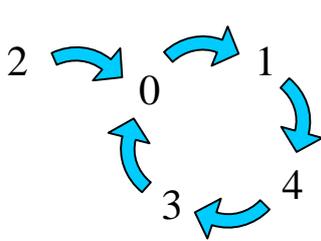
### Utilisation d'un séquenceur simple

Le premier cahier des charges définit les règles suivantes :

-- En régime permanent, le robot est partagé selon le cycle <0143>, alimentant ainsi alternativement les deux lignes.

-- Initialement, le robot est positionné en <2> et retourne dans cette position lorsqu'il y a réinitialisation, c'est-à-dire, à partir de toute position (0 ,1 ,3 ,4) lorsqu'une sollicitation externe intervient. Le cycle commence par l'utilisation du robot par le poste de travail 0.

Ce cahier des charges se traduit par les séquences suivantes, qui sont des séquences simples (toute couleur a toujours le même successeur) : Ces séquences conduisent à dresser la table de successeurs qui suit.\*



Coul	Séqu.1	Séqu.2
0	1	2
1	4	2
2	0	2
3	0	2
4	3	2

Diagramme 1. Séquence de fonctionnement Diagramme 2. Séquence de réinitialisation

L'option qui a été prise est d'utiliser un ensemble de couleurs algébriques isomorphe à  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ . Les règles de calcul des polynômes ont été établies au cours du chapitre III. Les coefficients du polynôme  $P(X)$  de la séquence de régime permanent s'obtiennent ainsi par le calcul du vecteur  $C$  dans ce corps:

$$C = (1 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 3) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

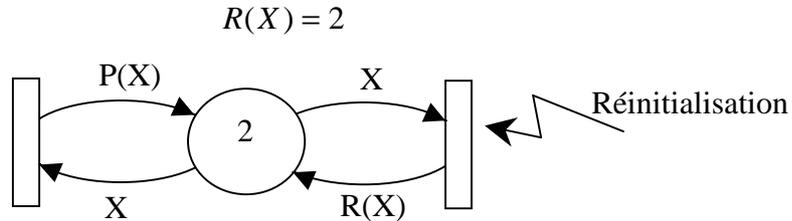
Il vient :

$$P(X) = 2X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 4X + 1$$

Il peut être vérifié que ce polynôme donne bien le successeur voulu (colonne Séqu.1) pour chaque couleur initiale (colonne Coul). Bien que le polynôme de réinitialisation  $R(X)$  soit trivial, il peut être calculé par la même méthode. Ainsi, il vient :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il vient :



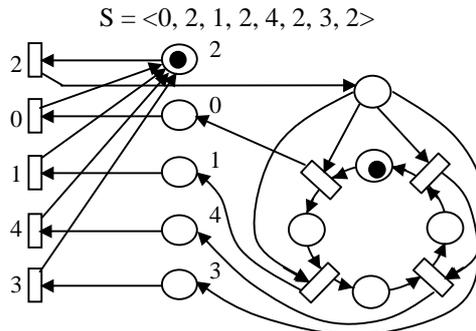
**Figure 4.12 : Modèle coloré d'utilisation du robot par séquençement <0143> avec réinitialisation possible à <2>.**

### Utilisation d'un séquenceur complexe

Le second cahier des charges relatif à l'atelier présenté figure 4.11, définit la règle suivantes :

-- Le robot suit le même cycle <0, 1, 4, 3> mais doit cette fois retourner à la position <2> après chaque opération.

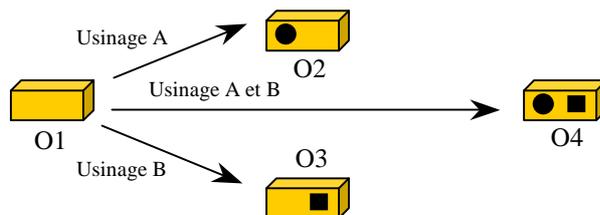
Cette règle se traduit par l'établissement de la séquence cyclique complexe :



**Figure 4.13 : Modèle d'utilisation du robot par séquençement <20212423>**

### 5 Application de la Pile FIFO

Il est maintenant question d'étudier la représentation d'un site d'usinage constitué d'un convoyeur sur lequel les emplacements sont repérés. Chaque emplacement est dédié à un poste de travail où s'effectuent des opérations. Les objets sont véhiculés sur ce convoyeur et subissent sur chaque poste des transformations. Ces transformations s'effectuent en une ou deux étapes d'usinage, transformant l'objet initial O1 en objet O2, O3 ou O4. Ceci est symbolisé figure 4.14



**Figure 4.14 : Description des objets O1, O2, O3, O4**

Le cahier des charges spécifie que 50% des pièces fabriquées doivent être au final de type O3, 25% de type O2, 25% de type O4. La figure 4.15 représente le site d'usinage, constitué de deux machines et d'un convoyeur.

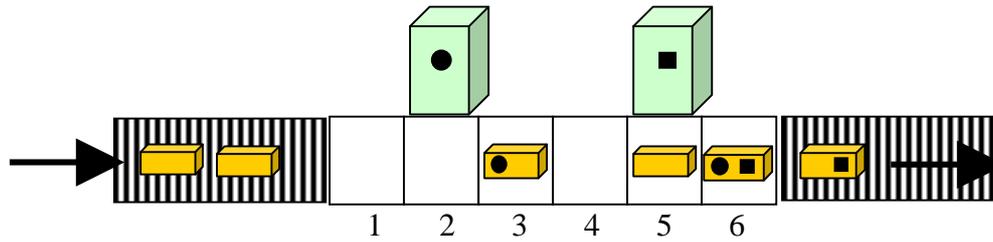


Figure 4.15 : Site d'usinage

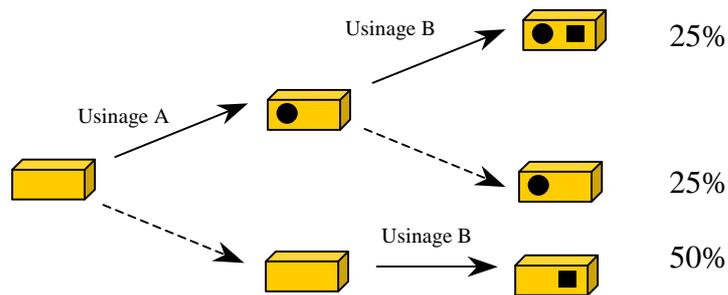


Diagramme 3. Transformation des objets

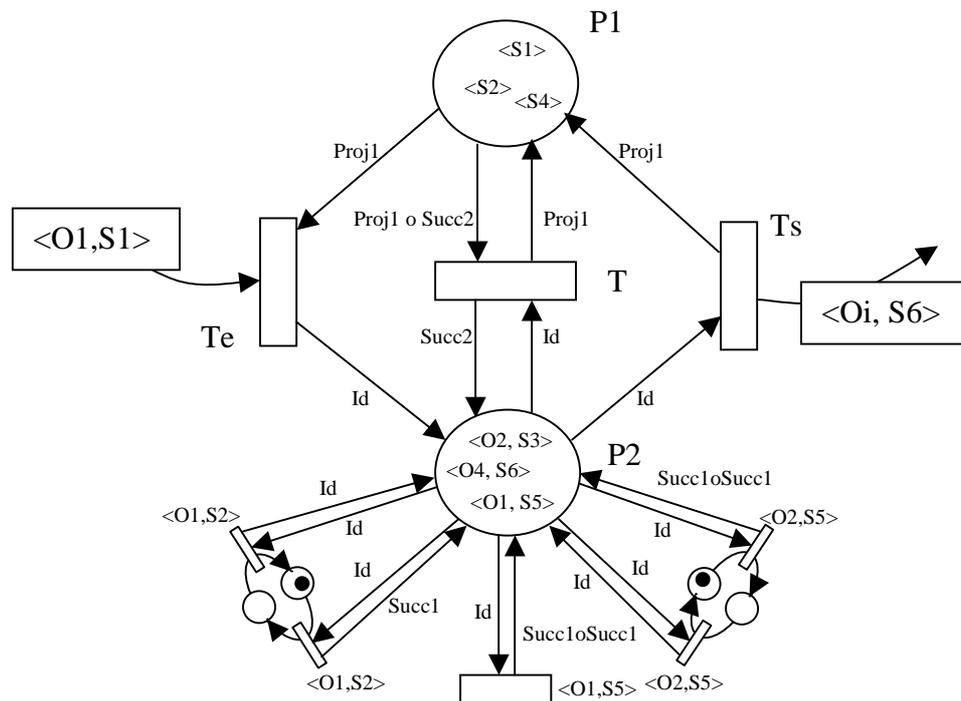
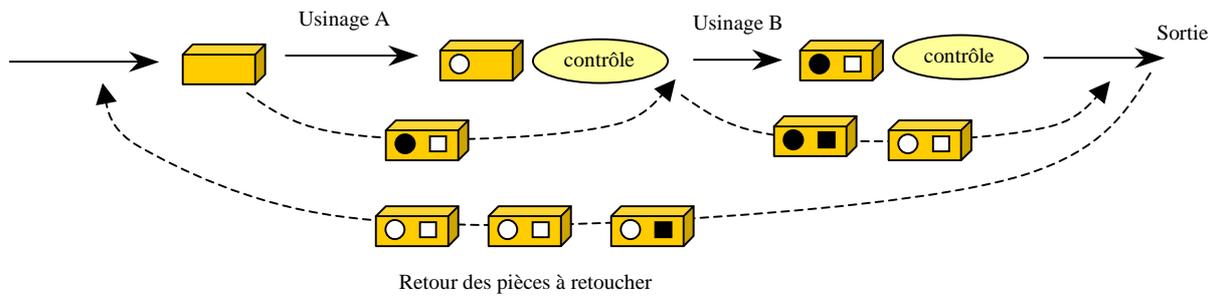


Figure 4.16 : RdPC à pile FIFO représentant l'application

## 6 Suivi d'objet, traçabilité

L'exemple qui suit étudie la possibilité de représenter spécifiquement le suivi d'objet sur une chaîne production. Le cahier des charges peut être décrit ainsi : Une pièce subit deux opérations successives, intervenant dans un ordre immuable. Ces opérations sont contrôlables et contrôlées systématiquement. Il est par ailleurs supposé qu'il y a une possibilité de retouche a posteriori de ces pièces pour corriger un éventuel défaut. Trois possibilités sont ainsi offertes après chaque opération : décréter que la pièce est bonne ou à retoucher ou non récupérable.



**Figure 4.17 Orientation des pièces selon leur état**

La figure 4.17 présente les diverses occurrences possibles. Après chaque usinage (A et B), la pièce est contrôlée et placée dans l'une des trois catégories (Bonne, à Retoucher, à Ecarter). Qu'elle soit bonne ou à retoucher, la pièce subit le cycle complet avant d'être éventuellement reprise. Sur cette figure, les opérations non conformes sont repérées en blanc.

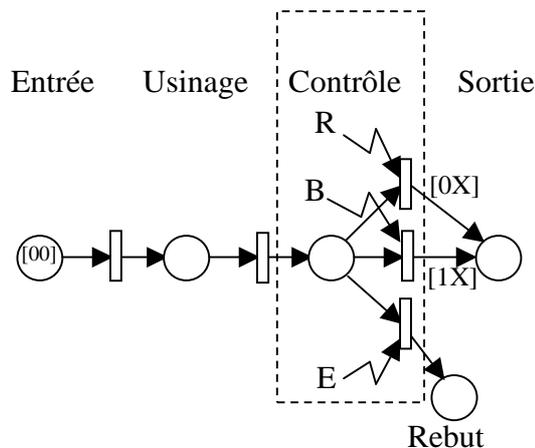
Avant d'être sortie, la pièce est réorientée en début de chaîne si elle est classée dans la catégorie R sur l'un des deux tests de conformité.

A son deuxième passage, la pièce doit éviter le site sur lequel elle avait passé le test avec succès antérieurement : d'où l'argument de la traçabilité.

### Modélisation par RDP

Le choix a été fait d'utiliser une coloration de type mot binaire de deux bits. Chaque bit correspond à un usinage (A ou B). Chaque bit est à 0 tant que l'usinage n'est pas réalisé ou est non conforme aux exigences du cahier des charges. Le bit passe à 1 lorsque l'opération d'usinage est réussie.

Dans un premier temps, il est nécessaire de construire une cellule de base représentant le suivi des pièces sur l'un des deux sites d'usinage. Ceci est représenté figure 4.18 où le modèle est dédié au premier usinage. L'opération de contrôle est supposée restituer une information du type B, pièce Bonne, R, pièce à Retoucher, E pièce à écarter.



**Figure 4.18 : Cellule élémentaire**

### Modélisation du site de production par RDPC

A partir de ce modèle de base, la synthèse du modèle global pour les deux usinages va être élaborée. Dans ce modèle, le fait qu'une pièce évite le site d'usinage qu'elle a déjà subi avec succès est représenté. Par ailleurs, la réorientation des pièces arrivant en sortie et n'ayant pas subi avec succès toutes les opérations est prévue dans le modèle.

Dans ce type de modèle, le cheminement des jetons apparaît clairement. Ce chemin est tributaire de l'état des pièces que représentent les jetons en question. Il apparaît également que la nature des couleurs est susceptible de changer lors du franchissement des diverses transitions.

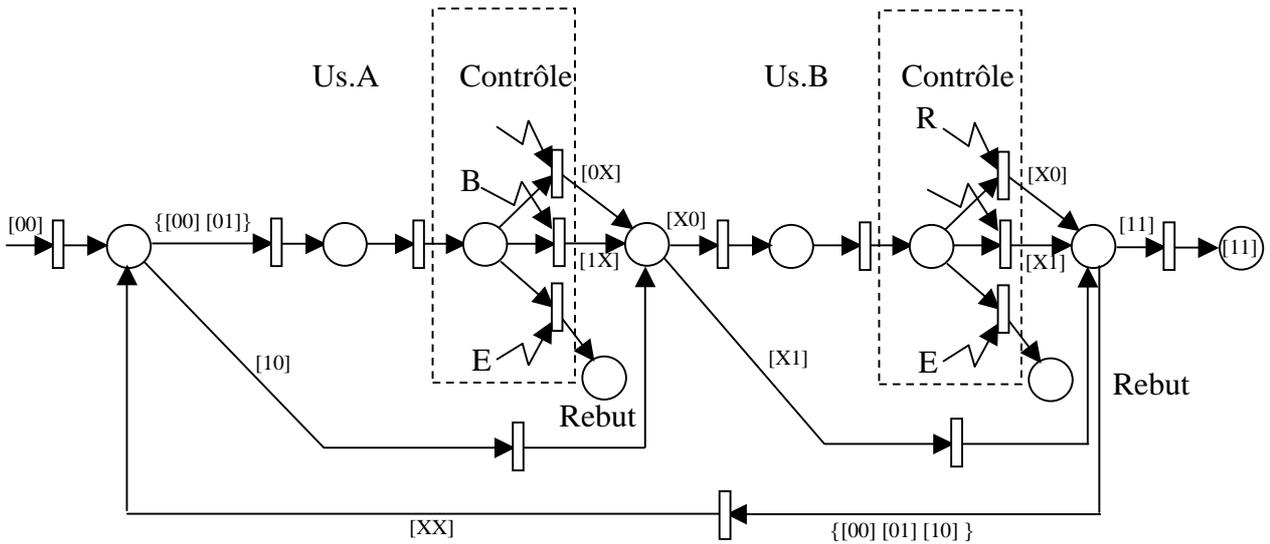


Figure 4.19 : Modèle du site de double usinage

### 7 Surveillance, supervision d'un système de production

La figure 4.20 représente un tel modèle, construit à l'aide d'un réseau de Petri non coloré. Les jetons entrent alors sur le site des machines dont l'activité nécessite l'utilisation d'un robot, ressource commune. Son occupation est régie par un autre séquenceur qui le dédie à l'une ou l'autre des deux machines selon un protocole défini par ce séquenceur.

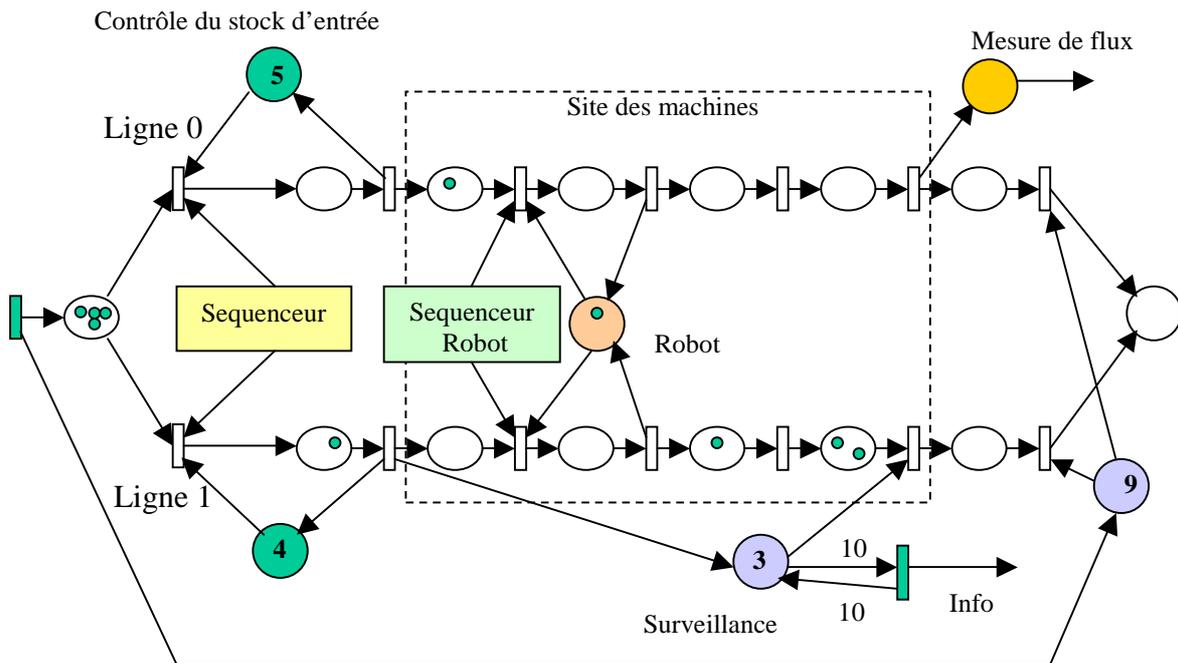


Figure 4.20 : Modèle d'un site de production

# BIBLIOGRAPHIE

## OUVRAGES :

G.VIDAL-NAQUET et A.CHOQUET-GENIET : *Réseaux de Petri et systèmes parallèles*.  
1992 Armand COLIN

J-M. PROTH : *Les réseaux de Petri pour la configuration et la gestion des systèmes de production*.  
1995 MASSON

R.DAVID et H.ALLA : *Du GRAFCET aux Réseaux de Petri*.  
1997 HERMES

A.DOLGUI et J-M.PROTH : *Les systèmes de production modernes Vol 1 et 2*.  
2006 HERMES Lavoisier

A.CHOQUET-GENIET : *Les Réseaux de Petri, un outil de modélisation*.  
2006 DUNOD

## REVUES ET CONGRES :

M.DI MASCOLO : *Modelling and analysis of kanban systems using Petri nets and queueing networks»*  
*International Journal of Flexible Manufacturing Systems*. Kluwer Academic Publishers p. 275-307,  
Boston,1991.

J.MOODY, K-M.YAMALIDOU P.LEMMON et ANTSAKLIS : *Feedback control of Petri nets based on place invariants*. in Proceedings of 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, pp. 3104-09, 1994.

A.ZIMMERMANN : *Modeling of manufacturing systems and production routes using colored Petri nets*. 3rd IASTED Int. Conf. On Robotics and Manufacturing, Cancun, Mexico, p. 380-383, 1995.

P. BRUCKER et J.L.HURINK : *Complex Sequencing Problems and Local Search Heuristics*. In: *Meta-Heuristics: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 151-166, 1996.

M.BOURCERIE et J-Y.MOREL : *Algebraically structured colored Petri nets to model sequential processes*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B Vol 27 n°4 August 1997.

K.SANTAREK et I-M.BUSEIF : *Modelling and design of flexible manufacturing systems using SADT and Petri Net tools*. JMPT 1998.

YEE, SHANG-TAE : *A petri net model to determine optimal assembly sequences with assembly operation constraint*. Journal of Manufacturing Systems, 1999.

M.BOURCERIE et J-L.FERRIER : *Une méthodologie pour la modélisation de séquencements complexes par Réseaux de Petri*. Nantes, CIFA 2002.

G.J.TSINARAKIS, N.C.TSOURVELOUDIS et K.P.VALAVANIS : *Petri Net Modeling of Routing and Operation Flexibility in Production Systems*. Intelligent Control, 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium. Mediterrean Conference on Control and Automation, Volume , Issue , 2005 Page(s): 352 – 357.

M.BOURCERIE et F.GUEGNARD : *Une Régulation de flux par Réseaux de Petri sur une chaîne de production*. CPI 2007, Rabat, Maroc, 22-24 octobre 2007.

M.BOURCERIE : *A Flow Regulation by generalized Petri Net*. EUROSIM 2007, Ljubjana, Slovenia, 2007.

M.BOURCERIE et F.GUEGNARD : *Sur la flexibilité des modèles de séquenceurs dynamiques par réseaux de Petri*. CIFA 2008, Bucarest, Roumanie 3-5 septembre 2008