

**Calcul ensembliste pour l'automatique
et ses applications en estimation,
commande robuste et robotique**

Luc Jaulin,
Guillaume Baffet, Xavier Baguenard,
Massa Dao, Nicolas Delanoue, Pau Herrero
LISA-Angers

Séminaire au LIRMM, Montpellier
Mercredi 19 novembre 2003, 14h-16h.

1 Motivations

1.1 Ensemble de vraisemblance

Modèle : $y_m(\mathbf{p}, t) = p_1 e^{-p_2 t}$.

Paramètres : p_1, p_2 .

Temps de mesure : $t_1, t_2, \dots, t_m$

Barres de mesure : $[y_1^-, y_1^+], [y_2^-, y_2^+], \dots, [y_m^-, y_m^+]$

Ensemble de vraisemblance :

$$\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2, \forall i \in \{1, \dots, m\}, y_m(\mathbf{p}, t_i) \in [y_i^-, y_i^+] \right\}.$$

Logiciel SetDemo

fait par Guillaume Baffet (étudiant en maîtrise de
physique et applications, Angers)

Logiciel disponible sur

<http://www.istia.univ-angers.fr/~jaulin/demo.html>

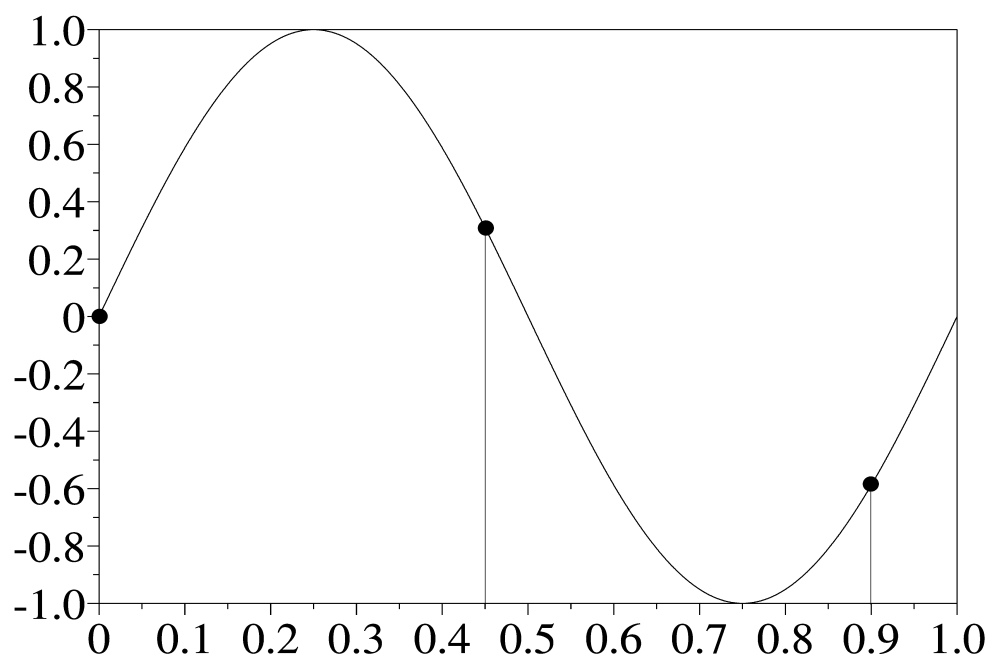
(illustration de l'ensemble de vraisemblance par
Setdemo)

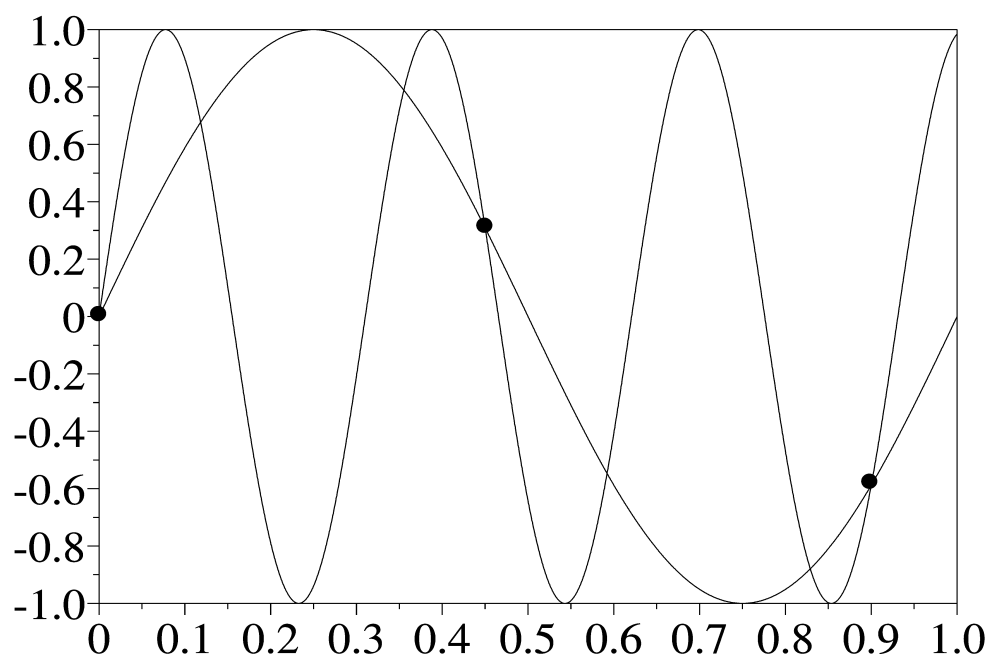
Modèle : $y_m(\mathbf{p}, t) = p_1 \sin(2\pi p_2 t)$.

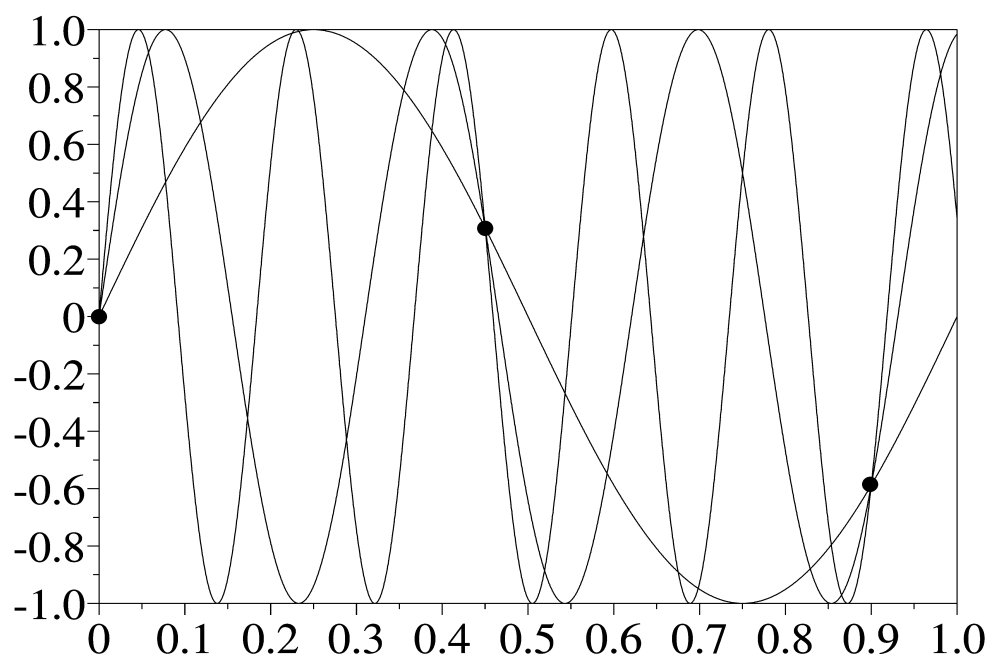
Paramètres : p_1, p_2 .

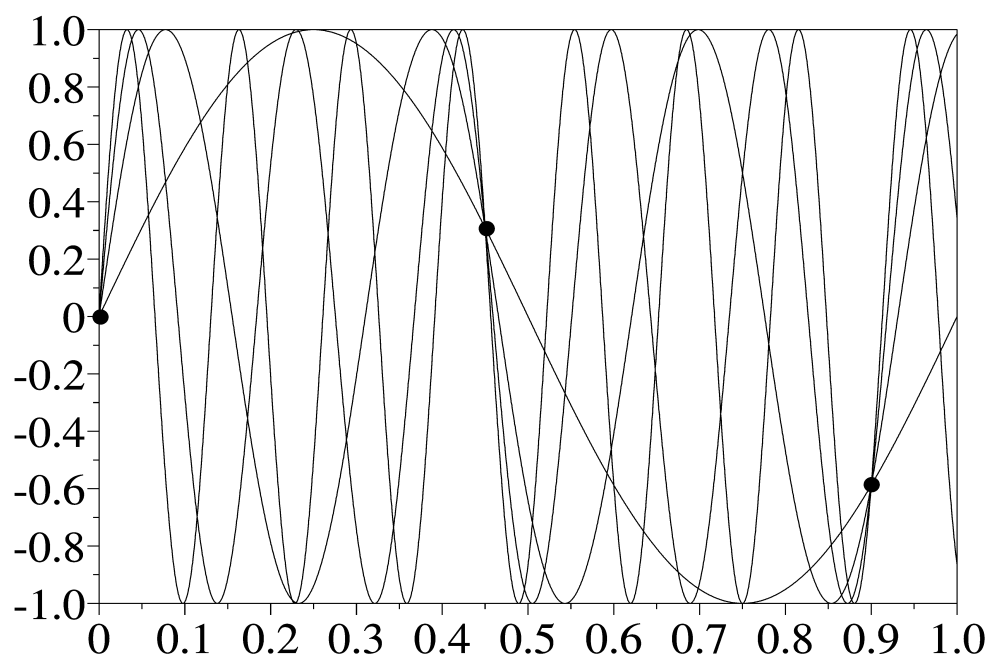
Temps de mesure : $t_1 = 0, t_2 = T_e, t_3 = 2T_e, \dots$

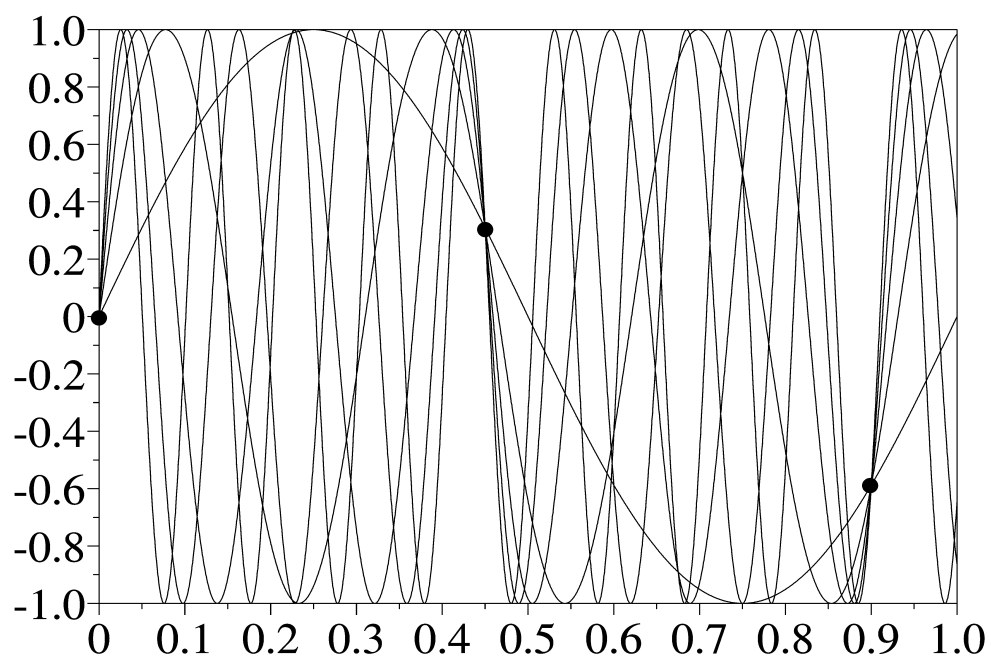
Barres de mesure : $[y_1^-, y_1^+], [y_2^-, y_2^+], [y_3^-, y_3^+], \dots$





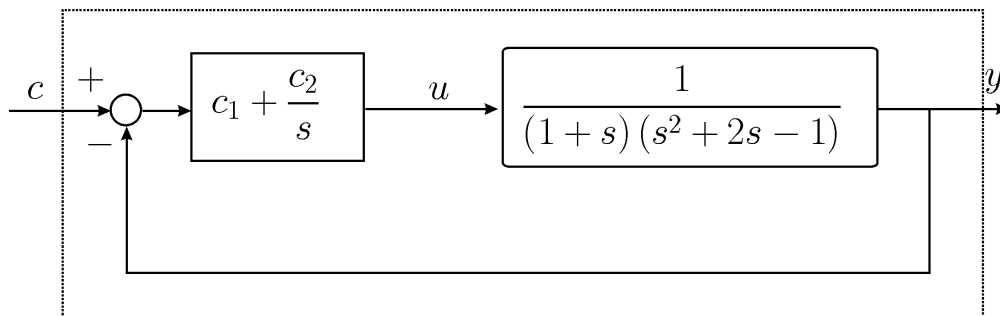






(Montrer l'ensemble de vraisemblance avec SetDemo).

1.2 Domaine de stabilité



Domaine de stabilité $\mathbb{S}$: ensemble des c_1, c_2 tels que le système bouclé soit stable.

(Montrer le domaine de stabilité avec Setdemo)

2 Propagation de contraintes sur les intervalles

2.1 Calcul par intervalles

Si $\diamond \in \{+, -, \cdot, /, \max, \min\}$

$$[x] \diamond [y] = [\{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}].$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} [-1, 3] + [2, 5] &= [?, ?], \\ [-1, 3] \cdot [2, 5] &= [?, ?], \\ [-1, 3] / [2, 5] &= [?, ?], \\ [-1, 3] \vee [2, 5] &= [?, ?]. \end{aligned}$$

Si $\diamond \in \{+, -, \cdot, /, \max, \min\}$

$$[x] \diamond [y] = [\{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}].$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} [-1, 3] + [2, 5] &= [1, 8], \\ [-1, 3] \cdot [2, 5] &= [-5, 15], \\ [-1, 3] / [2, 5] &= [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}], \\ [-1, 3] \vee [2, 5] &= [2, 5]. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
[x^-, x^+] + [y^-, y^+] & = & [?, ?], \\
[x^-, x^+].[y^-, y^+] & = & [?, ?], \\
[-1, 3] \vee [2, 5] & = & [?, ?].
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
[x^-, x^+] + [y^-, y^+] &= [x^- + y^-, x^+ + y^+], \\
[x^-, x^+].[y^-, y^+] &= [x^-y^- \wedge x^+y^- \wedge x^-y^+ \wedge x^+y^+, \\
&\quad x^-y^- \vee x^+y^- \vee x^-y^+ \vee x^+y^+], \\
[x^-, x^+] \vee [y^-, y^+] &= [\vee(x^-, y^-), \vee(x^+, y^+)].
\end{aligned}$$

Si $f \in \{\cos, \sin, \text{sqr}, \text{sqrt}, \log, \exp, \dots\}$

$$f([x]) = [\{f(x) \mid x \in [x]\}].$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}\sin([0, \pi]) &= [\text{?}, \text{?}], \\ \text{sqr}([-1, 3]) &= [\text{?}, \text{?}], \\ \text{abs}([-7, 1]) &= [\text{?}, \text{?}], \\ \text{sqrt}([-10, 4]) &= [\text{?}, \text{?}], \\ \log([-2, -1]) &= [\text{?}, \text{?}].\end{aligned}$$

Si $f \in \{\cos, \sin, \text{sqr}, \text{sqrt}, \log, \exp, \dots\}$

$$f([x]) = [\{f(x) \mid x \in [x]\}].$$

Par exemple,

$$\sin([0, \pi]) = [0, 1],$$

$$\text{sqr}([-1, 3]) = [-1, 3]^2 = [0, 9],$$

$$\text{abs}([-7, 1]) = [0, 7],$$

$$\text{sqrt}([-10, 4]) = \sqrt{[-10, 4]} = [0, 2],$$

$$\log([-2, -1]) = \emptyset.$$

2.2 Projection de contraintes

Soient 3 variables x, y, z telles que

$$x \in [1, 5],$$

$$y \in [2, 4],$$

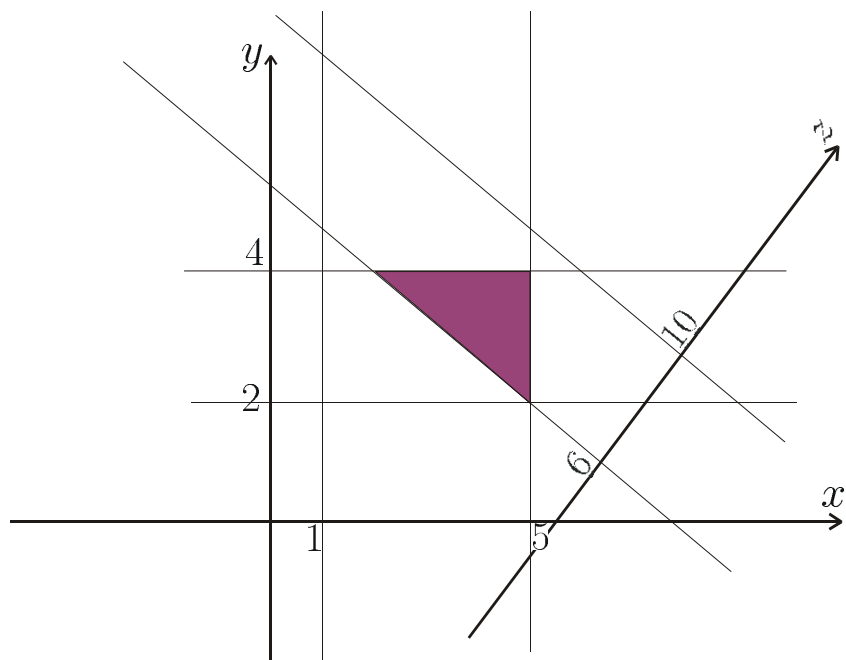
$$z \in [6, 10],$$

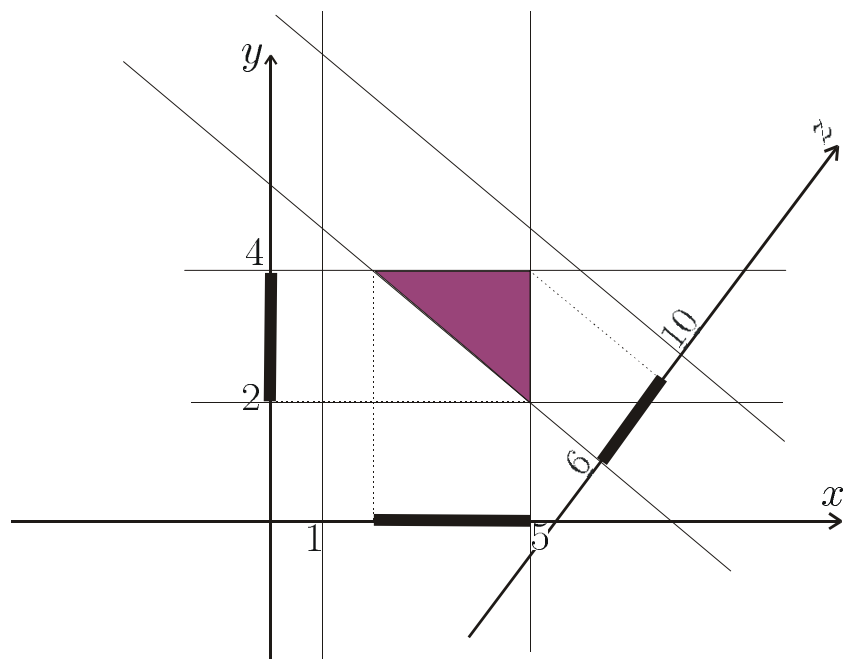
$$z = x + y.$$

Les valeurs 1 pour x et 10 pour z sont dites inconsistantes.

Projeter une contrainte (ici, $z = x + y$), c'est calculer les plus petits intervalles ne contenant que des valeurs consistantes. Pour notre exemple, cela revient à projeter 3 fois (suivant x, y , puis z) le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in [1, 5] \times [2, 4] \times [6, 10] \mid z = x + y\}.$$





2.3 Méthode numérique de projection

Puisque $x \in [1, 5]$, $y \in [2, 4]$, $z \in [6, 10]$, $z = x + y$,
on a

$$z = x + y \Rightarrow z \in \quad [?, ?]$$

$$x = z - y \Rightarrow x \in \quad [?, ?]$$

$$y = z - x \Rightarrow y \in \quad [?, ?]$$

Puisque $x \in [1, 5], y \in [2, 4], z \in [6, 10], z = x + y$,
on a

$$z = x + y \Rightarrow z \in [6, 10] \cap ([1, 5] + [2, 4]) \\ = [6, 10] \cap [3, 9] = [6, 9].$$

$$x = z - y \Rightarrow x \in [1, 5] \cap ([6, 10] - [2, 4]) \\ = [1, 5] \cap [2, 8] = [2, 5].$$

$$y = z - x \Rightarrow y \in [2, 4] \cap ([6, 10] - [1, 5]) \\ = [2, 4] \cap ([1, 9] - [1, 5]) = [2, 4].$$

2.4 Propagation de contraintes

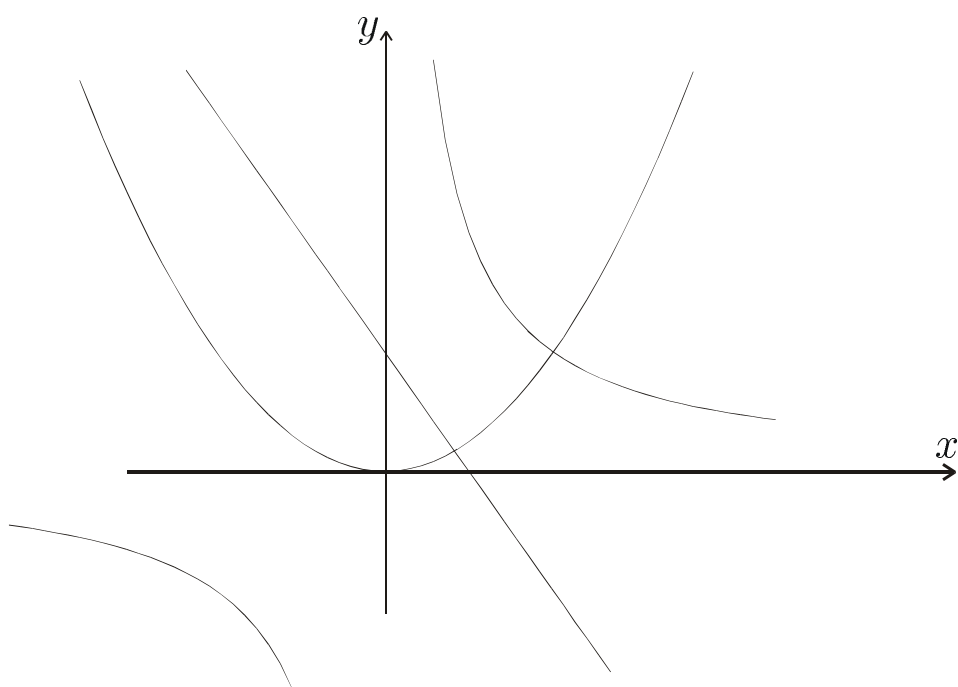
Soient les trois contraintes suivantes

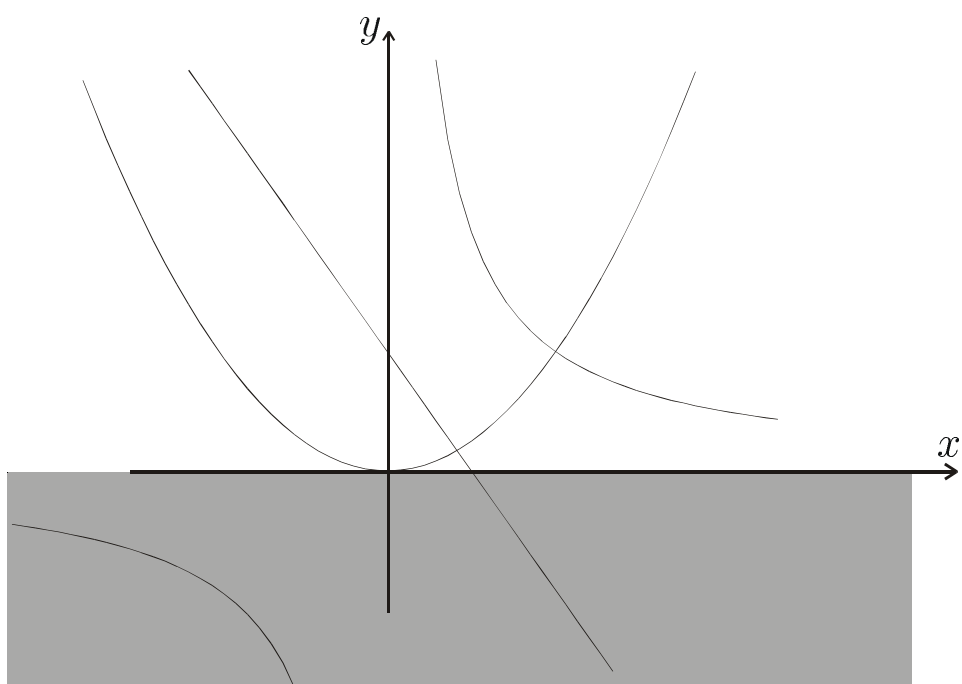
$$(C_1) : y = x^2,$$

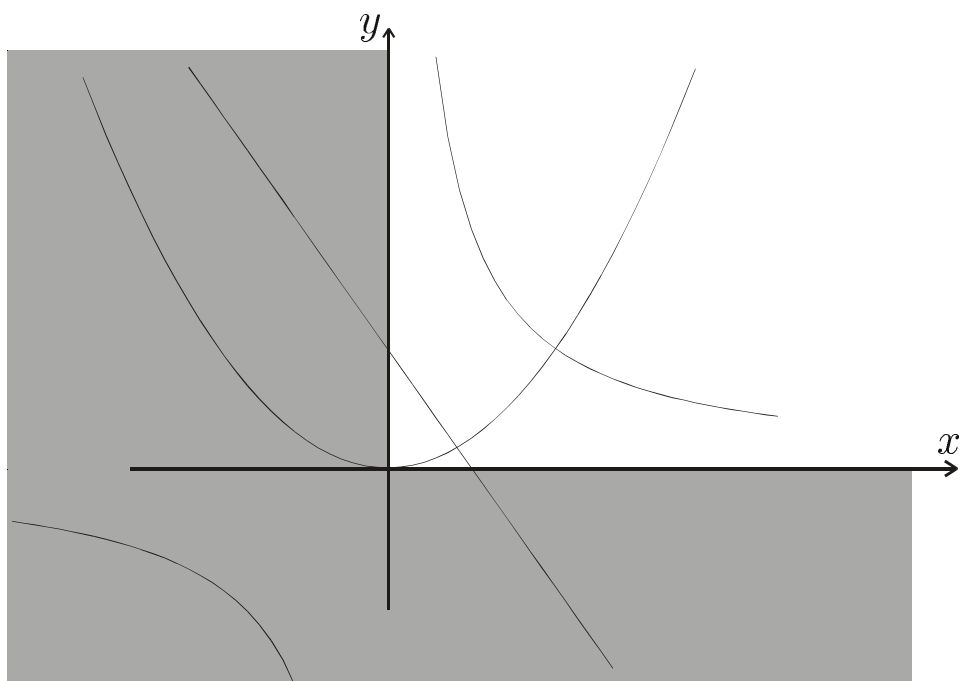
$$(C_2) : xy = 1,$$

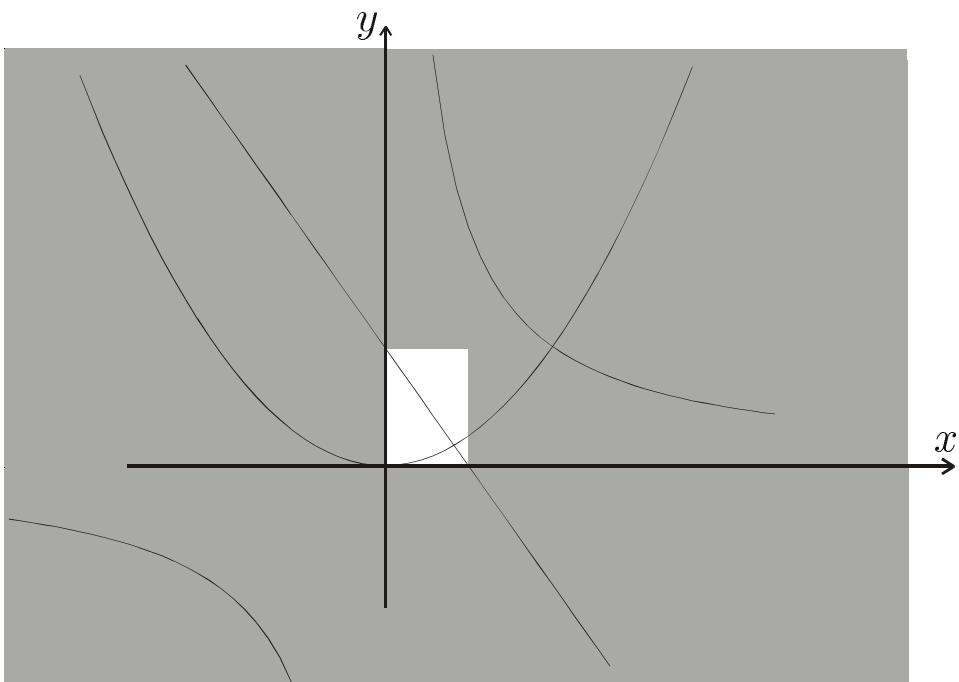
$$(C_3) : y = -2x + 1.$$

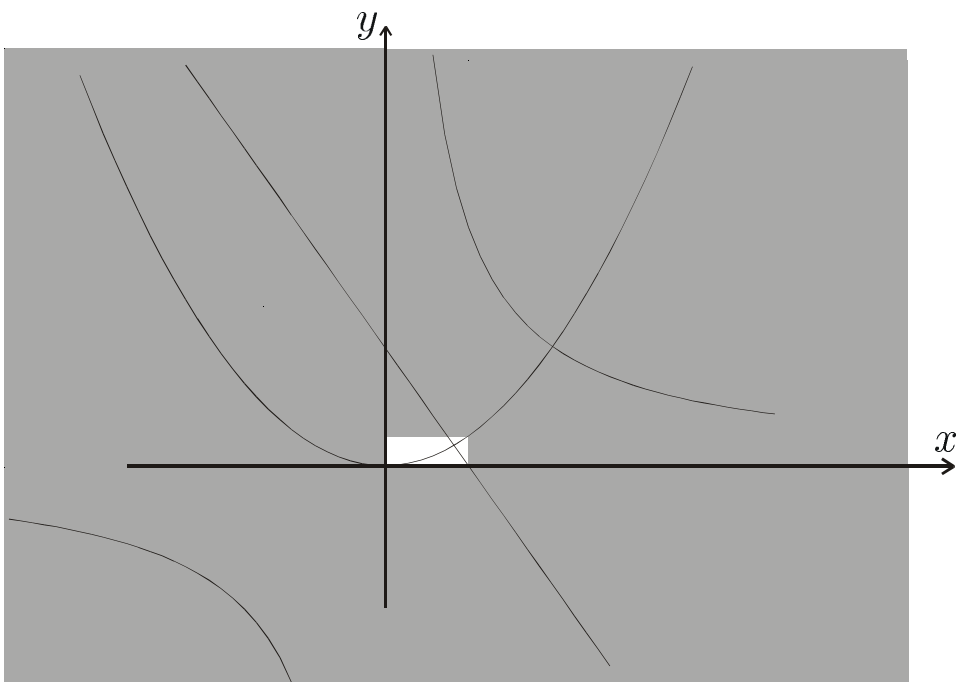
A chaque variable on affecte le domaine $] - \infty, \infty[$.
Une *propagation de contrainte* consiste à projeter les contraintes jusqu'à l'équilibre.











$$\begin{aligned}
(C_1) &\Rightarrow y \in]-\infty, \infty[^2 = [0, \infty[\\
(C_2) &\Rightarrow x \in 1/[0, \infty[= [0, \infty[\\
(C_3) &\Rightarrow y \in [0, \infty[\cap ((-2) \cdot [0, \infty[+ 1) \\
&\quad = [0, \infty[\cap (]-\infty, 1]) = [0, 1] \\
&\quad x \in [0, \infty[\cap (-[0, 1]/2 + 1/2) \\
&\quad = [0, 1/2] \\
(C_1) &\Rightarrow y \in [0, 1] \cap [0, 1/2]^2 = [0, 1/4] \\
(C_2) &\Rightarrow x \in [0, 1/2] \cap 1/[0, 1/4] = \emptyset \\
&\quad y \in [0, 1/4] \cap 1/\emptyset = \emptyset
\end{aligned}$$

2.5 Décomposition

Pour les contraintes plus complexes, il nous faut effectuer une décomposition. Par exemple,

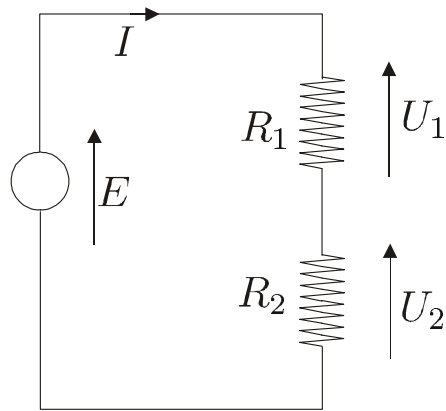
$$\begin{aligned} x + \sin(y) - xz &\leq 0, \\ x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], z \in [-1, 1] \end{aligned}$$

se décompose en

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \sin(y) \\ b = x + a \\ c = xz \\ b - c = d \end{array} \right., \quad \begin{array}{ll} x \in [-1, 1] & a \in]-\infty, \infty[\\ y \in [-1, 1] & b \in]-\infty, \infty[\\ z \in [-1, 1] & c \in]-\infty, \infty[\\ & d \in]-\infty, 0] \end{array}$$

3 Applications

3.1 Problème d'estimation



Contraintes

$$P = EI; E = (R_1 + R_2) I;$$

$$U_1 = R_1 I; U_2 = R_2 I; E = U_1 + U_2.$$

Domaines initiaux

$$\begin{array}{ll} R_1 \in [0, \infty[\Omega, & R_2 \in [0, \infty[\Omega, \\ E \in [23, 26]\text{V}, & I \in [4, 8]\text{A}, \\ U_1 \in [10, 11]\text{V}, & U_2 \in [14, 17]\text{V}, \\ P \in [124, 130]\text{W}, & \end{array}$$

Contraintes

$$P = EI; E = (R_1 + R_2) I;$$

$$U_1 = R_1 I; U_2 = R_2 I; E = U_1 + U_2.$$

Domaines contractés

$$\begin{aligned} R_1 &\in [1.84, 2.31] \Omega, & R_2 &\in [2.58, 3.35] \Omega, \\ E &\in [24, 26] \text{V}, & I &\in [4.769, 5.417] \text{A}, \\ U_1 &\in [10, 11] \text{V}, & U_2 &\in [14, 16] \text{V}, \\ P &\in [124, 130] \text{W}, \end{aligned}$$

Programme Scilab disponible sur

[http://www.istia.univ-angers.fr/
~jaulin/propagR1R2.sce](http://www.istia.univ-angers.fr/~jaulin/propagR1R2.sce)

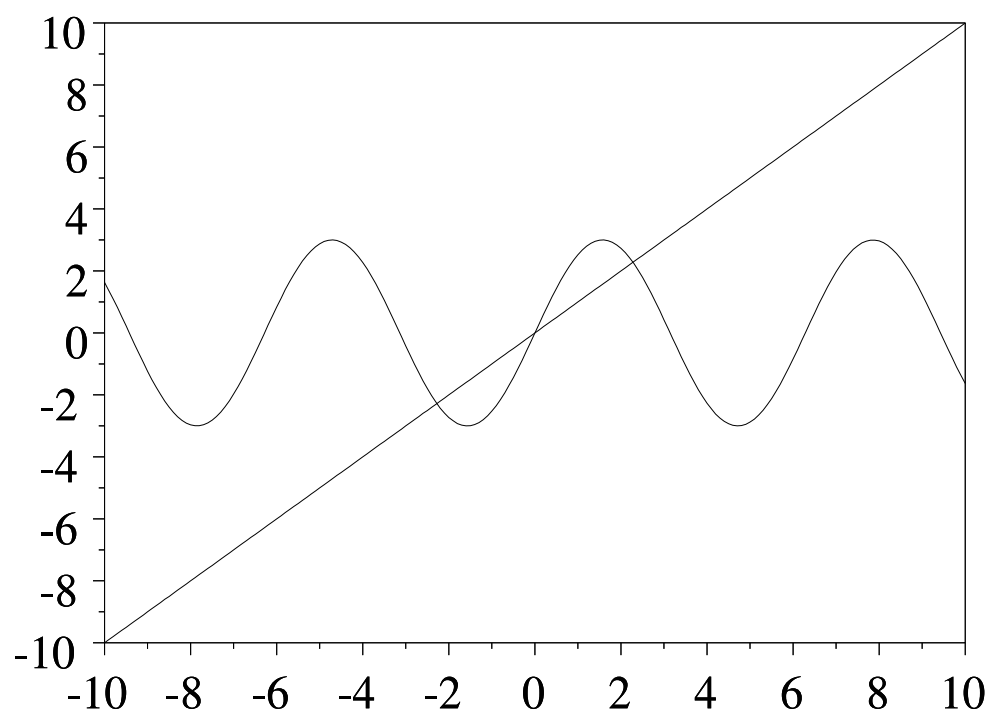
3.2 Résolution d'équations non-linéaires

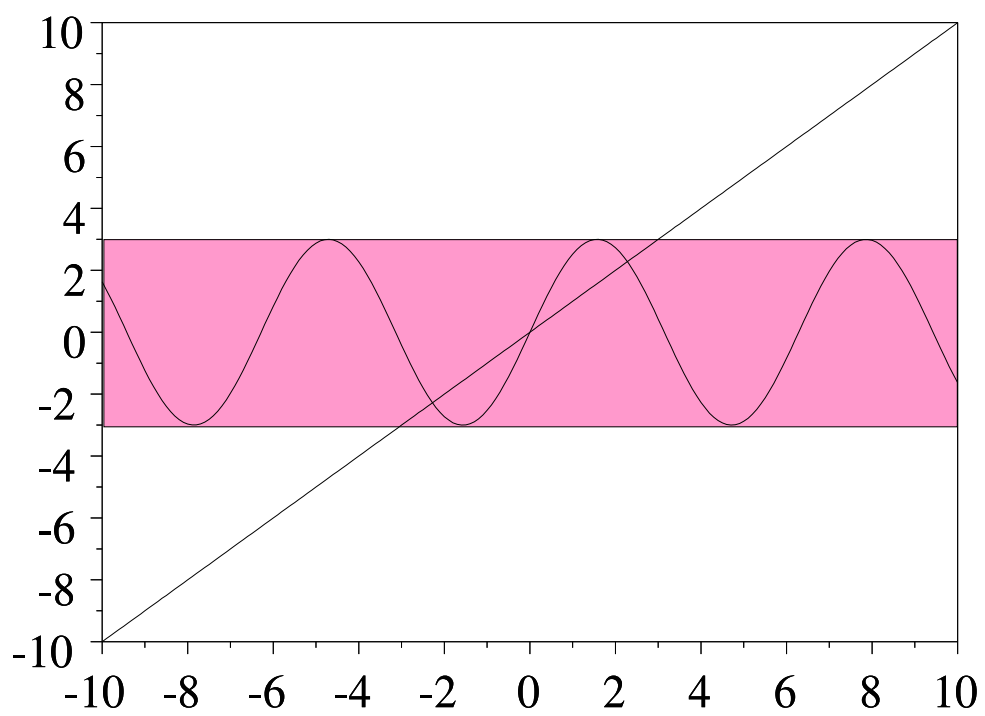
Cherchons par exemple à résoudre

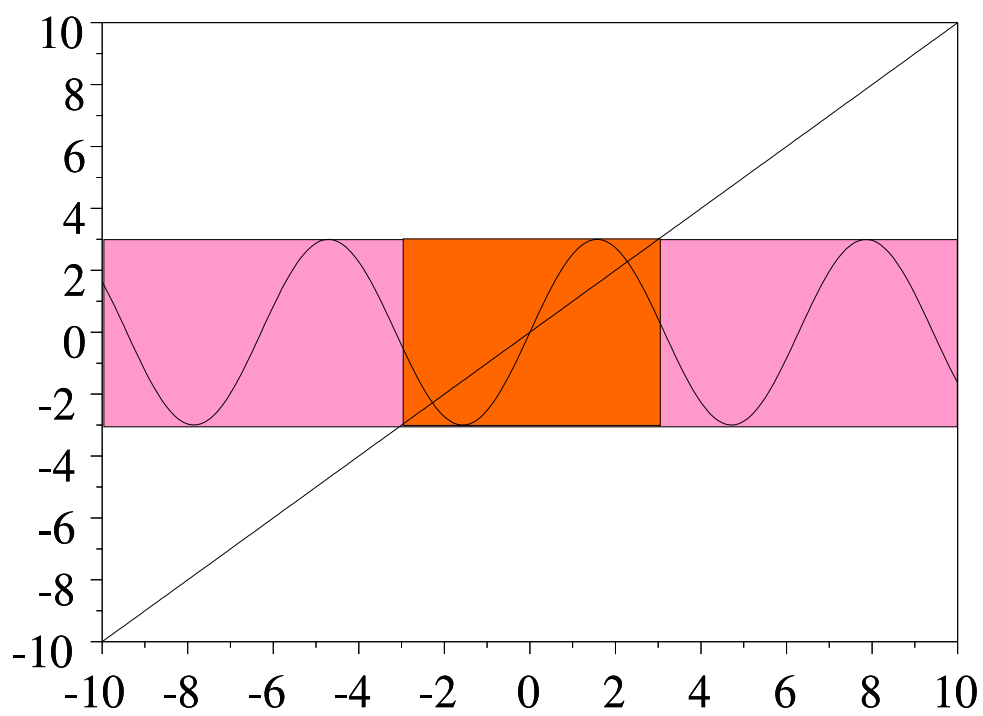
$$3 \sin(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

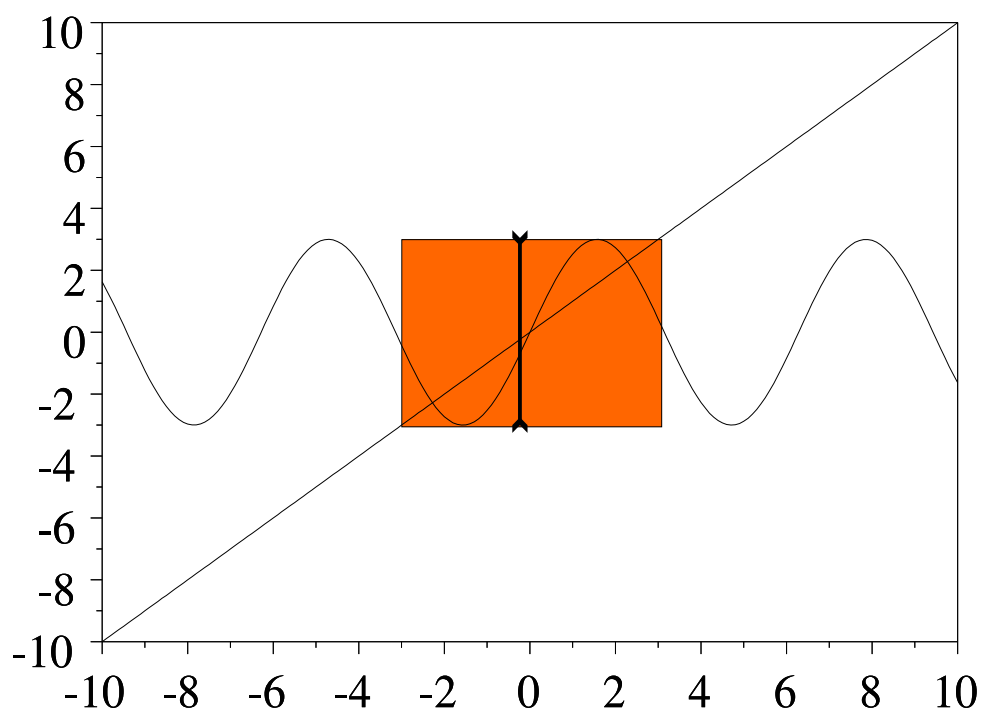
Cette équation se décompose en

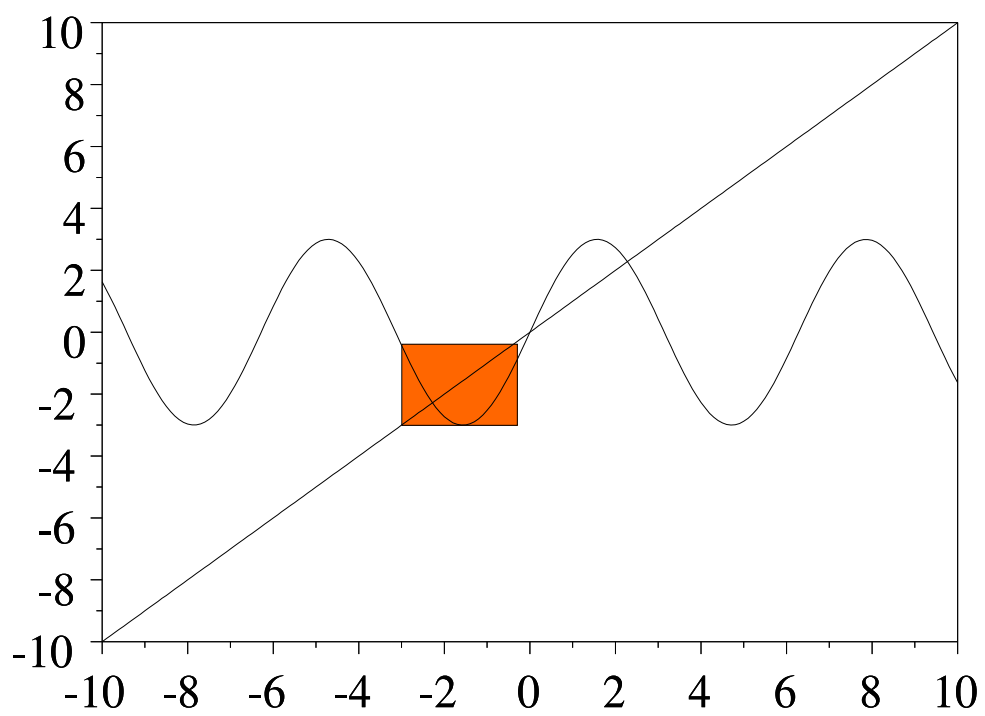
$$\begin{cases} y = 3 \sin(x) \\ y = x \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

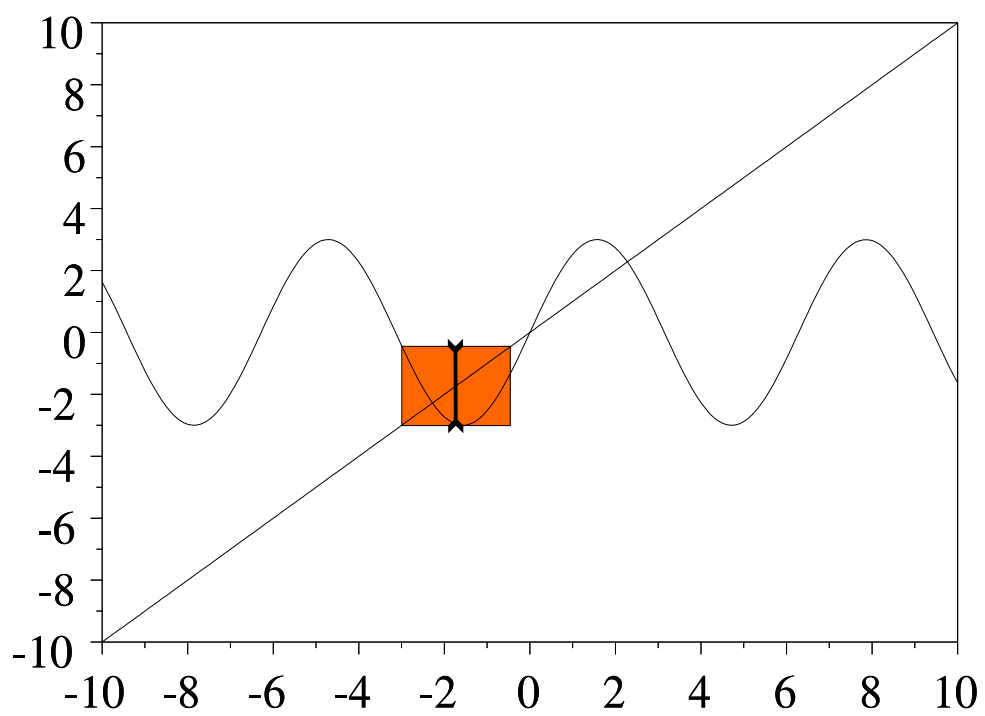


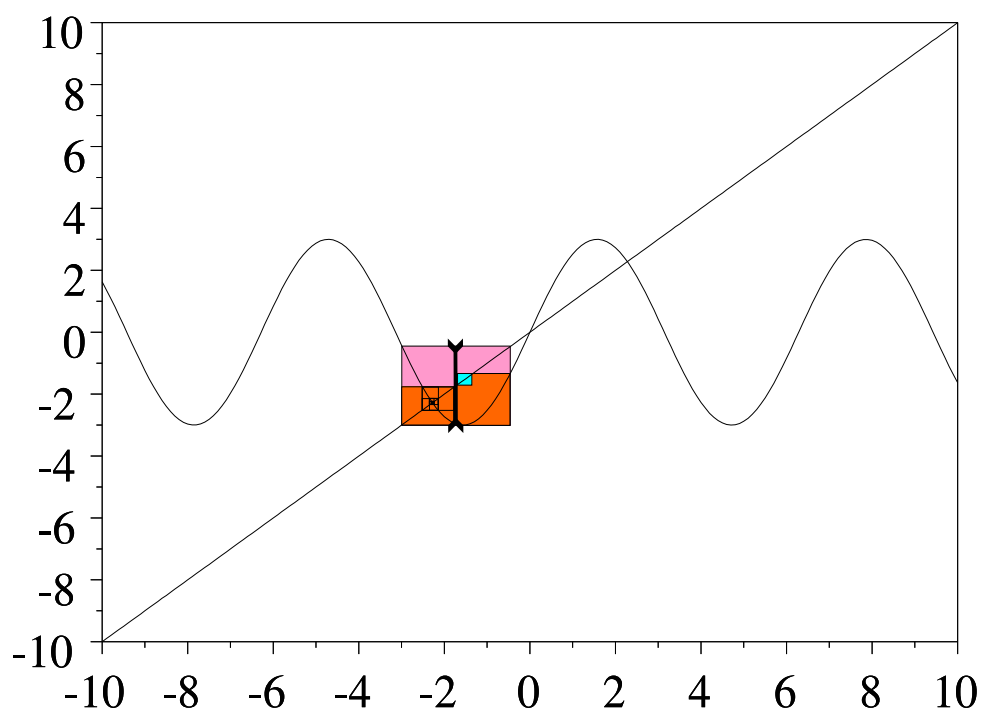












(Illustrer la résolution à l'aide du solveur Proj2D)

3.3 Prouver qu'un ensemble de contraintes est toujours satisfait

Idée : On complémente l'ensemble des contraintes.

Par exemple, montrer que

$$\forall x \in [x], \forall y \in [y], f(x, y) \leq 0 \text{ et } g(x, y) \leq 0,$$

revient à montrer que

$$\{(x, y) \in [x] \times [y] \mid f(x, y) > 0 \text{ ou } g(x, y) > 0\} = \emptyset$$

c'est-à-dire que

$$\{(x, y) \in [x] \times [y] \mid \max(f(x, y), g(x, y)) > 0\} = \emptyset.$$

3.4 Stabilité robuste

(exemple tiré de Dorf et Bishop, Modern Control Systems, p. 313)

Moto roulant à une vitesse constante de 1m/s.

Entrée du système : angle θ du guidon.

Sortie est l'angle de roulis ϕ de la moto.

Fonction de transfert du système :

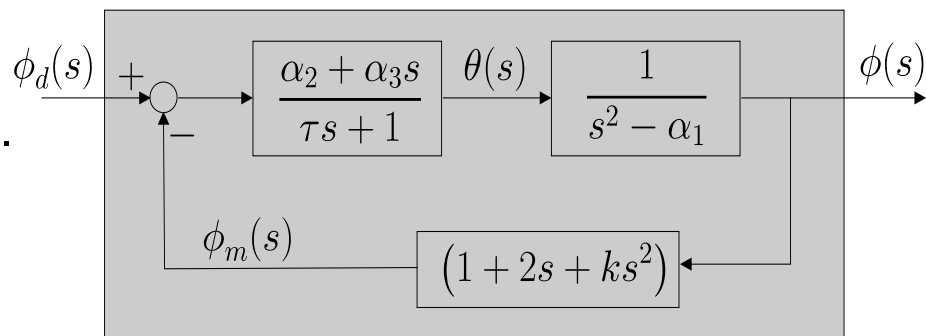
$$\phi(s) = \frac{1}{s^2 - \alpha_1} \theta(s).$$

Capteur :

$$\phi_m(s) = (1 + 2s + ks^2) \phi(s).$$

Régulateur :

$$\theta(s) = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 s}{\tau s + 1} (\phi_d(s) - \phi_m(s)).$$



Domaines pour les paramètres

$$\begin{aligned}
 [\alpha_1] &= [8.8; 9.2], \quad [\alpha_2] = [2.8; 3.2], \quad [\alpha_3] = [0.8; 1.2], \\
 [\tau] &= [1.8; 2.2], \quad [k] = [-3.2; -2.8].
 \end{aligned}$$

Polynôme caractéristique :

$$a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

avec

$$a_0 = -\alpha_1 + \alpha_2,$$

$$a_1 = \alpha_3 - \alpha_1\tau + 2\alpha_2,$$

$$a_2 = \alpha_2k + 2\alpha_3 + 1,$$

$$a_3 = \tau + \alpha_3k.$$

Table de Routh :

a_3	a_1
a_2	a_0
$\frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2}$	0
a_0	0

Stabilité si

$$\text{sign}(a_3) = \text{sign}(a_2) = \text{sign}\left(\frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2}\right) = \text{sign}(a_0).$$

Stabilité robuste si

$$\forall \alpha_1 \in [\alpha_1], \forall \alpha_2 \in [\alpha_2], \forall \alpha_3 \in [\alpha_3], \forall \tau \in [\tau], \forall k \in [k], \\ \text{sign}(a_3) = \text{sign}(a_2) = \text{sign}\left(\frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2}\right) = \text{sign}(a_0).$$

c'est-à-dire, si

$$\begin{aligned} \mathbb{S} = \{ & (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau, k) \in [\alpha_1] \times [\alpha_2] \times [\alpha_3] \times [\tau] \times [k] \mid \\ & a_0 = -\alpha_1 + \alpha_2, a_1 = \alpha_3 - \alpha_1\tau + 2\alpha_2 \\ & a_2 = \alpha_2k + 2\alpha_3 + 1, a_3 = \tau + \alpha_3k \\ & b = \frac{a_2a_1 - a_3a_0}{a_2} \\ & \max(\min(a_3, a_2, b, a_0), -\max(a_3, a_2, b, a_0)) \leq 0\} \end{aligned}$$

est vide. La preuve est obtenue en moins de 10^{-3} seconde sur un Pentium 3.

3.5 Localisation d'un satellite

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1(k+1) & = & x_1(k) + 0.5 x_3(k) + w_1(k) \\ x_2(k+1) & = & x_2(k) + 0.5 x_4(k) + w_2(k) \\ x_3(k+1) & = & x_3(k) - 0.5 \frac{x_1(k)}{\sqrt{x_1^2(k)+x_2^2(k)}} + w_3(k) \\ x_4(k+1) & = & x_4(k) - 0.5 \frac{x_2(k)}{\sqrt{x_1^2(k)+x_2^2(k)}} + w_4(k) \\ y_1(k) & = & x_2(k)/x_1(k) \\ y_2(k) & = & x_1(k)x_3(k) + x_2(k)x_4(k) \\ y_3(k) & = & x_1^2(k) + x_2^2(k) \end{array} \right.$$

Fichier d'entrée du solveur Realpaver

```
x1_0 in [-oo,oo],  
x2_0 in [-oo,oo],  
x3_0 in [-oo,oo],  
x4_0 in [-oo,oo],  
w1_0 in [-0.01,0.01],  
w2_0 in [-0.01,0.01],  
w3_0 in [-0.01,0.01],  
w4_0 in [-0.01,0.01],  
y1_0 in [0.107,0.307],  
y2_0 in [-0.710,-0.510],  
y3_0 in [16.117,16.317],  
...
```

Constraints

$$x1_1 = x1_0 + 0.5 * x3_0 + w1_0,$$

$$x2_1 = x2_0 + 0.5 * x4_0 + w2_0,$$

$$x3_1 = x3_0 - 0.5 * x1_0 /$$

$$(\text{sqrt}(x1_0^2 + x2_0^2))^3 + w3_0,$$

...

Fichier en sortie du solveur

```
x1_0 in [3.89 , 4.01]
x2_0 in [0.41 , 0.95]
x3_0 in [-0.41 , -0.14]
x4_0 in [0.20 , 0.93]
y1_0 in [0.10 , 0.25]
y2_0 in [-0.71 , -0.51]
y3_0 in [16.11 , 16.31]
...
```

x1_200 in [4.38 , 4.88]

x2_200 in [-10.84 , -10.61]

x3_200 in [-0.14 , 0.54]

x4_200 in [-0.00 , 0.32]

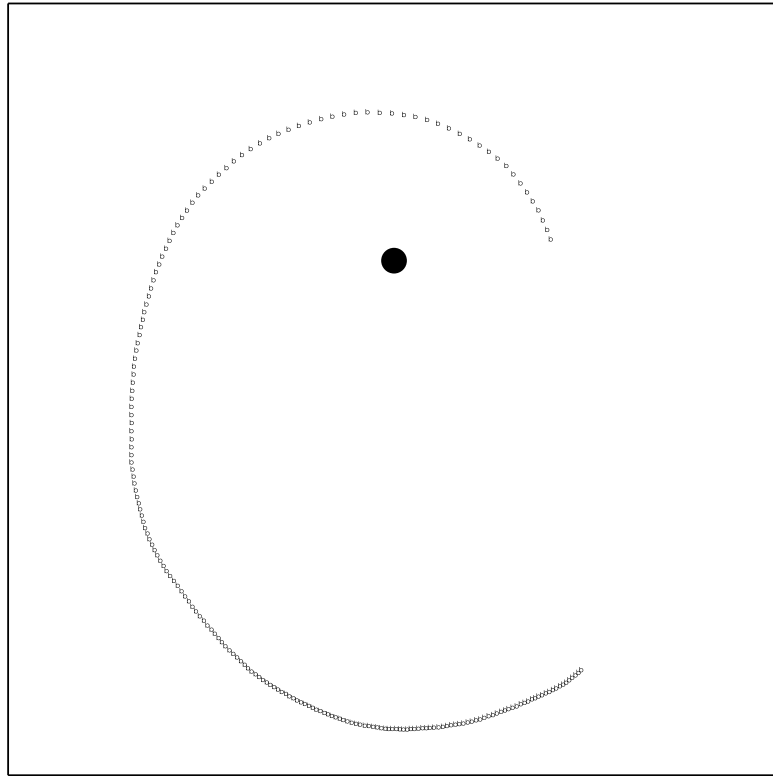
y1_200 in [-2.42 , -2.22]

y2_200 in [-0.92 , -0.72]

y3_200 in [136.61 , 136.81]

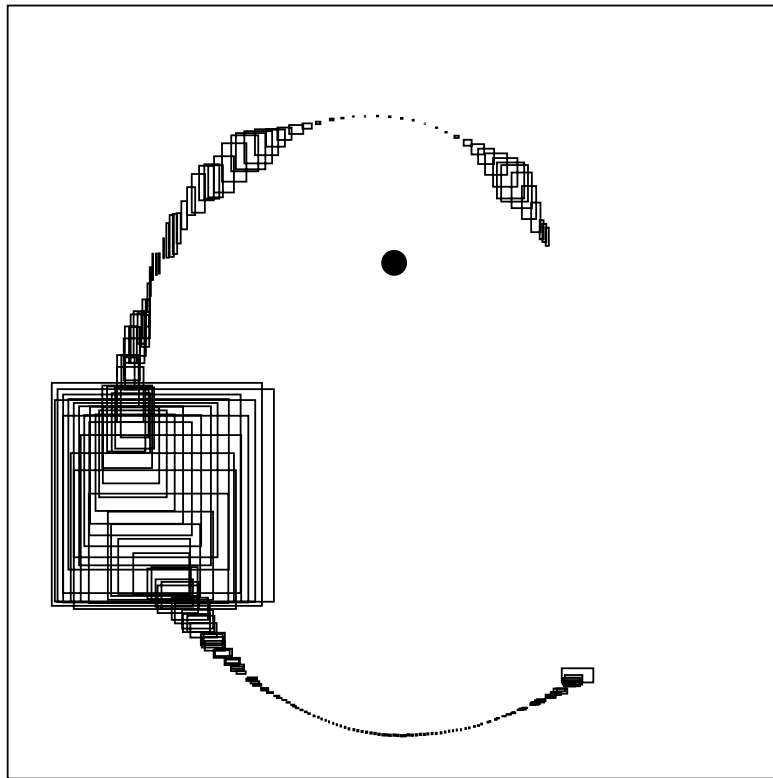
...

Elapsed time: 810 ms



Positions du satellite générées par simulation

pour k allant de 0 à 200



Pavés générés par Realpaver

Ce problème est un CSP (constraint satisfaction problem) contenant 8815 variables et 5607 contraintes.

4 Inversion ensembliste

4.1 Contracteurs

L'opérateur $\mathcal{C}_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un *contracteur* pour l'ensemble $\mathbb{X}$ de $\mathbb{R}^n$ si

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} \mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{x}] & \text{(contractance)}, \\ \mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}]) \cap \mathbb{X} = [\mathbf{x}] \cap \mathbb{X} & \text{(complétude)}. \end{cases}$$

Le contracteur $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ est

- *idempotent* si pour tout $[\mathbf{x}]$, $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}]) = [\mathbf{x}]$,
- *convergent* si pour presque tout $\mathbf{x}$, et pour toute suite de pavés $[\mathbf{x}](k)$,

$$[\mathbf{x}](k) \rightarrow \{\mathbf{x}\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}](k)) \rightarrow \{\mathbf{x}\} \cap \mathbb{X},$$

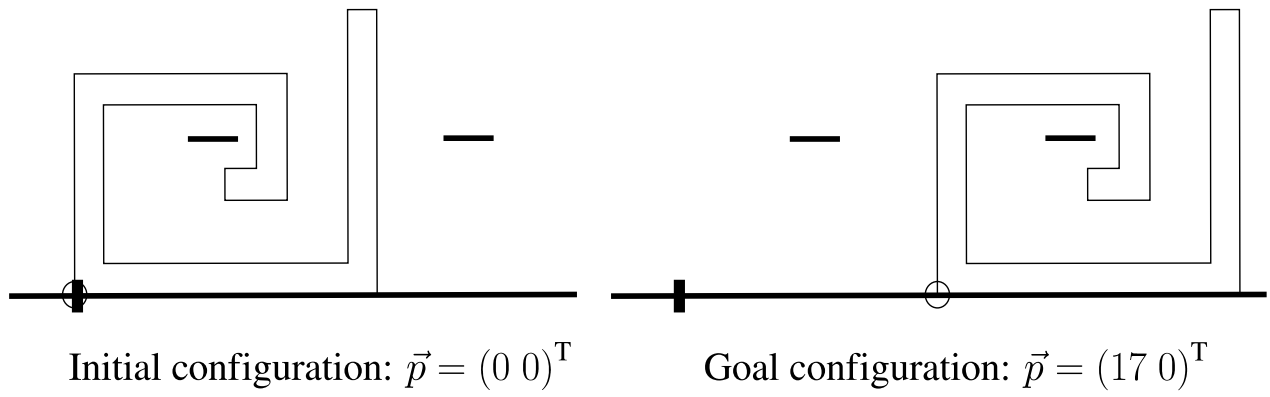
- *minimal* if

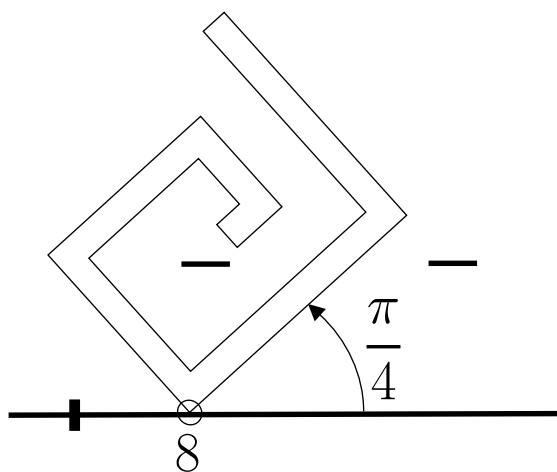
$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n, \mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}]) = [[\mathbf{x}] \cap \mathbb{X}] ,$$

- *fin* si pour tout singleton $\{\mathbf{x}\}$, $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\{\mathbf{x}\}) = \{\mathbf{x}\} \cap \mathbb{X}$,

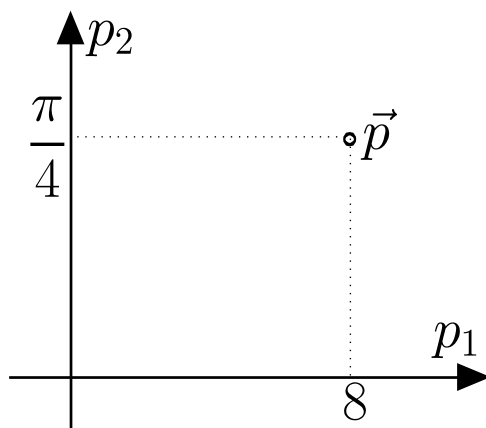
4.2 SIVIA

4.3 Planification de chemin

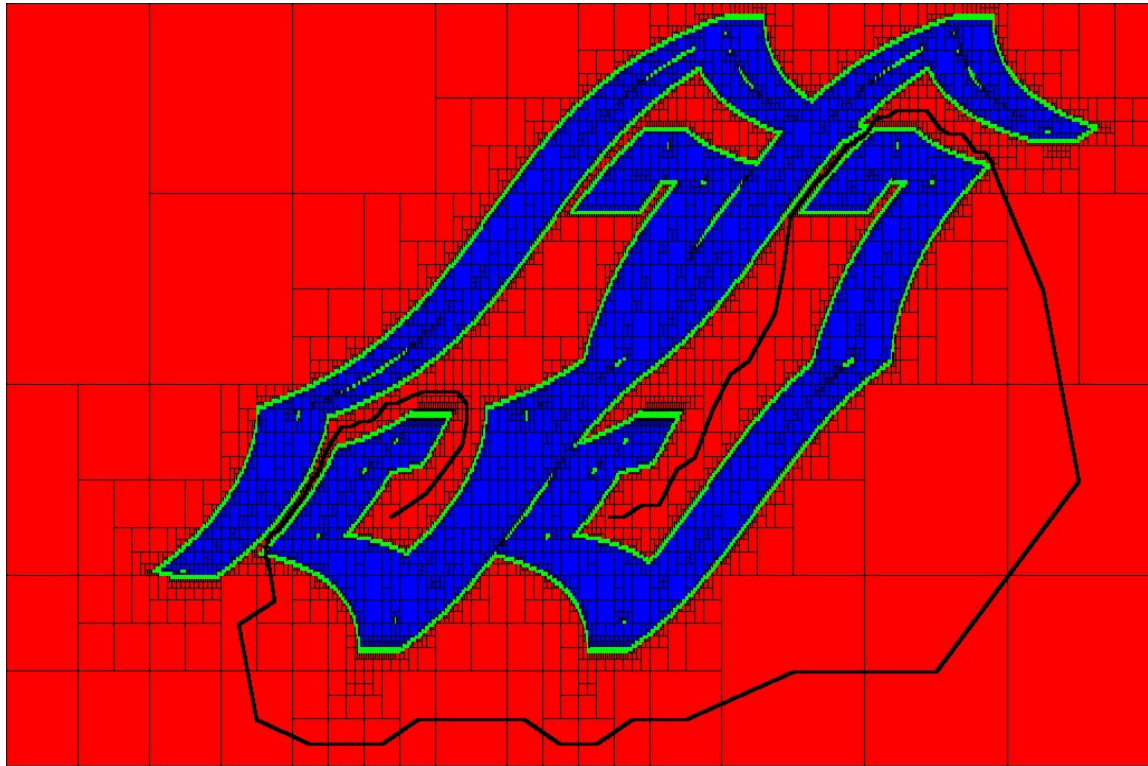


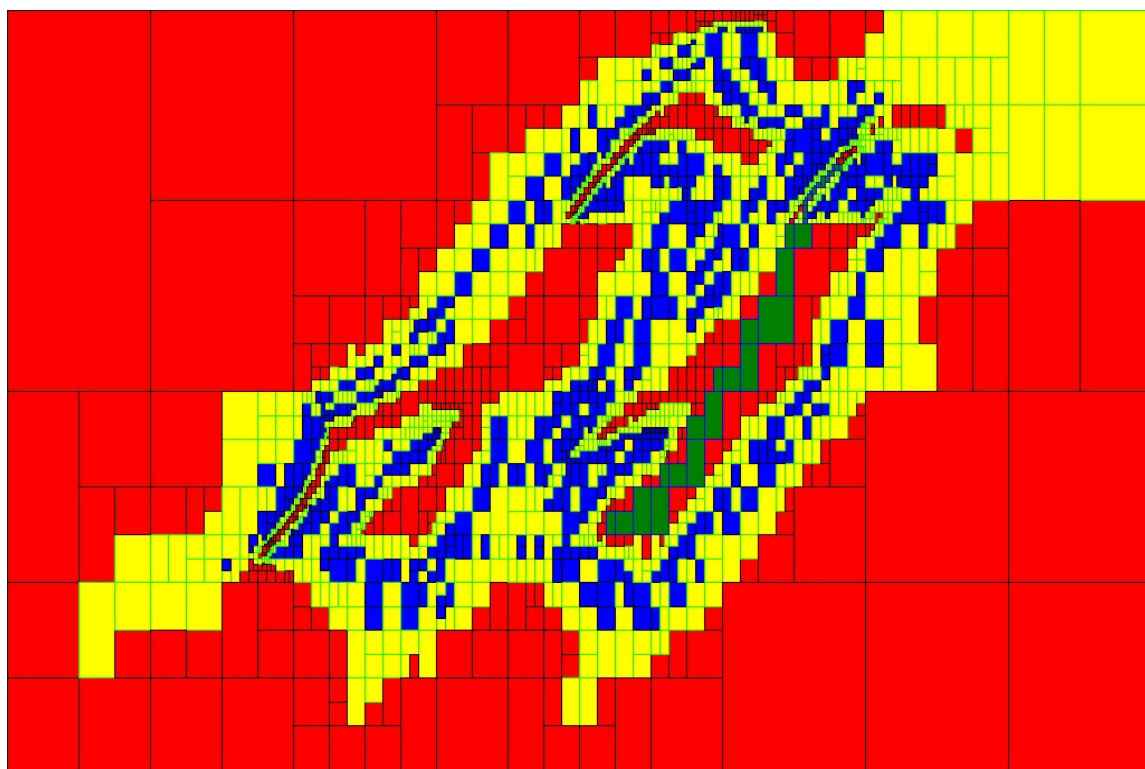


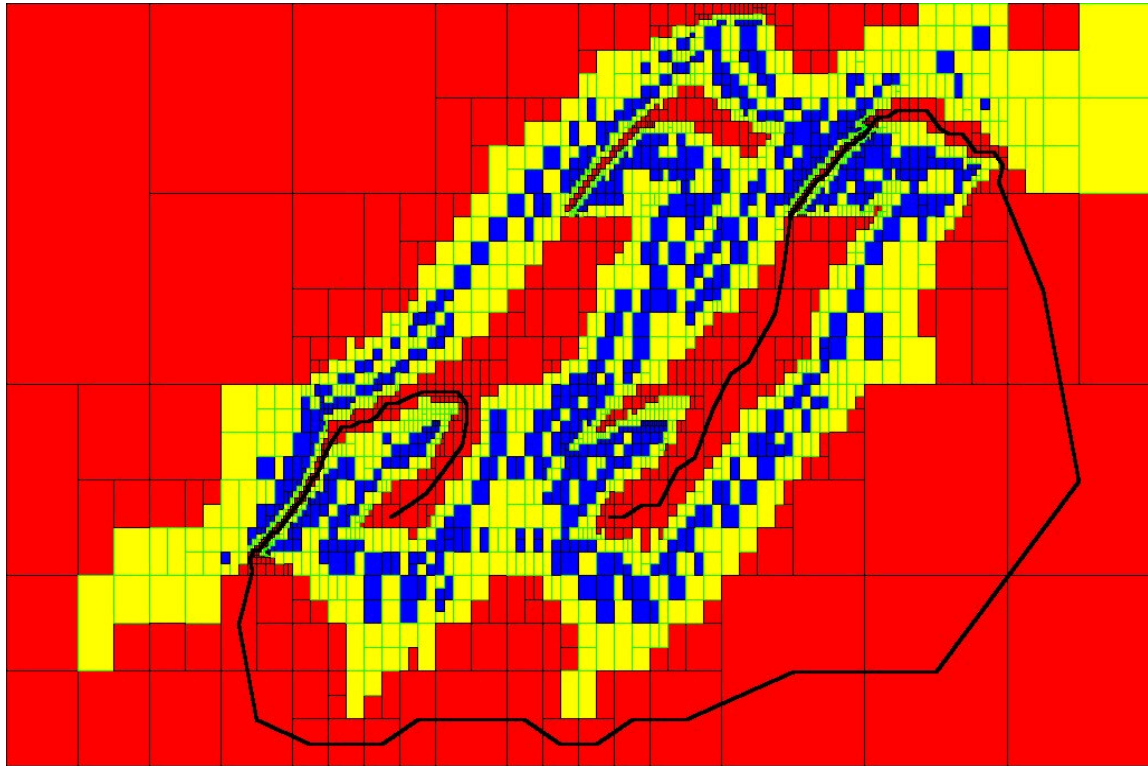
Room



Configuration space







5 Objectifs

- 1) Développer des solveurs ensemblistes pour les automaticiens et les roboticiens,
- 2) Augmenter l'efficacité des solveurs en faisant collaborer les méthodes intervalles, ellipsoïdales, LMIs, ...
- 3) Résoudre des problèmes reconnus comme difficiles.