Intégration numérique garantie et atteignabilité continue en présence d'incertitude.

Méthodes Intervalles

Nacim Ramdani

INRIA Sophia Antipolis – LIRMM Montpellier
www.lirmm.fr/~ramdani

Ecole des JDMACS, Angers 20 mars 2009

Plan

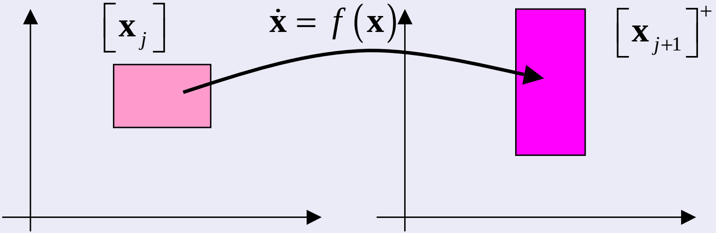
1. Contexte scientifique
2. Méthodes de Taylor intervalles
3. Théorèmes de Comparaison
4. Hybridation non linéaire
5. Références

Plan

1. Contexte scientifique
2. Méthodes de Taylor intervalles
3. Théorèmes de Comparaison
   - Systèmes dynamiques préservateurs d'ordre
   - Systèmes dynamiques non monotones
4. Hybridation non linéaire
5. Références

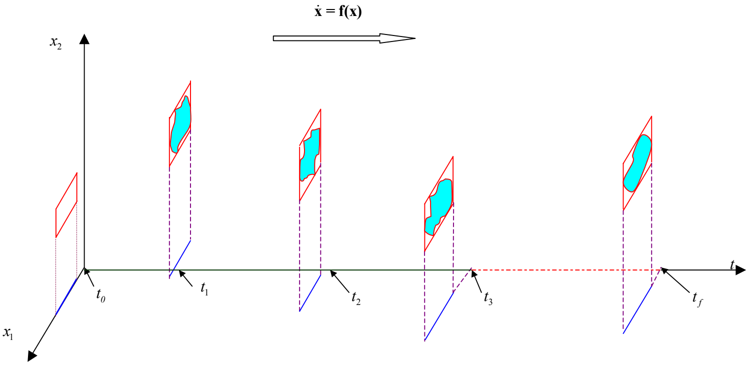
Simulation ensembliste de modèle à temps continu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0,\ \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0,\ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$$



Simulation ensembliste de modèle à temps continu

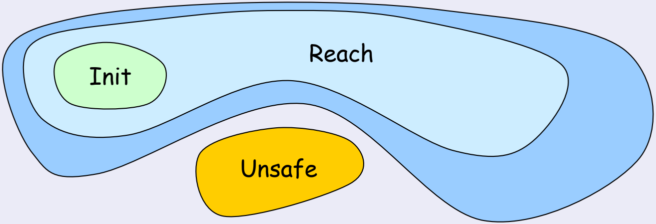
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0,\ \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0,\ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$$



Simulation ensembliste de modèle à temps continu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0,\ \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0,\ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$$

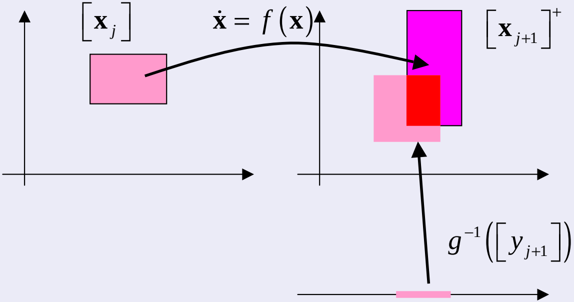
Preuve de vérification de propriété



Simulation ensembliste de modèle à temps continu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0,\ \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0,\ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$$

Observation ensembliste



Simulation ensembliste de modèle à temps continu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0,\ \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0,\ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$$

Intégration numérique garantie : Deux objectifs

1. Vérifier existence, unicité de la solution
2. Calcul de $[\mathbf{x}_j] \supseteq \mathbb{X}(t_j), \quad t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

Simulation ensembliste de modèle à temps continu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0,\ \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0,\ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$$

Deux types d'approche

- Encadrement de l'erreur de troncature, **Méthodes intervalles**
  - méthodes à un pas $\Rightarrow$ modèles de Taylor intervalles
  - méthodes multi-pas $\Rightarrow$ relaxation et propagation de contraintes
- **Théorèmes de comparaison**, théorèmes de Kamke-Müller
  - théorie des systèmes dynamiques monotones
  - théorème de Müller

    $\Rightarrow$ Hybridation non linéaire

Plan

1. Contexte scientifique
2. Méthodes de Taylor intervalles
3. Théorèmes de Comparaison
   - Systèmes dynamiques préservateurs d'ordre
   - Systèmes dynamiques non monotones
4. Hybridation non linéaire
5. Références

Développement en série de Taylor

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_j) = \mathbf{x}_j$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^{k-1} h^i \mathbf{f}^{[i]}(\mathbf{x}_j) + h^k \mathbf{f}^{[k]}(\mathbf{x}(t_\xi))$$

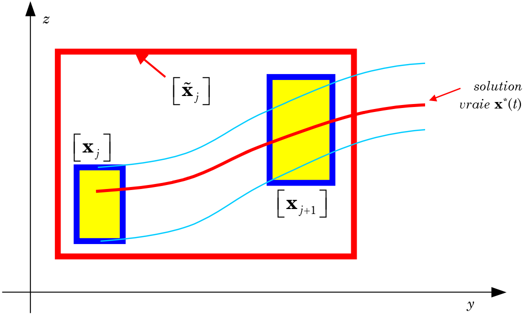
Les coefficients de Taylor

$$\mathbf{f}^{[1]} = \mathbf{x}^{(1)}$$
$$\mathbf{f}^{[2]} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{(2)}$$
$$\mathbf{f}^{[i]} = \frac{1}{i!}\mathbf{x}^{(i)} \quad i \geqslant 2$$

Encadrement de la trajectoire

Encadrement du reste du développement en série de Taylor

Grille temporelle $\rightarrow \quad t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$



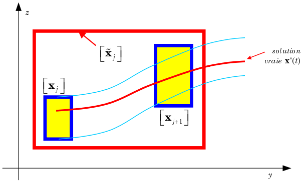
$$[\tilde{\mathbf{x}}_j] \supseteq \{\mathbf{x}(t) \mid t \in [t_j, t_{j+1}]\}$$

$$[\mathbf{x}_{j+1}] = [\mathbf{x}_j] + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \mathbf{f}^{[i]}([\mathbf{x}_j]) + h_j^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j])$$

Encadrement de la trajectoire

Encadrement du reste du développement en série de Taylor

Grille temporelle $\rightarrow \quad t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$



Expressions analytiques des frontières de l'ensemble atteignable

$$\forall \tau \in [t_j,\ t_j + h_j] \quad \mathbf{x}(\tau) \in [\mathbf{x}(\tau)]$$

$$[\mathbf{x}(\tau)] = [\mathbf{x}_j] + \sum_{i=1}^{k-1} (\tau - t_j)^i f^{[i]}\left([\mathbf{x}_j], [\mathbf{p}]\right) + (\tau - t_j)^k f^{[k]}\left([\tilde{\mathbf{x}}_j], [\mathbf{p}]\right)$$

$$\mathbb{R}([t_0,\ t]\,;[\mathbf{x}_0]) \subseteq \cup_{\tau \in \{t_0,\, t\}} [\mathbf{x}(\tau)] \subseteq \cup_{j \in \{0,\, t\}} [\tilde{\mathbf{x}}_j]$$

Les coefficients de Taylor

$$\mathbf{f}^{[1]} = \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{f}$$
$$\mathbf{f}^{[2]} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\mathbf{f}$$
$$\mathbf{f}^{[i]} = \frac{1}{i!}\mathbf{x}^{(i)} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}^{[i-1]}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\mathbf{f},\ \ i \geqslant 2$$

Génération automatique des coefficients de Taylor

$\mathbf{f}_j^{[i]} = \frac{1}{i!}\mathbf{x}^{(i)}(t_j)$

Flexible Automatic Differentiation with FADBAD++
(http ://www2.immm.dtu.dtk/~km/FADBAD/)

$$(\mathbf{f}_j \pm \mathbf{g}_j)^{[i]} = \mathbf{f}_j^{[i]} \pm \mathbf{f}_j^{[i]}$$
$$(\mathbf{f}_j\mathbf{g}_j)^{[i]} = \sum_{r=0}^{i} \mathbf{f}_j^{[r]}\mathbf{f}_j^{[i-r]}$$
$$(\frac{\mathbf{f}_j}{\mathbf{g}_j})^{[i]} = \frac{1}{\mathbf{g}_j}\left(\mathbf{f}_j^{[i]} - \sum_{r=1}^{i} \mathbf{g}_j^{[r]}(\frac{\mathbf{f}_j}{\mathbf{g}_j})^{[i-r]}\right)$$
$$\ldots$$

Nombre d'opérations $O(k^2)$ fois le coût de $\mathbf{f}$

Existence et unicité de la solution

Théorème du point fixe de Banach

$\{\mathbb{X}, d\}$ espace métrique complet non vide.
$\Phi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$.
Si Φ satisfait une condition de Lipschitz

$$d\left(\Phi\left(\mathbf{z}_1\right), \Phi\left(\mathbf{z}_2\right)\right) \leqslant \gamma d\left(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\right)$$

$\forall \mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_1 \in \mathbb{X}$, et $0 \leqslant \gamma < 1$, alors Φ possède un et un seul point fixe.

Existence et unicité de la solution

Opérateur de Picard-Lindelöf

$\mathbb{U}$: ensemble des fonctions continues

$$\Phi\left(\nu\left(t\right)\right) = \nu_j + \int_{t_j}^{t} \mathbf{f}\left(\tau, \nu\left(\tau\right)\right) d\tau$$

$\nu\left(t_j\right) = \nu_j$ et $\nu\left(t\right) \in \mathbb{U}$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$

Existence et unicité de la solution

Opérateur de Picard-Lindelöf

$\mathbb{U}$: ensemble des fonctions continues

$$\Phi\left(\nu\left(t\right)\right) = \nu_j + \int_{t_j}^{t} \mathbf{f}\left(\tau, \nu\left(\tau\right)\right) d\tau$$

$\nu\left(t_j\right) = \nu_j$ et $\nu\left(t\right) \in \mathbb{U}$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$

Propriété

$$\Phi\left(\nu^\star\right) = \nu^\star \Leftrightarrow \dot{\nu}^\star\left(t\right) = \mathbf{f}\left(\nu^\star\left(t\right)\right)$$

Existence et unicité de la solution

Opérateur de Picard-Lindelöf

$\mathbb{U}$: ensemble des fonctions continues

$$\Phi\left(\nu\left(t\right)\right) = \nu_j + \int_{t_j}^{t} \mathbf{f}\left(\tau, \nu\left(\tau\right)\right) d\tau$$

$\nu\left(t_j\right) = \nu_j$ et $\nu\left(t\right) \in \mathbb{U}$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$

Propriété

$$\Phi\left(\nu^\star\right) = \nu^\star \Leftrightarrow \dot{\nu}^\star\left(t\right) = \mathbf{f}\left(\nu^\star\left(t\right)\right)$$

solution *a priori* $[\tilde{\mathbf{x}}_j]$

si $\Phi\left([\tilde{\mathbf{x}}_j]\right) \subseteq [\tilde{\mathbf{x}}_j]$ alors $[\tilde{\mathbf{x}}_j] \supseteq \{\mathbf{x}(t) \mid t \in [t_j, t_{j+1}]\}$

Existence et unicité de la solution

Algorithme (Moore, 66)(Lohner, 94)

a priori enclosure (*entrée* : $[\mathbf{x}_j]$, h, α ; sortie : $[\tilde{\mathbf{x}}_j]$)

1. Initialisation : $[\tilde{\mathbf{x}}_j] := [\mathbf{x}_j] + [0, h]\,\mathbf{f}\left([\mathbf{x}_j]\right)$;
2. tant que $\left([\mathbf{x}_j] + [0, h]\,\mathbf{f}\left([\tilde{\mathbf{x}}_j]\right) \not\subset [\tilde{\mathbf{x}}_j]\right)$

$$\begin{array}{rcl} [\tilde{\mathbf{x}}_j] & := & [\tilde{\mathbf{x}}_j] + [-\alpha, \alpha]\,|[\tilde{\mathbf{x}}_j]| \\ h & := & h/2 \end{array}$$

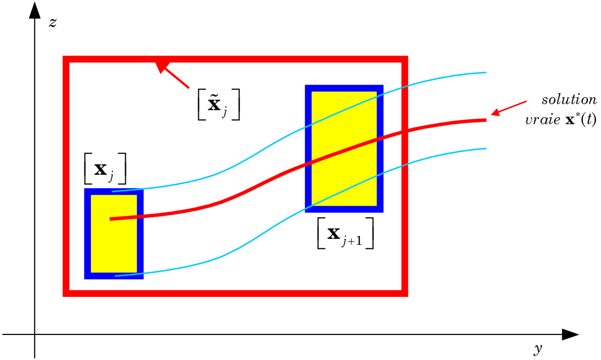
fin

An Effective High-Order Interval Method for Validating Existence and Uniqueness of the Solution of an IVP for an ODE,

Nedialko S. Nedialkov, Kenneth R. Jackson, and John D. Pryce, Reliable Computing 7(6) :449 - 465, 2001.

Réduction de la solution

Grille temporelle $\longrightarrow \quad t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$



$$[\tilde{\mathbf{x}}_j] \supseteq \{\mathbf{x}(t) \,|\, t \in [t_j, t_{j+1}]\}$$

$$[\mathbf{x}_{j+1}] = [\mathbf{x}_j] + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \mathbf{f}^{[i]}([\mathbf{x}_j]) + h_j^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j])$$

Réduction de la solution

Forme centrée pour les coefficients de Taylor

$$\mathbf{f}^{[i]}([\mathbf{x}_j]) = \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j) + \mathbf{J}\left(\mathbf{f}^{[i]};\, [\mathbf{x}_j]\right)([\mathbf{x}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$$

Réduction de la solution

Forme centrée pour les coefficients de Taylor

$$\mathbf{f}^{[i]}([\mathbf{x}_j]) = \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j) + \mathbf{J}\left(\mathbf{f}^{[i]};\ [\mathbf{x}_j]\right)([\mathbf{x}_j] - \ \hat{\mathbf{x}}_j)$$

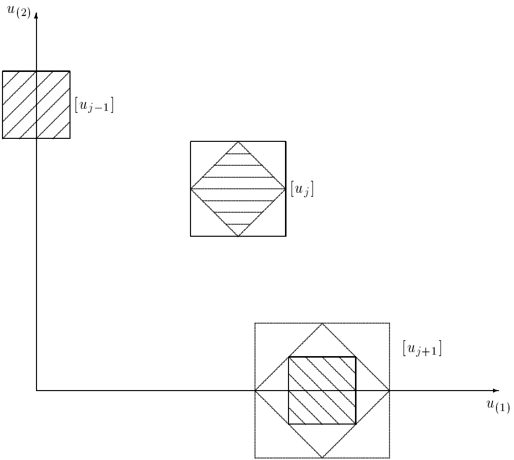
$$[\mathbf{x}_{j+1}] = \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j) + h_j^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j]) + \left\{ \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \mathbf{J}\left(\mathbf{f}^{[i]}; [\mathbf{x}_j]\right) \right\} ([\mathbf{x}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$$

Réduction de la solution

Mean Value (entrée : $[\mathbf{x}_j]$, $\hat{\mathbf{x}}_j$, h_j, $[\tilde{\mathbf{x}}_j]$; sortie : $[\mathbf{x}_{j+1}]$, $\hat{\mathbf{x}}_{j+1}$)

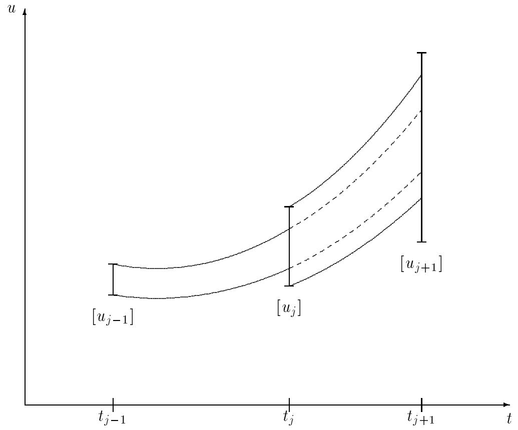
1. $[\mathbf{v}_{j+1}] = \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \cdot \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j) + h_j^k \cdot \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j])$;
2. $[\mathbf{S}_j] = \left\{ \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{J}\left(\mathbf{f}^{[i]};\ [\mathbf{x}_j]\right) \right\}$;
3. $[\mathbf{x}_{j+1}] = [\mathbf{v}_{j+1}] + [\mathbf{S}_j]([\mathbf{x}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$
4. $\hat{\mathbf{x}}_{j+1} = m([\mathbf{v}_{j+1}])$

Phénomène d'enveloppement



(Rihm, 1994)

Phénomène d'enveloppement

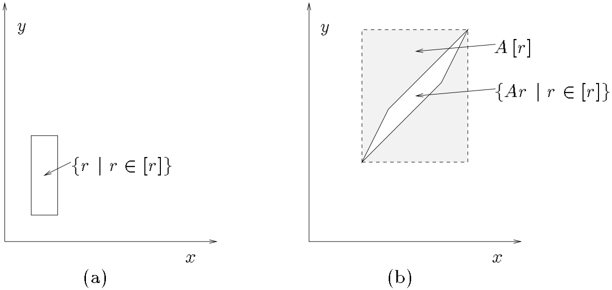


(Rihm, 1994)

Contrôle du pessimisme

Méthode de Lohner (Krückeberg, 69), (Eijgenraam, 81) (Lohner, 87)

$$[\mathbf{x}_{j+1}] = \{\hat{\mathbf{x}}_{j+1} + \mathbf{A}_{j+1}\mathbf{r}_{j+1} \,|\, \mathbf{r}_{j+1} \in [\mathbf{r}_{j+1}]\}$$



(Nedialkov, 1999)

$$(\mathbf{A}, \mathbf{r}) := \{\mathbf{A}\mathbf{r} \,|\, \mathbf{r} \in [\mathbf{r}]\} \subseteq \mathbf{A}\,[\mathbf{r}] \nrightarrow [\mathbf{A}\,[\mathbf{r}]]$$

Contrôle du pessimisme

Méthode de Lohner (Lohner, 87)

Algorithme : *Lohner's method* (entrée : h_j , $[\tilde{\mathbf{x}}_j]$, $[\mathbf{x}_j]$, $[\mathbf{r}_j]$, $\mathbf{A}_j$;
sortie : $[\mathbf{x}_{j+1}]$, $[\mathbf{r}_{j+1}]$, $\mathbf{A}_{j+1}$)

1. $[\mathbf{z}_{j+1}] = h_j^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j])$
2. $\mathbf{s}_{j+1} = m([\mathbf{z}_{j+1}])$
3. $\hat{\mathbf{x}}_{j+1} = \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \cdot \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j) + \hat{\mathbf{s}}_{j+1}$
4. $[\mathbf{S}_j] = \left\{ \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{J}\left(\mathbf{f}^{[i]};\ [\mathbf{x}_j]\right) \right\}$
5. choisir la matrice $\mathbf{A}_{j+1}$
6. $[\mathbf{x}_{j+1}] = \hat{\mathbf{x}}_{j+1} + ([\mathbf{S}_j]\mathbf{A}_j)[\mathbf{r}_j] + [\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1}$
7. $[\mathbf{r}_{j+1}] = \mathbf{A}_{j+1}^{-1}([\mathbf{S}_j]\,\mathbf{A}_j)\,[\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1}([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1})$

Contrôle du pessimisme

Choix de la matrice $\mathbf{A}_{j+1}$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\left([\mathbf{S}_j]\,\mathbf{A}_j\right) \approx \mathbf{I}$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] = \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\left([\mathbf{S}_j]\,\mathbf{A}_j\right)[\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\,\left([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1}\right)$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] \;\approx\; [\mathbf{r}_j] \;+\; \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\,\left([\mathbf{z}_{j+1}] \;-\; \mathbf{s}_{j+1}\right)$$

Contrôle du pessimisme

Choix de la matrice $\mathbf{A}_{j+1}$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\left([\mathbf{S}_j]\,\mathbf{A}_j\right) \approx \mathbf{I}$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] = \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\left([\mathbf{S}_j]\,\mathbf{A}_j\right)[\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\left([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1}\right)$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] \;\approx\; [\mathbf{r}_j] \;+\; \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\left([\mathbf{z}_{j+1}] \;-\; \mathbf{s}_{j+1}\right)$$

1. La méthode parallélépipédique (Eijgenraam, 81), (Lohner, 88)
$$\mathbf{A}_{j+1} \;=\; m\left([\mathbf{S}_j]\,\mathbf{A}_j\right).$$

Contrôle du pessimisme

Choix de la matrice $\mathbf{A}_{j+1}$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\left([\mathbf{S}_j]\,\mathbf{A}_j\right) \approx \mathbf{I}$$

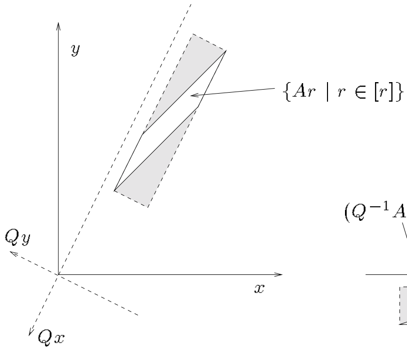
$$[\mathbf{r}_{j+1}] = \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\left([\mathbf{S}_j]\,\mathbf{A}_j\right)[\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\left([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1}\right)$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] \approx [\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1}\left([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1}\right)$$

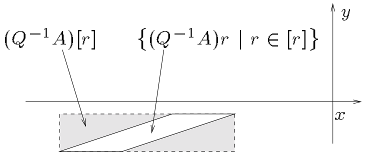
1. La méthode parallélépipédique (Eijgenraam, 81), (Lohner, 88)
   $$\mathbf{A}_{j+1} = m\left([\mathbf{S}_j]\,\mathbf{A}_j\right).$$
2. La méthode par factorisation QR (Lohner, 88)
   1. choisir $\tilde{\mathbf{A}}_{j+1} \in [\mathbf{S}_j]\,\mathbf{A}_j$
   2. permutation : $\hat{\mathbf{A}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{A}}_{j+1}\mathbf{P}_{j+1}$
   3. factorisation QR : $\hat{\mathbf{A}}_{j+1} \to \mathbf{Q}_{j+1}\mathbf{R}_{j+1}$
   4. choisir la nouvelle matrice : $\mathbf{A}_{j+1} = \mathbf{Q}_{j+1}$

Contrôle de l'effet d'enveloppement

Factorisation QR sans permutation



(c)

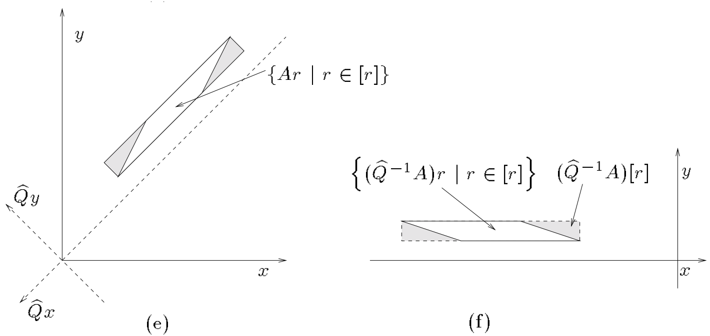


(d)

(Nedialkov, 1999)

Contrôle de l'effet d'enveloppement

Factorisation QR avec permutation



(Nedialkov, 1999)

Méthode de Rihm (Rihm, 94)

Algorithme : *Extended Mean Value*
(entrées : $[\tilde{\mathbf{x}}_j]$,$[\mathbf{x}_j]$, $\hat{x}_j$, $[\mathbf{v}_j]$, $[p_j]$, A_j , h_j,
sorties : $[\mathbf{x}_{j+1}]$, $\hat{x}_{j+1}$, $[\mathbf{v}_{j+1}]$, $[p_{j+1}]$, A_{j+1})

1. $[\mathbf{v}_{j+1}] = \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j)h^i + \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j])h^k$
2. $[\mathbf{S}_j] = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{J}(\mathbf{f}^{[i]}; [\mathbf{x}_j])h^i$
3. $[\mathbf{q}_{j+1}] = ([\mathbf{S}_j]\mathbf{A}_j)[\mathbf{p}_j] + [\mathbf{S}_j]([\mathbf{v}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$
4. $[\mathbf{x}_{j+1}] = [\mathbf{v}_{j+1}] + [\mathbf{q}_{j+1}]$
5. $\mathbf{A}_{j+1} = m([\mathbf{S}_j]\mathbf{A}_j)$ ou factorisation QR
6. $[\mathbf{p}_{j+1}] = \mathbf{A}_{j+1}^{-1}([\mathbf{S}_j]\mathbf{A}_j)[\mathbf{p}_j] + (\mathbf{A}_{j+1}^{-1}[\mathbf{S}_j])([\mathbf{v}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$
7. $\hat{\mathbf{x}}_{j+1} = m([\mathbf{v}_{j+1}])$

Autres méthodes d'intégration à un pas

- Modèles de Taylor implicites (Rihm, 1998)
- Série de Hermite-Obreshkoff (Nedialkov, 1999)

Performances

- Incertitudes numériques $\longrightarrow$ Plus performantes que Taylor explicites
- Incertitudes physiques $\longrightarrow$ ...

Méthode d'intégration *multi-pas*

(Janssen, Van Hentenryck et Deville 2002)

Principe

1. Relaxation *via* interpolation garantie par polynômes d'Hermite
2. Forme centrée
3. Filtrage global par propagation de contraintes
   (évaluation à pas de temps successifs)

Performances

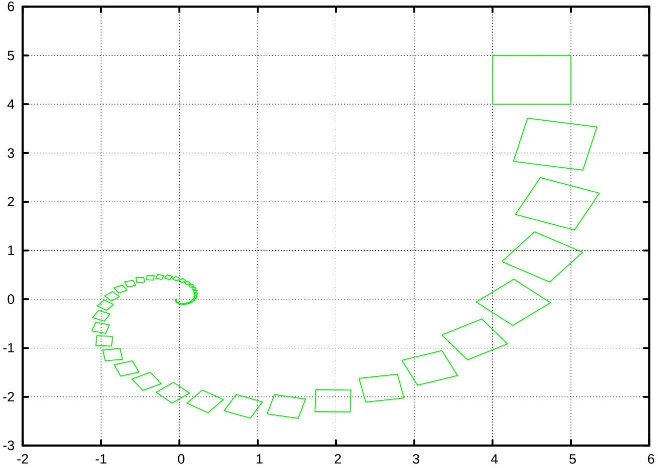
- Incertitudes numériques $\longrightarrow$ Plus performante que Taylor intervalles ou Hermite-Obreshkoff.
- Incertitudes physiques $\longrightarrow$ Aucun résultat connu.

Implémentation numérique

- C++ Class Libraries
- Calculs intervalles → `Profil/BIAS`
- Coefficients de Taylor et différentiation → `FADBAD++`
- Intégration d'ensembles par modèles de Taylor intervalles → `Nedialkov's VNODE`

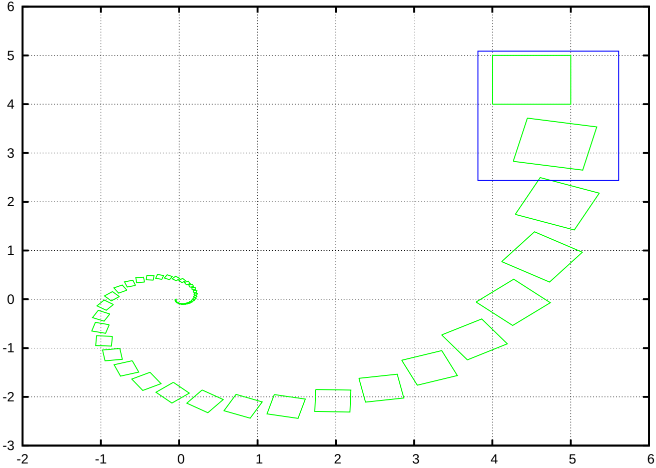
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Système affine



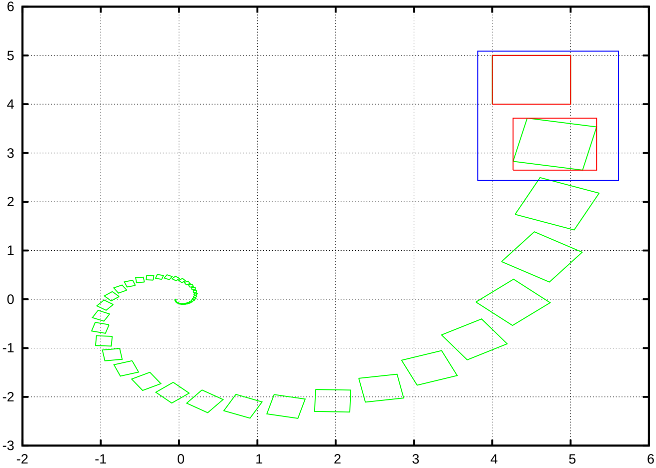
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Système affine



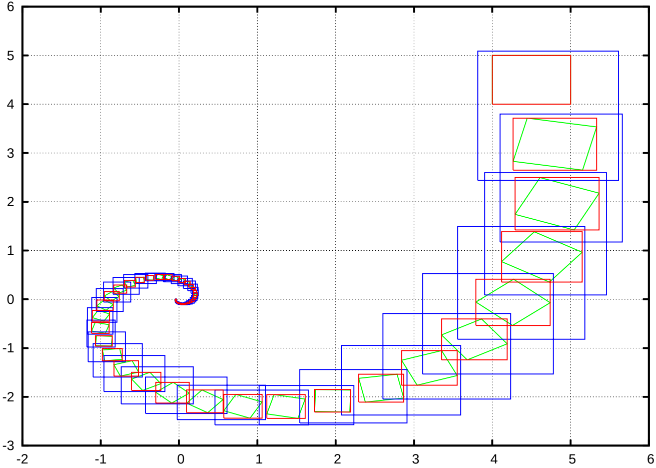
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Système affine



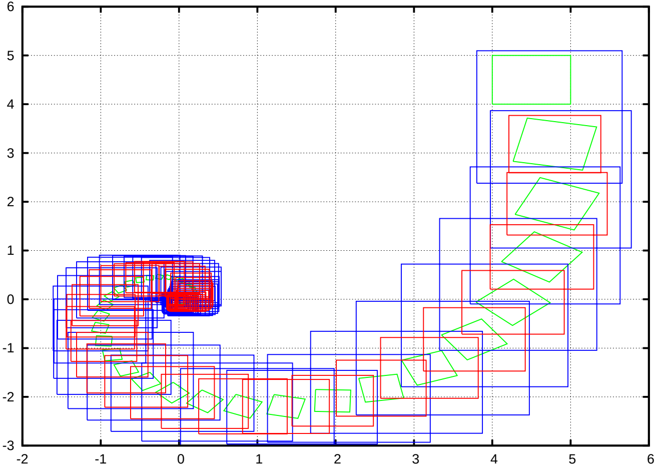
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Système affine



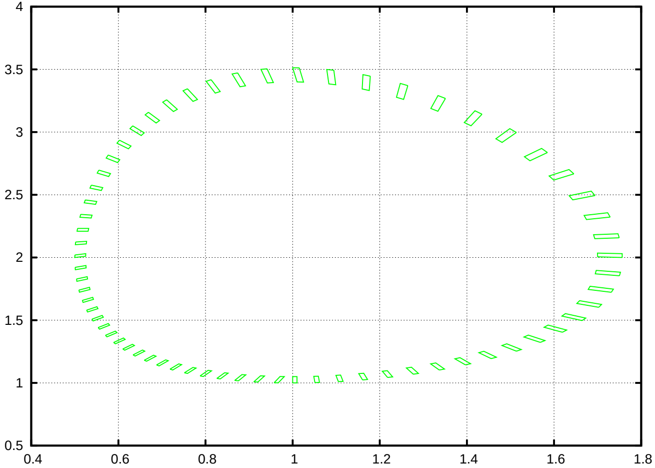
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Système affine incertain



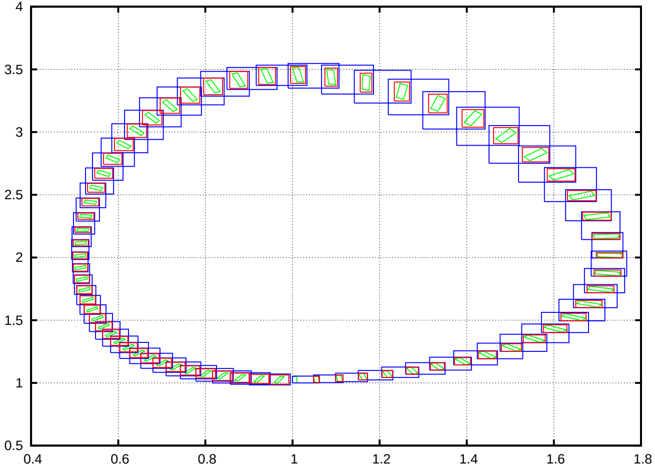
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Lotka Volterra



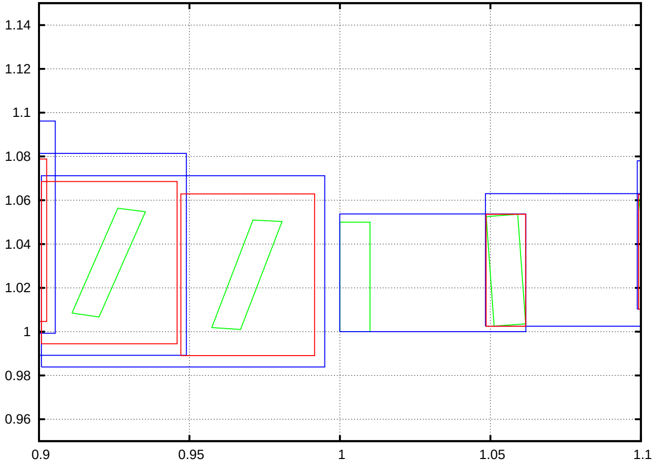
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Lotka Volterra



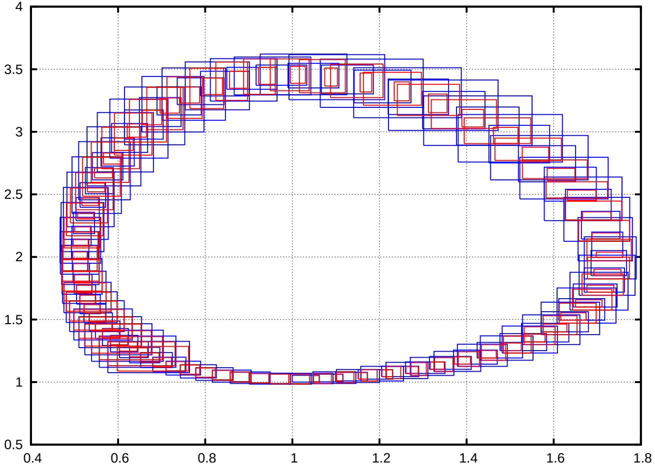
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Lotka Volterra



Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Lotka Volterra



Autre exemple : système affine incertain

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{u}$$

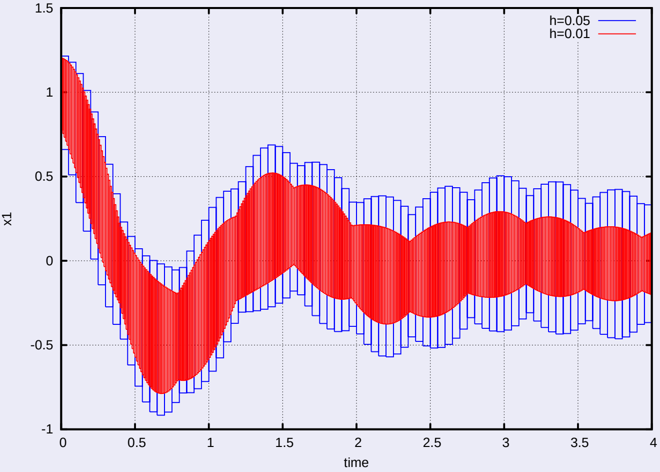
Incertitudes

$$\begin{aligned} a_1 &= [-1.1, -0.9] \\ a_2 &= [-4.1, -3.9] \\ a_3 &= [-3.1, -2.9] \\ a_4 &= [0.9, 1.1] \\ a_5 &= [-2.1, -1.9] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & i = 1, ..., 5 \\ & x_i(t_0) \in [0.8, 1.2] \\ & u_i \in [-0.1, 0.1] \end{aligned}$$

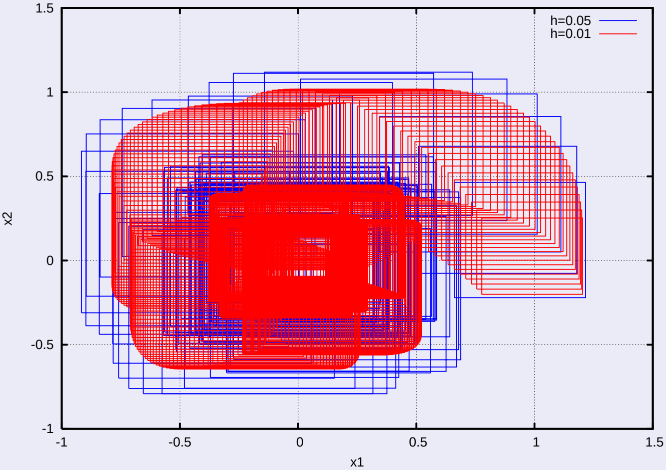
Autre exemple : système affine incertain

Méthode de Taylor intervalle $\longrightarrow x_1$



Autre exemple : système affine incertain

Méthode de Taylor intervalle → portrait de phase



Plan

1. Contexte scientifique
2. Méthodes de Taylor intervalles
3. Théorèmes de Comparaison
   - Systèmes dynamiques préservateurs d'ordre
   - Systèmes dynamiques non monotones
4. Hybridation non linéaire
5. Références

Plan

1. Contexte scientifique
2. Méthodes de Taylor intervalles
3. Théorèmes de Comparaison
   - Systèmes dynamiques préservateurs d'ordre
   - Systèmes dynamiques non monotones
4. Hybridation non linéaire
5. Références

Systèmes dynamiques monotones préservateurs d'ordre

(Smith, 1995), (Hirsch, 2005)

Définition

$\mathbf{x}(t_0) \prec \mathbf{y}(t_0) \Rightarrow \forall \mathbf{t} \geqslant \mathbf{t_0} \quad \mathbf{x}(t) \prec \mathbf{y}(t) \qquad \prec \in \{<, \leq, \geq, >\}$

Définition : Systèmes coopératifs

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0] \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$\{\mathbf{f}, \mathbb{X}_0\}$ est coopératif sur $\mathbb{D}$ si

$$\forall i \neq j, t \geq 0 \text{ et } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x_j} \geq 0$$

Un système coopératif est monotone

Systèmes coopératifs pour systèmes englobants

$$t_0 \leq t \leq t_N$$
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t),\ \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0] \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t),\ \mathbf{x}_1(t_0) \in \mathbb{D}, \text{ coopératif sur } \mathbb{D}$$
$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_2, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t),\ \mathbf{x}_2(t_0) \in \mathbb{D}, \text{ coopératif sur } \mathbb{D}$$

Théorème de comparaison

$$\text{if } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad \forall t \geq t_0, \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}, [\mathbf{p}], t) \leq \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t)$$
$$\text{et } \mathbf{x}_1(0) \leq \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x}_2(0)$$
$$\Rightarrow \forall t \geq t_0, \quad \mathbf{x}_1(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_2(t)$$

$\Rightarrow$ est une fonction d'inclusion pour $[\mathbf{x}(t)] = \text{ConvexHull}[\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)]$

Fonctions englobantes

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad t_0 \leq t \leq t_N,\ \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0]\,,\ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$$

$\mathbf{f}$ coopératif sur $\mathbb{D}$

Expression formelles de $\overline{\mathbf{f}}_i$

Analyse de la monotonicité $\longrightarrow$

Analyse des signes des dérivés partielles de f_i

$$\text{pour } k = 1, \ldots, n_p, \quad \textbf{si } \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \geq 0 \quad \begin{array}{l} \textbf{alors} \text{ remplacer } p_k \leftarrow \overline{p}_k \\ \textbf{sinon} \text{ remplacer } p_k \leftarrow \underline{p}_k \end{array}$$

$$\text{Répéter for } i = 1, \ldots, n, \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t), & \underline{\mathbf{x}}(t_0) = \underline{\mathbf{x}}_0 \\ \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \overline{\mathbf{f}}(\overline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t), & \overline{\mathbf{x}}(t_0) = \overline{\mathbf{x}}_0 \end{cases}$$

Systèmes monotones

(Smith, 1995), (Hirsch et Smith, 2005), (Angeli et Sontag, 2003)

Changement d'orthants

$$\text{si } \exists_{,} \mathbf{D} = diag[(-1)^{\varepsilon_1}, \ldots, [(-1)^{\varepsilon_n}], \varepsilon_i \in \{0, 1\}$$

t.q. $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ et $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0)$ satisfont

$$\mathbf{D}\mathbf{y}_0 \geq \mathbf{D}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{D}\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0) \geq \mathbf{D}\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \ \forall t \geq t_0.$$

Systèmes monotones

(Smith, 1995), (Hirsch et Smith, 2005), (Angeli et Sontag, 2003)

Test graphique de monotonie

1. Si $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(.,.) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X} \wedge \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$,
   tracer un arc positif $e_{i,j}$ orienté du nœud x_j vers le nœud x_i.
2. Si $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(.,.) < 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X} \wedge \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$,
   tracer un arc négatif $e_{i,j}$ orienté du nœud x_j vers le nœud x_i.
3. Sinon, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(.,.) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X} \wedge \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$,
   pas d'arc entre les nœuds x_i et x_j.

Systèmes monotones

(Smith, 1995), (Hirsch et Smith, 2005), (Angeli et Sontag, 2003)

Définitions : Graphe d'incidence

- Chemin orienté $\mathcal{C}$ de longueur l :
  Toute séquence finie de nœuds $x_{k_0}, x_{k_1} ... x_{k_l}$, dans laquelle chaque nœud x_{k_i} $i = 0, ..., l$ est apparu au plus une seule fois et pour chaque deux nœuds successifs il existe un arc $e_{i,j}$ qui les relie.

- Cycle du graphe (non nécessairement orienté), est un chemin tel que $x_{k_0} = x_{k_l}$.
  Signe du cycle = le produit des signes des arcs.

Systèmes monotones

(Smith, 1995), (Hirsch et Smith, 2005), (Angeli et Sontag, 2003)

Proposition (Kunze, 99)

Une EDO est monotone par rapport à une certaine relation d'ordre SSI son graphe d'incidence ne contient aucun cycle négatif

Graphe d'incidence ?

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & -2x_1 + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & 2x_1 - x_3 \\ \dot{x}_3(t) & = & -2x_1 - x_2. \end{array}\right.$$

Exemple

Modèle de biologie moléculaire (*Mitogen-Activated Protein Kinase cascades*)

1. Ce système est il monotone ?
   Toutes les grandeurs sont positives

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -\frac{v_2 x_1}{k_2 + x_1} + v_0 u + v_1 \\
\dot{x}_2 = \frac{v_6 (y_{tot} - x_2 - x_3)}{k_6 + (y_{tot} - x_2 - x_3)} - \frac{v_3 x_1 x_2}{k_3 + x_2} \\
\dot{x}_3 = \frac{v_4 x_1 (y_{tot} - x_2 - x_3)}{k_4 + (y_{tot} - x_2 - x_3)} - \frac{v_5 x_3}{k_5 + x_3} \\
\dot{x}_4 = \frac{v_{10} (z_{tot} - x_4 - x_5)}{k_{10} + (z_{tot} - x_4 - x_5)} - \frac{v_7 x_3 x_4}{k_7 + x_4} \\
\dot{x}_5 = \frac{v_8 x_3 (z_{tot} - x_4 - x_5)}{k_8 + (z_{tot} - x_4 - x_5)} - \frac{v_9 x_5}{k_9 + x_5} \\
u = g x_5
\end{cases}
$$

2. Trouver le changement d'orthants qui le rend coopératif

Plan

1. Contexte scientifique
2. Méthodes de Taylor intervalles
3. Théorèmes de Comparaison
   - Systèmes dynamiques préservateurs d'ordre
   - Systèmes dynamiques non monotones
4. Hybridation non linéaire
5. Références

Théorème de Müller

(Müller, 27) (W. Walter, 97) (Kieffer et E. Walter, 06)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad t_0 \leq t \leq t_N, \ \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0], \ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$$

Théorème d'existence de Müller

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \text{ continue sur } \mathcal{Z} : \begin{cases} \boldsymbol{\omega}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \boldsymbol{\Omega}(t) \\ \underline{\mathbf{p}} \leq \mathbf{p} \leq \overline{\mathbf{p}} \\ t_a \leq t \leq t_b \end{cases}$$

- $\boldsymbol{\omega}(t_a) = \underline{\mathbf{x}}_a$
- $\forall i, \ \omega_i(t)$ continue sur $[t_a, t_b]$
- $\forall i, \ D^{\pm}\omega_i(t) \leq \min_{\mathcal{Z}_i(t)} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$

$$\mathcal{Z}_i(t) : \left\{ \begin{array}{l} x_i = \omega_i(t), \\ \omega_j(t) \leq x_j \leq \Omega_j(t), \, j \neq i, \\ \underline{\mathbf{p}} \leq \mathbf{p} \leq \overline{\mathbf{p}}, \\ t = t \end{array} \right\}$$

Théorème de Müller

(Müller, 27) (W. Walter, 97) (Kieffer et E. Walter, 06)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad t_0 \leq t \leq t_N, \, \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0] \, , \, \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$$

Théorème d'existence de Müller, (suite)

- $\mathbf{\Omega}(t_a) = \overline{\mathbf{x}}_a$
- $\forall i, \; \Omega_i(t)$ continue sur $[t_a, t_b]$
- $\forall i, \; D^{\pm}\Omega_i(t) \geq \max_{\overline{\mathcal{Z}}_i(t)} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$

$$\overline{\mathcal{Z}}_i(t) : \left\{ \begin{array}{l} x_i = \Omega_i(t), \\ \omega_j(t) \leq x_j \leq \Omega_j(t), \, j \neq i, \\ \underline{\mathbf{p}} \leq \mathbf{p} \leq \overline{\mathbf{p}}, \\ t = t \end{array} \right\}$$

Théorème de Müller

(Müller, 27) (W. Walter, 97) (Kieffer et E. Walter, 06)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad t_0 \leq t \leq t_N, \; \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0], \; \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$$

Théorème d'existence de Müller, (suite 2)

Alors $\forall \mathbf{x}_a \in [\underline{\mathbf{x}}_a, \overline{\mathbf{x}}_a]$, $\forall \mathbf{p} \in [\underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}]$, il existe une solution $\mathbf{x}(t)$

qui reste dans le domaine Ξ : $\begin{cases} t_a \leq t \leq t_b \\ \omega(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \Omega(t) \end{cases}$

et t.q. $\mathbf{x}(t_a) = \mathbf{x}_a$

De plus, si $\forall \mathbf{p} \in [\underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}]$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ est Lipschitz en $\mathbf{x}$ sur $\mathbb{D}$, alors la solution est unique pour tout $\mathbf{p}$.

Systèmes englobants

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad t_0 \leq t \leq t_N,\, \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0]\,,\, \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$$

Expression formelle de $\overline{f}_i$

analyser la monotonicité $\rightarrow$ Analyser les signes des dérivés partielles f_i

for $l \neq i$, **if** $\frac{\partial f_i}{\partial x_l} \geq 0$ **then** remplacer $x_l \leftarrow \Omega_l$, in f_i
else remplacer $x_l \leftarrow \omega_l$

for $k = 1, \ldots, n_p$, **if** $\frac{\partial f_i}{\partial p_k} \geq 0$ **then** remplacer $p_k \leftarrow \overline{p}_k$
else remplacer $p_k \leftarrow \underline{p}_k$

Répéter pour $i = 1, \ldots, n$, $\Rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \underline{f}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t), & \boldsymbol{\omega}(t_0) = \underline{\mathbf{x}}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}(t) = \overline{f}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t), & \boldsymbol{\Omega}(t_0) = \overline{\mathbf{x}}_0 \end{cases}$

Exemple

Modèle de biologie moléculaire (*Mitogen-Activated Protein Kinase cascades*)

Système non linéaire incertain

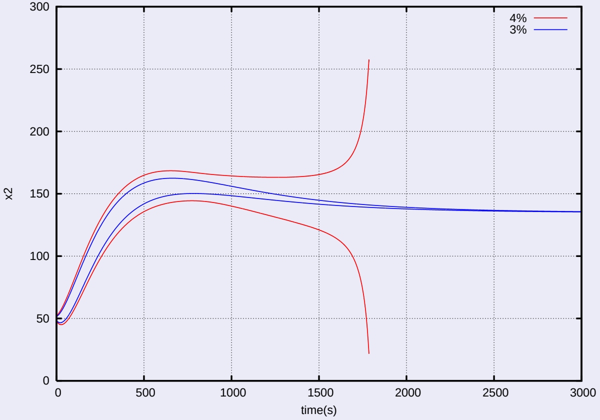
$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -\frac{v_2 x_1}{k_2 + x_1} + v_0 u + v_1 \\
\dot{x}_2 = \frac{v_6 (y_{tot} - x_2 - x_3)}{k_6 + (y_{tot} - x_2 - x_3)} - \frac{v_3 x_1 x_2}{k_3 + x_2} \\
\dot{x}_3 = \frac{v_4 x_1 (y_{tot} - x_2 - x_3)}{k_4 + (y_{tot} - x_2 - x_3)} - \frac{v_5 x_3}{k_5 + x_3} \\
\dot{x}_4 = \frac{v_{10} (z_{tot} - x_4 - x_5)}{k_{10} + (z_{tot} - x_4 - x_5)} - \frac{v_7 x_3 x_4}{k_7 + x_4} \\
\dot{x}_5 = \frac{v_8 x_3 (z_{tot} - x_4 - x_5)}{k_8 + (z_{tot} - x_4 - x_5)} - \frac{v_9 x_5}{k_9 + x_5} \\
u = g x_5
\end{cases}
$$

Application des méthodes de Taylor intervalles

Exemple

Modèle de biologie moléculaire (*Mitogen-Activated Protein Kinase cascades*)

Enveloppe du tube de trajectoire



Exemple

Modèle de biologie moléculaire (*Mitogen-Activated Protein Kinase cascades*)

Système non linéaire incertain

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -\frac{v_2 x_1}{k_2+x_1} + v_0 u + v_1 \\
\dot{x}_2 = \frac{v_6(y_{tot}-x_2-x_3)}{k_6+(y_{tot}-x_2-x_3)} - \frac{v_3 x_1 x_2}{k_3+x_2} \\
\dot{x}_3 = \frac{v_4 x_1 (y_{tot}-x_2-x_3)}{k_4+(y_{tot}-x_2-x_3)} - \frac{v_5 x_3}{k_5+x_3} \\
\dot{x}_4 = \frac{v_{10}(z_{tot}-x_4-x_5)}{k_{10}+(z_{tot}-x_4-x_5)} - \frac{v_7 x_3 x_4}{k_7+x_4} \\
\dot{x}_5 = \frac{v_8 x_3 (z_{tot}-x_4-x_5)}{k_8+(z_{tot}-x_4-x_5)} - \frac{v_9 x_5}{k_9+x_5} \\
u = g x_5
\end{cases}
$$

Trouver les systèmes englobants et utiliser le théorème de Müller ?

Exemple

Modèle de biologie moléculaire (*Mitogen-Activated Protein Kinase cascades*)

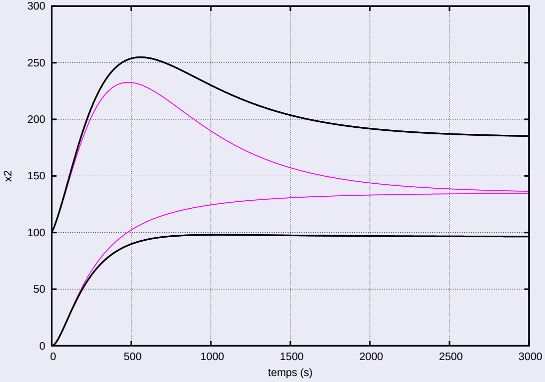
Enveloppe du tube de trajectoire $\longrightarrow$ Système couplé

$$
\left\{
\begin{array}{ccc}
\dot{\underline{x}}_1 & = & -\frac{\overline{v}_2\underline{x}_1}{\underline{k}_2+\underline{x}_1} + \underline{v}_0\underline{u} + \underline{v}_1 \\
\dot{\underline{x}}_2 & = & \frac{\underline{v}_6(\underline{y}_{tot}-\underline{x}_2-\overline{x}_3)}{\overline{k}_6+(\underline{y}_{tot}-\underline{x}_2-\overline{x}_3)} - \frac{\overline{v}_3\overline{x}_1\underline{x}_2}{\underline{k}_3+\underline{x}_2} \\
\dot{\underline{x}}_3 & = & \frac{\underline{v}_4\underline{x}_1(\underline{y}_{tot}-\overline{x}_2-\underline{x}_3)}{\overline{k}_4+(\underline{y}_{tot}-\overline{x}_2-\underline{x}_3)} - \frac{\overline{v}_5\underline{x}_3}{\underline{k}_5+\underline{x}_3} \\
\dot{\underline{x}}_4 & = & \frac{\underline{v}_{10}(\underline{z}_{tot}-\underline{x}_4-\overline{x}_5)}{\overline{k}_{10}+(\underline{z}_{tot}-\underline{x}_4-\overline{x}_5)} - \frac{\overline{v}_7\overline{x}_3\underline{x}_4}{\underline{k}_7+\underline{x}_4} \\
\dot{\underline{x}}_5 & = & \frac{\underline{v}_8\underline{x}_3(\underline{z}_{tot}-\overline{x}_4-\underline{x}_5)}{\overline{k}_8+(\underline{z}_{tot}-\overline{x}_4-\underline{x}_5)} - \frac{\overline{v}_9\underline{x}_5}{\underline{k}_9+\underline{x}_5} \\
\dot{\overline{x}}_1 & = & -\frac{\underline{v}_2\overline{x}_1}{\overline{k}_2+\overline{x}_1} + \overline{v}_0\overline{u} + \overline{v}_1 \\
\dot{\overline{x}}_2 & = & \frac{\overline{v}_6(\overline{y}_{tot}-\overline{x}_2-\underline{x}_3)}{\underline{k}_6+(\overline{y}_{tot}-\overline{x}_2-\underline{x}_3)} - \frac{\underline{v}_3\underline{x}_1\overline{x}_2}{\overline{k}_3+\overline{x}_2} \\
\dot{\overline{x}}_3 & = & \frac{\overline{v}_4\overline{x}_1(\overline{y}_{tot}-\underline{x}_2-\overline{x}_3)}{\underline{k}_4+(\overline{y}_{tot}-\underline{x}_2-\overline{x}_3)} - \frac{\underline{v}_5\overline{x}_3}{\overline{k}_5+\overline{x}_3} \\
\dot{\overline{x}}_4 & = & \frac{\overline{v}_{10}(\overline{z}_{tot}-\overline{x}_4-\underline{x}_5)}{\underline{k}_{10}+(\overline{z}_{tot}-\overline{x}_4-\underline{x}_5)} - \frac{\underline{v}_7\underline{x}_3\overline{x}_4}{\overline{k}_7+\overline{x}_4} \\
\dot{\overline{x}}_5 & = & \frac{\overline{v}_8\overline{x}_3(\overline{z}_{tot}-\underline{x}_4-\overline{x}_5)}{\underline{k}_8+(\overline{z}_{tot}-\underline{x}_4-\overline{x}_5)} - \frac{\underline{v}_9\overline{x}_5}{\overline{k}_9+\overline{x}_5} \\
\underline{u} & = & g\,\underline{x_5} \\
\overline{u} & = & g\,\overline{x_5}
\end{array}
\right.
$$

Exemple

Modèle de biologie moléculaire (*Mitogen-Activated Protein Kinase cascades*)

Enveloppe du tube de trajectoire



Systèmes englobants

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad t_0 \leq t \leq t_N, \ \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0], \ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$$

Analyse de la monotonicité de $\mathbf{f}$

Signes des dérivées partielles changent avec le temps

$\longrightarrow$ Hybridation : Automate hybride pour systèmes englobants

Plan

1 Contexte scientifique

2 Méthodes de Taylor intervalles

3 Théorèmes de Comparaison
- Systèmes dynamiques préservateurs d'ordre
- Systèmes dynamiques non monotones

4 Hybridation non linéaire

5 Références

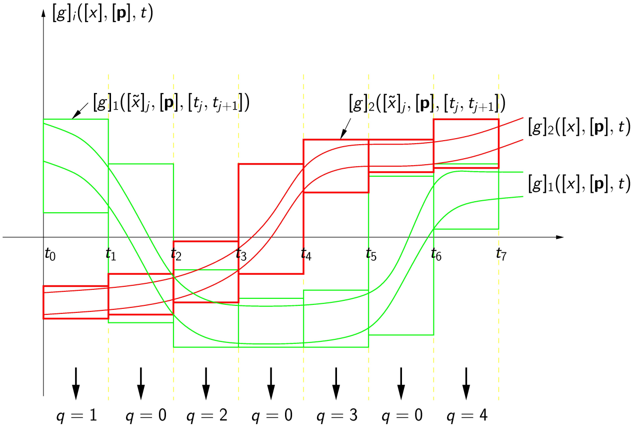
Hybridation non linéaire

Exemple : $\dot{x} = f(x, p_1, p_2, t) \quad x(t_0) \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0] \subset \mathbb{R}, \quad p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$

Hybridation non linéaire

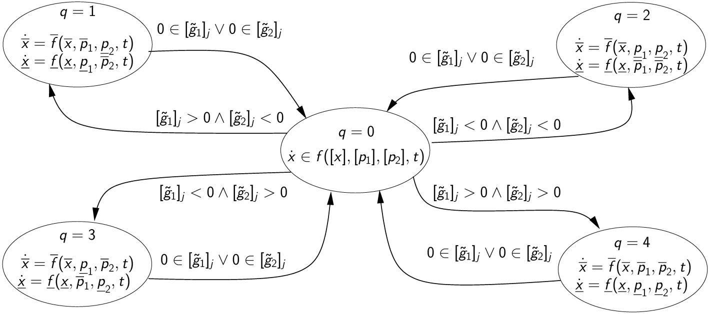
Exemple : $\dot{x} = f(x, p_1, p_2, t) \quad x(t_0) \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0] \subset \mathbb{R}, \quad p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$

$g(.) = \frac{\partial f}{\partial p}(.)$



Hybridation non linéaire

Exemple : $\dot{x} = f(x, p_1, p_2, t) \quad x(t_0) \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0] \subset \mathbb{R}, \quad p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$



$$g_i(.) = \frac{\partial f}{\partial p_i}(.), \quad [\tilde{g}_i]_j = g_i([\tilde{x}_j], [p_1], [p_2], [t_j, t_{j+1}])$$

Hybridation non linéaire

Exemple : $\dot{x} = f(x, p_1, p_2, t) \quad x(t_0) \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0] \subset \mathbb{R}, \quad p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$

Commutation de mode

- mode *tout intervalle* $q = 0 \longrightarrow$ mode *par encadrement* $q \neq 0$

  $\longrightarrow$ commuter et continuer

- mode *par encadrement* $\longrightarrow$ mode *tout intervalle* $q = 0$

  $\longrightarrow$ commuter et recalculer pas de temps

Hybridation non linéaire

Exemple : $\dot{x} = f(x, p_1, p_2, t) \quad x(t_0) \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0] \subset \mathbb{R}, \quad p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$

Grille temporelle $\rightarrow \quad t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$

Hybrid Bounding algorithm

1 Initialize (select bounding systems)
2 Do loop
3   Integrate one step ahead $\rightarrow [\tilde{\mathbf{x}}_j]$, $[\mathbf{x}_{j+1}]$
4   Check Switching $\leftarrow$ $\text{sign}(\frac{\partial f}{\partial x_l}(.))$, $\text{sign}(\frac{\partial f}{\partial p_k}(.)), [\tilde{\mathbf{x}}_j]$, $[t_j, t_{j+1}]$
5   Switch mode if necessary (change bounding systems)
   end Do

Système coopératif non linéaire incertain

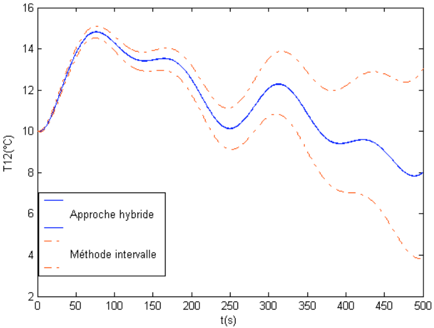
équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\dot{x}_1 & = & \alpha_1(x_2 - 2x_1 + u_0 + u(t)) \\
\dot{x}_2 & = & 2\alpha_1(x_1 - (1 + \frac{\rho_1}{\rho_2})x_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2}x_3) \\
\dot{x}_3 & = & 2p_1(x_4 - x_3 + p_2\frac{\delta_2}{\rho_2}(x_2 - x_3)) \\
\dot{x}_i & = & p_1(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \qquad i = 4, \ldots, 9 \\
\dot{x}_{10} & = & 2p_1(x_9 - x_{10} + p_2\frac{\delta_2}{\rho_2}(x_{11} - x_{10})) \\
\dot{x}_{11} & = & 2\alpha_2(x_{12} - (1 + \frac{\rho_3}{\rho_2})x_{11} + \frac{\rho_3}{\rho_2}x_{10}) \\
\dot{x}_{12} & = & \alpha_3(x_{13} - 2x_{12} + x_{11}) \\
\dot{x}_{13} & = & 2\alpha_3(x_{12} - (1 + \frac{\rho_3}{\rho_4})x_{13} + \frac{\rho_3}{\rho_4}u_0) \\
u(t) & = & \sum_{l=1\ldots5} u_l sin(2^{l-1}\omega_0 t + \phi_0)
\end{array}\right.$$

Système coopératif non linéaire incertain

Simulation intervalle, logiciel VNODE, $\delta p = 0.5\%$

Evolution de la température de la sortie :



Système coopératif non linéaire incertain

Paramètres et état initial incertains

$\mathbf{p} \in [0.7, 1.23] \times [0.23, 0.64], \qquad x_{0_i} \in [9, 11].$

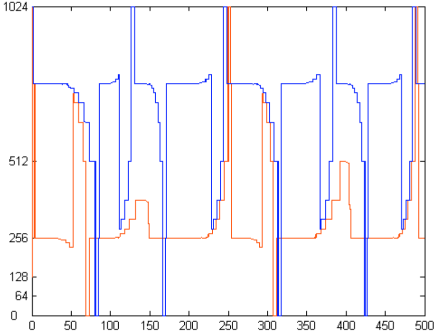
Théorèmes de comparaison + Hybridation non linéaire

$\rightarrow$ Analyse des signes des dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial p_k}$
Fonctions d'encadrement

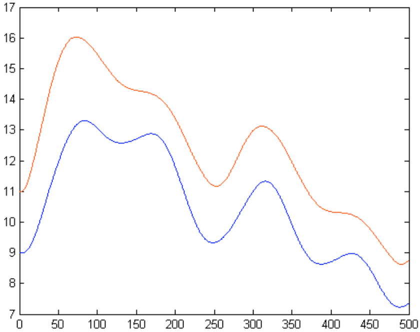
$\rightarrow$ automate hybride avec $1 + 2^{10}$ modes d'encadrement
seulement $1 + 24$ modes activés

Système coopératif non linéaire incertain

Hybridation non linéaire, $\delta p = 50\%$



Etat discret

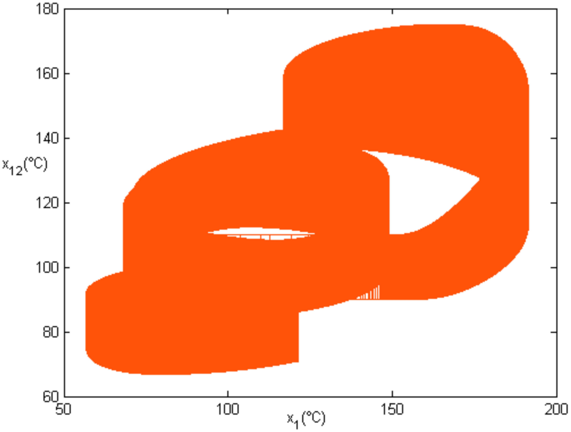


Etat continu

Système coopératif non linéaire incertain

Hybridation non linéaire, $\delta p = 50\%$

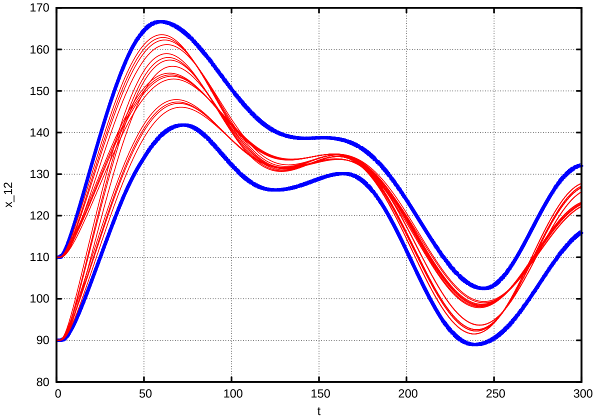
Portrait dans le plan $x_1 x_{12}$



Système coopératif non linéaire incertain

Hybridation non linéaire, $\delta p = 50\%$

Sur approximation ?



Système dynamique non monotone incertain

Modèle de Haldane pour les bio-réacteurs

$$\begin{cases} \dot{x} & = & f_x(x,s) & = & (\mu_0 \frac{s}{s+k_s+s^2/k_i} - \alpha d)x \\ \dot{s} & = & f_s(x,s) & = & -k\mu_0 \frac{s}{s+k_s+s^2/k_i} x + (s_{in} - s)d \end{cases}$$

Concentration biomasse : x,

Concentration substrat : s,

Concentration du substrat en entrée : $s_{in}(t) = s_{in}^0 + 15\cos(1/5t)$,

Paramètres incertains : $\mu_0 = 0.75 \pm 1\%$, $s_{in}^0 = 65 \pm 1.5\%$.

Etat initial : $x(t_0) \times s(t_0) = [9.5, 10.5] \times [36, 44]$.

Coefficients : $k = 42.14$, $k_s = 9.28 mmol/l$, $k_i = 256 mmol/l$, $\alpha = 0.5$, $d = 2$.

Système dynamique non monotone incertain

Modèle de Haldane pour les bio-réacteurs

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_x(x,s) &= (\mu_0 \frac{s}{s+k_s+s^2/k_i} - \alpha d)x \\ \dot{s} &= f_s(x,s) &= -k\mu_0 \frac{s}{s+k_s+s^2/k_i} x + (s_{in} - s)d \end{cases}$$

Appliquer la règle de construction et trouver les systèmes englobants ?

Système dynamique non monotone incertain

Modèle de Haldane pour les bio-réacteurs

$$\begin{cases} \dot{x} & = & f_x(x,s) & = & (\mu_0 \frac{s}{s+k_s+s^2/k_i} - \alpha d)x \\ \dot{s} & = & f_s(x,s) & = & -k\mu_0 \frac{s}{s+k_s+s^2/k_i} x + (s_{in} - s)d \end{cases}$$

Signes des dérivés partielles

$\forall t > t_0$,

$\partial f_x / \partial \mu_0 > 0 \wedge \partial f_s / \partial x < 0 \wedge \partial f_s / \partial \mu_0 < 0 \wedge \partial f_s / \partial s_{in}^0 > 0$

$\mathrm{sign}(\partial f_x / \partial s) = \mathrm{sign}(k_s k_i - s^2)$

Système dynamique non monotone incertain

$q = 0$. Système original incertain

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dot{x} & = & f_x(x,s) & = & (\mu_0 \frac{s}{s+k_s+s^2/k_i} - \alpha d)x \\ \dot{s} & = & f_s(x,s) & = & -k\mu_0 \frac{s}{s+k_s+s^2/k_i} x + (s_{in} - s)d \end{array}\right.$$

$q = 1,\ s > \sqrt{k_s k_2},\ \partial f_x / \partial s < 0$

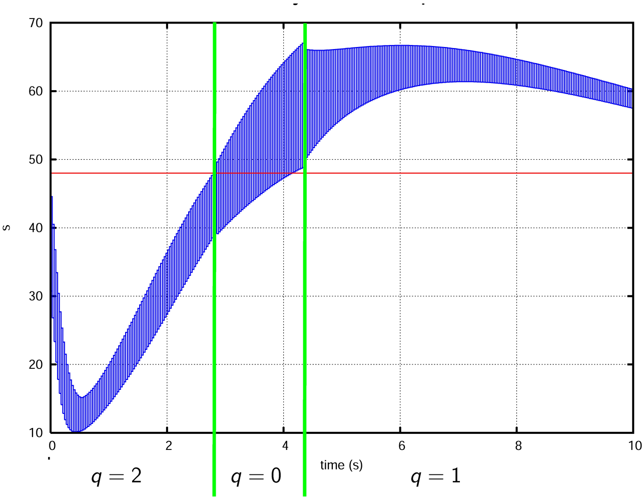
$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{\underline{x}} & = & \underline{\mu}_0 \frac{\overline{s}}{\overline{s}+k_s+\overline{s}^2/k_i} \underline{x} - \alpha d \underline{x} \\ \dot{\underline{s}} & = & -k\overline{\mu}_0 \frac{\underline{s}}{\underline{s}+k_s+\underline{s}^2/k_i} \overline{x} + d(\underline{s}_{in} - \underline{s}) \\ \dot{\overline{x}} & = & \overline{\mu}_0 \frac{\underline{s}}{\underline{s}+k_s+\underline{s}^2/k_i} \overline{x} - \alpha d \overline{x} \\ \dot{\overline{s}} & = & -k\underline{\mu}_0 \frac{\overline{s}}{\overline{s}+k_s+\overline{s}^2/k_i} \underline{x} + d(\overline{s}_{in} - \overline{s}) \end{array}\right.$$

$q = 2,\ s < \sqrt{k_s k_2},\ \partial f_x / \partial s > 0$

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{\underline{x}} & = & \underline{\mu}_0 \frac{\underline{s}}{\underline{s}+k_s+\underline{s}^2/k_i} \underline{x} - \alpha d \underline{x} \\ \dot{\underline{s}} & = & -k\overline{\mu}_0 \frac{\underline{s}}{\underline{s}+k_s+\underline{s}^2/k_i} \overline{x} + d(\underline{s}_{in} - \underline{s}) \\ \dot{\overline{x}} & = & \overline{\mu}_0 \frac{\overline{s}}{\overline{s}+k_s+\overline{s}^2/k_i} \overline{x} - \alpha d \overline{x} \\ \dot{\overline{s}} & = & -k\underline{\mu}_0 \frac{\overline{s}}{\overline{s}+k_s+\overline{s}^2/k_i} \underline{x} + d(\overline{s}_{in} - \overline{s}) \end{array}\right.$$

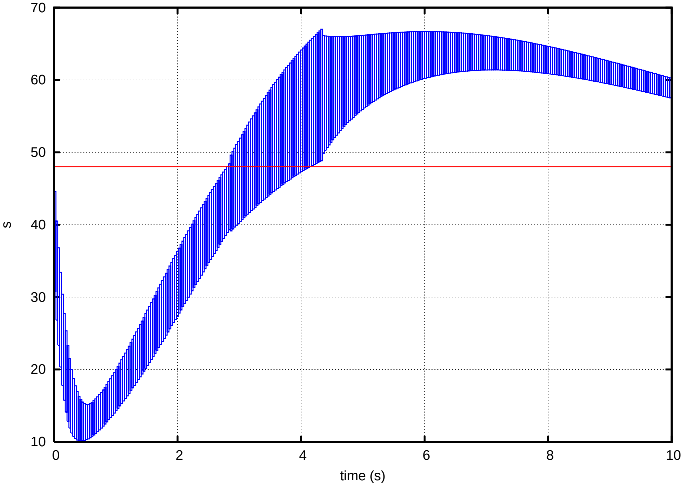
Système dynamique non monotone incertain

Evolution de s



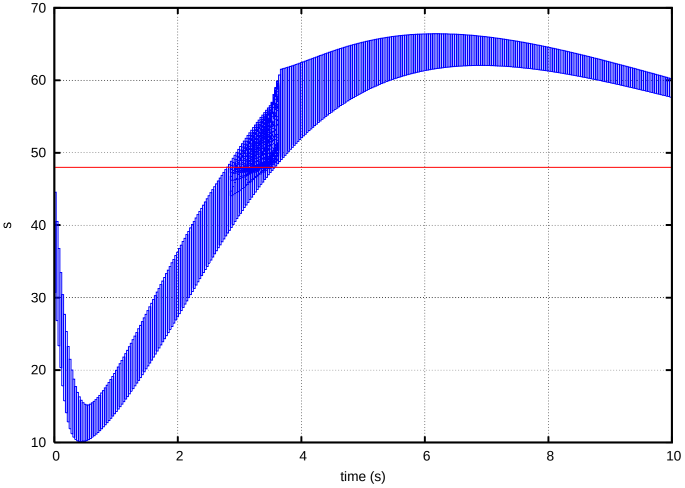
Système dynamique non monotone incertain

Evolution de s



Système dynamique non monotone incertain

Evolution de s



Plan

1 Contexte scientifique

2 Méthodes de Taylor intervalles

3 Théorèmes de Comparaison
- Systèmes dynamiques préservateurs d'ordre
- Systèmes dynamiques non monotones

4 Hybridation non linéaire

5 Références

Références

Méthodes de Taylor intervalles

- *Review*
  N. Nedialkov, K. Jackson, and G. Corliss, validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations, Applied Mathematics and Computation, vol. 105, pp. 21-68, 1999.

Références

Systèmes Monotones

- H.L. Smith. Monotone dynamical systems : An introduction to the theory of competitive and cooperative systems, volume 41 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, 1995.
- M. Hirsch and H.L. Smith. Monotone dynamical systems. In A. Canada, P. Drabek, and A. Fonda, editors, Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, volume 2, chapter 4. Elsevier, 2005.
- D. Angeli and E.D Sontag. Monotone control systems. IEEE Transaction on Automatic Control, 48(10) :1684-1698, 2003.

Références

Théorème de Müller

- M. Müller, Uber das fundamentaltheorem in der theorie der gewöhnlichen differentialgleichungen, Mathematische Zeitschrift, vol. 26, pp. 619-645, 1927.
- W. Walter, Differential inequalities and maximum principles : Theory, new methods and applications, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol. 30, no. 8, pp. 4695-4711, 1997.

Références

Hybridation non linéaire

- N.Ramdani, N.Meslem, Y.Candau, A hybrid bounding method for computing an over-approximation for the reachable space of uncertain nonlinear systems, IEEE Transactions on Automatic Control, to appear in October 2009.
- N.Meslem, N.Ramdani, Y.Candau, Approximation garantie de l'espace d'état atteignable des systèmes dynamiques continus incertains, Journal Européen des Systèmes Automatisés 43(1-2) :241-266, 2009.
- N.Ramdani, N.Meslem, Y.Candau (2008) Reachability of uncertain nonlinear systems using a nonlinear hybridization. Hybrid Systems : Computation and Control, HSCC'08, St. Louis, MO, USA. In : M. Egerstedt and B. Mishra (Eds.) : HSCC 2008, LNCS 4981, pp. 415-428. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.