



## Projet soumis pour l'IUF 2013

Luc Jaulin

Université Bretagne occidentale – ENSTA-Bretagne  
Lab-STICC, UMR 6385

### Analyse par intervalles pour la robotique

#### Résumé

Le calcul par intervalles est un outil numérique permettant la résolution rapide et fiable d'une grande classe de problèmes non linéaires. De nombreux algorithmes par intervalles ont été développés ces 30 dernières années, principalement pour l'optimisation non-convexe. Bien que cet outil dispose d'une grande maturité, il reste encore confidentiel et peu utilisé par les ingénieurs. Une des raisons pour cela est qu'il demande des notions en informatique et en mathématiques peu enseignées dans les cursus classiques et qu'il rentre en concurrence avec des méthodes traditionnelles (méthodes probabilistes, optimisation locale, etc.) bien comprises, couramment utilisées et qui pourtant ne sont pas garanties. Une des grandes forces des méthodes ensemblistes est leur facilité à résoudre des problèmes où les inconnues ont des natures hétérogènes (des réels, des entiers, des fonctions, des graphes, des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , etc.). Cette capacité est à mon sens sous-exploitée alors que de nombreux problèmes issus par exemple de la robotique possèdent cette nature hétérogène. L'objectif de ce projet est de développer les outils théoriques permettant la résolution de tels problèmes, mal résolus par les méthodes traditionnelles. Les problèmes traités seront inspirés de la robotique marine. Lors ce projet, j'envisage réaliser une plateforme logicielle basée sur le calcul par intervalles pour la résolution ensembliste de problèmes de robotique. Je propose aussi d'écrire un livre comprenant les fondements théoriques du calcul ensembliste pour la robotique et contenant un tutoriel pour l'utilisation de la plateforme.

#### Abstract

Interval analysis is a numerical tool able to solve a large class of nonlinear problems in a reliable and efficient way. Many interval algorithms have been developed the three last decades, mainly for non-convex optimization. Although this tool is now at a mature step, it remains confidential and used by only few engineers. The main reason for this is that application of interval analysis requires concepts in computing and mathematics that are rarely taught in the traditional curriculum and that it comes into competition with traditional methods (probabilistic approaches, local optimization, etc.) that are well understood and commonly used even if less reliable. However, one of the great powers of interval methods is their ability to solve problems where the unknown variables have an heterogeneous nature (real numbers, integers, functions, graphs or subsets of  $\mathbb{R}^n$ ). This capability is in my opinion not used enough while many problems have this heterogeneous nature. The objective of this project is to develop theoretical tools to solve difficult heterogeneous problems that are poorly solved by traditional methods. The problems I will address are inspired by robotics. During this project, I plan to make a software platform based on interval computation for the resolution of robotics problems. I also propose to write a book including the foundations of interval computation for robotics and a tutorial for using the software platform.

# Projet de recherche

L'objectif du projet est de démontrer que l'analyse par intervalles peut être un outil puissant qui peut être utilisé pour concevoir des robots fiables, capables d'accomplir une mission dans un environnement incertain. Dans la première partie du projet, je présenterai les outils académiques que je compte utiliser et les contributions que j'aimerais développer. Les problèmes qui seront considérés sont inspirés par la robotique (SLAM en environnement non structuré, planification de chemin sous contraintes sur l'état, caractérisation des domaines de capture, preuves de propriétés des systèmes dynamiques, etc.). Dans la deuxième partie du projet, je présenterai le problème de la validation des propriétés des systèmes dynamiques et je montrerai comment les méthodes par intervalles peuvent être utilisées pour cette validation. Une application à la robotique marine sera également présentée afin d'illustrer pourquoi une telle validation est importante dès que l'on traite de robotique en environnement incertain. La troisième partie du projet pose le problème de la localisation et la construction d'une carte dans un environnement sous-marin alors que le GPS ne peut pas être utilisé. Il est montré que l'analyse par intervalles pourrait apporter de nouveaux algorithmes efficaces pour une localisation fiable dans un tel environnement incertain et ceci même lorsque les données aberrantes ou bien des retards dans les communications existent. Dans la dernière partie je propose quelques réalisations logicielles et robotiques que je souhaite construire dans le cadre de ce projet.

## Outils

**Analyse par intervalles.** Le calcul par intervalles [Moore, 1966] est un outil numérique capable de résoudre une grande classe de problèmes non linéaires d'une façon fiable et efficace. Sous l'hypothèse que les arrondis flottants se font dans le bon sens [Revol, Makino, Berz, 2005], les résultats fournis par les solveurs intervalles contiennent à coup sûr toutes les solutions du problème. De nombreux algorithmes ensemblistes ont été développés ces trois dernières décennies, principalement pour l'optimisation non convexe [Kearfott, 1995], [Kearfott, 2011], [Neumaier, 2004], [Messine, 2004] et pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires. L'analyse par intervalles est un outil intéressant pour résoudre des problèmes d'estimation d'erreurs bornées lorsque le modèle est non linéaire [Jaulin, Walter, 1993], [Jaulin, Kieffer, Didrit, Walter, 2001], [Walter, Pronzato, 1997]. Elle a été utilisée avec succès dans l'identification des paramètres de robots [Ramdani, Poignet 2005], l'électrochimie [Braems, Berthier, Jaulin, Kieffer, Walter, 2001], la physique [Jaulin, Godet, Walter, Elliasmine, Leduff, 1997] ou l'estimation aveugle [Lagrange, Jaulin, Vigneron, Jutten, 2008]. Lorsque le problème est linéaire, les outils traditionnels basés sur des ellipsoïdes [Rokityanski, Veres, 2005] ou zonotopes [Combastel 2005] pourraient être utilisés, mais leur extension aux problèmes non linéaires est beaucoup plus difficile que pour les intervalles [L. Jaulin, 1994]. Comme la plupart des applications robotiques qui seront considérées dans ce projet impliquent des équations non linéaires, nous avons choisi de nous limiter à des ensembles contenant qui sont des intervalles.

**Contracteurs.** Les méthodes de contraction de domaines sont très populaires dans la communauté de la programmation par contraintes [Benhamou, Goualard, Granvilliers, Puget, 1999] [van Emden, 1999]. Combinée avec des méthodes par intervalles, elles sont capables de traiter des problèmes de dimension élevée pour des problèmes d'automatique [Jaulin, 2000], l'estimation d'état [Meizel, Lévêque, Jaulin, Walter, 2002], la localisation [Drevelle, Bonnifait, 2012], l'étalonnage des robots de série [Baguenard, Dao, Jaulin, Khalil, 2003] ou de robots parallèles [Daney, Andreff, Chabert, Papegay, 2006]. Une arithmétique sur les opérateurs de contraction (ou contracteurs) a récemment été proposée dans [Chabert et Jaulin, 2009]. Cette arithmétique s'est montrée adaptée à la résolution d'un grand nombre de problèmes ensembliste (voir par exemple [Colle, Galerne, 2013] dans le contexte de la localisation ou [Le Bars, Sliwka, Reynet, Jaulin, 2012] pour l'estimation d'état).

Dans ce projet, afin d'améliorer l'efficacité des contracteurs, je souhaite combiner les techniques classiques par intervalles utilisées pour la construction des contracteurs avec du calcul symbolique (comme dans [Araya, Neveu, Trombettoni, 2008]), de construire des contracteurs spécifiques (voir par exemple [Jaulin, Henrion, 2005]) consacrés aux applications robotiques, et utiliser les extensions de l'arithmétique par intervalles traditionnelle comme dans [Jaulin, Chabert, 2010].

**Les contracteurs hybrides.** Bien que l'analyse par intervalles combinée avec des méthodes de propagation de contraintes ait atteint une forte maturité, ces outils demeurent confidentiels. La raison principale de ceci est que l'utilisation de l'analyse par intervalles demande des concepts en informatique et mathématiques rarement enseignés dans les programmes traditionnels et qu'elle entre en concurrence avec des méthodes plus classiques (méthodes probabilistes, optimisation locale, etc.) bien comprises et couramment utilisées, même si ces dernières ne sont pas garanties. Or, un des points forts des méthodes par intervalles est leur capacité à résoudre des problèmes où les

variables inconnues ont des natures hétérogènes. Ces variables peuvent être des nombres réels, des entiers, des fonctions, des graphes ou des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  [Sainudiin, 2010]. Cette capacité est à mon avis trop peu exploitée alors que de nombreux problèmes issus de la robotique ont cette caractéristique hétérogène. Un objectif majeur de ce projet est de développer des outils théoriques qui permettent de résoudre des problèmes hétérogènes difficiles et mal résolus par les méthodes traditionnelles. Je chercherai également à comparer les méthodes par intervalles à d'autres approches utilisées pour résoudre des problèmes ensemblistes (comme par exemple les algorithmes de viabilité [Saint-Pierre, 1994]).

**Probabilités et intervalles.** L'analyse par intervalles n'est pas la seule façon de gérer et propager les incertitudes. L'outil le plus classique utilisé par les ingénieurs pour cela est la théorie des probabilités. Récemment, j'ai essayé d'attacher des probabilités à l'ensemble calculé par les méthodes par intervalles (voir [Jaulin, 2010] [Jaulin, 2011b]). De façon réciproque, j'ai aussi essayé d'utiliser certaines techniques d'intervalles pour résoudre des problèmes probabilistes classiques comme le calcul d'ensembles crédibles associés à une distribution de probabilité [Jaulin, 2006]. Or, les méthodes qui en résultent souffrent à la fois des inconvénients de l'approche probabiliste (par exemple, nous avons toujours besoin des lois jointes qui sont pourtant rarement disponibles) et de ceux de l'approche par intervalles (les contracteurs ne pouvant pas être utilisés, le temps de calcul reste nécessairement exponentiel en fonction du nombre de variables inconnues [Kreinovich, Lakeyev, Rohn, Kahl, 1997]). Or, il existe d'autres types de représentation des incertitudes comme par exemple, les approches par raisonnements qualitatifs [Travé-Massuyès, Ironi, Dague, 2003], la théorie des ensembles flous [Dubois, Prade, 1976], les fonctions de croyance [Nassreddine, Abdallah, DenJux, 2010], etc. Influencé par l'article [Kreinovich, Dimuro, Carlos da Rocha Costa, 2004], je souhaite passer plus de temps à étudier l'ensemble des approches existantes pour traiter de l'incertitude et de les comparer entre elles. Je voudrais également à étudier si les techniques par contracteurs ne pourraient pas également être adaptées pour propager des incertitudes qui ne sont pas représentées par des ensembles classiques.

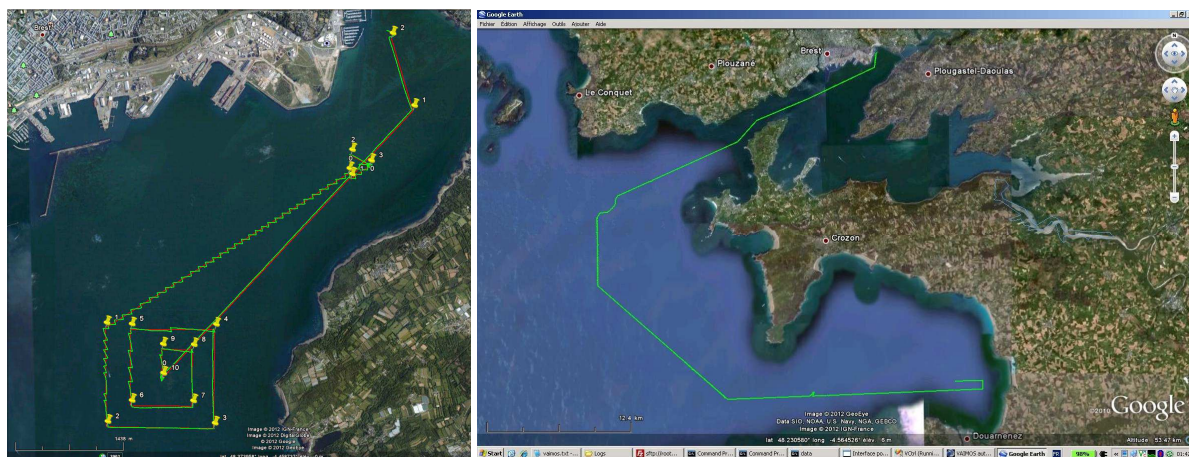
## Validation des propriétés des systèmes dynamiques

Comme décrit dans nombreux livres élémentaires d'automatique [Rivoire, Ferrier, 1989] [Jaulin, 2005], les systèmes dynamiques peuvent être décrits par des équations d'état (une classe particulière de l'équation différentielle) et concevoir des méthodes permettant de prouver les propriétés de ces systèmes est un enjeu important. Comme montré dans [Berz, Makino, 1998] ou dans [Tucker, 2002], les méthodes par intervalles sont en mesure de résoudre ce type de problème impliquant des équations différentielles. Il existe des bibliothèques efficaces [Nedialkov, Jackson, Corliss, 1999] capables d'intégrer des équations non linéaires et de calculer un pavé contenant le vecteur d'état à coup sûr. Les outils par intervalles ont été utilisés (i) pour démontrer des théorèmes portant sur des systèmes dynamiques [Tucker, 1999], [Goldsztein, Hayes, Collins, 2011], (ii) pour l'analyse de la topologie des ensembles [Delanoue, Jaulin, Cottenceau, 2006], (iii) pour l'étude de la stabilité des systèmes linéaires incertains [Jaulin, Burger, 1999], [Malti, Moreau, Khemani, Oustaloup, 2011], (iv) pour la résolution de problèmes de planification de chemin [Jaulin, 2001] et (v) pour le traitement de plusieurs applications telles que l'estimation état fiable [Videau, Raissi, Zolghadri, 2009] [L. Jaulin, 2002]. Récemment, nous avons combiné [Jaulin, Le Bars, 2012] les outils par intervalles avec les concepts de la théorie de la viabilité [Aubin, Frankowska, 1990] tels que l'inclusion différentielle [Quincampoix, 1992] afin prouver la V-stabilité d'un système fortement non linéaire et hybride: *le voilier* (voir par exemple [Petres, Romero Ramirez, Plumet, 2011] pour plus d'informations sur le problème de la commande des robots voiliers). Les robots voiliers sont utilisés, en outre, pour recueillir des mesures à la surface de l'océan [Sauze, Neal, 2006]. Notre approche par intervalles a été utilisée pour montrer que pour tous les vents acceptables et pour toutes les perturbations possibles, le robot voilier va rester à l'intérieur d'un couloir de 30 mètres autour de la ligne désirée. La propriété de V-stabilité a également été démontrée expérimentalement par le robot voilier VAIMOS, construit par notre équipe de l'ENSTA et IFREMER de Brest (voir la photo ci-dessous).



VAIMOS, un robot autonome, pendant son trajet entre Brest et Douarnenez

La photo ci-dessous à gauche montre la trajectoire réelle parcourue par VAIMOS lorsque la trajectoire désirée est une spirale carrée. L'image de droite correspond à la trajectoire réelle du robot lors de son voyage entre Brest et Douarnenez (plus de 100 km).



Trajets réels parcourus par le robot voilier VAIMOS

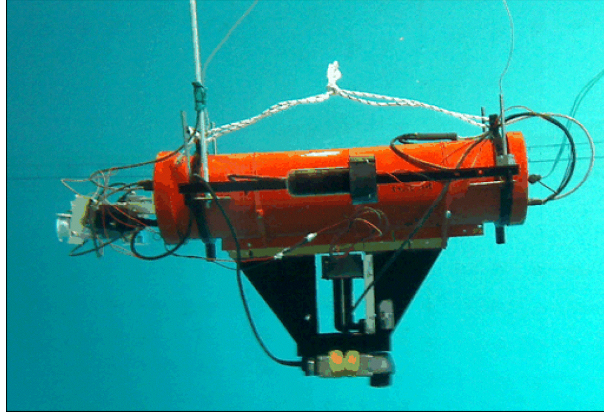
Nous avons montré que prouver V-stabilité robuste (ou de façon presque équivalente qu'un ensemble fera une capture de l'état du système et ceci pour toutes les perturbations possibles) peut facilement se faire en utilisant l'analyse par intervalles et que cette approche possède un champ d'applications certain. Dans ce projet, je souhaite tout d'abord utiliser la V-stabilité par intervalles pour garantir des propriétés sur d'autres systèmes fortement non linéaires avec des composantes hybrides comme les robots biomimétiques. Pour ce type de systèmes les méthodes classiques ne parviennent pas à prouver avec certitudes des propriétés dynamiques, comme la stabilité par exemple. Des exemples de tels robots sont l'anguille [Boyer, Alamir, Chablat, Khalil, Leroyer, Lemoine, 2006] ou les robots marcheurs [Chevallereau, Bessonnet, Abba, Aoustin, 2007]. Je chercherai également à étendre la méthodologie pour traiter des propriétés des meutes de robots mobiles évoluant un même environnement. Si ces robots fonctionnent de façon coopérative, nous pourrions être intéressés, par exemple, à prouver qu'aucune collision ne se produira. Je souhaite aussi à utiliser l'approche par V-stabilité pour résoudre des problèmes de jeux différentiels. Ainsi, par exemple, nous pourrions chercher une stratégie de contrôle pour un robot A, qui garantit que, pour toutes les perturbations acceptables et pour tous les mouvements réalisables d'un robot B, le robot A sera capable d'attraper robot de B en un temps fini.

## SLAM (Localisation et cartographie simultanées) sous-marin distribué

Jusqu'à tout récemment, les robots sous-marins ont été utilisés pour un nombre limité de tâches dictées par la technologie. Avec le développement des technologies, les robots sous-marins sont maintenant utilisés pour des tâches de plus en plus complexes et des missions autonomes. Ces robots peuvent avoir des modes de déplacement plus ou moins variés [Boyer, Porez, Khalil, 2006]. Ils sont utilisés (i) par l'industrie pétrolière pour obtenir des cartes détaillées des fonds marins, (ii) pour rechercher des mines, (iii) pour surveiller une zone protégée (comme un port), ou (iv) par les scientifiques pour étudier les fonds marins. En raison du fait que le GPS ne fonctionne pas sous l'eau, les robots doivent utiliser des capteurs tels que des caméras ou des sonars. Le problème de localisation s'exprime comme un problème de satisfaction de contraintes pour lequel l'analyse par intervalles est très efficace

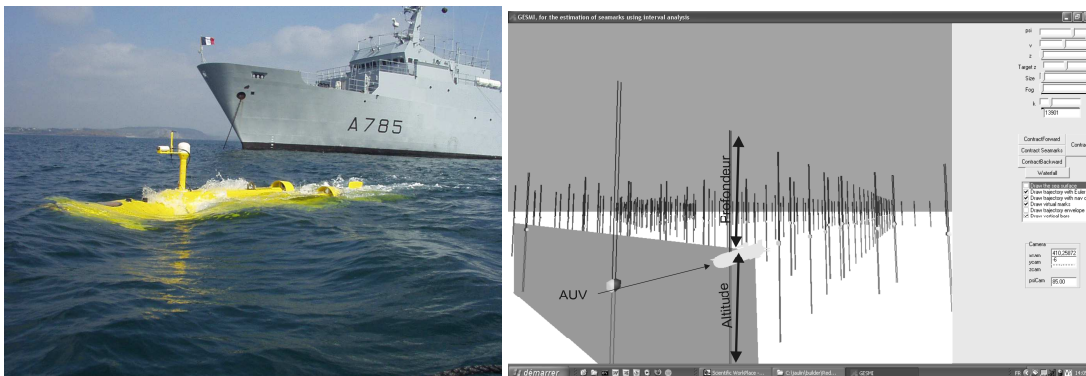
[Clérentin, Delafosse, Delahoche, Marhic, Jolly-Desodt, 2008], [Soares, Arnold-Bos, Jaulin, Vasconcelos, Maia, 2008].

A plusieurs reprises, j'ai utilisé les méthodes par intervalles pour localiser les robots terrestres [Jaulin, Walter, Lévêque, Meizel, 2000] ou des robots sous-marins tels que SAUCISSE (voir ci-dessous) à l'aide d'un sonar télémétrique. Le principal avantage de l'utilisation de méthodes par intervalles, dans ce contexte est sa robustesse par rapport aux valeurs aberrantes [Kieffer, Jaulin, Walter, Meizel, 2000], [Jaulin, Walter, 2002]. Comme montré dans [Jaulin, 2009b], cette robustesse est essentielle dans un environnement sous-marin, en raison de tous les échos multiples et les obstacles qui donnent des valeurs aberrantes très nombreuses.



Robot sous marin SAUC'ISSE à l'intérieur de la piscine d'IFREMER, Brest

Lorsqu'aucun amer géoréférencé [Joly, Rives, 2008] n'est disponible (ce qui est souvent le cas en pratique), une technique SLAM doit être envisagée. Une approche par contracteurs peut être utilisée si des marques ponctuelles (comme des petits rochers) peuvent être trouvés sur le fond de l'océan. C'est ce que nous avons fait avec le Redermor (le robot du GESMA, Brest) [Jaulin, 2009a], où nous avons prouvé qu'une technique de SLAM par intervalles permettait d'obtenir une localisation beaucoup plus précise et que la cartographie pouvait être retrouvée par le même algorithme.



Gauche, en jaune : le robot sous-marin *Redermor* près de Brest,  
Droite: reconstruction de la trajectoire par une technique de SLAM par intervalles

Dans un contexte sous-marin, les roboticiens se tournent de plus en plus vers le développement des meutes de robots sous-marins. Comparé à un gros robot classique du type de Redermor (voir photo ci-dessus), chaque robot de la meute est bon marché (pas de centrale inertielle coûteuses à l'intérieur), plus petit (moins de danger en cas de collision avec un autre bateau), plus robuste (si un robot est perdu, la meute est toujours opérationnelle) et la localisation est plus facile (quand un robot fait surface, il peut trouver sa position GPS et informer le reste de la meute de cette mesure). Dans un contexte similaire, comme montré par [Kieffer 2009], la localisation par intervalles peut être facilement distribuée à l'intérieur de la meute. Dans ce projet, je voudrais montrer que la localisation distribuée peut être efficace tout en prenant en compte le faible débit de communication, les délais de transmission non négligeables et les nombreuses données aberrantes qui se produisent lorsque l'on mesure les distances inter-robots. Je chercherai également à combiner, dans le même esprit que dans [Abdallah, Gning, Bonnifait, 2008], les méthodes par contracteurs avec les approches particulières telles que [Prestes, Ritt, Fuhr, 2008] afin de profiter (i) de la capacité des contracteurs à éliminer une grande partie de l'ensemble des solutions et (ii) des méthodes particulières à caractériser les densités de probabilité associées à la position des robots.

Comme expliqué ci-dessus, la localisation sous-marine est un problème qui doit être résolu de façon fiable si l'on veut effectuer de longues missions autonomes. Dans de nombreuses applications, il n'est pas acceptable de

demander à un robot d'une meute de refaire surface afin de recueillir un point GPS. De même, il est souvent impossible de trouver de façon fiable et non ambiguë des marques ponctuelles permettant l'utilisation d'une technique SLAM classique. Il a été récemment montré que l'utilisation des intervalles d'ensembles de  $\mathbb{R}^n$  (tels que définis dans [Jaulin, 2012]), permettait [Jaulin, 2011a] de résoudre efficacement le SLAM dans un contexte où la carte est représentée par une grille d'occupation. Cette approche particulièrement bien adaptée à un contexte sous-marin où peu d'amers fiables peuvent être trouvés et pour lequel on ne peut que s'appuyer sur la forme des fonds océaniques. Au cours de ce projet, je voudrais aller plus loin dans cette direction et montrer que l'approche peut être rendue plus efficace quand une meute est utilisée à la place d'un seul robot.

Un autre sujet, que je voudrais aborder dans le contexte de la localisation sous-marine est le développement d'outils académiques permettant le calcul de la précision a priori (c'est-à-dire avant l'expérience) qui pourra être obtenue par une méthode de localisation ensembliste, après l'expérience. Cette étape est essentielle lors de la planification d'une mission lorsque nous avons besoin de fiabilité. Plus précisément, on cherchera à garantir avant la mission qu'aucun robot ne sera perdu, que la meute restera connectée, qu'aucune collision se produira, etc. Pour effectuer cette tâche, j'envisage d'utiliser l'arithmétique des ressorts développée dans [Chabert, L. Jaulin, 2009] et essayer de généraliser l'approche de [Reynet, Jaulin, 2011] qui a été développée pour caractériser l'ensemble des états où le robot sera capable de se localiser avec la précision requise. L'approximation intérieure de cet ensemble pourra être faite en utilisant des tests intérieurs tels que ceux développés dans [Goldsztejn, Jaulin, 2006] ou [Lagrange, Delanoue, Jaulin, 2008].

## Réalisations prévues

### Logiciel

Pendant ce projet, j'ai l'intention de faire une plate-forme logicielle basée sur le calcul par intervalles pour la résolution des problèmes de robotiques. Cette plateforme servira à implémenter rapidement des algorithmes nécessitant la résolution de problèmes non-linéaires, comme la localisation, le SLAM, la vérification de propriétés dynamiques des robots ou la planification de chemins. Je propose aussi d'écrire un livre expliquant les fondements du calcul par intervalles pour la robotique et contenant un tutoriel pour l'utilisation de la plate-forme logicielle.

### Robots

Je voudrais construire une meute de robots à roues où la plupart des algorithmes développés dans le cadre de ce projet seraient mis en œuvre. L'ordinateur à l'intérieur de chaque robot serait un simple smartphone et la plupart des capteurs et des systèmes de communication seraient ceux du smartphone. Je propose également de profiter de tous les robots que nous avons développés dans notre école (principalement des voiliers et des robots sous-marins) afin de démontrer la capacité de l'analyse par intervalles à élaborer des structures robotisées fiables capables et d'accomplir des missions difficiles dans un environnement incertain.

# Research project

The aim of the project is to demonstrate that interval analysis could be a powerful tool that can be used to build reliable robots able to accomplish a mission in an uncertain environment.

In the first part of the project, I shall present the tools I want to use and the contributions I would like to develop in this context. The problems I will then address are inspired by automatic control and robotics (SLAM in unstructured environment, path planning under state constraints, characterization of capture domains, proofs of properties of dynamical systems, etc.). In the second part of the project I will present the problem of validating the properties of a dynamic systems and show how interval methods could be used for this validation. An application to sailboat robotics will also be presented to illustrate why such a validation is important when dealing with robots in an uncertain environment. The third part of the project presents the problem of localization and map building in an underwater environment when the GPS cannot be used. It is shown that interval analysis could bring successful new algorithms for a reliable localization in an uncertain environment with outlier and delays in the communications. In the last part, the realization I am planning to realize will be described.

## Tools

**Interval analysis.** Interval computation [Moore, 1966] is a numerical tool able to solve a large class of nonlinear problems in a reliable and efficient way. Provided that the outward rounding is implemented [Revol, Makino, Berz, 2005], the results provided by interval solver are guaranteed to contain all solutions. Many interval algorithms have been developed the three last decades, mainly for non-convex optimization [Kearfott, 1995], [Kearfott, 2011], [Neumaier, 2004], [Messine, 2004] and for solving non-linear equations. Interval analysis is an attractive tool to deal with nonlinear bounded-error estimation problems [Jaulin, Walter, 1993], [Jaulin, Kieffer, Didrit, Walter, 2001], [Walter, Pronzato, 1997]. It has successfully been used in robotic identification [Ramdani, Poignet 2005], electrochemistry [Braems, Berthier, Jaulin, Kieffer, Walter, 2001], physics [Jaulin, Godet, Walter, Elliasmine, Leduff, 1997] or blind estimation [Lagrange, Jaulin, Vigneron, Jutten, 2008]. When the problem is linear, traditional tools based on ellipsoids [Rokityanski, Veres, 2005] or zonotopes [Combastel 2005] could be used, but their extension to nonlinear problems is much more difficult than using intervals [Jaulin, 1994]. Since most robotics applications that will be considered in this project involve nonlinear equations, we have chosen to limit ourselves to wrappers that are intervals.

**Contractors.** Contraction methods are very popular in the constraint community [Benhamou, Goualard, Granvilliers, Puget, 1999] [van Emden, 1999]. Combined with interval methods, they have been shown to be able to deal with high dimensional problem in the context of automatic control [Jaulin, 2000], state estimation [Meizel, Lévêque, Jaulin, Walter, 2002], localization [Drevelle, Bonnifait, 2012], calibration of robots of serial robots [Baguenard, Dao, Jaulin, Khalil, 2003] or parallel robots [Daney, Andreff, Chabert, Papegay, 2006]. An arithmetic on contraction operators (or contractors) has recently been proposed in [Chabert and Jaulin, 2009]. This arithmetic has been shown to be efficient to solve a lot of set-membership problems (see e.g. [Colle, Galerne, 2013] in the context of localization or [Le Bars, Sliwka, Reynet, Jaulin, 2012] for state estimation).

In this project, to improve the efficiency of contractor, I would like to combine classical interval techniques used to build contractors with symbolic calculus (such as in [Araya, Neveu, Trombettoni, 2008]), to build specific contractors (see e.g. [Jaulin, Henrion, 2005]) devoted to robotics applications, or to use extensions of the traditional interval arithmetic such as in [Jaulin, Chabert, 2010].

**Hybrid contractors.** Although interval analysis combined with constraint propagation methods is now at a mature step, these tools remain confidential and used by only few engineers. The main reason for this is that using interval analysis requires concepts in computing and mathematics that are rarely taught in the traditional curriculum and that it comes into competition with traditional methods (probabilistic approaches, local optimization, etc.) that are well understood and commonly used, even if less reliable. However, one of the main powers of interval methods is their ability to solve problems where the unknown variables have heterogeneous natures. These variables may be real numbers, integers, functions, graphs, or subsets of  $\mathbb{R}^n$  [Sainudiin, 2010]. This capability is in my opinion not used enough while many problems have this heterogeneous feature. One important objective of this project is to develop theoretical tools that make it possible to solve difficult heterogeneous problems that are poorly solved by traditional methods. I also want to compare interval based tools with other approaches that are used to solve set-membership methods (e.g. [Saint-Pierre, 1994])

**Probabilities and intervals.** Interval analysis is not the only way to handle uncertainties. The most classical tool is probability theory. Recently, I tried to attach some probabilities to the set computed using interval methods (see [Jaulin, 2010] [Jaulin, 2011b]). I also tried to use some interval techniques to solve classical probabilistic problems such as computing credible sets [Jaulin, 2006]. Now, resulting methods suffered from disadvantage of both

probabilistic approaches (e.g., we do not always know the joint probability distribution) and interval techniques (contractors cannot be used and thus the computing time exponential with respect to the number of unknown variables [Kreinovich, Lakeyev, Rohn, Kahl, 1997]). Now there exists other types of representations of uncertainties as for instance, qualitative reasoning approaches [Travé-Massuyès, Ironi, Dague, 2003], fuzzy sets [Dubois, Prade, 1976], belief functions [Nassreddine, Abdallah, DenIJux, 2010], etc. Influenced by the paper [Kreinovich, Dimuro, Carlos da Rocha Costa, 2004], I would like to spend more times to study all existing approaches and to compare them. I would also like to study if contractor techniques could also be adapted to propagate uncertainties that do not correspond to classical intervals.

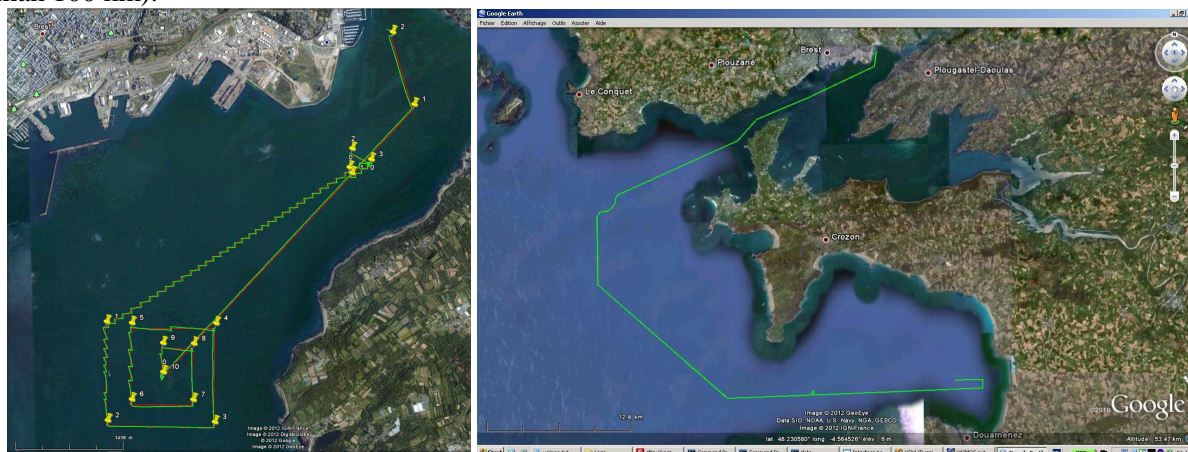
## Validating properties of dynamic systems

As presented by many scholar books on automatic control [Rivoire, Ferrier, 1989] [Jaulin, 2005], dynamic systems can be described by state equations (a particular class of differential equations) and proving properties of these systems is an important issue. As shown in [Berz, Makino, 1998] or in [Tucker, 2002], interval methods are able to deal with differential equations. There exist efficient libraries [Nedialkov, Jackson, Corliss, 1999] able to integrate nonlinear state equations in a guaranteed way. These tools have been used (i) to prove theorems involving dynamic systems [Tucker, 1999], [Goldsztejn, Hayes, Collins, 2011], (ii) to analyze topology of sets [Delanoue, Jaulin, Cotteceau, 2006], (iii) to study the stability of uncertain linear systems [Jaulin, Burger, 1999], [Malti, Moreau, Khemani, Oustaloup, 2011], (iv) to solve path planning problems [Jaulin, 2001] and (v) to deal with several applications such as reliable state observation [Videau, Raïssi, Zolghadri, 2009] [L. Jaulin, 2002]. Recently, we have combined [Jaulin, Le Bars, 2012] interval tools with concepts from viability theory [Aubin, Frankowska, 1990] such as differential inclusion [Quincampoix, 1992] to prove the V-stability of a strongly hybrid nonlinear system: the sailboat (see e.g. [Petres, Romero Ramirez, Plumet, 2011] for more about the control of a sailboat robot). Sailboat robots could be useful to collect data at the surface of the ocean [Sauze, Neal, 2006]. Our approach has been used to show that for all feasible winds and for all feasible perturbations, the sailboat robot will stay inside a corridor of 30 meters around the desired line. The V-stability property has also been demonstrated experimentally on the sailboat robot VAIMOS that has been built by our team of ENSTA and IFREMER Brest (see the picture below).



VAIMOS during its trip between Brest and Douarnenez

The picture below on the left shows the actual trajectory of VAIMOS when the desired trajectory is a squared spiral. The picture on the right corresponds to actual trajectory of the robot during its trip between Brest and Douarnenez (more than 100 km).



Actual trajectories performed by the sailboat robot VAIMOS

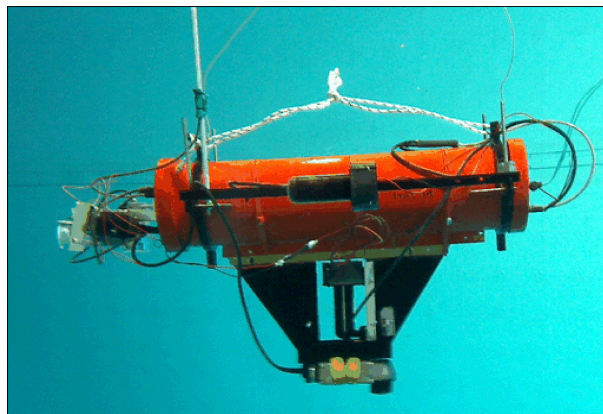


We have shown that proving the robust V-stability (or almost equivalently that a set will capture the state of the system for all feasible perturbations) can easily be done using interval analysis and that this approach has convincing applications. In this project, I first want to use the interval V-stability to deal with biomimetic robots that are also strongly nonlinear with hybrid components and for which classical method cannot prove any guarantee with respect to the stability. Examples of such robots are eel like robots [Boyer, Alamir, Chablat, Khalil, Leroyer, Lemoine, 2006] or walking robots [Chevallereau, Bessonnet, Abba, Aoustin, 2007]. I also want to extend the methodology to deal with several robots moving in the same environment. If these robots correspond to a collaborative swarm, we would like, for example, to prove that no collision could occur. I also want to use the V-stability approach to deal with differential game problems. As for instance, finding a control strategy for a robot A which guarantees that for all acceptable perturbations and for all feasible motions of a robot B, the robot A will be able to catch robot B.

## **Distributed underwater SLAM**

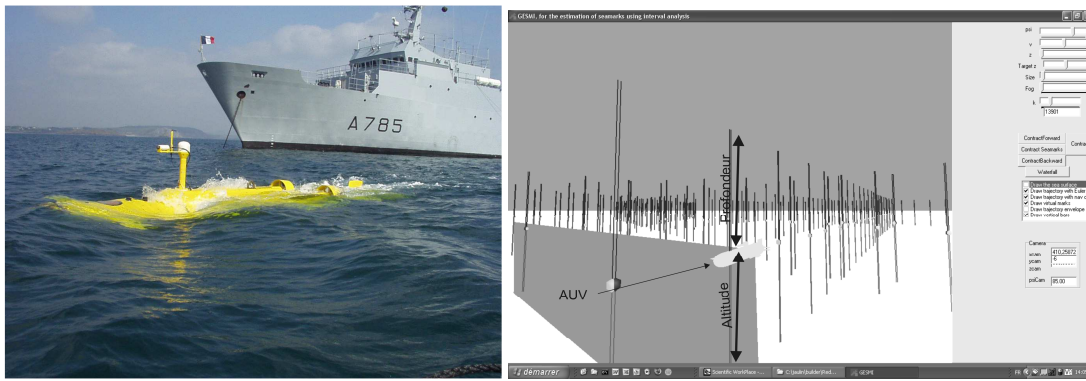
Until relatively recently, underwater robots have been used for a limited number of tasks dictated by the technology. With the development of more advanced processing capabilities, underwater robots are now being used for more and more tasks with roles and missions constantly evolving. These robots may have different shape [Boyer, Porez, Khalil, 2006] and are used (i) by oil industry to make detailed maps of the seafloor, (ii) by the anti-submarine warfare to determine if there are any mines, (iii) to monitor a protected area (such as a harbor) for new unidentified objects, or (iv) by scientists to study lakes, the ocean, and the seafloor. Due to the fact that GPS is not available underwater, the robots have to use sensors such as cameras or sonars and the localization problem can be cast into a constraint satisfaction problem for which interval analysis are very efficient [Clérentin, Delafosse, Delahoche, Marhic, Jolly-Desodt, 2008], [Meizel, Lévêque, Jaulin, Walter, 2002], [Soares, Arnold-Bos, Jaulin, Vasconcelos, Maia, 2008].

We have already used interval method to localize terrestrial robots [Jaulin, Walter, Lévêque, Meizel, 2000] or our underwater robots such as SAUCISSE (see below) using a rangefinder sonar. The main advantage of using interval methods in this context is its robustness with respect to outliers [Kieffer, Jaulin, Walter, Meizel, 2000], [Jaulin, Walter, 2002]. As shown in [Jaulin, 2009b] this robustness is essential in an underwater environment, due to all multiple echoes and obstacles which yield many outliers.



Underwater robot SAUC'ISSE inside the pool

Now, when no georeferenced marks are available underwater, SLAM techniques should be considered. Interval analysis could be used for that if punctual marks (such as rocks) can be found on the seafloor [Joly, Rives, 2008]. This is what we have done with the Redermor (the robot of GESMA, Brest) [Jaulin, 2009a] where we have proven that, with the interval SLAM, the localization was much more accurate and that the mapping could be performed in the same time.



Left: Redermor near Brest, Right: reconstruction of the trajectory using interval SLAM techniques

Now, more and more, people from underwater robotics are interested in developing swarms of underwater robots. Compared to one single big underwater robot such as Redermor (see picture above), each robot of the swarm would be cheaper (no expensive inertial central inside), smaller (less danger in case of collision with another boat), more robust (if a robot is lost, the swarm is still operational) and the localization is more easy (when a robot is at the surface, it can find its GPS location and inform the rest of the swarm). In a similar context, as shown by [Kieffer 2009], the interval localization can easily be distributed inside the swarm. In this project, I would like to show that the distributed localization can be efficient, taking into account the poor communication ration, the transmission delays and outliers occurring when measuring the distances between robots. I would also like to combine [Abdallah, Gning, Bonnifait, 2008] set membership methods with probabilistic approaches such as [Prestes, Ritt, Fuhr, 2008] in order to take advantage of (i) contractors to eliminate large portions of the solution set and (ii) of particle methods to characterize the probability that to contains the solution.

As explained above, underwater localization is a problem that should be solved if we want to perform long autonomous missions. In many applications, it is not acceptable to surface one robot to collect a GPS point and it is not possible to find punctual marks to allow using a classical SLAM technique. It has recently been shown that using interval of subsets of  $R^n$  (as defined in [Jaulin, 2012]) it was possible [Jaulin, 2011a] to solve efficiently the range-only SLAM in a context where the map is represented by an occupancy set. This is particularly adapted to an underwater SLAM where no reliable seamounts can be found and one can only rely on the shape of the seafloor. During this project, I would like to go further in this direction and to show that the approach can be made more efficient when a swarm is used instead of a single robot.

Another subject, I would like to address in the context of underwater localization is to develop the theoretical tools that would allow a characterization of the prior (i.e., before the experiment) accuracy that would be obtained using an interval localization method (after the experiment). This step is essential during the mission planning if we need a guarantee that no robot will be lost, that the swarm will always be connected, that no collision could occur, etc. To perform this task, I would like to use the *spring* arithmetic develop in [Chabert, L. Jaulin, 2009] and to try to generalize the approach of [Reynet, Jaulin, 2011] that has been developed to characterize sets where the robot is able to localize itself with the required accuracy. The inner approximation of this set could be done by using inner interval tests such as those developed in [Goldsztein, Jaulin, 2006] or [Lagrange, Delanoue, Jaulin, 2008].

## Expected realizations

### Software

During this project, I plan to make a software platform based on interval computation for the resolution of robotic problems. This platform would be used to implement fast algorithms that require solving nonlinear problems, like localization, SLAM, verification of dynamic properties of robots or path planning. I also propose to write a book including the foundations of interval computation for robotics and a tutorial for using the software platform.

### Robots

I would like to build a cheap swarm of wheeled robots where most algorithms developed in the context of this project would be implemented. The computer inside each robot would be simple smartphone and most of the sensors and communication system would be those of the smartphone. I also propose to take advantage of all robots we have developed in our school (mainly sailboats and underwater robots) to demonstrate the ability of interval analysis to build reliable robots able to accomplish a difficult mission in an uncertain environment.

# Bibliographie

- F. Abdallah, A. Gning, and P. Bonnifait. Box particle filtering for nonlinear state estimation using interval analysis. *Automatica*, 44(3) :807-815, 2008.
- I. Araya, B. Neveu, and G. Trombettoni. Exploiting Common Subexpressions in Numerical CSPs. In *Proc. CP, Constraint Programming*, pages 342-357.
- J.P. Aubin and H. Frankowska. *Set-Valued Analysis*. Birkhäuser, Boston, 1990.
- X. Baguenard, M. Dao, L. Jaulin, and W. Khalil. Méthodes ensemblistes pour l'étalonnage géométrique. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 37(9) :1059-1074, 2003.
- F. Benhamou, F. Goualard, L. Granvilliers, and J. F. Puget. Revising hull and box consistency. In *Proceedings of the International Conference on Logic Programming*, pages 230-244, Las Cruces, NM, 1999.
- M. Berz and K. Makino. Verified integration of odes and flows using differential algebraic methods on high-order taylor models. *Reliable Computing*, 4(3) :361-369, 1998.
- F. Boyer, M. Alamir, D. Chablat, W. Khalil, A. Leroyer, and P. Lemoine. Robot anguille sous-marin en 3d. In *Techniques de l'Ingénieur*, 2006.
- F. Boyer, M. Porez, and W. Khalil. Macro-continuous computed torque algorithm for a three-dimensional eel-like robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(4) :763-775, 2006.
- I. Braems, F. Berthier, L. Jaulin, M. Kieffer, and E. Walter. Guaranteed estimation of electrochemical parameters by set inversion using interval analysis. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 495(1) :1-9, 2001.
- G. Chabert and L. Jaulin. A Priori Error Analysis with Intervals. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(3) :2214-2230, 2009.
- G. Chabert and L. Jaulin. Contractor Programming. *Artificial Intelligence*, 173 :1079—1100, 2009.
- C. Chevallereau, G. Bessonnet, G. Abba, and Y. Aoustin. *Les robots marcheurs bipèdes ; Modélisation, conception, synthèse de la marche*, commande. Hermès-Lavoisier, Paris, 2007.
- A. Clémentin, M. Delafosse, L. Delahoche, B. Marhic and A.M. Jolly-Desodt. Uncertainty and imprecision modeling for the mobile robot localization problem. *Autonomous Robots*, 24(3) :1573-7527, 2008.
- E. Colle and Galerne. Mobile robot localization by multiangulation using set inversion. *Robotics and Autonomous Systems*, 61(1) :39-48, 2013.
- C. Combastel. A state bounding observer for uncertain non-linear continuous-time systems based on zonotopes. In *CDC-ECC '05*, 2005.
- D. Daney, N. Andreff, G. Chabert, and Y. Papegay. Interval Method for Calibration of Parallel Robots: Vision-based Experiments. *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, 41 :926-944, 2006.
- N. Delanoue, L. Jaulin, and B. Cottenceau. Using interval arithmetic to prove that a set is path connected. *Theoretical Computer Science*, 351(1) :119-128, 2006.
- V. Drevelle and P. Bonnifait. igps : Global positioning in urban canyons with road surface maps. *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine*, 4(3) :6-18, 2012.
- D. Dubois and H. Prade. Random sets and fuzzy interval analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 42(1) : 87-101, 1976.
- M. Rivoire et J.L. Ferrier. *Cours et exercices d'automatique*, Tomes 1, 2 et 3. Eyrolles, Paris, France, 1989.
- A. Goldsztejn, W. Hayes, and P. Collins. Tinkerbell is chaotic. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 10(4) :1480-1501, 2011.
- A. Goldsztejn and L. Jaulin. Inner and outer approximations of existentially quantified equality constraints. *CP 2006*, Nantes (France), 2006.
- L. Jaulin. Solution globale et garantie de problèmes ensemblistes ; application à l'estimation non linéaire et à la commande robuste. *PhD dissertation*, Université Paris-Sud, Orsay, France, 1994.
- L. Jaulin and J. Burger. Proving stability of uncertain parametric models. *Automatica*, pages 627-632, 1999.
- L. Jaulin. Le calcul ensembliste par analyse par intervalles. *Habilitation à diriger des recherches*, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2000.
- L. Jaulin, E. Walter, O. Lévêque, and D. Meizel. Set inversion for  $\chi$ -algorithms, with application to guaranteed robot localization. *Mathematics and Computers in Simulation*, 52(3-4) :197-210, 2000.
- L. Jaulin. Path planning using intervals and graphs. *Reliable Computing*, 7(1) :1-15, 2001.
- L. Jaulin. Nonlinear bounded-error state estimation of continuous-time systems. *Automatica*, 38 : 1079-1082, 2002.

- L. Jaulin. *Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes* (Coll. Automatique de base). Hermès, London, 2005.
- L. Jaulin. Computing minimal-volume credible sets using interval analysis; application to bayesian estimation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 54(9) :3632-3636, 2006.
- L. Jaulin (a) . A Nonlinear Set-membership Approach for the Localization and Map Building of an Underwater Robot using Interval Constraint Propagation. *IEEE Transaction on Robotics*, 25(1) :88-98, 2009.
- L. Jaulin (b). Robust set membership state estimation ; application to underwater robotics. *Automatica*, 45(1) :202-206, 2009.
- L. Jaulin. Probabilistic set-membership approach for robust regression. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 4(1), 2010.
- L. Jaulin (a). Range-only SLAM with occupancy maps; A set-membership approach. *IEEE Transaction on Robotics*, 27(5) :1004-1010, 2011.
- L. Jaulin (b). Set-membership localization with probabilistic errors. *Robotics and Autonomous Systems*, 59(6) :489-495, 2011.
- L. Jaulin. Solving set-valued constraint satisfaction problems. *Computing*, 94(2) :297-311, 2012.
- L. Jaulin and F. Le Bars. An interval approach for stability analysis; Application to sailboat robotics. *IEEE Transaction on Robotics*, 27(5), 2012.
- L. Jaulin and G. Chabert. Resolution of nonlinear interval problems using symbolic interval arithmetic. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 23(6) :1035-1049, 2010.
- L. Jaulin, J. L. Godet, E. Walter, A. Elliasmine, and Y. Leduff. Light scattering data analysis via set inversion. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, pages 7733-7738, 1997.
- L. Jaulin and D. Henrion. Contracting optimally an interval matrix without losing any positive semidefinite matrix is a tractable problem. *Reliable Computing*, 11(1) :1-17, 2005.
- L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied Interval Analysis, with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Springer-Verlag, London, 2001.
- L. Jaulin and E. Walter. Guaranteed nonlinear parameter estimation via interval computations. *Interval Computation*, pages 61-75, 1993.
- L. Jaulin and E. Walter. Guaranteed robust nonlinear minimax estimation. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 47(11) :1857-1864, 2002.
- C. Joly and P. Rives. Bearing-only SLAM : comparison between probabilistic and deterministic methods. *Research Report RR-6602, INRIA*. URL <http://hal.inria.fr/inria-00308722/en/>, 2008.
- M. Kieffer, Distributed Bounded-Error State Estimation, SysId, 2009.
- R.B. Kearfott. A Fortran 90 environment for research and prototyping of enclosure algorithms for nonlinear and global optimization. *ACM Trans. Math. Software*, 21(1) :63-78, 1995.
- R.B. Kearfott. Interval computations, rigor and non-rigor in deterministic continuous global optimization. *Optimization Methods and Software*, 26(2) :259-279, 2011.
- M. Kieffer, L. Jaulin, E. Walter, and D. Meizel. Robust autonomous robot localization using interval analysis. *Reliable Computing*, 6(3) :337-362, 2000.
- V. Kreinovich, G.P. Dimuro, and A. Carlos da Rocha Costa. Probabilities, intervals, what next ? extension of interval computations to situations with partial information about probabilities. In *10th IMEKO TC7 International symposium*, 2004.
- V. Kreinovich, A.V. Lakeyev, J. Rohn, and P.T. Kahl. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. *Reliable Computing*, 4(4) :405-409, 1997.
- S. Lagrange, N. Delanoue, and L. Jaulin. Injectivity analysis using interval analysis. application to structural identifiability. *Automatica*, 44(11) :2959-2962, 2008.
- S. Lagrange, L. Jaulin, V. Vigneron and C. Jutten. Nonlinear blind parameter estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(4) :834-838, 2008.
- F. Le Bars, J. Sliwka, O. Reynet and L. Jaulin. State estimation with fleeting data. *Automatica*, 48 (2) :381-387, 2012.
- R. Malti, X. Moreau, F. Khemane, and A. Oustaloup. Stability and resonance conditions of elementary fractional transfer functions. *Automatica*, 47(11) :2462-2467, 2011.
- D. Meizel, O. Lévêque, L. Jaulin, and E. Walter. Initial localization by set inversion. *IEEE transactions on robotics and Automation*, 18(6) :966-971, 2002.
- F. Messine. Deterministic global optimization using interval constraint propagation techniques. *Operations Research*, 38(4) :277-293, 2004.
- R. E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- G. Nassreddine, F. Abdallah, and T. Denjux. State estimation using interval analysis and belief function theory : application to dynamic vehicle localization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics archive*, 40(5), 2010.

- N.S. Nedialkov, K.R. Jackson, and G.F. Corliss. Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 105(1) :21-68, 1999.
- A. Neumaier. Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction. *Acta Numerica*, 13 :271-369, 2004.
- C. Petres, M. Romero Ramirez, and F. Plumet. Reactive path planning for autonomous sailboat. In *IEEE International Conference on Advanced Robotics*, pages 1-6, 2011.
- E. Prestes, M. Ritt, and G. Fuhr. Improving monte carlo localization in sparse environments using structural environment information. In *IEEE/RSJ International conference on intelligent robots and systems*, IROS, Nice, France, 2008.
- M. Quincampoix. Differential inclusions and target problems. *SIAM journal on control and optimization*, 30(2) :324-335, 1992.
- N. Ramdani and P.Poignet. Robust dynamic experimental identification of robots with set membership uncertainty. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 10(2) :253-256, 2005.
- N. Revol, K. Makino, and M. Berz. Taylor models and floating-point arithmetic: proof that arithmetic operations are validated in COSY. *Journal of Logic and Algebraic Programming*, 64 :135-154, 2005.
- O. Reynet and L. Jaulin. A new interval-based method to characterize estimability. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 25(3) :288-294, 2011.
- D. Rokityanski and S.M. Veres. Application of ellipsoidal estimation to satellite control. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 11(2) :239-249, 2005.
- P. Saint-Pierre. Approximation of the viability kernel. *Applied Mathematics and Optimization*, 29(2), 1994.
- Raazesh Sainudiin. Machine Interval Experiments : Accounting for the Physical Limits on Empirical and Numerical Resolutions. *LAP Academic Publishers*, Köln, Germany, 2010.
- C. Sauze and M. Neal. An autonomous sailing robot for ocean observation. *TAROS 2006*, pages 190-197, Guildford, UK, 2006.
- G. Soares, A. Arnold-Bos, L. Jaulin, J. A. Vasconcelos and C. A. Maia. An interval-based target tracking approach for range-only multistatic radar. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(6) :1350-1353, 2008.
- L. Travé-Massuyès, L. Ironi, and P. Dague. Mathematical foundations of qualitative reasoning. *AI Magazine*, 24(4) :91-106, 2003.
- W. Tucker. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l'académie des Sciences*, 328(12) :1197- 1202, 1999.
- W. Tucker. A Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem. *Foundations of Computational Mathematics*, 2(1) :53-117, 2002.
- M. van Emden. Algorithmic power from declarative use of redundant constraints. *Constraints*, 4(4): 363-381, 1999.
- G. Videau, T. Raïssi and A. Zolghadri. Guaranteed state estimation for nonlinear continuous-time systems based on qlpv transformations. In *Proceedings of European Control Conference (ECCŠ09)*, Budapest, Hungary, 2009.
- E. Walter and L. Pronzato. Identification of Parametric Models from Experimental Data. *Springer-Verlag*, London, UK, 1997.