Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs
Laboratoire Extraction et Exploitation
de l'Information en Environnements Incertains

Université de Bretagne Occidentale

T E S E

submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

Doutor em Engenharia Elétrica

Área: Otimização

Apresentada e defendida por

Gustavo Luís Soares

Algoritmos Determinístico e Evolucionário Intervalares para Otimização Robusta Multi-Objetivo

Tese elaborada em regime de co-tutela entre UFMG e ENSIETA.

Orientador (Brasil) :	Prof. João Antônio de Vasconcelos	- UFMG
Co-orientador (Brasil):	Prof. Carlos Andrey Maia	- UFMG
Orientador (França) :	Prof. Luc Jaulin	- ENSIETA

Apresentada em 24 outubro de 2008 na UFMG.

AGRADECIMENTOS

"Mas o Senhor esteve a meu lado
como um forte guerreiro ...", Jeremias 20, 11.

Juntamente com Ele, muitas pessoas cruzaram o meu caminho me incentivando e colaborando para o desenvolvimento de meu trabalho. Portanto, venho prestar-lhes minha sincera gratidão.

A meus orientadores João Antônio de Vasconcelos, Carlos Andrey Maia e Luc Jaulin pelo tempo a mim investido, pelo conhecimento transmitido, pela disponibilidade, paciência e amizade.

A meus professores na pós-graduação Renato Cardoso Mesquita, Jaime Arturo Ramirez, Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi, Walmir Matos Caminhas e João Antônio de Vasconcelos, pela disponibilidade, pelas contribuições preciosas na definição de meu tema de trabalho e pelas oportunidades profissionais que surgiram a partir de suas disciplinas e do convívio com eles.

Aos coordenadores e secretárias do PPGEE da UFMG, Benjamim Rodrigues de Menezes, Hani Camille Yehia, Anete Vieira e Arlete Vidal de Freitas, pelo auxílio nas questões formais do programa de pós-graduação.

À secretária Annick Billot-Coat, ao Patrick Leon, na época responsável pelos estágios e parcerias internacionais, e ao Professor Luc Jaulin, pela ajuda nas questões formais para realização do estágio na ENSIETA.

Aos colegas Andreas Arnold-Bos, Ricardo Luiz Adriano e Roberta Oliveira Parreiras, pela colaboração científica que resultou nos artigos publicados no período dessa tese.

Aos colegas Gledson Melotti e Tales Argolo Jesus, pela colaboração científica que resultou no desenvolvimento do Capítulo 5 dessa tese.

Aos colegas do GOPAC, Alexandre Ramos Fonseca, Douglas Alexandre Gomes Vieira, Luciano Cunha de Araújo Pimenta, Frederico Gadelha Guimarães, pela integração, motivação e pelo suporte técnico nos momentos no iniciais de meu trabalho.

Aos meus amigos na França, Othmane Benhmammouch, Yasar Kutuvantavida, Lionel Cros e Ludivine Laval, pela acolhida, pelas aulas de francês e inglês, pelo suporte na parte informal do meu estágio doutoral.

À Sra. Elani Vieira Soares e ao Sr. Geraldo Belarmino Soares (pais), e à Cristiana Silva de Miranda Souto Soares (esposa) pelo suporte, carinho, paciência e motivação.

À Sra. Iredes Maria Silva Souto (sogra), ao Sr. José de Miranda Souto (sogro), à Elenice Teixeira Chaves (irmã), ao Marcos Antônio Carvalho Chaves (cunhado), pelos diversos tipos ajuda que me prestaram.

A todos meus amigos, parentes e funcionários, pela paciência e compreensão em minhas incontáveis ausências.

Agradecimento Especial

A meu irmão, amigo e sócio em empresas, por todas as vezes que realizou minhas tarefas em nossas empresas, pelo apoio, pela paciência em aguardar a finalização de meu trabalho.

Aos amores de minha vida:

Sra. Elani, Sr. Geraldo,
Cristiana, Sofia e Enzo.

RESUMO

Esta tese considera um cenário onde as incertezas estão presentes no sistema de otimização multi-objetivo. Um parâmetro que representa as incertezas no sistema foi inserido na fórmula de otimização produzindo uma expressão robusta para o vetor de funções objetivo. Nesse contexto, a tese introduziu três métodos de busca para encontrar soluções para os *Problemas de Otimização Robusta Multi-Objetivo* que foram formulados utilizando a filosofia do pior caso. Nessa filosofia, as soluções robustas são aquelas que tem os melhores piores casos segundo os valores das funções objetivo obtidos da computação das interferências das incertezas. Dentre os métodos desenvolvidos, dois utilizam somente métodos intervalares. O terceiro trata-se de um método híbrido entre algoritmos evolucionários e técnicas intervalares. Os algoritmos são descritos em detalhes. As características, vantagens e desvantagens de cada são discutidas.

A Tese também apresentou: a) uma técnica de nichos, baseada em intervalos, útil para manter diversidade nas populações em algoritmos evolucionários; b) uma métrica para medir uniformidade na distribuição de pontos em fronteiras Pareto; c) um conjunto de funções teste, adaptadas para otimização robusta; e d) a descrição e resolução de um problema de otimização robusta multi-objetivo envolvendo sintonia de controladores PID. Em adição, a tese apresentou e discutiu as fontes de incertezas, as interpretações probabilística e determinística da interferência das incertezas no sistema de otimização e outros assuntos relacionados aos tópicos principais.

RÉSUMÉ

Cette thèse considère un scénario où les incertitudes sont présentes dans un système d'optimisation multi-objectif. Un vecteur de paramètres qui représente l'incertitude dans le système a été inséré dans la formule d' optimisation. Il en résulte une expression robuste du vecteur des fonctions objectif. Dans ce contexte, la thèse a introduit trois méthodes de recherche pour trouver les solutions des *Problèmes d'Optimisation Robuste Multi-Objectif* qui ont été formulés en utilisant la philosophie du *pire cas*. Dans cette philosophie, les solutions robustes sont celels qui sont les meilleures dans les pires situations selon les valeurs des fonctions objectifs obtenues par le calcul des interférences des incertitudes. De plus parmi, les algorithmes développés, deux utilisent uniquement des techniques basées sur l'analyse par intervalles. Le troisième, est une hybridation entre un algorithme évolutionnaire et des techniques intervalles. Les algorithmes sont décrits en détails dans la thèse. Leurs caractéristiques, advantages et inconvénients sont discutées.

La thèse présente aussi: a) une technique de niche, basée sur les méthodes intervalles, utile pour maintenir la diversité dans la population des algorithmes évolutionnaires; b) une métrique pour mesurer l'uniformité de la distribution des points formant les frontières de Pareto; c) un ensemble de fonctions tests adaptées à l'optimisation robuste; et d) la formulation et la résolution d'un problème multi-objectif pour la synthèse des contrôleurs PID. De plus, la thèse discute des fontaines d'incertitudes, des interprétations probabilistique et déterministes de l'interférence de l'incertitudes sur le système d'optimisation et d'autres sujets autour des principaux thèmes de la thèse.

ABSTRACT

This thesis considers a scenario where uncertainties are present in a multi-objective optimization system. An parameter that represents the uncertainties in the system was inserted in the optimization formula producing a robust expression to objective functions' vector. In this context, the thesis introduces three search methods to solve the *Robust Multi-Objective Optimization Problems* which were formulated using the *worst case* philosophy. This philosophy considers the robust solutions the ones have the best function evaluation values when the uncertainties' interference are computed. Considering the algorithms developed, two of them were developed using only interval methods. The third approach is an hybrid technique that used evolutionary and interval framework. The algorithms were described in details. Their characteristics, advantages and disadvantages were discussed.

The thesis has also presented: a) a niche technique, interval based, useful to maintain the population's diversity in evolutionary algorithms; b) a metric to measure the uniformity of the points' distribution in Pareto fronts; c) a set of test functions, adapted to robust multi-objective optimization; and d) a formulation and a resolution of a robust multi-objective problem involving PID controllers tuning. In addition, the thesis presents and discusses the uncertainties' sources, the probabilistic and deterministic interpretations of the uncertainties' interference and other subjects around the main topics.

CONTRIBUIÇÕES

As contribuições apresentadas ao longo dessa tese, consideradas como destaques, foram classificadas nos tópicos descritos a seguir.

Publicações

[2008] **Soares, G. L.**, Parreiras, R. O., Jaulin, L., Maia, C. A. and Vasconcelos, J. A., "Interval Robust Multi-Objective Algorithm", World Congress of Nonlinear Analysts WCNA 2008, Orlando, Florida, July, 2008.

[2008] **Soares, G. L.**, Boss, A. A., Jaulin, L. and Maia, C. A. and Vasconcelos, J. A., An Interval-Based Target Tracking Approach for Range-Only Multistatic Radar, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 44, issue 6, pp 1350-1353, 2008.

[2008] **Soares, G. L.**, Adriano, R. L., Maia, C. A., Jaulin, L. and Vasconcelos, J. A., Robust Multi-Objective TEAM 22 Problem: a Case Study of Uncertainties in Design Optimization, 13th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation CEFC 2008, Athens, Greece, May, 2008.

[2005] **Soares, G. L.**, Vasconcelos, J. A. e Maia, C. A., Algoritmo Evolucionário por Eleições, 1º Seminário do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Belo Horizonte, Brasil, 2005.

Conceitos

O Capítulo "Algoritmos Intervalares e Evolucionário-Intervalar para Otimização Robusta Multi-Objetivo" apresenta muitos aspectos que foram considerados como contribuições importantes, como por exemplo: a) o confronto de interpretações do termo "robusto" por diversos autores (texto introdutório do capítulo); b) a formulação robusta multi-objetivo restrita, com a definição do conjunto solução robusto e da fronteira de Pareto robusta (Seção 3.3); c) a classificação das regiões no espaço dos objetivos em "acima" da fronteira robusta e "abaixo" da fronteira robusta (Seção 3.3); e d) os métodos intervalares para otimização robusta, para classificação de nichos e para medir desempenho de algoritmos multi-objetivo (Seções 3.4-3.7).

Métodos

- [I]RMOA I(Interval Robust Multi-Objective Algorithm), Seção 3.4
- [I]RMOA II(Interval Robust Multi-Objective Algorithm II), Seção 3.5
- [I]RMOEA(Interval Robust Multi-Objective Evolutionary Algorithm), Seção 3.6
- NB[I] (Nichos por Bissecção Intervalar), Subseção 3.6.2
- MB[I] (Métrica por Bissecção Intervalar), Subseção 3.7.1

Aplicação

No capítulo destinado à resolução de um problema real via algoritmos propostos, foi escolhido como tema a otimização de sintonia de controladores PID. De fato, existem trabalhos científicos que tratam deste problema. O que se acredita ser novidade é a abordagem robusta multi-objetiva e restrita apresentada. Foram desenvolvidas duas formulações: a) uma geral (5.16), onde o pesquisador interessado pode utilizá-la para definir seu problema específico; b) um formulação detalhada (5.22) para um estudo de caso específico.

Outras contribuições

Essa Tese contribui para o Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais através da introdução de duas linhas de pesquisa ainda não investigadas por outros trabalhos desenvolvidos no programa. São elas: Otimização Robusta Multi-Objetivo e Análise Intervalar.

NOTAÇÃO

A notação empregada foi baseada em padrões de representação normalmente encontrados nas literaturas matemática e de engenharia. Entretanto, mesmo nestas áreas, é comum encontrar trabalhos científicos utilizando notações distintas para denotar, por exemplo, um mesmo parâmetro, grandeza ou operação matemática. Nestes casos, foram escolhidos padrões de nomenclatura que pudessem também atender à simbologia adotada para os parâmetros específicos deste trabalho. Em alguns casos, o leitor pode discordar quanto à escolha da notação. Justifica-se que as definições e escolhas de símbolos não se deram por facilidade e conveniência, e sim pela tentativa de descrever os algoritmos, formulação e outras partes do texto de forma clara, objetiva e não ambígua. Infelizmente, devido à grande quantidade de símbolos, talvez o leitor considere que as metas acima não tenham sido atingidas. Os critérios de notação e algumas nomenclaturas básicas empregados neste texto estão descritos logo abaixo. Uma lista mais completa dos símbolos com sua descrição está apresentada nas últimas páginas desse trabalho. Registra-se que essa lista não cobre os parâmetros e constantes que auxiliam de forma local a explicação de equações, métodos e processos considerados óbvios e desnecessários.

Como de costume, $\mathbb{R}$ é utilizado para representar o conjunto dos números reais; $\mathbb{IR}$, os números intervalares reais; $\mathbb{Z}$, os números inteiros; e $\mathbb{IB}$, o conjunto booleano intervalar . O uso de expoentes numéricos nesses símbolos denota a ordem do espaço matemático que eles representam, por exemplo $\mathbb{IR}^2$. Outros conjuntos, que representam parte dos conjuntos anteriores, são apresentados com letras maiúsculas em negrito, como em $\mathbf{A}$. Essa mesma notação é empregada para matrizes. O contexto descarta a possível confusão entre conjuntos e matrizes. O negrito em letras minúsculas denota vetores como é o caso de $\mathbf{x}$, e listas encadeadas de vetores como em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$, que significa uma estrutura de dados tipo fila cujos elementos são vetores intervalares. O acesso aos elementos de listas encadeadas é feito com o uso de chaves, como em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}\{1\}$. Todas as estruturas de dados do tipo fila são iniciadas por $\mathbf{Q}$ (Queue) e as estruturas do tipo pilha, por $\mathbf{S}$ (Stack).

Os termos em inglês estão em parênteses e em fonte normal. Os termos em latim, em itálico. O itálico também é reservado para apresentação inicial de termos técnicos dentro do texto corrente. Vocábulos ou trechos em destaque no texto ou que representam uma linguagem menos formal se encontram entre aspas. Os intervalos são delimitados por colchetes, como na função de inclusão $[\mathbf{f}]$. Os limites inferiores de intervalos são denotados pelo acréscimo de grifos acima e abaixo símbolo, como em $\underline{f}_i$ e $\overline{f}_i$. As letras i, j, k e t denotam iterações de processos, identificam elementos de conjuntos e par-

ticularizam termos de vetores, entre outros usos. Por exemplo, $f_{j_{\mathbf{x}^i}}$ significa o *j-ésimo* termo da função objetivo $\mathbf{f}$ quando avalia o *i-ésimo* indivíduo $\mathbf{x}^i$ de uma população. O expoente $'$ é utilizado como uma notação suplementar ou de transformação do termo assinalado. Por exemplo, $\mathbf{X}$ é o espaço de busca; $\mathbf{X}'$ é o espaço de busca após a exclusão da região não viável. O expoente * indica a informação de otimalidade da base que o acompanha, como $\mathbf{X}^*$ simboliza o conjunto de soluções do problema de otimização.

Finalmente, fugindo um pouco dos padrões, algumas expressões literais foram acrescentadas ao vocabulário técnico para explicar melhor dado processo. Por exemplo, examine o uso dos termos "estreita" e "envelope" no seguinte texto:

> *Funções intervalares em* $\mathbb{R}$ *resultam em dois números; um para o limite inferior e outro para o limite superior. Uma função intervalar "estreita" significa função intervalar onde os limites inferior e superior estão próximos. Além disso, um "envelope" dessa mesma função intervalar significa uma região no espaço das funções que contém intervalo resposta da função intervalar.*

Assim, após a descrição de termos novos como feito acima ou por meio de definição formal, considerou-se que uma frase que utilize os verbos "estreitar" e "envelopar", ou outras formas similares dos termos, podem ser empregadas no texto corrente com significado técnico.

Provavelmente, existam exceções que fujam às regras apresentadas. Nestes casos, espera-se que o contexto e o rigor das definições sejam suficientes para deixar claras quaisquer outras classes de nomenclatura não cobertos aqui ou na lista completa apresentada no final deste trabalho.

CONTEÚDO

1. INTRODUÇÃO

Os métodos de otimização têm sido utilizados como suporte à tomada de decisões em diferentes aplicações reais. Em muitos casos, os problemas de otimização podem ser difíceis de resolver, como por exemplo, quando o modelo matemático do problema for composto por parâmetros multi-dimensionais, com imagem multi-modal, não linear ou não convexa. A tarefa de otimização pode complicar-se quando o contexto for multi-objetivo. Em adição, considere um cenário onde o sistema de otimização está corrompido por vários tipos de incertezas as quais podem prejudicar o real desempenho das soluções supostamente ótimas. O tomador de decisão pode eventualmente valer-se de métodos que não computem incerteza e em seguida encontrar soluções confiáveis acreditando em sua experiência e intuição, ou ainda empregar técnicas de análise de sensibilidade para ajudar em suas escolhas. Alternativamente, os tomadores de decisão podem criar uma versão robusta para as funções objetivo através da inserção de um parâmetro que simule a ação das incertezas. Certamente, a melhor maneira de resolver depende do caso. Para ilustrar o problema multi-objetivo robusto, considere o problema de minimização de custos descrito abaixo

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} & f_1(\mathbf{x}) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2; \\ & f_2(\mathbf{x}) = c_3x_1 + c_4x_2. \\ s.a.: & \\ & g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \leq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Sendo $c_1, \ldots, c_4$, os coeficientes; x_1 e x_2, as variáveis; $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$, as funções objetivo; e $g(x_1, x_2)$, a única função de restrição de desigualdade. A otimização multi-objetivo, aplicada a problemas como em (1.1), tem como finalidade encontrar um conjunto de pontos solução viáveis tais que: a) haja diversidade entre os pontos; b) nenhum ponto dentro do grupo seja considerado pior que qualquer outro em todos os objetivos; e c) nenhum ponto fora do grupo seja melhor que qualquer outro dentro do grupo em todos os objetivos. Neste contexto, suponha que se aplique um algoritmo de otimização sobre um problema multi-objetivo cujas variáveis representem medidas de peças, e as funções, o desempenho do equipamento. Suponha ainda que se

obtenha sucesso nos itens (a), (b) e (c), e com o conjunto de pontos solução disponível, o tomador de decisão defina-se por uma solução que melhor atenda aos interesses da empresa. Assuma também que a confecção das peças seja realizada. Se o equipamento para executar tal tarefa não oferecer a precisão necessária, então um novo grupo de medidas deveria ser encontrado. Certamente, a precisão do torno pode ser embutida na formulação ou estrutura de dados do problema. Mas, isto é desnecessário se for utilizado um algoritmo para otimização robusta que leve em conta a imprecisão de $\mathbf{x}$.

Considere o conjunto de pontos solução para o problema (1.1). A escolha do tomador de decisão pode levar em conta a sensibilidade da solução. Por exemplo, imagine que uma pequena alteração do ponto solução escolhido implique em uma indesejável variação nas funções objetivo, ou equivalentemente, permita que haja um eventual ajuste nos valores dos coeficientes para deixar o modelo descrito em (1.1) mais correto. Nestes casos, uma outra solução pode surgir como melhor alternativa simplesmente se ela apresentar mais estabilidade. As técnicas de análise de sensibilidade podem ajudar nas decisões que envolvem estabilidade. Por outro lado, se o problema for reformulado do ponto de vista de otimização robusta, a estabilidade pode ser garantida por definição.

A presença de incertezas pode deixar a expressão (1.1) vulnerável e sujeita a falhas, sendo necessária a aplicação de métodos suplementares para resolução do problema. Entretanto, a introdução das incertezas no sistema de otimização deve ser realizada com cautela, observando-se por exemplo, sua procedência e sua provável intensidade. A correta inserção das incertezas na formulação produz o sistema de otimização robusto, sendo a versão multi-objetivo o objeto de estudo desta tese.

1.1 Justificativa

Considere inicialmente $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_n}$ o vetor de variáveis ou o parâmetro de projeto, e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_n} \to \mathbb{R}^{n_f}$ o vetor funções objetivo. Um problema de otimização multi-objetivo irrestrito poderia ser escrito como:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

Agora, assuma que o sistema de otimização esteja sujeito à presença de incertezas, sejam elas vinculadas aos parâmetros ou às funções objetivo. Certamente, a expressão (1.2) não representa um modelo matemático que contemple a interferência das incertezas e portanto, o vetor de funções objetivo em (1.2) deve ser, de alguma forma, alterada.

As fontes de incerteza são diversas. Por exemplo, usualmente os problemas de otimização envolvem cálculo numérico com variáveis reais que não podem ser representadas exatamente por um equipamento computacional, porque há limite de memória para discretizá-las. Em algum ponto, números muito grandes ou muito pequenos são arredondados e com isso há perda da precisão. Além disso, as incertezas estão presentes ao medir e ao construir $\mathbf{x}$. Claramente, a formulação em (1.2) não cobre estes casos. Por tudo isso, assuma $\mathbf{x}$ impreciso. O parâmetro de projeto atualizado $\widetilde{\mathbf{x}}$, dependente ou independente de $\mathbf{x}$, poderia ser escrito como

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\epsilon) \text{ ou } \widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \pm \epsilon, \tag{1.3}$$

sendo $\epsilon \in \mathbb{R}$ interpretado como um parâmetro de tolerância, por exemplo.

O ambiente no qual o sistema de otimização está imerso também é fonte de incertezas. Por exemplo, fatores como umidade, temperatura, pressão e vibração podem afetar a avaliação das funções objetivo. Uma alternativa seria acrescentar um novo parâmetro que quantifique esta interferência. Assim, o vetor de funções objetivo poderia ser reformulado como

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \xi), \tag{1.4}$$

com $\xi \in \mathbb{R}$ simbolizando o parâmetro dependente da influência do ambiente.

Similarmente ao vetor de variáveis de projeto, as incertezas podem estar presentes na medição de parte dos argumentos de $\mathbf{f}$. Assumindo-se o desvio entre os valores medido e real como fixo, uma possível interpretação seria

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon), \tag{1.5}$$

sendo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ o valor da imprecisão na medida de $\mathbf{f}$.

Substituindo-se todas as fontes de incerteza acima, representadas pelos parâmetros ϵ, ξ e ε, por único parâmetro $\mathbf{p}$, as expressões (1.3), (1.4) e (1.5) podem ser reescritas como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \epsilon, \varepsilon, \xi), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}. \tag{1.6}$$

Neste trabalho, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ representa a forma robusta de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ou seja, o vetor de funções objetivo robustas $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ incorpora todas as incertezas identificadas no sistema de otimização.

A discussão em torno de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ poderia considerar ainda que a intensidade das incertezas variasse no tempo; ou que o projetista, por desconhecimento ou descuido, criasse um modelo falso para o sistema de otimização. No entanto, decidiu-se por limitar a discussão porque a expressão (1.6) atende

aos propósitos deste trabalho. Neste momento, o mais importante é registrar que as incertezas estão, mesmo sendo desprezíveis, sempre presentes no sistema de otimização. Por outro lado, desconsiderar as incertezas em um problema onde elas realmente são relevantes, leva os métodos tradicionais a encontrar soluções falsas, o que é indesejado. O interesse em resolver problemas de otimização envolvendo incertezas foi a principal motivação deste trabalho.

1.2 Objetivos

A otimização robusta multi-objetivo pode ser considerada como uma linha de pesquisa pouco explorada, mas que recentemente, tem recebido crescente atenção da comunidade científica. Existem diversas questões em discussão que vão desde a interpretação do significado do termo robusto até os algoritmos para resolvê-la. Neste sentido, este trabalho contempla vários aspectos de otimização robusta e busca ser um ponto de partida para outros estudos no mesmo tema.

1.2.1 Geral

Considere o parâmetro de projeto $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ e o parâmetro de incerteza $\mathbf{p} \in \mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$. O propósito principal deste trabalho é desenvolver algoritmos que utilizem métodos intervalares para encontrar o conjunto solução $\mathbf{X}^* \subseteq \mathbf{X}$ para os problemas de otimização multi-objetivo robusto do tipo

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} & \max\limits_{\mathbf{p}\in\mathbf{P}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \\ s.t. & \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \leq \mathbf{0}, \;\; \mathbf{p} \in \mathbf{P}, \end{array} \tag{1.7}$$

sendo $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p}) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_p} \mapsto \mathbb{R}^{n_f}$, o vetor de funções objetivo; e $\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{p}) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_p} \mapsto \mathbb{R}^{n_g}$, o vetor de funções de restrição de desigualdade.

Três algoritmos intervalares foram desenvolvidas para resolver (1.7), sendo dois deles puramente determinísticos e o terceiro híbrido, usando processos estocásticos para busca de soluções e processos determinísticos para computação das incertezas.

1.2.2 Específicos

Concomitantemente ao desenvolvimento de algoritmos para otimização robusta, este trabalho tem como objetivos secundários:

- revisar Otimização Multi-Objetivo, Análise Intervalar e os Algoritmos Evolucionários Multi-Objetivos, pois estes temas são suporte aos algoritmos propostos;

- apresentar outras formulações para otimização robusta, e com isso posicionar a formulação adotada neste trabalho;
- desenvolver técnicas intervalares para os algoritmos robustos propostos e estender seu uso para outros algoritmos de otimização;
- propor problemas teste para os algoritmos robustos, facilitando a comparação entre métodos em outros estudos;
- validar os algoritmos robustos propostos com problemas teste;
- analisar a aplicabilidade dos algoritmos robustos em um problema real.

1.3 Escopo

Existem diferentes abordagens para investigar e interpretar os problemas de otimização robusta. Conseqüentemente, o desenvolvimento de métodos para resolver problemas desta natureza fica dependente da abordagem escolhida. Por isso, julgou-se importante e necessário apresentar as principais decisões empregadas nesta pesquisa. O escopo deste trabalho se limita a:

- apresentar e discutir os problemas de otimização no formato apenas de minimização - isto facilita a padronização e o entendimento sem perda da generalidade; as expressões para maximização podem ser obtidas de forma análoga às de minimização;
- empregar somente o conjunto dos Números Intervalares Reais - intervalos complexos, como os intervalos circulares e retangulares não serão tratados;
- considerar somente o intervalo como um conjunto onde o valor desejado, que é pontual, está contido - a abordagem de intervalos como uma entidade matemática isolada não será utilizada. No entanto, a diferenciação entre as abordagens sobre intervalos é realizada;
- apresentar apenas conceitos básicos sobre a Otimização Multi-Objetivo, Análise Intervalar e Algoritmos Evolucionários Multi-Objetivo que suportem o desenvolvimento teórico e prático das propostas deste trabalho - referências estão disponibilizadas ao longo do texto para consultas mais aprofundadas;
- utilizar problemas teste para os algoritmos robustos cuja formulação seja composta de funções elementares - desenvolveu-se biblioteca intervalar apenas para funções com operações elementares, ou seja funções que envolvam operações do tipo $+$, $-$, $\times$, $\div$, exp, sin, cos, etc;

- desenvolver algoritmos que não necessitem informação do gradiente para realizar o processo de busca - algoritmos intervalares tipo Newton e similares são abundantes. Além disso são limitados a resolver problemas onde o cálculo de derivadas seja possível;
- desenvolver algoritmo evolucionário robusto com estrutura típica de Algoritmos Genéticos - a diversidade dos algoritmos evolucionários dificulta a adaptação de muitos métodos dentro do prazo desta pesquisa;
- empregar métodos tradicionais de seleção, cruzamento e mutação com parâmetros fixos - testes exaustivos de busca por melhores conjuntos de parâmetros e métodos não serão realizados;
- utilizar cadeia de caracteres binária para representar as variáveis de busca no algoritmo evolucionário proposto - variáveis com codificação real não serão investigadas.

1.4 Metodologia

A metodologia científica consistiu principalmente nas fases:

- levantamento do "estado da arte" dos objetos de pesquisa;
- desenvolvimento de biblioteca intervalar;
- elaboração de padrões, definições e do modelo de otimização multi-objetivo robusta;
- desenvolvimento de algoritmos;
- definição de funções teste robustas para validação dos algoritmos;
- aplicação dos algoritmos propostos em um problema real.

A busca por referências bibliográficas sobre otimização robusta multi-objetivo não foi tarefa trivial visto que o tema tem, segundo a pesquisa realizada, limitado acervo bibliográfico. Os trabalhos encontrados foram suficientes para dar suporte aos conceitos de otimização robusta propostos nesta tese. Similarmente, a comunidade científica que estuda e aplica intervalos em algoritmos de otimização multi-objetivo ainda é numerosa quando comparada a seus concorrentes evolucionários. Entretanto, as teorias e algoritmos apresentados nas bibliografias estudadas foram referências importantes para a criação e implementação dos métodos deste trabalho.

Sobre a codificação, há na Web diversas bibliotecas disponíveis gratuitamente que computam a aritmética intervalar. No entanto, decidiu-se por desenvolver a própria, pelos seguintes motivos: a) utilizar padrão próprio de codificação; b) construir código mais portável para integração com os algoritmos desenvolvidos; e c) liberdade para disponibilizar o código. Quanto a ferramenta computacional, optou-se pelo MATLAB por sua versatilidade, pela sua biblioteca disponível, pelos recursos gráficos e pela facilidade de programação.

Descrever o problema robusto e resolvê-lo via algoritmos intervalares exigiu um formalismo matemático objetivo, coerente e completo para evitar ambigüidade. Assim, primeiramente foi escolhido o modelo matemático para o problema robusto, foco dessa tese, e em seguida foram desenvolvidos os algoritmos para resolver tais problemas. As atividades de criação, correção e adequação de padrões para as nomenclaturas se estenderam durante todo o tempo restante do trabalho.

A implementação de algoritmos para otimização multi-objetivo robusta foi realizada gradativamente. Primeiramente, foram criadas e testadas as bibliotecas intervalares. Em segundo lugar, foi implementado um algoritmo genético multi-objetivo que se tornou a base para o método evolucionário robusto. Posteriormente, várias tentativas foram realizadas para integrar algoritmos evolucionários e métodos intervalares, resultando em um algoritmo evolucionário-intervalar. Em seguida, os métodos determinísticos foram implementados.

Não foram encontradas funções teste específicas para tratar otimização robusta multi-objetivo conforme a formulação 1.7. Por isso, decidiu-se por criar algumas funções teste para otimização robusta através da adaptação de outras funções de casos não robustos.

A resolução de um problema de engenharia pelos algoritmos propostos teve como meta verificar a aplicabilidade dos métodos. Por isso, julgou-se necessário descrever todo um processo de otimização, contextualizando a concepção teórica do problema, a formulação (funções objetivo e de restrição), o desenvolvimento das funções objetivo, o tratamento das restrições, e finalmente a resolução do problema robusto via os métodos apresentados nessa Tese. Os resultados obtidos foram comparados entre si, demonstrando as características de cada um.

1.5 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, apresentam-se os números intervalares com suas propriedades, sua origem, definições importantes, semânticas associadas a intervalos, re-

lações e operações aritméticas. O capítulo cobre também algumas questões relacionadas à otimização multi-objetivo, abordando os conceitos e formulação, e os métodos para encontrar as soluções Pareto. Ainda, estão apresentadas descrições de alguns algoritmos evolucionários multi-objetivos existentes na literatura, assim como funções teste, métricas e técnicas de nicho para validá-los. O Capítulo 3 trata da descrição completa dos algoritmos robustos propostos. São apresentados os [I]RMOA I e [I]RMOA II que são determinísticos, e o [I]RMOEA que é estocástico-determinístico. O Capítulo 4 valida os métodos robustos via utilização de funções teste robustas. No Capítulo 5, os algoritmos robustos são empregados para resolver um problema real. Finalmente, o Capítulo 6 traz as conclusões.

1.6 Considerações Finais

Os problemas de otimização reais são, em grande parte, de natureza multi-objetivo e estão sujeitos a diferentes fontes de incerteza. O projetista do sistema de otimização deve avaliar se as incertezas afetam os resultados. Em caso afirmativo, alguma ação deve ser tomada. Por exemplo, se o projetista definir robustez como a capacidade de uma solução candidata manter o nível de desempenho frente às perturbações originadas pelas incertezas, ele pode agir *a posteriori* utilizando técnicas de análise de sensibilidade e buscar pelas soluções mais estáveis a essas perturbações. Por outro lado, ele pode agir *a priori* inserindo o parâmetro de incerteza na definição do problema e utilizar algoritmos para otimização robusta para encontrar as soluções que resolvem o problema proposto. Considerou-se a segunda opção mais interessante para este trabalho.

Existem diferentes definições para problemas de otimização robusta multi-objetivo. Aqui, adotou-se que o problema robusto deve ser equacionado de forma a permitir que os algoritmos busquem as melhores soluções, segundo a avaliação dos objetivos, quando observado a pior interferência do parâmetro de incerteza, conforme descrito em (1.7).

Os algoritmos [I]RMOA I, [I]RMOA II, [I]RMOEA para resolver o problema robusto proposto em (1.7) constituem o foco principal desta tese. Observa-se que todos algoritmos utilizam métodos intervalares. Os dois primeiros são puramente intervalares, o último é algoritmo híbrido desenvolvido a partir de um algoritmo genético multi-objetivo. No entanto, nos capítulos seguintes pode ser observado que este trabalho também contribui através do desenvolvimento dos métodos auxiliares aos algoritmos principais, da discussão sobre as diversas formas de se interpretar a otimização robusta, da forma de se tratar as restrições, por exemplo.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A decisão de formular e resolver o problema de otimização robusta conforme proposto no Capítulo 1 envolve duas grandes linhas de pesquisa: a) os Algoritmos Evolucionários Multi-Objetivo; e b) a Análise Intervalar. Por isso, este capítulo foi dedicado pra introduzir padrões de nomenclatura, apresentar definições e conceitos de cada um destas linhas. Entretanto, por razões didáticas, decidiu-se por extrair do item a) algumas questões básicas sobre a Otimização Multi-Objetivo deixando a seção dos algoritmos evolucionários mais voltada para descrição do processo evolutivo. A seção endereçada à Análise Intervalar, cobre questões fundamentais, como por exemplo há uma parte destinada ao ao histórico da computação intervalar. Justifica-se esta decisão porque o emprego de métodos intervalares é recente e trata-se de uma técnica ainda não tão difundida na comunidade científica, principalmente no Brasil.

2.1 Otimização Multi-Objetivo

Em engenharia, otimizar significa buscar pelo melhor conjunto de parâmetros que modelam um problema matemático, que é definido em termos de ganho em desempenho e/ou diminuição de custos nos objetivos ou critérios propostos como quesitos de avaliação. Os critérios estão organizados em funções objetivo e a sua avaliação pode ser obtida diretamente da imagem destas funções. Entretanto, nos problemas de otimização multi-objetivo a imagem isolada de um critério não permite afirmar que uma solução é a melhor dentro de um grupo. Geralmente, todos os objetivos devem ser considerados durante o processo de otimização e o resultado é um conjunto de soluções onde não há uma hierarquia entre elas, a menos que seja declarada alguma regra de preferência. A escolha dos métodos de otimização considera o momento em que é feita esta preferência. Elas podem ser inseridas antes, durante e após o processo de otimização conforme apresentado por Marler e Arora [80] e Andersson [4]. Alternativamente, pode-se optar por não informar a preferência por critérios. Portanto, a escolha do método para resolver dado problema multi-objetivo depende da decisão sobre como será feita a preferência critérios.

Esta seção aborda aspectos fundamentais da otimização multi-objetivo que são importantes no decorrer do trabalho. Mais detalhes e informações sobre o tema multi-objetivo podem ser obtidas em Sawaragi *et al.* [100], Miettinen [84] e Yu [125]. No entanto, nenhuma destas referências trata os problemas multi-objetivos sujeitos à presença de incertezas.

2.1.1 Fundamentos e Definições

Usualmente, as variáveis de busca ou de projeto são os parâmetros que se deseja otimizar. Entre outras classificações, elas podem ser: a) independentes; b) dependentes; e c) de ambiente. As variáveis de projeto são independentes quando isoladamente caracterizam algum aspecto do projeto. Dependentes, quando a variável está vinculada a outro parâmetro, ou seja, seu desempenho modifica-se com a alteração de outra variável. Finalmente, as variáveis de projeto podem ser classificadas como variáveis de ambiente. Elas não fazem parte do sistema de otimização diretamente, mas podem interferir nos resultados. Por exemplo, num dado problema a temperatura pode alterar variáveis independentes e dependentes. Andersson [4] ainda classifica as variáveis de projeto como de estado e de operação. Neste trabalho, as variáveis de projeto independentes, dependentes ou de ambiente são freqüentemente notadas por $\mathbf{x}$, e definidas no espaço de projeto ou espaço de busca $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}, \tag{2.1}$$

sendo n_x o número de variáveis de projeto. Adiante, a relação de continência (2.1) reaparece toda vez que for julgado que isso deixará o texto mais claro.

As funções objetivo são expressões matemáticas para avaliar ou medir os critérios estabelecidos pelo projetista utilizando-se como argumentos as variáveis de projeto. Considerando-se um problema multi-objetivo com n_f critérios, as funções são definidas como $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$. No entanto, o vetor de funções objetivo também pode representar uma notação de conjunto, como

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}. \tag{2.2}$$

A comparação entre vetores tem papel essencial na otimização multi-objetivo. Uma solução só é considerada melhor que outra depois de compararadas as avaliações de todas as funções objetivo do problema. Os operadores necessários para fazer esta comparação são descritos abaixo. Considere $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ e o vetor de funções objetivo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$. O operador de comparação $\preceq$ é definido como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2), \text{ se } \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2), \ \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2). \tag{2.3}$$

Por analogia, define-se $\succeq$ e os casos estritos $\prec$ e $\succ$. Adicionalmente, $\not\preceq$ significa não dominância do primeiro para o segundo operador. No contexto de minimização, a expressão $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ é lida como $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ domina $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ é dominado por $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ ou ainda, $\mathbf{x}_1$ é eficiente em relação a $\mathbf{x}_2$. O uso dos termos "eficiência" e "dominância" pode gerar confusão dependendo do contexto. Aqui, emprega-se o conceito de ponto eficiente para tratar o vetor de variáveis $\mathbf{x}$ no espaço das variáveis e, o de dominância está voltado para o vetor das funções $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ no espaço das funções.

Os objetivos de um problema real são normalmente diversos em sua natureza e em seus valores quantitativos. Quando o uso de alguma ponderação nas funções objetivo não é realizada ou nenhum agrupamento de critérios é feito, usualmente utiliza-se métodos de comparação aos pares para separar as soluções eficientes. As soluções eficientes são definidas abaixo.

Definição 1 *Considere* $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ *e* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$. *A solução* $\mathbf{x}^*$ *é ponto eficiente ou Pareto ótimo, se* $\nexists \mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. *O conjunto de pontos eficientes é simbolizado por* $\mathbf{X}^*$.

2.1.2 Problema de Otimização Multi-Objetivo

Considere $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ o espaço de busca e $\mathbf{x}$ a variável de projeto, tal que $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$ representa o vetor das funções objetivo e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_g}$ expressa as restrições sobre as variáveis de projeto, então, o problema de otimização multi-objetivo pode ser escrito como

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} & \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ s.t. & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}. \end{array} \tag{2.4}$$

O vetor de funções de restrições define sobre $\mathbf{X}$ o espaço viável $\mathbf{X}'$,

$$\mathbf{X}' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\}. \tag{2.5}$$

Resolver (2.4), significa encontrar um conjunto $\mathbf{X}^*$,

$$\mathbf{X}^* = \{\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}' \mid \nexists \mathbf{x} \in \mathbf{X}', \mathbf{f}(\mathbf{x}) \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\}, \tag{2.6}$$

sendo $\mathbf{x}^*$ o ponto Pareto ótimo, como anteriormente. Como conseqüência da Def. 1, a *fronteira de Pareto* $\mathbf{Y}^*$ é definida como

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{f}(\mathbf{X}^*). \tag{2.7}$$

A Fig. 2.1 apresenta graficamente um problema multi-objetivo de forma geral. O lado direito ilustra a regiões no espaço dos objetivos e o lado esquerdo,

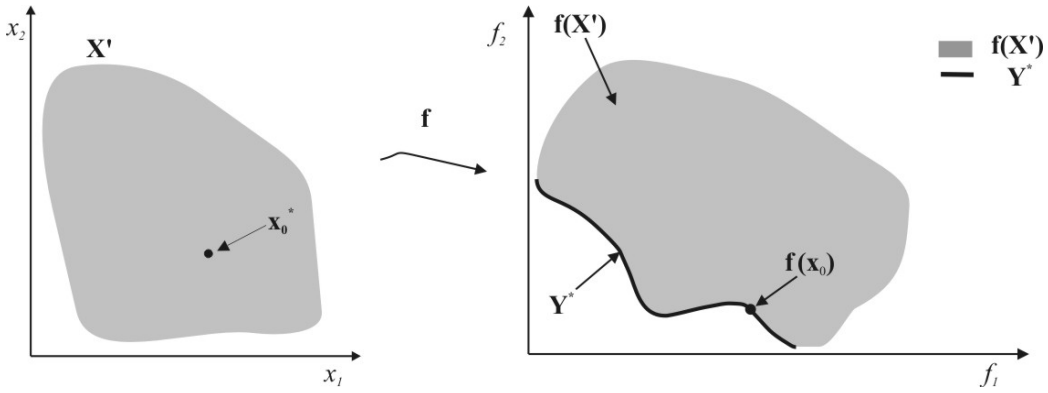


Fig. 2.1: Os espaços de busca e dos objetivos em um problema de otimização multi-objetivo convencional: o espaço viável $\mathbf{X}'$ e um minimizador $\mathbf{x}_0^*$; a fronteira de Pareto $\mathbf{Y}^*$; as imagens de $\mathbf{X}'$ e $\mathbf{x}_0^*$.

o espaço de busca. Ainda, um minimizador $\mathbf{x}_0^*$ estabelece relação entre os espaços de busca e dos objetivos.

Algumas formulações multi-objetivo, por exemplo em [92] e [74], utilizam a informação da imagem da solução ideal para minimização $\mathbf{u}^{\min} \in \mathbb{R}^{n_f}$ para criar uma *função de transformação* sobre $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Formalmente, $\mathbf{u}^{\min}$ é expressado por

$$u_i^{\min} = \min_{i=1,\ldots,n_f} f_i(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}. \tag{2.8}$$

Importante observar que, usualmente $\mathbf{u}^{\min} \notin \mathbf{f}(\mathbf{X})$ quando os critérios são conflitantes. Na prática, $\mathbf{u}^{\min}$ é uma estimativa baseada nos pontos $\mathbf{x}$ disponíveis. Como o próprio nome diz, a solução ideal seria única que, indiscutivelmente, otimizaria todos os objetivos. No entanto, ela raramente existe e, portanto alguma outra solução que esteja próxima da ideal pode vir a atender satisfatoriamente aos requisitos. Esta solução é denominada *solução de compromisso*. A proximidade até a solução ideal pode ser medida, por exemplo, através da aplicação da norma euclidiana.

2.1.3 Classificação dos Métodos Multi-Objetivos

Em um problema multi-objetivo, existem critérios que são mais importantes que outros? Questões desta natureza dependem freqüentemente do ponto de vista do projetista e/ou do tomador de decisão. Eles podem responder que sim e alterar o desempenho calculado pelas funções objetivos. Contrariamente, eles podem otimizar o problema e em seguida escolher dentre as soluções ótimas, uma solução que resulte em um mais alto nível de estabilidade. Assim, alguns trabalhos (p.e. [80] e [4]) classificam os métodos

multi-objetivos de acordo com a ordem da articulação das preferências no processo de otimização e tomada de decisão. Se o método multi-objetivo realizar alguma manipulação dos objetivos antes da sua execução, ele será classificado como técnica de preferências *a priori*. Por outro lado, ele participará do grupo de métodos de preferências *a posteriori* quando a escolha por soluções acontece após a busca pelos pontos ótimos. Há ainda métodos com apresentações de preferências *progressiva* e *sem articulações* de preferência.

A característica principal dos métodos a priori é a articulação das preferências pelos critérios antes de aplicar os procedimentos para encontrar as soluções Pareto. Métodos classificados nesta categoria, utilizam geralmente coeficientes, expoentes e outros tipos de parâmetros para enfatizar quais objetivos são mais importantes naquele problema em questão. O papel do tomador de decisão é fundamental para a escolha destes valores, que muitas vezes, são definidos de forma empírica baseados em sua experiência. Os parâmetros conectam as funções objetivo, criando uma nova função a ser otimizada chamada de *função de utilidade*. Como exemplos de métodos desta classe citam-se: a) Soma Ponderada [128]; b) Critério Global Ponderado [124] e [126]; e c) método Lexográfico [122].

Os métodos da categoria de preferências progressivas tem sido aplicados com freqüência na área de pesquisa operacional. O ajuste das preferências é feito de forma dinâmica ao longo da busca pelas soluções eficientes. O primeiro passo é conhecer uma solução pertencente à fronteira de Pareto. Em seguida, utilizam-se métodos para determinação de direções de busca para encontrar outros pontos. Como não necessidade de se fixar as preferências no início do processo, o tomador de decisão pode fazer ajustes locais de preferências durante o processo, diminuindo as chances de cometer erros. Alguns exemplos: a) método da Relaxação dos Objetivos [117]; b) método STEM [9]; e c) método Steuer [114].

Muitas vezes o projetista está em dúvida sobre como manipular os parâmetros sobre os objetivos antes de iniciar o processo de otimização. Nestes casos, ele pode utilizar-se de métodos para descobrir, dentre as soluções encontradas, quais são Pareto. Por isso, métodos de otimização deste grupo têm o papel principal de elencar várias soluções ao longo de toda a fronteira de Pareto. Algoritmos Algoritmos evolucionários, principalmente os Algoritmos Genéticos, têm sido muito utilizados para soluções *a posteriori*. Esta classe de métodos tem se mostrado muito eficiente para encontrar pontos sobre a fronteira de Pareto. Detalhes destes algoritmos são apresentados no próximo capítulo. Dentre os algoritmos não evolucionários utilizados *a posteriori* citam-se: a) Programação Física [83]; b) método da Restrição Normal [82]; e c) método de Intersecção Normal à Fronteira [28]. As referências sobre os algoritmos evolucionários é apresentada na próxima seção, dedicada

somente a esta classe de métodos.

Alguns métodos foram desenvolvidos para permitir que as funções objetivo sejam avaliadas sem interferência direta de pesos. Neste modelo, um método simples sem articulação das preferências tem como função a ser minimizada a soma direta dos objetivos. Como a ordem de magnitude das funções objetivo podem ser diversas, os métodos a seguir prometem suavizar essa distância numérica entre elas. Este métodos tem sido pouco utilizados, mas para aqueles interessados em aprofundar sugere-se: a) Nash Arbitrário [30]; e b) método Rao [95].

Algumas metodologias multi-objetivo contém versões em grupos diferentes de manipulação das preferências. Por exemplo, o método da Programação Física foi inicialmente empregado *a priori* em [81] e a formulação utilizada para a Soma Ponderada também é usada em algoritmos *a posteriori*. Os algoritmos propostos neste trabalho se enquadram na categoria *a posteriori*.

2.2 Algoritmos Evolucionários Multi-Objetivos

Os sistemas naturais são assuntos multi-disciplinares e recentemente várias analogias em sistemas artificiais têm sido realizadas. Por exemplo, existem contextos em que etapas do processo evolutivo são redefinidas, adequadas e modeladas à otimização. Otimização baseada nos processos de colonização de formigas [37], do vôo de pássaros [69] e da caça de predadores [76] são exemplos. Em cada modelo artificial os termos são importados da biologia e adaptados ao ambiente computacional. Uma vez que todas estas analogias dependem, entre outros detalhes, de uma estrutura de dados, da codificação e computação destes dados para simular os processos naturais, elas estão sujeitas à tecnologia vigente. Talvez por este motivo, os métodos de otimização baseados em mecanismos naturais se tornaram realidade somente nas últimas décadas.

Grande parte das primeiras técnicas de otimização utilizam informações do gradiente. Nestes modelos, freqüentemente chamados métodos determinísticos, o procedimento de pesquisa pelos pontos solução é pré-determinada, a busca é local e, para encontrar novas soluções, outros pontos de partida devem ser lançados. Em algumas técnicas, detalhes como descontinuidade, deixavam o modelo sem funcionalidade. Por outro lado, os métodos estocásticos utilizam procedimentos probabilísticos para guiar a pesquisa para região de otimalidade. Dentro do grupo estocástico, destacou-se uma classe de algoritmos que agrupara as seguintes características: a) eficiência em encontrar as regiões ótimas; b) flexibilidade para adaptar em diferentes problemas; c) independentes do uso de derivadas; e d) permite encontrar pontos ótimos

em uma única execução. Estes e outros itens caracterizam os Algoritmos Evolucionários. Algumas terminologias como Computação Evolucionária e Estratégias Evolucionárias, Programação Genética e Vida Artificial têm sido fortemente associadas a esse assunto.

Algoritmos Evolucionários têm sido cada vez mais aplicados para resolver problemas multi-objetivos. Dentre inúmeros trabalhos científicos dedicados a tratar deste assunto, dois têm sido citados com freqüência: Deb em [32], em 2001; e a tese de doutorado de Knowles [72], em 2002. Nestas referências, há uma excelente diversidade conceitos, comparações e reflexões sobre diversos processos de algoritmos evolucionários multi-critérios. Alguns tópicos dos trabalhos citados foram motivadores para realização dos estudos deste capítulo por se identificarem como possíveis investigações da tese de doutorado.

2.2.1 Estrutura Geral dos Algoritmos Evolucionários

Vários métodos de otimização tentam reproduzir artificialmente algum processo natural. O fator motivador para realizar a analogia é que, se determinado mecanismo está presente e é eficaz na natureza, então há expectativa para seu sucesso quando aplicá-lo em modelos artificiais. O custo computacional muitas vezes determina a viabilidade do método. Em especial, grande parte dos Algoritmos Evolucionários são baseados no processo evolutivo das espécies descrito por Darwin. No entanto, o termo "evolucionários" é mais amplo e pode ser aplicado aos métodos que desenvolvem soluções a partir da melhoria das soluções da iteração anterior. O mais importante é que os Algoritmos Evolucionários são similares no propósito de desenvolver soluções de forma evolutiva. De forma geral, os Algoritmos Evolucionários têm estrutura algorítmica apresentada na Tab.2.1. Os parâmetros de entrada variam de método para método, mas estão sempre relacionados à detalhes de formação da população e as probabilidades dos operadores evolucionários. Os passos anteriores ao laço evolutivo, passos $1-2$, são destinados ao lançamento da população de soluções candidatas e sua avaliação pelas funções objetivo. No laço evolutivo, passos $3-8$, os processos de seleção, recombinação e de diversidade agem sobre a população até que algum critério de convergência seja atingido. No passo 9 a população corrente contém a solução que deverá ser escolhida pelo decisor.

Os GAs(Algoritmos Genéticos) constituem a classe de algoritmos evolucionários mais popular. Um modelo básico de Algoritmos Genéticos é mostrado na Tab.2.2. A analogia ao processo evolutivo das espécies inicia-se nos passos 1 e 2, com inicialização do contador de gerações e com a criação dos primeiras soluções candidatas. Cada solução é chamada de *indivíduo*, e seu grupo, de *população*. No passo 3, os indivíduos recebem uma nota de desem-

Tab. 2.1: Estrutura típica de algoritmos evolucionários.

entrada (*parâmetros*)
saída(*soluções candidatas*)

1 inicialize as *soluções candidatas* com *parâmetros*.
2 compute o desempenho das *soluções candidatas*.
3 se critério de parada é atingido siga para 9.
4 aplique método de *seleção* sobre a *soluções candidatas*.
5 aplique operador de *recombinação* sobre o resultado da *seleção*.
6 aplique operador de *diversidade* sobre o resultado da *recombinação*.
7 compute o desempenho do novo grupo de *soluções candidatas*.
8 siga para 4.
9 retorne as *soluções candidatas*.

penho obtida da função objetivo que simula um *ambiente de sobrevivência*. O ciclo evolutivo, marcado pelos passos $4 - 10$, prossegue com a *seleção* de

Tab. 2.2: Estrutura típica de Algoritmos Genéticos.

entrada (*parâmetros*)
saída(*população*)

1 inicialize t com 0.
2 inicialize a *população* com *parâmetros*.
3 compute o desempenho *população*.
4 se critério de parada é atingido siga para 11.
5 incremente t.
6 aplique método de *seleção*.
7 aplique método de *cruzamento*.
8 aplique método de *mutação*.
9 compute o desempenho da nova *população*.
10 siga para 4.
11 retorne a *população* corrente.

indivíduos para gerar a próxima população. Os métodos de seleção tentam preservar, durante as gerações, os indivíduos considerados mais aptos para a evolução. Os indivíduos selecionados participam do processo de propagação

de informação genética *cruzamento*, segundo uma dada probabilidade. Sobre o resultado do cruzamento, aplica-se o operador de diversidade e finaliza-se a geração com a nova população. Os passos anteriores se repetem até que algum critério seja satisfeito. Termos como população, cruzamento e mutação variam de algoritmo para algoritmo. No entanto, o mais importante é que esta estrutura atende aos passos principais de um algoritmo evolucionário.

O primeiro GA foi apresentado por Holland [57] em 1975, porém, só foi popularizada por Goldberg [45] em 1989. Goldberg apresentou o SGA (Simple Genetic Algorithm). Neste algoritmo a população tem tamanho fixo e os indivíduos são codificados por cadeia de caracteres binária. As probabilidades dos operadores de cruzamento e mutação são definidas previamente e passada por meio dos parâmetros de entrada. Após a etapa de definições, o mérito de cada indivíduo é avaliado. Um processo de seleção, chamado pelo autor de *roleta*, é acionado. Neste método, a probabilidade de escolha de cada indivíduo é proporcional ao desempenho dele na população. O cruzamento é realizado aos os pares e, a troca de material genético é feita a partir de um corte na cadeia binária. Os novos indivíduos substituem os anteriores e ficam sujeitos à mutação de seus bits. Termina-se a geração. O algoritmo prossegue ciclicamente a partir dessa nova população e só termina quando algum critério de convergência é alcançado, como por exemplo quando um número máximo de gerações n_{gen} seja atingido. Observe que os passos citados acima estão de acordo com o algoritmo da Tab.2.2. Durante muito tempo o SGA foi padrão de comparação para outros GAs. Depois dele surgiram outros comprovadamente superiores. Uma referência que aborda muitos aspectos topológicos de GAs voltado exclusivamente para otimização mono-objetivo, foi desenvolvida por Soares em [107]. Mesmo que o interesse nesta tese seja a estrutura multi-objetiva, os GAs mono-objetivo contém passos fundamentais para o entendimento dos mecanismos evolucionários.

2.2.2 Algoritmos Evolucionários para Problemas Multi-Objetivo

Mas por que empregar EAs (Evolutionary Algorithms) para tratar problemas multi-objetivos? Entre outros motivos ressalta-se que trabalhar com populações é vantajoso, pois a busca é feita segundo informações obtidas por um grupo de pontos, e ainda, podem-se listar mais soluções na fronteira partindo de uma única execução. Estes detalhes deixam os EAs mais versáteis e eficientes na resolução de problemas multi-objetivos. Para esta classe de problema os EAs, a partir de agora, são chamados de MOEAs(Multi-objective Evolutionary Algorithms). Segundo Gao *et al.* [44], os algoritmos evolucionários podem ser divididos em várias categorias, tais como: a) abordagens por planos de agregação; b) abordagens por população não Pareto;

c) abordagens por Pareto; e d)Abordagens por Técnicas de Indução a Nicho. O texto a seguir descreve cada uma destas estratégias.

Os algoritmos que empregam abordagens por planos de agregação têm a finalidade de resolver o problema multi-objetivo do ponto de vista mono-objetivo. Trata-se da versão evolucionária para o caso de se tratar as preferências *a priori*. As funções objetivo são ponderadas e agrupadas em uma apenas uma função. A partir daí qualquer GA otimiza a função objetivo e encontra apenas uma solução. Se houver oscilações nos pesos, mais soluções diferentes são encontradas. Entretanto, há muitos casos em que a variação dos pesos produz os mesmos resultados. Agregar objetivos parece natural mas fragiliza a busca por vários pontos não dominados. Por exemplo, quando a fronteira de Pareto é não convexa, os pontos sobre esta região podem não ser encontrados. No entanto, esta agregação fornece resultados satisfatórios se o responsável pela execução conhecer o comportamento das funções objetivo.

Os métodos por abordagem por população não Pareto em subpopulações, sendo cada uma encarregada de uma função objetivo. Um exemplo da abordagem por população não Pareto é o VEGA(Vector Evaluated Genetic Algorithm) apresentado em 1985 por Schaffer [101]. Este método realiza a operação de seleção para cada objetivo separadamente. A população é dividida igualmente de acordo com o número de objetivos. Os operadores genéticos são executados como de costume. O resultado final oferece freqüentemente pontos não dominados encontrados paralelamente em cada uma das subpopulações. O VEGA tem dificuldades para mapear todos os pontos da fronteira quando o espaço das funções é não convexo.

Diferentemente do VEGA, o MOGA(Multi-Objective Genetic Algorithm), apresentado pela primeira vez por Fosenca e Fleming [42], faz uso do princípio da não dominância sobre as soluções. A idéia é conduzir a busca para a fronteira de Pareto ponderando aleatoriamente os objetivos cada vez que os indivíduos são selecionados para o cruzamento. O MOGA de Murata e Ishibuchi [89] distingue-se por separar numa população externa, a cada geração, os indivíduos eficientes. Após o ciclo evolutivo, as soluções da população externa são comparadas, sendo selecionadas aquelas que são eficientes dentro deste grupo. O MOGA de Murata é apresentado na Tab.2.3.

GAs bem interessantes são aqueles que utilizam técnicas de nicho. Em 1994 Horn *et al.* em [58] publicaram o primeiro trabalho sobre formação de nichos na área multi-objetivo, sendo o primeiro estudo na área mono-objetivo atribuído a Goldberg e Richardson [46] em 1987. A meta principal da formação de nichos é manter a diversidade e com isso elencar pontos distintos sobre a fronteira eficiente. Em poucas palavras, o processo inicia-se encontrando a "vizinhança" entre indivíduos, pois elas indicariam a distribuição da população no espaço. Vizinhos próximos formam uma *subpopulação* que

Tab. 2.3: MOGA - Adaptado de Morata *et al.* [89]

entrada (*parâmetros*)
saída(*população*)

1 inicialize t com 0.
2 inicialize a *população* com *parâmetros*.
3 compute o desempenho *população*.
4 se critério de parada é atingido siga para 14.
5 se $t > 1$
6 atualize *população externa*.
7 aplique de *estratégia elitista*.
8 incremente t.
9 aplique método de *seleção*.
10 aplique método de *cruzamento*.
11 aplique método de *mutação*.
12 compute o desempenho da nova *população*.
13 siga para 4.
14 seleção de *população* dentro de *população externa* pelo usuário.
14 retorne a *população* selecionada.

é a chave da diversidade. Em um segundo momento, as técnicas de nicho tentam manter as subpopulações através de funções de *partilha*, cuja finalidade é degradar a função de mérito proporcional ao número de indivíduos da vizinhança. Após esta etapa, faz-se a seleção, cruzamento, etc, ou seja, o algoritmo continua normalmente. Vale a pena registrar que a vizinhança é definida como alguma medida de distância entre dois pontos e por isso estes algoritmos demandam um custo de máquina alto.

2.2.3 Diversidade de Algoritmos Evolucionários

Existe uma imensa variedade de algoritmos evolucionários multi-objetivo propostos na literatura. Qualquer um que partindo da estrutura da Tab.2.3, alterando o operador de recombinação e fixando todos os outros procedimentos, valida o algoritmo transformado como um novo método. Seguindo este raciocínio, pode-se modificar o tipo de mutação, seleção, estratégia de recolocação da população, etc. Se for realizado um cálculo combinatorial, contabilizando todas as variações propostas pelos pesquisadores existem certamente milhares de algoritmos. A possibilidade de alterações em métodos e parâmetros é tão extensa que há necessidade de cautela para apresentar uma

novidade. É verdade que muito já se publicou sobre os MOEAs, mas como várias linhas de pesquisa, o assunto está longe da maturidade e, uma idéia que pode parecer óbvia, talvez ainda não tenha sido apresentada.

O NSGA(Non-Sorting Genetic Algorithm) inicialmente proposto por Srinivas e Deb em [113] tem duas finalidades principais: a) gerar as soluções não dominadas; e b) manter diversidade destas soluções. A cada geração os n_{pop} indivíduos são agrupados em subpopulações que se distribuem em fronteiras não dominadas. Técnicas de nicho buscam desenvolver estas subpopulações espalhando soluções sobre cada fronteira não dominada. Segundo, Deb *et al.* [34], os modelos de MOEAs que utilizam mecanismos de classificação baseados em não dominância e partilha tem sido criticados principalmente por causa do custo computacional $O(n_f * n_{pop}^3)$, abordagem não elitista e a necessidade de se especificar um parâmetro para partilha. No mesmo trabalho, Deb *et al.* amenizam estes pontos negativos lançando o NSGA-II. Para resolver o custo relacionado a classificação da população em fronteiras de pontos eficientes, o NSGA-II associa a cada solução candidata um contador para o número de soluções que a dominam, e outra contendo índices das soluções dominadas pela solução candidata. As soluções não dominadas pertencem à 1ª fronteira e são separadas do grupo. O processo continua, e as fronteiras vão sendo separadas uma a uma. Para preservar a diversidade, o NSGA-II substituiu a função de partilha por uma abordagem de *comparação de multidão* [1]. Sendo que esta nova aproximação não requer qualquer definição de parâmetro feita pelo usuário para manter a diversidade entre os membros da população. O elistimo é introduzido comparando as melhores soluções da nova geração com a anterior. Os vencedores são mantidos nas primeiras fronteiras.

Coello e Sierra [21] apresentam a co-evolução como a mudança na composição genética de uma espécie como resposta para mudança genética de uma outra. O relacionamento entre duas espécies diferentes pode ser descrito considerando todos os possíveis tipos de interação. Partindo desta idéia, as abordagens de MOEAs envolvem troca de material genético entre indivíduos de populações diferentes. O desempenho individual depende dos indivíduos de diferentes populações. Ainda segundo Coello e Sierra, existem duas classes de algoritmos co-evolucionários: a) baseados em relacionamento de competição; b) baseados em relacionamento de cooperação. O CO-MOEAutiliza tanto da competição quanto da colaboração dentro de sua estrutura. Os autores do CO-MOEA dividem a execução em quatro estágios, sendo que cada um deles permanece ativo durante 25% das gerações:

1. Na primeira etapa, explora-se o espaço de busca com a finalidade de

[1] Termo original: crowded-comparison

encontrar regiões promissoras. Para isso, emprega-se o esquema de *ranqueamento Pareto* proposto por Fonseca e Fleming em [42] ou a *grade adaptativa* de Knowles e Corne [73]. Ao final desta fase, são identificados indivíduos que possivelmente podem contribuir para encontrar a fronteira Pareto.

2. Os indivíduos selecionados no estágio anterior são marcos para as regiões específicas que vão ser investigadas neste momento. Para cada região, uma subpopulação é definida. Faz-se processamento paralelo e ao final os indivíduos competem e cooperam segundo a grade adaptativa formando uma única fronteira eficiente.

3. Na terceira etapa, a finalidade é determinar quais soluções permanecem e quais devem ser eliminadas. Populações presumidamente boas podem ser divididas e retornar ao estágio 1, para encontrar outras regiões promissoras.

4. Por último, há um refinamento na fronteira eficiente.

O CO-MOEA foi comparado com o NSGA-II, com o MμGA [20] e com PAES [72] e seus resultados foram considerados competitivos.

Soares *et al.*[112] apresentaram o EEA(Election Evolutionary Algorithm). O EEA possui a estrutura básica semelhante aos mais tradicionais algoritmos genéticos, ou seja, os indivíduos são codificados binariamente, o cruzamento é feito com apenas um ponto de corte e, a mutação ocorre como evento de mudança de um bit, segundo dada probabilidade. O que há de diferente no EEA são os processos de seleção e de separação de fronteiras: a dominância de um indivíduo não é medida em relação a todos os outros membros da população e sim com à *maioria* da população, sendo a definição de maioria dependente dos vários tipos métodos eleitorais. O parâmetro maioria tem papel fundamental para distribuição de fronteiras e conseqüentemente para convergência do algoritmo. O EEA utiliza estratégia elitista para formação da nova população, já que mantém os elementos das primeiras fronteiras das duas últimas populações.

O algoritmo PSO(Particle Swarm Optmization) foi proposto por Kenneth e Eberhart [69] em 1995. Trata-se de um algoritmo baseado no vôo dos pássaros quando estão em bando, ou similarmente, o movimento de peixes em cardumes. O líder dita a velocidade e conduz todos os companheiros. Se ele muda o rumo, todos o acompanham. Em alguns momentos há espalhamento e subitamente voltam a se reagrupar. Ainda segundo Kenneth e Eberhart, zoólogos criaram modelos sobre esta movimentação, nos quais as distâncias inter-individuais e velocidade são características importantes.

Mas porque eles se movimentam subitamente? Provavelmente para evitar predadores, procurar comida, impressionar a fêmea para acasalar, otimizar a temperatura ambiente, etc. Analogamente, cada pássaro ou peixe poderia ser uma partícula (solução). O espalhamento teria a finalidade de investigar o espaço, o agrupamento apontaria a melhor solução dentro do grupo. Trazendo essas idéias para o contexto da otimização, o espalhamento entre soluções ajuda a mapear pontos ao longo da fronteira eficiente e, a velocidade de aproximação, trata da convergência local. A cada iteração, a melhor partícula p_{melhor} é guardada (estratégia elitista) e, caso ela fosse classificada como melhor global recebe um nome especial g_{melhor}. Tanto p_{melhor} quanto g_{melhor} fazem o papel do líderes. As demais soluções caminham na direção dos líderes. A velocidade v_i e a posição x_i de cada partícula são calculadas de acordo com as equações

$$v_{i+1} = v_i + c_1 * r_1(p_{melhor} - x_i) + c_2 * r_2(g_{melhor} - x_i) \quad (2.9)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_i \quad (2.10)$$

Como qualquer outro MOEA, há parâmetros que devem ser definidos, neste caso c_1 e c_2. Por outro lado, r_1 e r_2 são números aleatórios.

Descrevendo o PSO em poucos passos, primeiramente uma população de partículas é introduzida aleatoriamente. Em seguida, o desempenho de cada uma é calculada e, com esta informação, encontram-se o p_{melhor} e o g_{melhor}. Pelas equações (2.9) e (2.10) calcula-se novas posições e velocidades. Novamente calculam-se os desempenhos individuais. O ciclo continua até que seja atingido algum critério. Este é o primeiro modelo de PSO. Várias alterações já foram propostas.

Há diversos outros MOEAs que têm sido freqüentemente citados nos periódicos de computação evolucionária e que não foram descritos neste trabalho. Uma lista não exaustiva destes métodos pode ser composta pelos algoritmos: a) ENORA(Evolutionary Algorithm of Non Dominated Sorting with Radial Slots); b) DRMOGA(Divided Range Multi-Objective Genectic Algorithm); c) MμGA(Multi-objective MicroGA) [20]; d) PAES(Pareto Archived Evolution Strategy) [72]; e e)SPEA(Strength Pareto Evolutionary Algorithm) [129].

2.2.4 Parâmetros Gerais

Toda vez que um novo algoritmo é apresentado, seu desempenho é testado frente a outros já consagrados na literatura. Bons exemplos para estas comparações podem ser encontrados em Deb *et al.* [34], Knowles [72] e Zitzler *et al.* [130]. Nestes trabalhos, os autores propõe algoritmos com estruturas

diferentes, sendo que as particularidades são assistidas por uma série de parâmetros. Dependendo da variação introduzida em um destes parâmetros o desempenho geral do algoritmo fica afetado. Até mesmo a escolha do número de execuções pode gerar uma estatística de convergência diferente, visto que os MOEAs são estocásticos. Por esses e outros motivos, torna-se importante analisar quais aspectos interferem na comparação de algoritmos.

MOEAs baseados em populações e codificação binária tem como ponto de partida discretizar o espaço de busca. Se n_{bits} é o número de bits para cada faixa de variável, então o número de cadeias de caracteres possíveis é $2^{n_{bits}}$ para cada variável. Uma forma de comparar erroneamente é discretizar o espaço com n_{bits} diferentes. Veldhuilzen [119] em 1999 ao comparar quatro MOEAs utilizou discretização total de 2^{24} cadeias binárias. Em 2000, Zitzler *et al.* [130] registraram resultados divergentes de Veldhuizen, mas discretizando o espaço de busca em cadeias binárias maiores que 2^{30}.

O tamanho da população n_{pop} interfere em praticamente todos os aspectos do MOEA. Deixado outros parâmetros fixos, população grande tem mais diversidade, é mais lenta para convergir, a realização de processos como seleção e separação de fronteiras é mais cara, despende-se mais memória para armazenamento e aumentam as chances de mapeamento de mais pontos na fronteira eficiente. Logo, ao comparar-se algoritmos com populações de tamanhos muito diferentes pode-se esconder a real situação entre um método e outro. Uma maneira de amenizar este erro é contabilizar o número de cálculos de função em cada caso.

A probabilidade de operadores de recombinação p_c e de diversidade p_m altera consideravelmente os resultados finais de execução. Fato verificado em Soares [111]. Muitas vezes, novos algoritmos trazem consigo diferentes operadores. Uma prática comum é aplicar os operadores como proposto pelos autores de cada algoritmo e ajustar a probabilidade de seus novos operadores segundo o melhor desempenho adquirido em testes empíricos. Testes como os realizados em 1986 por Grefenstette [47] que encontrou $p_c = 0.60$ e $p_m = 0.001$ para os Algoritmos Genéticos descritos em seu artigo.

A maneira de selecionar indivíduos para recombinação afeta, por exemplo, a convergência dos MOEAs. No entanto, em muitos casos o processo de escolha faz parte da novidade do novo algoritmo. Portanto, querer ser justo quando na comparação de algoritmos, quanto aos processos de seleção pode ser inviável.

O número n_f de funções objetivo e o número n_x de variáveis têm sido fatores determinantes de desempenho. O motivo é que em problemas multiobjetivos o cálculo de dominância e as técnicas de nicho exigem comparação aos pares de indivíduos. Logo, para que a comparação seja justa entre algoritmos, os valores de parâmetros como n_f e n_x devem ser próximos. Para

manter esses parâmetros constantes basta adotar as mesmas funções teste durante as comparações.

Comparar tempo computacional não é tarefa fácil. Nos trabalhos científicos, geralmente são detalhadas as explicações sobre os algoritmos, mas nem sempre sobre as implementações realizadas. Talvez por não ficar elegante ou por ocupar espaço. No entanto, durante a implementação, soluções numéricas criativas dão resultados significativamente menores em termos de custo computacional. Rump [99] multiplicou duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de dimensões 200×200 de quatro formas diferentes, no MATLAB, utilizando um Pentium I $300Mhz$. A diferença entre a implementação melhor e a pior foi 2265 vezes! Portanto, para comparar tempo computacional é necessário cautela.

Os MOEAs são sensíveis a mudança dos valores de seus parâmetros. Ao realizar um confronto entre algoritmos deve-se analisar cuidadosamente que conjunto de parâmetros atribuir a cada método.

2.2.5 Elitismo

Quando Zitzler [129] propôs SPEA ele o comparou com outros sete algoritmos, entre eles o NSGA, o NPGA(Niched Pareto Genetic Algorithm) e o MOGA. O desempenho do SPEA foi significativamente melhor porque era o único que tinha em sua estrutura uma estratégia elitista. Na mesma pesquisa, foi introduzido elitismo nos demais algoritmos. Todos melhoram o desempenho. Este fato não traz nenhuma surpresa para algoritmos evolucionários multi-objetivos. Um vez encontrado um ponto eficiente, ele não pode ser descartado e, por outro lado, não se pode permitir que ele funcione como um atrator para toda população. Difícil afirmar qual estratégia é melhor. A seguir algumas implementações de elitismo.

Rudolph [97] descreveu um MOEA elitista que mantém várias soluções não dominadas para a próxima geração. Quando um valor limite de soluções eficientes, fixado anteriormente, é atingido, não há espaço para novos pontos.

O elitismo no NSGA II é mantido simplesmente realizando comparações de dominância entre a população anterior e a atual. Os n_{pop} primeiros elementos não dominados formam a próxima população. Novos pontos podem ser adicionados em toda geração, mas há um acréscimo no custo computacional com a comparação de duas populações.

Por outro lado, o SPEA realiza elitismo simplesmente mantendo uma população externa. Desde as primeiras gerações os pontos não dominado são armazenados numa população de tamanho fixo. A cada iteração as novas soluções eficientes são classificadas junto às da população externa. A diversidade é controlada por meio do cálculo da distância via hipercubos. Soluções muito próximas são eliminadas da população externa.

Inserir elitismo foi um passo evolutivo e definitivo dentro dos MOEAs. Não há como afirmar que existam trabalhos que divergem desta afirmação. Mas nas bibliografias mais citadas é indiscutível que as melhores soluções devam ser guardadas de alguma forma.

2.2.6 Métricas para Medir Desempenho

Quando deseja-se comparar MOEAs ou medir sua eficiência em resolver os problemas de otimização, uma prática freqüente em muitos estudos é apresentar os resultados em gráficos bi ou tridimensionais, onde observa-se com facilidade o comportamento e talvez até mesmo o desempenho dos algoritmos em questão. Não há dúvidas que se o resultado visual for de alguma forma, quantificado e confirmado, há suporte científico para distinguir qual a melhor opção. No entanto, se o problema de otimização possuir vários objetivos seria complicado apresentar os resultados de forma gráfica. Com a intenção de investigar esse assunto, pesquisadores como Czyzak [24], Deb [32], Hansen e Jaszkiewicz [51], Schott [102], Veldhuizen [119], Zitzler [129] e Zitzler *et al.* [130] apresentaram trabalhos relevantes para construção de *métricas* para MOEAs. Algumas delas estão descritas nesta seção.

Em Zitzler *et al.* [130], os algoritmos evolucionários multi-objetivos tem, além dos objetivos propostos no problema, mais outros três objetivos:

1. encontrar o seu conjunto de soluções não dominadas o mais próximo possível da Fronteira de Pareto;

2. possuir soluções uniformemente espaçadas ao longo da fronteira;

3. maximizar pontos nos extremos da fronteira não dominada para cada objetivo.

Em seu livro, Deb [32] enfatiza, em vários momentos, como meta para os MOEAs apenas os dois primeiros itens anteriores. Logo, foram desenvolvidas algumas métricas para quantificar o desempenho dos algoritmos nesses quesitos. Antes de apresentá-las alguns conceitos importantes devem ser introduzidos.

Considere inicialmente os conjuntos de soluções não dominadas $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^{n_n}$ e $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^{n_n}$ de dois algoritmos MOEAs quaisquer. Agora, considere o operador $\Upsilon_{\preceq}$ represente uma função que retorne o subconjunto de pontos não dominados de um conjunto "." (a definição formal de $\Upsilon_{\preceq}$ é apresentada na Subseção 3.2.1). De acordo com Hansen e Jaszkiewicz [51], o conjunto solução $\mathbf{A}$ pode ser declarado melhor que $\mathbf{B}$ em três níveis: a) $\mathbf{A} \prec_f \mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$ é fracamente melhor que $\mathbf{B}$); b) $\mathbf{A} \prec_F \mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$ é fortemente melhor que $\mathbf{B}$);

e c) $\mathbf{A} \prec_C \mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$ é completamente melhor que $\mathbf{B}$). Abaixo, encontram-se as expressões que definem essas conclusões sobre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, e na Fig. 2.2 encontram-se exemplos gráficos.

$$\mathbf{A} \prec_f \mathbf{B} \Leftrightarrow \Upsilon_{\preceq}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \neq \mathbf{B} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{A} \prec_F \mathbf{B} \Leftrightarrow \Upsilon_{\preceq}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \setminus \Upsilon_{\preceq}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \neq \emptyset \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A} \prec_C \mathbf{B} \Leftrightarrow \Upsilon_{\preceq}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \cap \Upsilon_{\preceq}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \emptyset \quad (2.13)$$

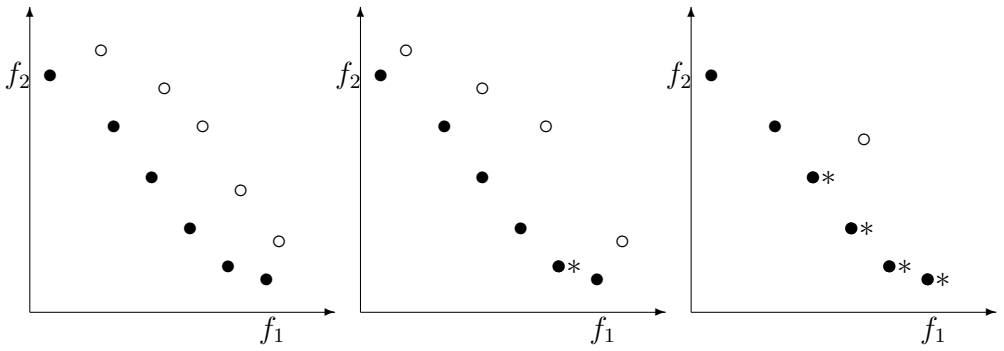


Fig. 2.2: Relação de desempenho entre os conjuntos de solução $\mathbf{A}(\bullet)$ e $\mathbf{B}(\circ)$. No primeiro caso, $\mathbf{A} \prec_C \mathbf{B}$. Na seqüencia, $\mathbf{A} \prec_F \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \prec_f \mathbf{B}$. O símbolo $*$ representa ponto comum em $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Nota-se claramente que se $\mathbf{A} \prec_C \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \prec_F \mathbf{B} \wedge \mathbf{A} \prec_f \mathbf{B}$.

As métricas para comparar os resultados de algoritmos multi-objetivos podem não estar em sintonia com os conceitos apresentados em (2.11), (2.12) e (2.13). Por isso dois critérios de compatibilidade foram propostos no mesmo estudo.

Definição 2 *Compatível fracamente: uma métrica de comparação é fracamente compatível com a relação de desempenho* $\prec_i$, $i \in \{f, F, C\}$ *se para cada par de conjuntos não dominados* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$, *tal que* $\mathbf{A} \prec_i \mathbf{B}$, *a métrica avalia* $\mathbf{A}$ *como não pior que* $\mathbf{B}$.

Definição 3 *Compatível: uma métrica de comparação é compatível com a relação de desempenho* $\prec_i$, $i \in \{f, F, C\}$ *se para cada par de conjuntos não dominados* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$, *tal que* $\mathbf{A} \prec_i \mathbf{B}$, *a métrica avalia* $\mathbf{A}$ *melhor que* $\mathbf{B}$.

As métricas apresentadas a seguir são avaliadas quanto à compatibilidade com $\prec_C$, $\prec_F$ e $\prec_f$, quanto a utilizarem mecanismos para classificar as soluções, quando à necessidade de comparação com conjunto que contém

as soluções de Pareto e quanto ao custo computacional. O estudo destas métricas está suportado principalmente pelo livro de Deb [32] e pela tese de doutorado de Knowles [72]. Informações complementares foram obtidas nas referências originais.

Taxa de Erro: Com a finalidade de contabilizar a proporção de pontos eficientes, Veldhuizem [119] elaborou a métrica TE (Taxa de Erro) que é baseada no conhecimento prévio dos pontos eficientes $\mathbf{Y}^*$ como mostrado na equação abaixo.

$$TE = \frac{\sum_{i=1}^{|\mathbf{A}|} e_i}{\mid \mathbf{A} \mid}, \tag{2.14}$$

sendo $\mid \mathbf{A} \mid$ o número de soluções de $\mathbf{A}$, e contador de erros e_i é tal que:

$$\begin{cases} e_i = 1, & \text{se } e_i \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{Y}^*; \\ e_i = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.15}$$

Para concluir se um ponto pertence ou não a $\mathbf{Y}^*$, definiu-se uma distância Euclideana mínima com relação a qualquer um dos elementos pertencentes ao conjunto referência ε_{TE}. Em outras palavras, ε_{TE} representa a precisão da métrica TE medida em termos de distância Euclideana.

Trata-se de uma métrica simples de implementar, com poucos parâmetros e é simétrica, ou seja, $(1 - ER)$ contabiliza o número de pontos pertencentes a $\mathbf{Y}^*$. Como desvantagens, têm-se: a) o custo computacional associado à comparação de proximidade com ponto eficiente em $\mathbf{Y}^*$; b) não mede uniformidade espacial das soluções em $\mathbf{A}$; c) penaliza conjuntos soluções com muitos pontos em $\mathbf{Y}^*$, se também existirem muitos pontos fora; e d) a métrica é fracamente compatível com $\prec_C$.

Importante observar que a métrica TE foi definida acima para ser aplicada no espaço dos objetivos. Analogamente, ela mede proximidade do conjuntos solução encontrado em relação ao conjunto solução referência, no espaço de busca.

Métrica $\mathcal{C}$: A métrica $\mathcal{C}$, apresentada em (2.16), proposta por Zitzler [129], compara dois conjuntos de soluções não dominadas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ quanto à dominância. Formalmente,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \frac{\mid \{b \in \mathbf{B} \mid \exists a \in \mathbf{A} : a \preceq b\} \mid}{\mid \mathbf{B} \mid} \tag{2.16}$$

Considerando-se o dois conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ quaisquer, observa-se que não necessariamente $\mathcal{C}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathcal{C}_{\mathbf{B},\mathbf{A}}$.

O custo computacional é baixo quando comparado às demais métricas desta seção, mesmo sendo preciso calcular $\mathcal{C}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ e $\mathcal{C}_{\mathbf{B},\mathbf{A}}$. Também é uma métrica simples de implementar e de interpretar, não exigindo a classificação do conjunto solução e não há necessitando da informação do conjunto $\mathbf{Y}^*$. No entanto, essa métrica é compatível apenas com $\prec_C$ e ainda ela não mede uniformidade da distribuição das soluções.

Métrica do Espaçamento: Diferentemente da finalidade das métricas anteriores, Schott [102] elaborou um mecanismo para medir a qualidade da distribuição dos pontos ao longo da fronteira não dominada. Considerando novamente que $\mid \mathbf{A} \mid$ representa o número de soluções de $\mathbf{A}$, observe abaixo como o cálculo de uniformidade é feito.

$$\mathcal{S} = \sqrt{\frac{1}{\mid \mathbf{A} \mid} \sum_{i=1}^{|\mathbf{A}|} (d_i - \bar{d})^2} \tag{2.17}$$

O termo d_i é a menor distância, no espaço dos objetivos, a qualquer outro ponto pertencente a $\mathbf{A}$ e $\bar{d}$ é a média de todos os d_i calculados. Esta formulação simplesmente calcula o desvio padrão das menores distâncias entre soluções. Logo, quanto menor o desvio padrão mais uniformemente estão espalhados os pontos.

Como vantagens, a métrica de Schott não depende de comparação com conjunto Pareto e não necessita classificar o conjunto $\mathbf{A}$. E como desvantagens, a métrica não mede a proximidade com a fronteira eficiente, tem custo computacional relativamente alto e ainda não é possível definir relação de compatibilidade com $\prec_f$, $\prec_F$ ou $\prec_C$.

Métrica do Espalhamento : Trata-se de outra métrica destinada a medir qualidade na distribuição das soluções foi desenvolvida Deb *et al.* e descrita em [32] é mostrada a seguir.

$$\Delta = \frac{\sum_{m=1}^{M} d_m^e + \sum_{i=1}^{|A|} \mid d_i - \bar{d} \mid}{\sum_{m=1}^{M} d_m^e + \mid A \mid \bar{d}} \tag{2.18}$$

Sendo Δ o valor da métrica, d_i é a distância até algum outro ponto na vizinhança, $\bar{d}$ é a média de todos os d_i calculados e d_m^e é a distância entre os pontos extremos de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{Y}^*$ em cada objetivo. Portanto, são investigadas tanto a uniformidade de distribuição dos pontos quanto o quão extensa é essa distribuição na fronteira. Na implementação desta métrica realizada neste trabalho calculou-se d_i como a menor distância entre uma solução i a qualquer outra do conjunto solução.

Uma vantagem desta métrica é a penalização de conjuntos não dominados com soluções dispersas e longe dos extremos em cada objetivo. Por outro lado, são consideradas como desvantagens: a) a necessidade de se conhecer $\mathbf{Y}^*$; b) o custo com classificação tanto de $\mathbf{A}$ quanto de $\mathbf{Y}^*$ para todos os objetivos; c) a incompatibilidade com as relações de desempenho e; d) a não medição de proximidade com a fronteira de Pareto.

Métrica do Hipervolume: Essa métrica é endereçada tanto para analisar proximidade de conjuntos solução à fronteira de Pareto quanto para qualificar a uniformidade da distribuição dos pontos sobre a fronteira. Cada ponto do conjunto solução $\mathbf{A}$ é um vértice de um hipercubo hc_i. O outro vértice, tomando-se a diagonal principal, é um ponto fixo que pode ser definido como o pior valor para cada objetivo. Considerando um conjunto solução $\mathbf{A}$, a união das regiões de cada hipercubo gera um hipervolume HV que é normalizado com um hipervolume HVR construído a partir de $\mathbf{Y}^*$. Observa-se que o índice é acrescentado para denotar o conjunto sobre o qual age a métrica do hipervolume. As equações (2.19) e (2.20) deixam claro como o cálculo do hipervolume é feito.

$$HV_A = volume\big(\cup_{i=1}^{|A|} hc_i\big) \tag{2.19}$$

$$HVR_A = \frac{HV_{\mathbf{A}}}{HV_{\mathbf{Y}^*}} \tag{2.20}$$

Pelas expressões acima, conclui-se que hipervolume maior significa melhor proximidade da fronteira eficiente.

A métrica do hipervolume tem custo computacional relativamente médio quando comparado às outras métricas, é de fácil implementação e interpretação e quantifica tanto dispersão quanto proximidade de $\mathbf{Y}^*$. Entretanto, necessita realizar a classificação das soluções e a escolha do ponto fixo pode não ser tarefa fácil. Adicionalmente, é difícil de analisar compatibilidade com $\prec_f$, $\prec_F$ ou $\prec_C$.

Como descrito, todas as métricas apresentam vantagens e desvantagens para medir a proximidade com a fronteira de Pareto e uniformidade das soluções. Fica claro que mais de uma métrica é necessário para julgar conjuntos soluções. Para interessados em conhecer outras métricas vale a pena consultar Knowles [72].

2.2.7 Técnicas de Nicho

Diversidade com qualidade é umas das características chaves buscadas pelos MOEAs. Há algum tempo, época do primeiros MOEAs, como o SGA para

problema mono-objetivo, a convergência prematura para uma determinada solução já não era desejada. O motivo principal é que a perda da diversidade dificulta a explorar novas regiões e, conseqüentemente o algoritmo pode ficar preso naquele ponto. Técnicas de manutenção de diversidade, conhecidas como *técnicas de nicho*, foram sendo desenvolvidas para tentar resolver problemas desta natureza. A seguir, são descritos três modelos destes procedimentos.

A primeira técnica de nicho para os MOEAs foi desenvolvida por Goldberg e Richardson [46] em 1987. A idéia era alterar, o valor da função objetivo de acordo com o número de indivíduos que estivessem na vizinhança. Uma *função de partilha*, como por exemplo (2.21), mede a proximidade entre duas soluções.

$$s_{d_{ij}} = \begin{cases} (1 - \frac{d}{\sigma_{partilha}})^{\alpha}, & \text{se } d_{ij} \leq \sigma_{partilha} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.21}$$

Sendo d_{ij} a distância entre as soluções i e j. O somatório de todas as funções de partilha, define o quanto o desempenho f_i do indivíduo i será degradado. O novo desempenho f'_i segundo a técnica de nicho é dado por $f'_i = f_i / \sum s_{d_{ij}}$.

A função de partilha de Goldberg e Richardson foi adaptada para problemas multi-objetivos em alguns algoritmos, como é o caso do WBGA (Weight-Based Genetic Algorithm). Nesta abordagem o valor dos pesos são definidos via (2.21). Algoritmos multi-objetivos baseados em pesos tem problemas quando a fronteira de Pareto é não convexa. Mas em casos convexos WBGA consegue distribuir pontos ao longo da fronteira.

O NSGA II substitui a função de partilha por um modelo onde o parâmetro $\sigma_{partilha}$ não necessita ser determinado. Em primeiro lugar uma *estimativa de densidade populacional* é calculada, através do cálculo de um "cubóide" formado com vértices nas soluções mais próximas. O perímetro do cubóide é denominado de *distância de agrupamento*. Em seguida um operador de comparação de agrupamento guia o processo de seleção levando em conta uma classificação de não dominância e na distância calculada no procedimento de estimativa de densidade.

Além das técnicas de nicho, um algoritmo que cria *aglomerados* (clustering) foi proposto por Zitzler e Thiele [131] com a mesma finalidade de dificultar a concentração de soluções muito próximas. Segundo os autores, os resultados apresentados também foram satisfatórios.

2.3 Análise Intervalar

Intervalos são mesmo necessários? Hayes [53] e Daumas [29] relataram alguns acidentes ocorridos com equipamentos de tecnologia avançada que resultaram

em vítimas fatais. Foram registrados como causa, os erros em rotinas de cálculo numérico, devido por exemplo, à propagação desastrosa de arredondamentos. Qualquer um, ciente apenas dos fatos, poderia dizer que as rotinas numéricas aplicadas pudessem ter sido construídas descuidadamente ou que os hardware utilizados devessem ter sido mais precisos e confiáveis. Sabendo-se que hardware trabalha com grandezas discretas, conclui-se que ele tem limites finitos para tratar valores precisos. O número de acidentes desta natureza pode aumentar com a crescente aplicação de tecnologia de precisão, habitualmente empregada em conjunto com a automação de processos. Em contra-partida, novos mecanismos têm sido criados para aumentar a segurança, oferecer um nível mais alto de confiabilidade diminuindo os riscos de danos materiais e humanos. Algumas destas soluções são baseadas em métodos intervalares, definidos em novo conjunto numérico próprio, o conjunto dos Números Intervalares Reais $\mathbb{IR}$. Este conjunto manipula incertezas considerando as grandezas numéricas, como entidades compreendidas dentro de uma faixa de valores.

A Análise Intervalar, área que estuda o conjunto dos Números Intervalares, começou com Moore [85] justamente para tratamento de erros de arredondamento em computação numérica. Atualmente, ela tem sido eficientemente utilizada em aplicações que envolvem parâmetros de incerteza, veja Jaulin et al. [63] e Kearfott e Kreinovich [68]. Uma manipulação segura destes intervalos resulta em um intervalo no qual se pode garantir a presença da solução pontual. Entretanto, os métodos intervalares sofrem algumas críticas quanto à lentidão, em termos de tempo computacional. Hansen e Walster [50] rebateram a maioria das críticas e destacam as vantagens dos métodos intervalares: a) a possibilidade de obter soluções de certos problemas que não podem ser resolvidos por métodos não intervalares, como por exemplo, os problemas que envolvem operações de divisão por zero em sua formulação; b) a convergência, pois as etapas dos processos internos dos métodos intervalares são finitas; e c) a confiabilidade dos resultados. Uma outra característica importante a ser inserida no conjunto de vantagens: a usual globalidade dos métodos intervalares.

Análise Intervalar tem sido empregada em diversas áreas como por exemplo: Carreras e Walker [15] e Morales e Son [88] em robótica; Soares *et al.* [109] e Siouris *et al.* [104] em rastreamento por radar;

2.3.1 Breve Histórico

É difícil precisar onde os primeiros indícios sobre intervalos surgiram. Alguns estudos apontam que provavelmente o primeiro documento onde aparece a presença de intervalos foi elaborado por Arquimedes, registrado no livro de

Healt [54] em 1897, onde Arquimedes buscava calcular o valor de π. No entanto, existe divergência entre os pesquisadores da área de Análise Intervalar quando dissertam sobre quem efetuou os passos concretos iniciais. Alefeld e Mayer [2] registraram alguns estudos isolados na área de Computação Científica, na década de 1950. Sunaga [115] em 1958, apresentou as primeiras regras sobre operações aritméticas intervalares simples e também para vetores e matrizes. Sunaga ainda tratou da resolução de equações intervalares e cálculo de funções integrais. Em 1965 Hansen [48], realizou manipulação de intervalos com a álgebra linear e, no mesmo ano, um grupo de pesquisadores alemães incluindo Alefeld, Krawczyk e Nickel desenvolveram vários aspectos de implementações computacionais. Embora todos os estudos acima sejam relevantes, o primeiro trabalho consistente, reconhecido por todos os pesquisadores como uma contribuição real para a Análise Intervalar foi o livro de Moore [85] em 1966. Durante quase duas décadas, a Análise Intervalar não foi um tema muito investigado pela comunidade científica. Talvez, simplesmente porque ainda não existia necessidade para sua utilização. No fim deste período, trabalhos interessantes foram realizados por Neumaier [90], em 1985, sobre o conjunto solução de equações lineares e não lineares e, Kearfott [67] sobre otimização, em 1989. Nos anos 90, a Análise Intervalar tornou-se popular com a adesão de vários grupos de pesquisa nas mais diversas partes do mundo.

Retornando a 1966, o mérito maior de Moore [85] foi devido à organização realizada na pesquisa sobre intervalos até aquele momento, fundamentando e transformando a Aritmética em Análise Intervalar. No entanto, situações que envolviam intervalos contendo 0 e limitados por $\pm\infty$ não tinham solução. Para resolver este problema, Hanson [52] e Kahan [66], ambos em 1968, em pesquisas independentes, descreveram incompletas extensões nas quais os limites para os intervalos pudessem ter valor $\pm\infty$. Estes estudos marcaram o início do Sistema Intervalar Fechado, que é uma extensão do Sistema Intervalar Finito proposto por Moore [85]. Mais tarde, Walster, Pryce e Hansen em [121] descreveram um sistema que representasse completamente uma extensão do sistema de Moore. Neste modelo, a resolução de problemas que envolvam as operações $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ foi definida.

2.3.2 Relações Algébricas de Conjuntos

Números Intervalares são definidos como conjuntos, e portanto, ele herda as operações e relações para esse tipo de dado. A seguir, uma revisão baseada em Jaulin *et al.* [63] sobre relações básicas entre conjuntos é apresentada, e na seqüência, as operações baseadas nessas relações.

Considere dois conjuntos numéricos **A** e **B** quaisquer. São válidas as

seguintes operações, relações e definições:

$$\text{Intersecção} : \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{a \mid a \in \mathbf{A} \wedge a \in \mathbf{B}\}. \quad (2.22)$$

$$\text{União} : \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{a \mid a \in \mathbf{A} \vee a \in \mathbf{B}\}. \quad (2.23)$$

$$\text{Complemento} : \mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{a \mid a \in \mathbf{A} \wedge a \notin \mathbf{B}\}. \quad (2.24)$$

$$\text{Produto Cartesiano} : \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{A} \wedge b \in \mathbf{B}\}. \quad (2.25)$$

$$\text{Inclusão} : \mathbf{A} \subset \mathbf{B} \Leftrightarrow \forall a \in \mathbf{A}, a \in \mathbf{B}. \quad (2.26)$$

$$\text{Igualdade} : \mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}. \quad (2.27)$$

Se $\mathbf{Z} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e $\mathbf{Z}_1 \subset \mathbf{Z}$, então a projeção de $\mathbf{Z}_1$ sobre $\mathbf{A}$, com respeito a $\mathbf{B}$, é dada por:

$$proj_{\mathbf{A}}(\mathbf{Z}_1) = \{a \in \mathbf{A}, \exists b \in \mathbf{B} \mid (a, b) \in \mathbf{Z}_1\}. \quad (2.28)$$

A Fig.2.3 ilustra o produto cartesiano e a projeção de conjuntos.

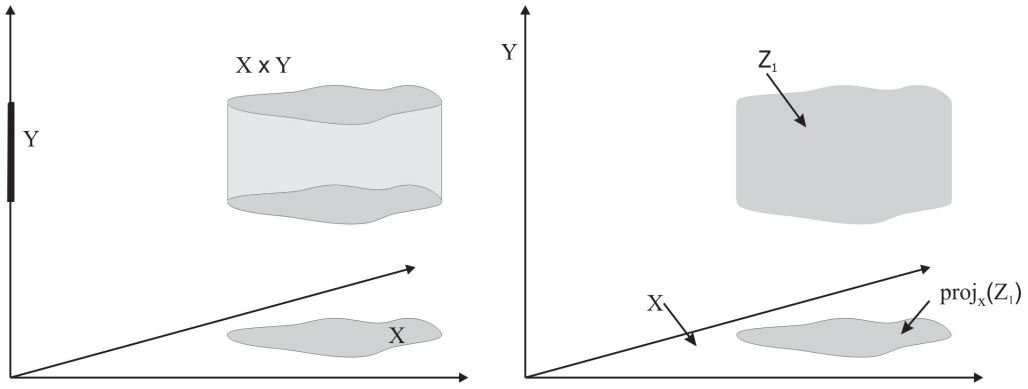


Fig. 2.3: Operações sobre conjuntos: produto cartesiano e projeção.

Novamente, considere dois conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e uma função $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Se $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}$, a *imagem direta* de $\mathbf{A}_1$ por f é:

$$f(\mathbf{A}_1) = \{f(a) \mid a \in \mathbf{A}_1\}. \quad (2.29)$$

Se $\mathbf{B}_1 \in \mathbf{B}$, a *imagem recíproca* de $\mathbf{B}_1$ para f é

$$f^{-1}(\mathbf{B}_1) = \{a \in \mathbf{A} \mid f(a) \in \mathbf{B}_1\}. \quad (2.30)$$

Se $\emptyset$ representa o conjunto vazio, então:

$$f(\emptyset) = f^{-1} = (\emptyset) = \emptyset. \quad (2.31)$$

Partindo das expressões (2.29), (2.30) e (2.31) e definindo $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ como subconjuntos de $\mathbf{A}$, infere-se que:

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) \subset f(\mathbf{A}_1) \cap f(\mathbf{A}_2).\\
&f(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2) = f(\mathbf{A}_1) \cup f(\mathbf{A}_2).\\
&f^{-1}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) = f^{-1}(\mathbf{A}_1) \cap f^{-1}(\mathbf{A}_2).\\
&f^{-1}(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2) = f^{-1}(\mathbf{A}_1) \cup f^{-1}(\mathbf{A}_2).\\
&f(f^{-1}(\mathbf{A})) \subseteq \mathbf{A}.\\
&f^{-1}(f(\mathbf{A})) \supseteq \mathbf{A}.\\
&\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2 \Rightarrow f(\mathbf{A}_1) \subset f(\mathbf{A}_2).\\
&\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2 \Rightarrow f^{-1}(\mathbf{A}_1) \subset f^{-1}(\mathbf{A}_2).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

2.3.3 Fundamentos e Definições

Algumas definições sobre conjuntos apresentadas por Hickey *et al.* [56] para suportar a teoria de intervalos são apresentadas a seguir.

Definição 4 *Um conjunto aberto básico de reais é da forma* $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$*, sendo* $a \in \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$*. Um conjunto* $\mathbf{A}$ *é aberto se para cada ponto* $x \in \mathbf{A}$ *existe um conjunto aberto básico* $\mathbf{A}_1$ *tal que* $x \in \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}$*.*

Definição 5 *O conjunto* $\mathbf{A}$ *é fechado se seu complemento é aberto. Por definição,* $\emptyset$ *conjunto é fechado.*

Definição 6 *Um conjunto de número reais* $\mathbf{A}$ *é dito conectado se não existem conjuntos separados, abertos não vazios* $\mathbf{A}_1$ *e* $\mathbf{A}_2$ *que intersectam* $\mathbf{A}$ *e para os quais* $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$*. Por definição, o conjunto* $\emptyset$ *é conectado.*

Definição 7 *Um intervalo conectado fechado* $[x]$ *é definido por*

$$[\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}, \;\; \underline{x} \in \mathbb{R} \text{ e } \overline{x} \in \mathbb{R}, \tag{2.33}$$

sendo $\underline{x}$ *e* $\overline{x}$ *os limites inferior e superior do intervalo* $[x]$ *respectivamente. O conjunto de todos os intervalos do tipo (2.33) é* $\mathbb{IR}$*.*

Em se tratando de intervalos, alguns casos especiais são:

- intervalos tais que $\overline{x} = \underline{x}$ são ditos *degenerados* ou *pontuais*;
- intervalo que não contém número é denominado de intervalo vazio;
- notações de intervalo como $[0, \infty]$ e $[0, \infty[$ tem o mesmo significado;

- as formas $[\infty, \infty]$ e $[-\infty, -\infty]$ não correspondem a intervalos.

Estes casos são exceções que, se não forem previstos e tratados adequadamente, deixam inválidos os teoremas, as relações e as operações intervalares que estão apresentadas adiante.

Em [118], Vaccaro descreve duas semânticas para interpretar e tratar intervalos. Na primeira, os intervalos são descritos conforme a Def. 7 e na segunda, como *Número Intervalo*. A definição formal de número intervalo é suprimida para evitar confusão e adição de nomenclatura desnecessária. Mas informalmente, o número intervalo é um tipo de dado constituído por todos os números reais pertencentes no intervalo. Assim, o intervalo $[-1, 3]$ representa todos os números reais compreendidos entre -1 e 3, inclusive -1 e 3. Como conseqüência, um número intervalo difere dos reais por poder assumir simultaneamente valores negativos, positivos e nulos. Os números intervalos não são objeto de estudo deste trabalho e por isso o termo intervalo estará sempre vinculado ao tipo de dado da Def. 7.

2.3.4 Operações Aritméticas Elementares

Uma vez diferenciadas as semânticas sobre intervalo, o próximo passo é a definição das operações intervalares.

Definição 8 *Considere $\diamond$ um operador binário que represente as quatro operações clássicas da aritmética real $+$, $-$, $*$ e $/$. Então*

$$[x] \diamond [y] = \{x \diamond y \mid x \in [x],\ y \in [y]\} \tag{2.34}$$

Por simplicidade, optou-se por descrever as operações aritméticas (2.34) para $\mathbb{IR}$. Similarmene, algumas outras definições seguem o mesmo caminho. Por analogia, o espaço $\mathbb{IR}$ pode ser estendido a um espaço $\mathbb{IR}^{n_x}$ qualquer.

Cada intervalo não degenerado contém infinitos números. Logo, operações aritméticas, como soma e multiplicação, devem ser diferentes daquelas utilizadas para números reais. Da mesma forma que os argumentos, a resposta também é um intervalo. Adiante, os procedimentos para cálculo das operações básicas são descritos considerando dois intervalos $[x]$ e $[y]$ quaisquer. Os resultados das operações devem compreender todas as possíveis

instâncias dos intervalos $[x]$ e $[y]$. Assim, define-se as operações como

$$\begin{aligned}
[x] + [y] &= [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]. && (2.35)\\
[x] - [y] &= [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]. && (2.36)\\
[x] * [y] &= [\min\{\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \overline{y}, \overline{x} * \underline{y}, \overline{x} * \overline{y}, && (2.37)\\
&\quad \max\{\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \overline{y}, \overline{x} * \underline{y}, \overline{x} * \overline{y}\}]. && (2.38)\\
[x]/[y] &= [x] * (1/[y]), && (2.39)
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
1/[y] &= \emptyset, && \text{se } [y] = [0,0];\\
&= [1/\overline{y}, 1/\underline{y}], && \text{se } 0 \notin [y];\\
&= [1/\overline{y}, \infty], && \text{se } \underline{y} = 0 \ \wedge \ \overline{y} > 0; \qquad (2.40)\\
&= [-\infty, 1/\underline{y}], && \text{se } \underline{y} < 0 \ \wedge \ \overline{y} = 0;\\
&= [-\infty, \infty], && \text{se } \underline{y} < 0 \ \wedge \ \overline{y} > 0.
\end{aligned}$$

Observe que a operação divisão foi construída sobre a multiplicação do numerador pelo inverso do denominador. Segundo Hickey *et al.* [56], na literatura é indiscutível a aplicação de (2.34) para os operadores $+$, $-$ e $*$, independente dos valores reais que os limites podem assumir. No entanto, existem divergências sobre a divisão de intervalos, quando o denominador contém zero entre seus limites inferior e superior. Definindo-se intervalos como fechados, a associação das equações (2.39) e (2.40) tem sido usualmente empregada.

Computacionalmente, algumas operações aritméticas anteriormente descritas podem ser implementadas mais eficientemente que no formato apresentado nas formulações. Por exemplo, se antes da operação multiplicação identificar a negatividade dos limites de cada intervalo, haveria apenas dois produtos para se calcular, e ainda, não seriam necessários utilizar as funções min e max. Por motivos de simplicidade, preferiu-se apresentar as operações conforme acima. Para exemplificar as operações aritméticas descritas até então, observe os casos no Exem. 1.

Exemplo 1 (Operações intervalares)

$$\begin{aligned}
[-2,4] + [1,6] &= [-1,10]\\
[-1,5.4] - [-3,-2.1] &= [1.1,8.4]\\
[-4,-1] * [-2,3] &= [-12,8]\\
[2,3]/[2,5] &= [0.4,1.5]\\
[1,3]/[0,0] &= \emptyset\\
[1,4]/[0,3] &= [1/3,\infty]\\
[2,5]/[-3,0] &= [-\infty,-2/3]\\
[1,2]/[-2,1] &= [-\infty,\infty]
\end{aligned}$$

2.3.5 Funções Intervalares Elementares

Uma *função intervalar* f é uma função cujos argumentos e resultados são intervalos. Assim, se $f : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$, então

$$f([x]) = [\{f(x) \mid x \in [x]\}] \tag{2.41}$$

As operações aritméticas intervalares são suportadas pela (2.34). Similarmente, as funções intervalares precisam de apoio teórico para definição de seus escopos. Moore [87] descreve um teorema sobre as funções intervalares, cujas conseqüências são descritas a seguir.

Considere uma função real $f(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow y$ e uma função intervalar $f'([x_1], \ldots, [x_n]) \rightarrow [y]$ com a mesma expressão formal da função f real. Se $f'(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ para quaisquer argumentos reais, então f' é denominada uma *função extensão intervalar* de f. Entretanto, na prática é possível que se compute apenas uma função intervalar $f'' \supseteq f'$, considerando as múltiplas ocorrências de seus argumentos e/ou os arredondamentos realizados nos limites dos intervalos ao longo da computação da função intervalar.

Além das operações matemáticas elementares, a expressão de $[f]$ pode ser composta de funções matemáticas como *cosseno*, *seno*, *quadrado*, *log*, etc. Na implementação computacional, os algoritmos de funções intervalares são desenvolvidos para evitar que o domínio seja violado. Veja o caso da função potência intervalar para n não negativo.

$$\begin{array}{rcll} [x]^n & = & [1,1], & \text{se } n = 0; \\ & = & [\underline{x}^n, \overline{x}^n], & \text{se } \underline{x} \geq 0 \vee n \text{ ímpar}; \\ & = & [\overline{x}^n, \underline{x}^n], & \text{se } \overline{x} \leq 0 \wedge n \text{ par}; \\ & = & [0, \max(\underline{x}^n, \overline{x}^n)], & \text{se } \underline{x} \leq 0 \leq \overline{x} \wedge n \text{ par}. \end{array} \tag{2.42}$$

O Exem. 2 trata numericamente algumas funções matemáticas.

Exemplo 2 (Algumas funções intervalares)

$$\begin{array}{rcl} [-1,3]^2 & = & [0,9] \\ \sqrt{[-10,4]} & = & [0,2] \\ \log([-2,-1]) & = & \emptyset \\ \exp^{[2,5]} & = & [7.39, 148.41] \\ \mathit{seno}([0,\pi]) & = & [0,1] \end{array}$$

Algoritmos para funções como *seno* precisam de uma atenção especial. Dependendo do intervalo, os valores da função f podem passar por vários máximos e mínimos locais que não sejam obteníveis apenas pela avaliação da

função em $\underline{x}$ e $\overline{x}$. O Tab.2.4 mostra os passos básicos para construção da função $seno([x])$. A extensão, em termos de linhas de código, do algoritmo

Tab. 2.4: Cálculo de $f([x]) = seno([x])$ (Jaulin et al. [63]).

entrada $([x])$
saída$(f([x]))$

1 se $\exists k \in \mathbf{Z} \mid (2k\pi - \pi/2) \in [x]$,
2 então $\underline{f}([x]) = -1$.
3 senão $\underline{f}([x]) = \min\big(seno(\underline{x}), seno(\overline{x})\big)$.
4 se $\exists k \in \mathbf{Z} \mid (2k\pi + \pi/2) \in [x]$,
5 então $\overline{f}([x]) = 1$.
6 senão $\overline{f}([x]) = \max\big(seno(\underline{x}), seno(\overline{x})\big)$.

do cálculo do seno de intervalos é um exemplo para a principal crítica sobre os métodos intervalares: o tempo computacional.

2.3.6 Dependência

As operações aritméticas e funções intervalares enfrentam problemas quando há repetição de uma mesma variável intervalar, como por exemplo em $[x] - [x]$ e $[x]/[x]$. Para números reais, os resultados da subtração e da divisão de um número por ele mesmo é 0 e 1 respectivamente. No entanto, para números intervalares estes mesmos resultados são obtidos somente em casos particulares. Observe a subtração $[x] - [x]$:

$$[\underline{x} - \overline{x}, \overline{x} - \underline{x}] = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \overline{x}.$$

Este problema que surge com a múltiplas ocorrências de variáveis intervalares é denominado de *dependência* e tem como conseqüência principal o alargamento do intervalo resultante, deixando-o menos preciso. Para reduzir a dependência, deve-se inicialmente reorganizar as expressões matemáticas de forma a reduzir o número de vezes que uma mesma variável aparece. Veja como fazer isso através do Exem. 3 e do Exem. 4.

Exemplo 3 (Tratando a dependência) *Considere a função* $f([x]) = [x]/(1+[x])$. *O valor de* f *para o intervalo* $[1, 3]$ *pode ser computado como:*

a) substituindo $[1, 3]$ *em* $f([x])$, *tem-se*

$$f([x]) = \frac{[1, 3]}{1 + [1, 3]} = [0.25, 1.50];$$

b) reorganizando $f([x])$ *obtém-se* $f'([x]) = \frac{1}{1+\frac{1}{[x]}}$*, ou seja, foi extraída a ocorrência extra da variável* $[x]$ *mantendo-se uma expressão equivalente a função original. Assim*

$$f'([x]) = \frac{1}{1+\frac{1}{[1,3]}} = [0.50, 0.75].$$

Ambas funções $f([x])$ *e* $f'([x])$ *estão corretas. Mas,* $f'([x])$ *é mais precisa e portanto deve ser aplicada no lugar de* $f([x])$*.*

Exemplo 4 (Tratando a dependência) *Considere a função* $f([x]) = [x]^2 - [x]$*. O valor de* f *para o intervalo* $[x] = [-1, 3]$ *pode ser computado como:*

a) substituindo $[-1, 3]$ *em* $f([x])$*, tem-se*

$$[-1, 3]^2 - [-1, 3] = [0, 9] - [-1, 3] = [-3, 10];$$

b) reorganizando $f([x])$ *obtém-se* $f'([x]) = ([x] - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$*. Substituindo* $[-1, 3]$ *em* $f'([x])$*, tem-se*

$$([-1, 3] - 0.50)^2 - 0.25 = [-1.50, 2.50]^2 - 0.25 = [-0.25, 6].$$

Novamente, as duas soluções são verdadeiras porém a) é tida como solução pessimista.

Caso não seja possível eliminar a multiplicidade de ocorrências de variáveis, pelo menos deve-se buscar diminuí-las. Adicionalmente, uma outra forma de tratar a dependência, descrita em Hansen e Walster [50], é redefinir operações aritméticas para os casos de dependência. A subtração dependente é definida por

$$[x] \ominus [y] = [\overline{x} - \overline{y}, \underline{x} - \underline{y}] \tag{2.43}$$

As operações de dependência foram desenvolvidas de forma que seja realmente a operação inversa daquela que remove uma variável dependente. Por exemplo, dados $[x]$ e $[y]$, calcula-se $[z]$ por $[z] = [x] * [y]$. No entanto, é possível que $[y] \neq [x]/[z]$, pois $*$ e $/$ não são operadores que resolvem dependência. Definido-se $\oslash$ como divisão dependente, $[y] = [x] \oslash [z]$ recupera $[y]$ completamente.

Para maiores informações sobre a construção de funções de inclusão mais precisas e a questão do pessimismo, sugere-se a consulta a Benhamou e Older [10] e Chabert e Jaulin [17] respectivamente.

2.3.7 Vetores Intervalares

Em muitas situações, é preciso agrupar mais de um intervalo para representar um parâmetro. A maneira formal é feita via vetores intervalares ou *caixas*, que são descritos a seguir.

Definição 9 *Uma caixa* $[\mathbf{x}]$ *é um vetor intervalar em* $\mathbb{IR}^{n_x}$ *definido como o produto cartesiano de* n_x *intervalos fechados*

$$[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] = [x_1] \times \ldots \times [x_n], \tag{2.44}$$

sendo $\underline{\mathbf{x}}$ *e* $\overline{\mathbf{x}}$ *os limites inferior e superior de* $[\mathbf{x}]$.

Como conseqüência da definição dos vetores intervalares, todas as definições descritas anteriormente sobre intervalos em $\mathbb{IR}$ são estensíveis a $\mathbb{IR}^{n_x}$.

Muitos métodos intervalares utilizam medidas relacionadas aos limites inferiores e superiores de uma caixa como medida de incerteza de seus parâmetros. Esta medida é denominada de *largura* é definida a seguir.

Definição 10 *Considere uma caixa não vazia* $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$ *e que não seja formada somente intervalos degenerados, então sua largura* $w([\mathbf{x}]) : \mathbb{IR}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ *é dada por*

$$w([\mathbf{x}]) = \max_{i=\{1,\ldots,n_x\}} w([x_i]). \tag{2.45}$$

Ainda, por definição $w(\emptyset) = -\infty$.

Como dito anteriormente, um intervalo real representa um número real e sua incerteza. Uma estimativa habitual do número que a caixa representa é o seu *centro*, cuja definição vem a seguir.

Definição 11 *Considere uma caixa não vazia* $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$*, então seu centro* $\mathbf{c}([\mathbf{x}]) : \mathbb{IR}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ *é dado por*

$$c_i([\mathbf{x}]) = (\overline{x}_i + \underline{x}_i)/2, \;\; i = \{1, \ldots, n_x\}. \tag{2.46}$$

Além da largura pode-se introduzir uma outra medida para caracterizar os vetores intervalares, o *volume*.

Definição 12 *Considere uma caixa não vazia* $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$*,* $n_x \geq 2$*. Então, o volume* $v([\mathbf{x}]) : \mathbb{IR}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ *é dado por*

$$v([\mathbf{x}]) = \prod_{i=\{1,\ldots,n_x\}} w([x_i]). \tag{2.47}$$

Por definição, a) se $x \in \mathbb{R}$*,* $v([x]) = w([x])$*; e b)* $v(\emptyset) = -\infty$.

Se $w([\mathbf{x}]) \neq 0$, então existe pelo menos um plano de corte que divide $[\mathbf{x}]$ em duas outras caixas. É chamado de *plano principal* aquele originado no maior lado da caixa. A operação que divide a caixa é chamada de *bissecção*.

Definição 13 *A bissecção regular é uma operação que divide uma caixa* $[\mathbf{x}]$ *em duas outras simétricas* $[\mathbf{x}]_1$ *e* $[\mathbf{x}]_2$*, tais que*

$$[\mathbf{x}]_1 = [x_1] \times \ldots \times [\underline{x}_j, \frac{\underline{x}_j + \overline{x}_j}{2}] \times \ldots \times [x_n], \tag{2.48}$$

$$[\mathbf{x}]_2 = [x_1] \times \ldots \times [\frac{\underline{x}_j + \overline{x}_j}{2}, \overline{x}_j] \times \ldots \times [x_n], \tag{2.49}$$

sendo $j = \min\{i \mid w([x_i]) = w([\mathbf{x}])\}$.

Neste trabalho, a bissecção é utilizada em todos os algoritmos intervalares. O exemplo a seguir, mostra como ela funciona na prática.

Exemplo 5 (Operação de bissecção) *Considere a caixa* $[\mathbf{x}] = [-2, 3] \times [2, 4] \times [0, 3]$. *A operação de bissecção inicia-se com o cálculo da largura da caixa*

$$w([\mathbf{x}]) = w([-2, 3] \times [2, 4] \times [0, 3]) = 5. \tag{2.50}$$

Finalmente, utilizando o intervalo de maior largura como plano principal de corte a bissecção produz:

$$[\mathbf{x}]_1 = ([-2, 0.5] \times [2, 4] \times [0, 3])$$
$$[\mathbf{x}]_2 = ([0.5, 3] \times [2, 4] \times [0, 3])$$

2.3.8 Funções de Inclusão

Segundo Jaulin *et al.* [63], um dos objetivos principais da Análise Intervalar é oferecer, para uma grande classe de funções $\mathbf{f}$, *funções de inclusão* $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$ que possam ser avaliadas rapidamente. Em outras palavras, as funções de inclusão são formulações equivalentes, consistentes e que resultem em solução mais rápida que o modelo inicialmente proposto.

Definição 14 *Considere a função* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$. *A função* $[\mathbf{f}] : \mathbb{IR}^{n_x} \rightarrow \mathbb{IR}^{n_f}$ *é uma função de inclusão para* $\mathbf{f}$ *se:*

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x},\ \mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \tag{2.51}$$

A função de inclusão [**f**] comporta-se como uma *caixa intervalar* e portanto é possível contornar algumas situações como descontinuidade e não convexidade da função **f**, que dificultem o seu manuseio. Analise a Fig. 2.4 e observe como uma função de inclusão mapeia uma caixa [**x**] para o espaço das funções. As funções de inclusão podem ser classificadas como *estreita*,

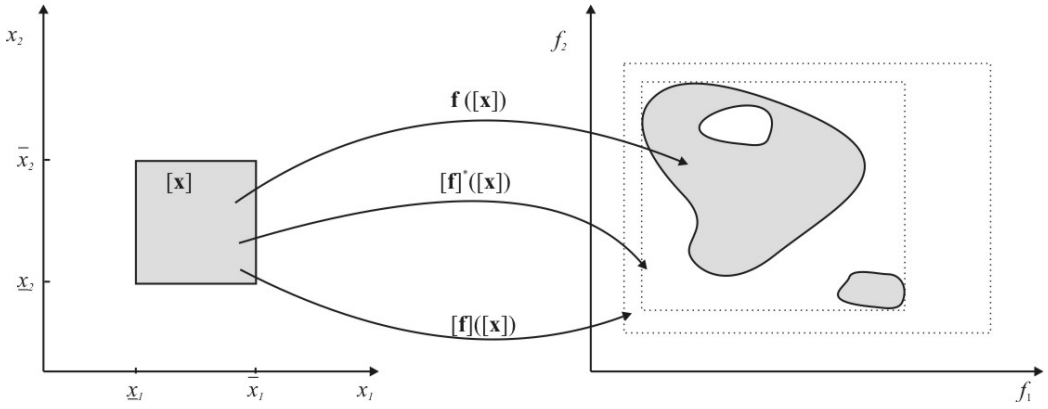


Fig. 2.4: Imagem da caixa [**x**] via funções de inclusão.

convergente, *monotônica* ou *mínima*. Estreita quando

$$\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \;\; \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}](\mathbf{x}). \tag{2.52}$$

Considerando que o índice k represente o número de bissecções realizados sobre uma caixa [**x**], a função de inclusão é convergente quando

$$\lim_{k\to\infty} w([\mathbf{x}]_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} w\big([\mathbf{f}]([\mathbf{x}]_k)\big) = 0, \tag{2.53}$$

e monotônica quando

$$[\mathbf{x}]_k \subset [\mathbf{x}]_{k-1} \Rightarrow [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]_k) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]_{k-1}). \tag{2.54}$$

Finalmente, a função de inclusão é dita mínima, com notação $[\mathbf{f}]^*([\mathbf{x}])$, quando ela mapear a menor caixa que contém a imagem de **f**. A Fig. 2.4 apresenta a ação de **f**, $[\mathbf{f}]^*$ e [**f**] sobre a caixa [**x**]. As figuras Fig. 2.5 e Fig. 2.6 mostram funções de inclusão convergentes, monotônicas e não monotônicas.

As funções de inclusão podem ser construídas baseadas em polinômios, algoritmos e equações diferenciais. Este trabalho aborda somente as *funções de inclusão naturais*, as quais descritas a seguir.

Definição 15 *Considere a função $f : \mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R}$, expressada como uma composição finita dos operadores $+$, $-$, $*$ e $/$ e de funções elementares (seno, exp, quadrado, ...). A função de inclusão natural pode ser obtida pela substituição de cada operador e função elementar pelo seu modelo intervalar equivalente.*

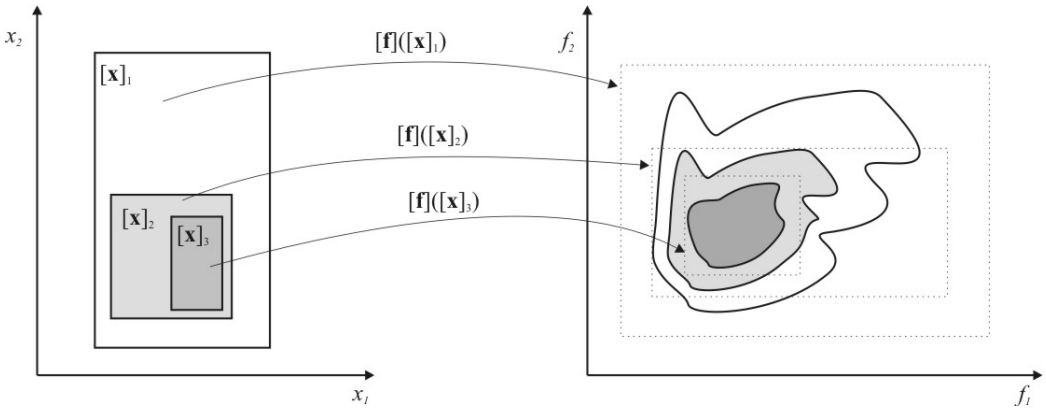


Fig. 2.5: Funções de inclusão monotônica e convergente.

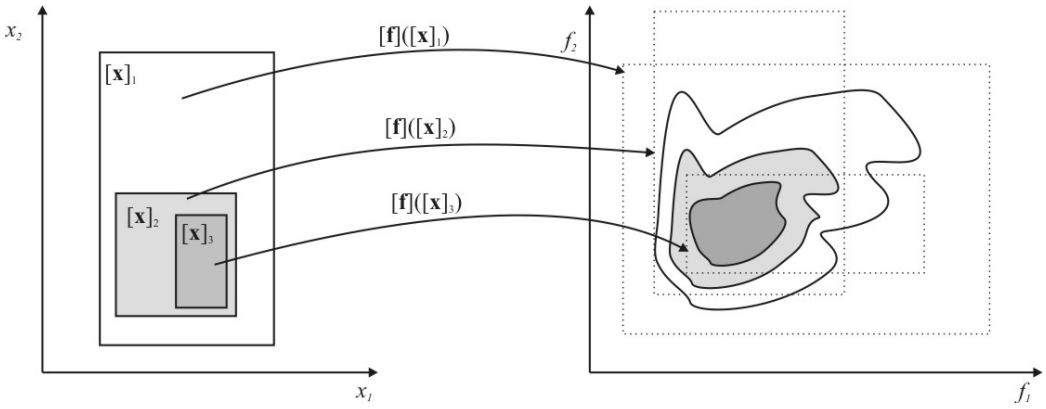


Fig. 2.6: Funções de inclusão não monotônica e convergente.

Em Jaulin *et al.* [63], pp 30, um teorema sobre as funções de inclusão naturais diz que quando a função natural $[f]$ envolve apenas operadores e funções elementares contínuos, então $[f]$ é convergente. Ainda, se cada variável ocorrer no máximo uma vez, $[f]$ é mínima. A característica de ser mínima está diretamente ligada à precisão da função de inclusão $[f]$. Em geral as funções de inclusão naturais não são mínimas por causa, por exemplo, da dependência. Então, em alguns casos, a expressão matemática da função de inclusão pode ser rearranjada de modo a reduzir as ocorrências extras de variáveis.

Os algoritmos de otimização que utilizam intervalos necessitam de informações das funções de inclusão para garantir que reduções no espaço de busca não conduzam à perda do ponto ótimo. Por isso é importante que se construa funções de inclusão com características de serem mínima, convergente e monotônica.

2.3.9 Lógica Booleana Intervalar

A lógica booleana intervalar tem papel fundamental nos métodos intervalares. Por exemplo, ela auxilia em testes de continência entre intervalos. O conjunto booleano intervalar $\mathbb{IB}$ possui, além elementos *verdadeiro* (1) e *falso* (0), as opções *impossível* ($\emptyset$) e *indeterminado* ($[0,1]$). Pela notação de conjuntos,

$$\mathbb{IB} = \{\emptyset, 0, 1, [0,1]\}. \tag{2.55}$$

O elemento indefinido $[0,1]$ de $\mathbb{IB}$, é empregado quando há dúvida no julgamento de alguma expressão. Por outro lado, $\emptyset$ é utilizado, por exemplo, quando não existe intersecção entre intervalos. Pelas equações acima, $([0,1] \vee 1) \wedge ([0,1] \wedge 1) = 1 \wedge [0,1] = [0,1]$. Da mesma forma que os operadores lógicos, os operadores relacionais também aplicam-se a intervalos. Veja alguns casos abaixo.

$$\begin{array}{lcll} [x] \leq [y] & \rightarrow & \mathbb{B} = 1, & \text{se } \overline{x} \leq \underline{y}. \\ [x] \leq [y] & \rightarrow & \mathbb{B} = 0, & \text{se } \underline{x} > \overline{y}. \\ [x] \leq [y] & \rightarrow & \mathbb{B} = [0,1], & \text{se } (\overline{x} > \underline{y} \ \wedge \ \underline{x} \leq \overline{y}). \\ [x] = [y] & \rightarrow & \mathbb{B} = 1, & \text{se } (\underline{x} = \underline{y} \ \wedge \ \overline{x} = \overline{y}), \\ & \rightarrow & \mathbb{B} = 0, & \text{caso contrário.} \end{array} \tag{2.56}$$

Se operadores como $\wedge$ e $\vee$ associam-se a conjuntos e intervalos, então podem ser estendidos para o conjunto $\mathbb{IB}$. As expressões que seguem tratam destas definições.

$$[x] \vee [y] = \{x \vee y \mid x \in [x], y \in [y]\}. \tag{2.57}$$

$$[x] \wedge [y] = \{x \wedge y \mid x \in [x], y \in [y]\}. \tag{2.58}$$

$$\neg[x] = \{\neg x \mid x \in [x]\}. \tag{2.59}$$

$$[x] \sqcap [y] = [\max(\underline{x}, \underline{y}), \min(\overline{x}, \overline{y})]. \tag{2.60}$$

$$[x] \sqcup [y] = [\min(\underline{x}, \underline{y}), \max(\overline{x}, \overline{y})]. \tag{2.61}$$

Outros relacionais podem ser obtidos por analogia. Veja o Exem. 6.

Exemplo 6 (Valores das expressões booleanas)

$$\begin{array}{rcl} ([-1,2] \leq [2,3]) & = & 1 \\ ([-1,2] \geq [4,6]) & = & 0 \\ ([1,2] \geq [-1,0]) & = & 1 \\ ([-1,2] \in [0,6]) & = & [0,1] \\ ([-1,2] \cap [3,5]) & = & \emptyset \end{array}$$

Os relacionais descritos acima foram implementados em um formato estendido para comparação de caixas intervalares. Expressões booleanas, intervalares ou não, são empregadas em diversas situações, como por exemplo para direcionar passos de métodos e algoritmos. Entre os usos mais freqüentes na Análise Intervalar está a aplicação nos *testes de inclusão*.

2.3.10 Teste de Inclusão

Um *teste* é uma função $t(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{B}$. Similarmente, um *teste de inclusão* é uma função de $[t]([\mathbf{x}]) : \mathbb{IR}^{n_x} \rightarrow \mathbb{IB}$ tal que para qualquer $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$,

$$\begin{aligned} [t]([\mathbf{x}]) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \forall x \in [\mathbf{x}], \;\; t(\mathbf{x}) = 1, \\ [t]([\mathbf{x}]) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \forall x \in [\mathbf{x}], \;\; t(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned}$$

O teste de inclusão $[t]$ é *estreito* se $[t](\mathbf{x}) \neq [0,1]$ para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$, e *mínimo* se

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x}, \;\; [t]([\mathbf{x}]) = \{t(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]\} \tag{2.62}$$

Um teste de inclusão mínimo é necessariamente estreito. O Exem. 7 a seguir apresenta uma função para teste de inclusão.

Exemplo 7 (Teste de inclusão) *Considere o teste* $t(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$, $0.5 \leq {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 1$. *Um teste de inclusão* $[t]([\mathbf{x}])$ *para este problema pode ser escrito como*

$$[t]([\mathbf{x}]) : \begin{cases} 1, & \textit{se } [x_1]^2 + [x_2]^2 \subseteq [0.5, 1]; \\ 0, & \textit{se } ([x_1]^2 + [x_2]^2 \cap [0.5, 1]) = \emptyset; \\ [0,1], & \textit{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.63}$$

Um teste de inclusão pode ser formado pela composição de vários outros testes de inclusão utilizando-se de operadores booleanos para efetuar a integração.

2.3.11 Subpavimentos

Substituir uma função $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$ por uma correspondente função de inclusão $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ facilita a realização de cálculos sobre ela, mas perde-se precisão devido à porção extra de espaço não vinculada à função, que surge da computação de intervalos. Este problema pode ser amenizado se os argumentos intervalares forem decompostos em caixas menores. Jaulin *et al.* [63] definem a caixa inicial $[\mathbf{x}]$ como *pavimento* e caixas que surgem da decomposição de *subpavimentos* $[\mathbf{x}]_1$ e $[\mathbf{x}]_2$. O método utilizado para dividir as caixas é a

bissecção. Neste trabalho, a bisseção é realizada conforme (2.48) e (2.49) produzindo duas caixas simétricas e conseqüentemente com mesmo volume, por isso os subpavimentos são ditos *regulares*.

Os métodos que empregam subpavimentos executam bissecções continuamente até que algum critério de parada seja satisfeito. Ao longo das etapas, os subpavimentos são convenientemente armazenados e organizados em estruturas de listas encadeadas do tipo *filas* FIFO (first in first out) e *pilhas* LIFO (last in first out). Os métodos desenvolvidos aqui fazem uso destas listas e por isso uma pequena revisão das operações em uma FIFO e em uma LIFO são apresentadas no Exem. 8 e no Exem. 9.

Exemplo 8 (Operações em fila FIFO) *Considere a fila* $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ *de parâmetros* $[\mathbf{x}]$ *e o banco de dados com as caixas* $[\mathbf{x}]_1$ *e* $[\mathbf{x}]_2$.

1	*inicializar* $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ *com* $\emptyset$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]} = \emptyset$
2	*insira* $[\mathbf{x}]_1$ *em* $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]} = \{[\mathbf{x}]_1\}$
3	*insira* $[\mathbf{x}]_2$ *em* $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]} = \{[\mathbf{x}]_1, [\mathbf{x}]_2\}$
4	*retire elemento de* $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]} = \{[\mathbf{x}]_2\}$

Exemplo 9 (Operações em pilha LIFO) *Considere a pilha* $\mathbf{S}_{[\mathbf{x}]}$ *de parâmetros* $[\mathbf{x}]$ *e o banco de dados com as caixas* $[\mathbf{x}]_1$ *e* $[\mathbf{x}]_2$.

1	*inicializar* $\mathbf{S}_{[\mathbf{x}]}$ *com* $\emptyset$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{S}_{[\mathbf{x}]} = \emptyset$
2	*empilhe* $[\mathbf{x}]_1$ *em* $\mathbf{S}_{[\mathbf{x}]}$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{S}_{[\mathbf{x}]} = \{[\mathbf{x}]_1\}$
3	*empilhe* $[\mathbf{x}]_2$ *em* $\mathbf{S}_{[\mathbf{x}]}$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{S}_{[\mathbf{x}]} = \{[\mathbf{x}]_1, [\mathbf{x}]_2\}$
4	*desempilhe de* $\mathbf{S}_{[\mathbf{x}]}$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{S}_{[\mathbf{x}]} = \{[\mathbf{x}]_1\}$

A utilização de listas ou pilhas para armazenar os subpavimentos regulares traz vantagens no controle e na organização dos elementos pertencentes a elas. Para manter a regularidade dos subpavimentos, o método intervalar deve garantir que todas as caixas numa dada iteração passem pelo mesmo número de bissecções n_{bis}. Uma *rodada de bissecção* r_{bis} se completa quando todos os elementos da estrutura de dados sofrem uma bissecção e o resultado sempre será composto por caixas simétricas com metade do volume da das caixas da rodada anterior. Ao final de r_{bis} rodadas de bissecção ter-se-á $2^{r_{bis}}$ subpavimentos, se não houverem exclusões.

2.3.12 SIVIA

O algoritmo SIVIA (Set Inversion Via Interval Analysis) [63] (pg 56) é método que classifica subpavimentos quanto a pertinência ou não em funções de inclusão $[\mathbf{f}]$. Em poucas palavras, SIVIA busca pelo domínio, dada a

imagem da função $[\mathbf{y}]$. SIVIA tem como entrada o espaço de busca $[\mathbf{x}]$, o intervalo-imagem $[\mathbf{y}]$ que deseja encontrar o domínio, e o parâmetro de precisão ε para limitar a discretização dos subpavimentos de $[\mathbf{x}]$. Com relação ao processo, SIVIA bissecta $[\mathbf{x}]$ até classificar todos os seus subpavimentos. Usualmente, SIVIA produz como resultado três listas encadeadas: a) uma lista contendo as *caixas solução* $[\mathbf{x}]_\mathbf{s}$ que satisfazem $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]_\mathbf{s}) \subseteq [\mathbf{y}]$; b) uma lista formada pelas *caixas não-solução* $[\mathbf{x}]_\mathbf{n}$, tais que $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]_\mathbf{n}) \cap [\mathbf{y}] = \emptyset$; e c) uma outra lista constituída pelas *caixas de fronteira* $[\mathbf{x}]_f$ que não foram classificadas quanto ao critério (a) e nem quanto ao critério (b). SIVIA foi amplamente utilizado neste trabalho para eliminar porções não viáveis do espaço de busca, usando nestes casos, funções de inclusão para tratar as restrições do problema.

2.3.13 Inequações Intervalares

Após abordar vários aspectos da matemática para intervalos importantes para o tratamento de funções objetivo e de restrição nos algoritmos de otimização intervalares, resta apresentar, mesmo que sucintamente, as *inequações intervalares*.

Uma inequação que contenha variáveis e/ou coeficientes intervalares é denominada de inequação intervalar. Por exemplo, considere o parâmetro $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$, uma função $g([\mathbf{x}]) : \mathbb{IR}^{n_x} \rightarrow \mathbb{IR}$ e o intervalo $[y] \in \mathbb{IR}$. Uma inequação intervalar pode ter a forma

$$g([\mathbf{x}]) \leq [y]. \tag{2.64}$$

O conjunto solução para a inequação (2.64) pode ser dado por

$$[\mathbf{X}]^* = \{[\mathbf{x}]^* \in \mathbb{IR}^{n_x} \mid \overline{g}([\mathbf{x}]^*) \leq \underline{y}\}. \tag{2.65}$$

Claramente, $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]^*$ é a solução real de (2.64). Agora considere um sistema de n_g inequações intervalares formado pela composição de inequações $g_i([\mathbf{x}]) \leq [y]_i$, $i = \{1, \ldots, n_g\}$. O conjunto solução pode ser reescrito como

$$[\mathbf{X}]^* = \bigcap_{i=\{1,\ldots,n_g\}} \{[\mathbf{x}]^* \in \mathbb{IR}^{n_x} \mid \overline{g}_i([\mathbf{x}]^*) \leq \underline{y}_i\}. \tag{2.66}$$

Como exemplo de aplicação, as inequações intervalares podem ser utilizadas no auxílio à resolução de sistemas de equações intervalares. Veja o Exem.10. A caracterização de um sistema de equações intervalares é intuitiva e por isso a definição formal não será realizada. A Fig. 2.7 apresenta os intervalos solução.

Exemplo 10 (Sistema de equações intervalares) *Considere o sistema proposto por Hansen e Walster [50], pp 87:*

$$\begin{cases} [2,3] * [x_1] + [0,1] * [x_2] & = [0,120] \\ [1,2] * [x_1] + [2,3] * [x_2] & = [60,240] \end{cases}$$

Para resolver este problema é necessário analisar separadamente cada quadrante. Se por exemplo $[\mathbf{x}]$ *estiver no primeiro quadrante, os limites inferiores de* $[x_1]$ *e* $[x_2]$ *são maiores iguais a* 0 *e portanto o sistema pode ser reescrito como:*

$$\begin{cases} [\ 2 * [x_1] & , 3 * [x_1] + [x_2]\ ] & = [0,120] \\ [\ [x_1] + 2 * [x_2] & , [x_1] + 3 * [x_2]\ ] & = [60,240] \end{cases}$$

Os valores dos limites inferiores do lado esquerdo do sistema não podem ultrapassar os limites superiores do lado direito. Por outro lado, os limites superiores do lado esquerdo não podem ser menores que os limites inferiores do lado direito. Matematicamente:

$$\begin{cases} 2 * [x_1] \leq 120 & 3 * [x_1] + [x_2] \geq 0 \\ [x_1] + 2 * [x_2] \leq 240 & [x_1] + 3 * [x_2]] \geq 60 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações estabelece-se os limites para $[x_1] = [-120, 90]$ *e* $[x_2] = [-60, 240]$. *Observa-se que, se os intervalos solução forem inseridos nas equações, a resposta é mais larga que o lado direito do sistema.*

Definições e métodos para resolver equações intervalares podem ser encontrados em Vaccaro [118]. Adicionalmente, os interessados em sistemas de equações, podem ser suportados pelo livro de Hansen e Walster [50].

2.4 Otimização Multi-objetivo Intervalar

Dentre os primeiros indícios da otimização utilizando intervalos destaca-se um relatório técnico da Universidade de Stanford em 1962 descrito por Moore. Neste estudo, os intervalos eram reduzidos conforme a monotonicidade das funções intervalares e quando eram satisfeitas algumas condições para aplicação do método de otimização de Newton. Além disso a subdivisão de intervalos já estava prevista. Mais tarde, o conteúdo deste relatório foi inserido no livro [85], também de Moore em 1966, considerado por muitos autores como a primeira referência de Análise Intervalar. In 1974, Skelboe [105] desenvolveu um método para computar as formulações propostas por Moore e deixar a subdivisão de intervalos mais rápida. Atualmente, este método é conhecido como o algoritmo de Moore-Skelboe. Moore [86], influenciado pelo trabalho de Skelboe e pela versão do método de Newton

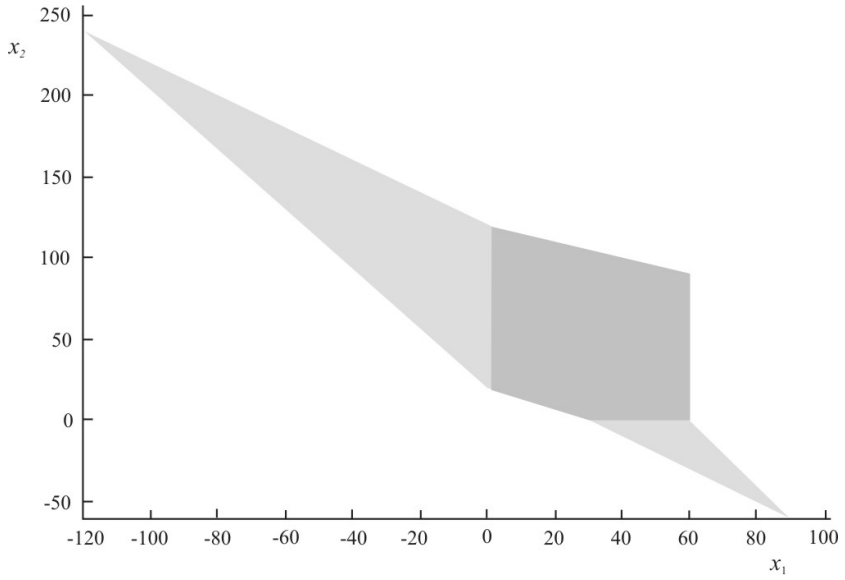


Fig. 2.7: Soluções de equações intervalares com duas equações e duas variáveis. A parte acinzentada mais escura representa o intervalo correspondente à análise do primeiro quadrante. A parte em destaque restante corresponde ao resultado completo do sistema.

elaborada Krawczyk desenvolveu um algoritmo para otimização global. O método de Krawczyk e outras variantes do método de Newton intervalar podem ser encontradas em Alefeld [1]. No entanto, o emprego da terminologia *otimização global* utilizando-se de algoritmos intervalares foi primeiramente realizada por Hansen em [49], por Skelboe [106] e por Ichida e Fujii [60], sendo todos os trabalhos no ano de 1979.

Mesmo com início da década de 1960, a otimização intervalar foi abordada em relativamente poucos trabalhos quando se compara com número de publicações com outras classes de métodos, como a classe dos métodos evolucionários. Os motivos da não preferência pelos métodos intervalares normalmente envolvem questões de custo computacional, mesmo tendo conhecimento que a garantia de convergência para a região de otimalidade pode compensar esse suposto esforço. Hansen e Walster [50] defendem o uso dos métodos intervalares e são referência quando o assunto é otimização intervalar. Os métodos intervalares aplicados à otimização tem usualmente a mesma filosofia de busca: eliminar regiões onde seguramente a solução ou o conjunto solução não está. Assim, as regiões restantes certamente contém o(s) ótimo(s) do problema. Por outro lado, os algoritmos intervalares também podem ser estendidos de métodos de otimização que utilizam variáveis, constantes e funções definidas em $\mathbb{R}$. Nestes casos, os algoritmos equivalentes

podem ser obtidos através da substituição dos termos $\mathbb{R}$ por intervalos $\mathbb{IR}$ que os contém e da adequação de métodos e das operações aritméticas para intervalos.

Ichida e Fujii [61], em 1990, também estiveram entre os primeiros pesquisadores a utilizar-se de métodos intervalares para resolver problemas multi-objetivos. Neste estudo, as relações clássicas de dominância foram contextualizadas para realizar comparações entre intervalos; intervalos dominados significam ausência de solução e permissão para descartá-lo. Comparações desta natureza são freqüentemente encontradas nos algoritmos intervalares multi-objetivo atuais. No entanto, a comparação e posteriormente escolha entre dois intervalos depende da opinião do projetista. Por exemplo, um projetista pode ser considerado "otimista" quando ele declara preferência a um intervalo segundo uma dada vantagem posicional entre o intervalo preferencial e o outro intervalo. Por outro lado, um projetista é classificado como "pessimista" quando a preferência por intervalo a outro é clara posicionalmente; todos os pontos contidos no intervalo preferido dominam o todos os pontos contidos no outro intervalo. Os pontos de vista otimista e pessimista são claramente explicados por Mahato e Bhunia [78]. A Fig.2.8 ilustra uma configuração onde a estratégia pessimista resulta em menor exclusão de intervalos. Na figura, assuma que $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$ represente qualquer uma das

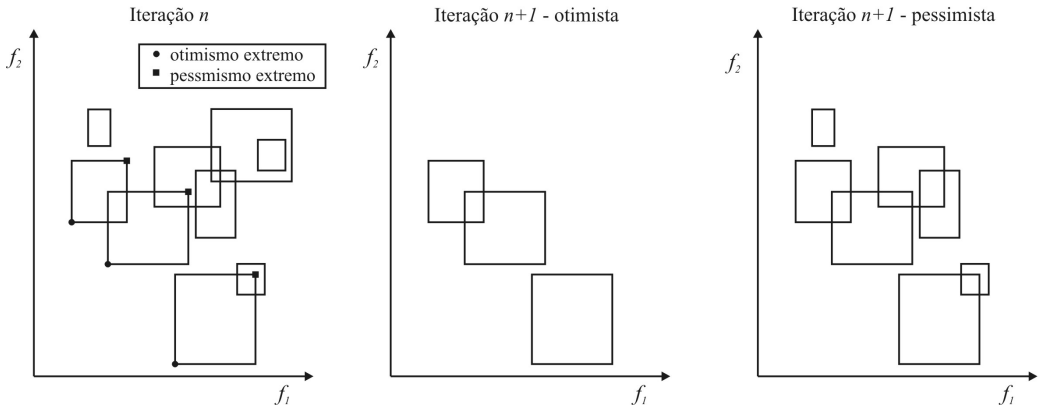


Fig. 2.8: O gráfico à esquerda representa a iteração n onde 9 intervalos devem ser comparados para compor a iteração $n+1$. A fronteira de Pareto deveria ser formada pelos pontos "•", caso fosse considerado o otimismo extremo, ou pelos pontos "■ ", no caso de pessimismo extremo. Os gráficos no centro e à direita mostram os intervalos não dominados segundo as visões otimista e pessimista respectivamente.

caixas. Definiu-se por "otimismo extremo" utilizar como referência para dominância o ponto $\underline{\mathbf{x}}$, e por "pessimismo extremo" o ponto $\overline{\mathbf{x}}$. Otimismo e/ou

pessimismo não extremos definem usualmente valores estimados da solução como os pontos de referência, como por exemplo o centro de cada caixa. Existem outras formas de se comparar intervalos. Dentre os trabalhos que discutem a comparação de intervalos podem ser citados Casado *et al.* [16], Csallener *et al.*[23] e Sengupta e Pal [103]. Ainda pela Fig.2.8, nota-se que a estratégia pessimista é conservadora. Como conseqüência, há garantia de encontrar todas as soluções do problema.

Ichida e Fujii [61] desenvolveram versões intervalares para os métodos multi-objetivo *soma ponderada* e *método* min max. O uso de derivadas foi empregado para direcionar a busca. Ruetsch [98] propôs um algoritmo híbrido onde a busca é global mas guiado por direções apontadas pelo gradiente. Os testes foram realizados utilizando-se de funções objetivo convexas, não convexas e com fronteira de Pareto multi-modal. Barichard e Hao [6] desenvolveram um algoritmo multi-objetivo intervalar baseado em populações. Diferentemente dos outros algoritmos, a bissecção ocorre no espaço dos objetivos. Como conseqüência, as bissecções causam redundâncias no espaço de busca que são eliminadas por técnicas ICP (Interval Constraint Propagation), consulte Benhamou e Older [10] e Jaulin [62] para maiores informações sobre técnicas ICP.

2.5 Considerações Finais

Os problemas de otimização reais são, em sua maioria, multi-objetivo. E, a existência de critérios conflitantes motiva aos responsáveis pelo sistema de otimização indicar suas preferências. Os métodos multi-objetivo citados foram classificados segundo a ordem de se articular as preferências. No entanto, outras classificações são possíveis, com por exemplo os métodos podem depender ou não de cálculo de derivadas e ainda, os métodos pode ser determinísticos ou estocásticos. O fato é que não existe nenhum algoritmo que seja declarado como melhor. De maneira geral, os problemas de otimização possuem suas particularidades, as quais definem os algoritmos a serem utilizados. Neste trabalho, a otimização multi-objetivo apresentada até agora sofre mudanças com a inserção do parâmetro de incerteza. Logo, a definição do problema multi-objetivo é alterada para a nova realidade, a otimização robusta multi-objetivo.

Em muitos casos, os algoritmos evolucionários mantém uma estrutura básica de funcionamento, diferenciando-se uns dos outros por detalhes de implementação nos métodos evolucionários como os de seleção e técnica de nicho.

A representação de um parâmetro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ por seu correspondente in-

tervalo $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$ traz mudanças profundas nos métodos empregados para tratamento do referido parâmetro. Por isso, julgou-se necessário realizar a apresentação de definições básicas sobre alguns aspectos da álgebra intervalar como operações aritméticas, funções e inequações que contemplem o tipo de dado intervalar. Importante registrar que a álgebra intervalar é usualmente classificada como conservativa ou pessimista, propagando todas as instâncias dos intervalos que participam do processo. Exatamente por esse motivo escolheu-se os métodos intervalares para suportar a construção de algoritmos para otimização robusta: a propagação da incerteza deve ser realizada computada em problemas onde a resposta robusta é única realmente desejada, observando é claro a precisão oferecida pelos intervalos solução.

Considerando que os métodos intervalares podem substituir métodos pontuais em diversos problemas de engenharia e ainda proporcionar garantia de envolver a solução do problema, surge a questão: Porque eles não têm sido freqüentemente utilizados? Dentre as respostas, o ponto mais levantado está relacionado ao tempo computacional. Realmente, em grande parte dos problemas a aritmética real é muito mais rápida e precisa que a intervalar. No entanto, há situações onde o tempo computacional é equivalente e, em outros momentos, até mesmo mais rápida. Como a velocidade dos processadores está cada vez maior e com a construção de compiladores próprios para resolver problemas via Análise Intervalar, provavelmente os algoritmos apresentados neste capítulo tenham mais uso.

3. ALGORITMOS INTERVALARES E EVOLUCIONÁRIO-INTERVALAR PARA OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTI-OBJETIVO

O termo "robusto" tem sido empregado em diferentes contextos. Por exemplo, Kitano [71] define robustez como a manutenção de específicas funcionalidades de um sistema contra perturbações do ambiente. Em engenharia de software, De Vale e Koopman [35] usaram robustez como sinônimo de tolerância a erros em software. Para Du and Chen [38], em engenharia de projeto, o vocábulo robustez está ligado à escolha do melhor modelo que relaciona compromissos com atributos tipo média e a variância, por exemplo. Nas aplicações em engenharia, robustez significa confiabilidade do sistema quando, eventualmente, falhas ocorrem ou na presença de incertezas. Mesmo quando o significado muda, intuitivamente, a palavra robustez faz lembrar características como força, resistência, flexibilidade e adaptabilidade.

No contexto de otimização, Parkinson *et al.* [93] apresentaram uma metodologia robusta baseada no *pior caso de projeto*. Similarmente, Kouvelis e Yu [75] definiram o problema da otimização robusta como a minimização do máximo desvio de uma solução candidata frente às incertezas aos quais o sistema está sujeito. Outras definições de robustez categorizam as soluções robustas. Neste sentido, Roy [96] definiram *análise de robustez* como o processo de encontrar *conclusões robustas* que podem ser *perfeitamente robustas*, *aproximadamente robustas* e *pseudo-robustas*. Em [36], Dias and Clímaco classificaram as conclusões robustas em *robusto absoluto*, *robusto binário relativo* e *robusto unário relativo*. Classificações como as feitas acima são úteis principalmente quando as incertezas são difíceis de computar e/ou quando não é possível predizer aproximadamente sua intensidade. Isto motivou vários pesquisadores a concentrar sua atenção em métodos probabilísticos. No ponto de vista deste trabalho com relação à otimização robusta, as soluções robustas são aquelas que tem a melhor desempenho para o pior caso da interferência de incerteza. Desse modo, observando dado grau precisão, uma solução é declarada robusta ou não.

Na Seção 2.1, a otimização multi-objetivo apresenta-se como uma área de pesquisa madura, onde diversos métodos de otimização estão disponíveis.

Por outro lado, o modelo de otimização robusta multi-objetivo tem um longo caminho pela frente. São várias as questões a considerar para o desenvolvimento dos algoritmos. Primeiramente, a filosofia robusta a ser adotada. Por exemplo, Calafiore e Campi [14] compararam duas filosofias: a) o *pior caso de projeto*, onde a influência das incertezas é maximizada; e b) a *aproximação probabilística*, onde o termo robusto é definido por um número fixo de amostras. Similarmente, Soares *et al.* apresentaram uma aproximação probabilística para o pior caso de projeto e utilizaram o modelo para otimizar um equipamento SMES (Superconducting Magnetic Energy Storage System). Em segundo lugar, a natureza das incertezas e a maneira de inseri-las no modelo matemático também devem ser levadas em consideração no modelo robusto. Para Beyer e Sendhoff [12], as incertezas estão nas condições operacionais, no espaço dos parâmetros, na medição da saída do sistema e na construção do modelo. Quanto a inserção nos modelos robustos, Jin e Branke [65] apresentam expressões para funções objetivos que incluem ruído, erros por aproximações devido arredondamento, erros na medição e as incertezas em sistemas dinâmicos. Finalmente, Beyer e Sendhoff [12] apresenta três caminhos diferentes para modelar incertezas: a) deterministicamente; b) probabilisticamente; e c) possibilisticamente. Claramente, a otimização robusta pertence a um grupo diferente da otimização tradicional. No entanto, alguns trabalhos trataram os problemas de otimização robusta com métodos que são extensões de versões não robustas de algoritmos evolucionários, determinísticos e híbridos, por exemplo Deb e Gupta [33] e Soares *et al.* [108]. Nesta tese, decidiu-se por desenvolver métodos construídos especificamente para otimização multi-objetivo robusta, segundo um modelo min max, onde as incertezas ocorrem em qualquer parte do modelo robusto, sendo a computação de incertezas realizada utilizando-se de técnicas intervalares.

3.1 Breve Histórico da Otimização Robusta

Entre os primeiros trabalhos onde se reconhecem os indícios de busca de robustez citam-se Fisher [41] em 1951 que desenvolveu um experimento estatístico para melhorar a produção agrícola. Em outro estudo, Dantzig [26] em 1955 formulou problemas onde as incertezas do sistema dependem dos valores de demanda obtidos em etapa inicial do processo de otimização. Em 1959, Charnes e Cooper [18] apresentaram o modelo probabilístico para otimização robusta denominado *Chance-constrained programming*. No entanto, muitos autores convergem em indicar que a teoria da otimização robusta iniciou com Taguchi, também no final dos anos 50, cujo trabalho teve como foco o desenvolvimento de produtos de alta qualidade mesmo considerando a pos-

sível influência de fontes de ruído. Taguchi [116] apresentou uma metodologia em três estágios: a) projeto de sistema; b) projeto de parâmetro; e c) projeto de tolerância. Sucintamente, os requisitos de qualidade são definidos em (a), segundo as tecnologias vigentes com comprovada maturidade industrial, em um formato de uma *função de perda de qualidade*. Em (b), o objetivo é estabelecer níveis de otimalidade dos parâmetros de projeto independente do ambiente em que está imerso ou das condições de uso. Em outras palavras, os parâmetros devem ser "robustos" aos fatores de ruído. Em (c), são definidas estratégias para reduzir a variação de desempenho ou aumentar a tolerância do produto quando este estiver submetido às possíveis fontes de incerteza. Existem diversos trabalhos que utilizaram a metodologia robusta de Taguchi em diferentes áreas como economia, eletrônica e na indústria automotiva, por exemplo.

Os conceitos definidos por Taguchi relativos à interferência de alguma forma de ruído na desempenho dos parâmetros de projeto influenciaram o desenvolvimento da otimização robusta atual. Diferentemente de outros pesquisadores, Taguchi tratou ruído como como um parâmetro à parte. Ben-Tal e Nemirovski também simulou a ação das incertezas como um parâmetro independente, nos seus trabalhos sobre otimização convexa robusta [7] e [8]. Em sistemas dinâmicos, El Ghaoui *et al.* [40] e El Ghaoui e Calafiori [39] estiveram entre os precursores. Em outra direção, Kouvelis e Yu [75] e Bertsimas e Sim [11] estenderam a metodologia robusta para sistemas discretos. Técnicas de análise de sensibilidade tem sido empregadas após procedimentos tradicionais de otimização para simular o ambiente de incertezas e encontrar soluções robustas. Como exemplos Mareschal [79] e [36].

3.2 Conceitos e Notações

3.2.1 Comparação de vetores reais e intervalares

As metodologias multi-objetivo freqüentemente definem relações de dominância baseadas em avaliações de funções objetivo para comparar, classificar, selecionar e rejeitar soluções candidatas em seus procedimentos. Em otimização robusta, realizar as tarefas acima torna-se mais complicado pois o valor da função objetivo varia dependendo da intensidade das incertezas. Por isso, para afirmar que uma solução domina outra, é necessário computar todas instâncias das funções objetivo sobre as soluções que se deseje confrontar. Decidiu-se neste trabalho, substituir as relações de dominância por operadores descritos pelas definições a seguir.

Definição 16 *Considere* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_n}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_n}$, $[\mathbf{t}] \in \mathbb{IR}^{n_n}$ *e* $[\mathbf{z}] \in \mathbb{IR}^{n_n}$. *O operador de comparação* $\preceq$ *é redefinido como segue*

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \leq \mathbf{v}, \ \ \mathbf{u} \neq \mathbf{v}; \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u} \preceq [\mathbf{t}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \preceq \underline{\mathbf{t}}; \tag{3.2}$$

$$[\mathbf{z}] \preceq [\mathbf{t}] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{z}} \preceq \underline{\mathbf{t}}. \tag{3.3}$$

O operador de comparação para o caso estrito $\prec$ *é expressado como*

$$\mathbf{u} \prec \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} < \mathbf{v}. \tag{3.4}$$

Por analogia estende-se os operadores $\succeq$ *e* $\succ$.

A expressão $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ deve ser lida como $\mathbf{u}$ é *menor que* $\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v}$ é *maior que* $\mathbf{u}$, adicionando-se *estritamente* quando for o caso. Similar leitura também se aplica às demais variações destes operadores.

Empregando os operadores de comparação acima, os pontos internos a conjuntos reais podem ser classificados nos subconjuntos dos *maiores vetores* e *menores vetores* do conjunto a que participam. Essa distinção é importante nos métodos de otimização multi-objetivo. As definições formais destes conjuntos são apresentadas a seguir.

Definição 17 *Considere o conjunto de vetores* $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^{n_n}$. *Os menores vetores de* $\mathbf{U}$ *definem o conjunto* $\Upsilon_{\preceq}$ *descrito como*

$$\Upsilon_{\preceq}(\mathbf{U}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{U} \mid \nexists \mathbf{u}' \in \mathbf{U}, \mathbf{u}' \preceq \mathbf{u}\}. \tag{3.5}$$

Analogamente, os maiores vetores de $\mathbf{U}$ *formam o conjunto* $\Upsilon_{\succeq}$ *expresso por*

$$\Upsilon_{\succeq}(\mathbf{U}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{U} \mid \nexists \mathbf{u}' \in \mathbf{U}, \mathbf{u} \preceq \mathbf{u}'\}. \tag{3.6}$$

Definição 18 *Considere o conjunto de vetores* $\mathbf{U} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{z}\} \in \mathbb{R}^{n_n}$. *O ponto ideal para maximização* $\mathbf{u}^{\max} \in \mathbb{R}^{n_n}$ *do conjunto* $\mathbf{U}$ *é*

$$u_i^{\max}(\mathbf{U}) = \max_i\{x_i, y_i, \ldots, z_i\}, \ \ i = 1, \ldots, n_n. \tag{3.7}$$

Teorema 1 *Considere* $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{R}^{n_f}$ *e* $\mathbf{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_f} \mid \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$, $\mathbf{U} \neq \emptyset$. *Então,*

$$\Upsilon_{\succeq}(\mathbf{U}) \neq \{\mathbf{u}^{\max}(\mathbf{U})\} \Rightarrow \mathbf{u}^{\max}(\mathbf{U}) \notin \mathbf{U}. \tag{3.8}$$

Prova: Assuma $\mathbf{u}^{\max}(\mathbf{U}) \in \Upsilon_{\succeq}(\mathbf{U})$. Usando (3.6) e (3.7) conclui-se que $\Upsilon_{\succeq}(\mathbf{U})$ é o conjunto unitário $\Upsilon_{\succeq}(\mathbf{U}) = \{\mathbf{u}^{\max}(\mathbf{U})\}$. Por definição, usando apenas (3.7) conclui-se que $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}$, $\mathbf{u}^{\max}(\mathbf{U}) \succeq \mathbf{u}$. Logo, se $\mathbf{u}^{\max}(\mathbf{U}) \notin \Upsilon_{\succeq}(\mathbf{U})$ então $\mathbf{u}^{\max}(\mathbf{U}) \notin \mathbf{U}$.

Observação: O Teo.1 traz conseqüências diretas na formulação de otimização robusta e nos algoritmos apresentados nas próximas seções, pois a robustez de uma dada solução candidata é medida utilizando-se $\mathbf{u}^{\max}$, mesmo sabendo-se da possibilidade de $\mathbf{u}^{\max}$ não pertencer à imagem das funções objetivo.

3.3 Problema Multi-Objetivo Robusto

Considere as variáveis de projeto $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ e o parâmetro de incerteza $\mathbf{p} \in \mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$. Definindo-se o vetor de funções objetivo por $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_p} \mapsto \mathbb{R}^{n_f}$ e o vetor de funções de restrição por $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_p} \mapsto \mathbb{R}^{n_g}$, o problema de minimização robusta multi-objetivo pode ser escrito como

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} & \max\limits_{\mathbf{p}\in\mathbf{P}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ s.t. & \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \mathbf{0}. \end{array} \tag{3.9}$$

Definindo o espaço viável por

$$\mathbf{X}' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid \forall \mathbf{p} \in \mathbf{P}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \mathbf{0}\}, \tag{3.10}$$

resolver (3.9) consiste em encontrar o conjunto minimizadores robustos $\mathbf{X}^* \subseteq \mathbf{X}'$ para o pior caso da ação das incertezas. Formalmente,

$$\mathbf{X}^* = \{\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}' \mid \nexists \mathbf{x} \in \mathbf{X}', \max_{\mathbf{p}\in\mathbf{P}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \preceq \max_{\mathbf{p}'\in\mathbf{P}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}')\}. \tag{3.11}$$

A próxima etapa é apresentar as imagens do espaço de busca sujeito à ação das incertezas. Considere as imagens das funções $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ e $\mathbf{Y}' = \mathbf{f}(\mathbf{X}', \mathbf{P})$, sendo

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}', \mathbf{P}) = \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}', \mathbf{p}\in\mathbf{P}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}). \tag{3.12}$$

No entanto, como conseqüência do Teo.1, se para alguma solução $\mathbf{x}^*$ o processo de maximização em (3.9) resultar em $\mathbf{u}^{\max}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p})) \notin \Upsilon_{\succeq}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p})\big)$, então pode ocorrer que $\mathbf{u}^{\max}(\mathbf{f}(\mathbf{X}^*, \mathbf{p})) \notin \mathbf{Y}'$. Portanto, para representar a imagem robusta de todas as soluções $\mathbf{X}^*$ do problema (3.9) é necessário

definir um espaço que contenha $\mathbf{u}^{\max}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}))$, $\forall \mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$ e $\forall \mathbf{p} \in \mathbf{P}$. Isso é feito substituindo-se a imagem $\mathbf{f}(\mathbf{X}', \mathbf{P})$ pela caixa $[\mathbf{Y}]'$ definida como

$$\overline{[Y_i]}' = \max_{\mathbf{p}\in\mathbf{P}} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}',\ i = \{1, \ldots, n_f\}; \tag{3.13}$$

$$\underline{[Y_i]}' = \min_{\mathbf{p}\in\mathbf{P}} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}',\ i = \{1, \ldots, n_f\}. \tag{3.14}$$

Agora, seja $\mathbf{Y}^*$ representar a *fronteira Pareto robusta*; $\mathbf{Y}^+$ e $\mathbf{Y}^-$ as *porções acima* e *abaixo da fronteira robusta*, respectivamente. As imagens $\mathbf{Y}^*$, $\mathbf{Y}^+$ e $\mathbf{Y}^-$ associam-se como

$$[\mathbf{Y}]' = \mathbf{Y}^- \cup \mathbf{Y}^+, \ \ \mathbf{Y}^* \subseteq \mathbf{Y}^+, \tag{3.15}$$

sendo:

$$\mathbf{Y}^+ = \{\mathbf{y}^+ \in [\mathbf{Y}]' \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{p} \in \mathbf{P}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \preceq \mathbf{y}^+\}; \tag{3.16}$$

$$\mathbf{Y}^- = \{\mathbf{y}^- \in [\mathbf{Y}]' \mid \mathbf{y} \in [\mathbf{Y}]', \mathbf{y} \notin \mathbf{Y}^+\}; \tag{3.17}$$

$$\mathbf{Y}^* = \{\mathbf{y}^* \in [\mathbf{Y}]' \mid \nexists \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^+, \mathbf{y} \preceq \mathbf{y}^*\}. \tag{3.18}$$

Na Fig. 3.1, o lado direito ilustra as regiões de $\mathbf{Y}^*$, $\mathbf{Y}^+$ e $\mathbf{Y}^-$; o lado esquerdo, apresenta o espaço de busca e o espaço das incertezas. A título de exemplo, o par $(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{p}_0^*)$ estabelece relação entre os espaços de busca e de incertezas com o espaço dos objetivos. Na seqüência, são apresentados dois exemplos.

Exemplo 11 ***Problema com soluções robustas pertencentes à imagem*** $\mathbf{Y}'$.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in[-\mathbf{2},\mathbf{2}]} \max_{\mathbf{p}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \quad & f_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = x_1^2 + x_2^2 + p_1, \\ & f_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + p_2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Problema irrestrito, logo $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$. *O espaço dos objetivos está plotado na Fig. 3.2(a). Os minimizadores robustos estão localizados em* $x_1 \in [0, 1]$ *e* $x_2 = 0$. *O pior caso acontece quando* $\mathbf{p} = \mathbf{1}$. *Este exemplo apresenta as regiões robustas claramente separadas.*

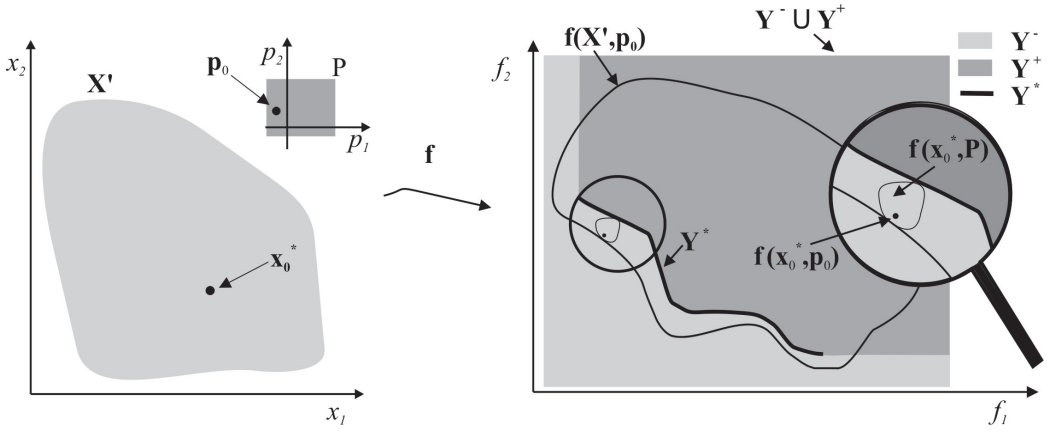
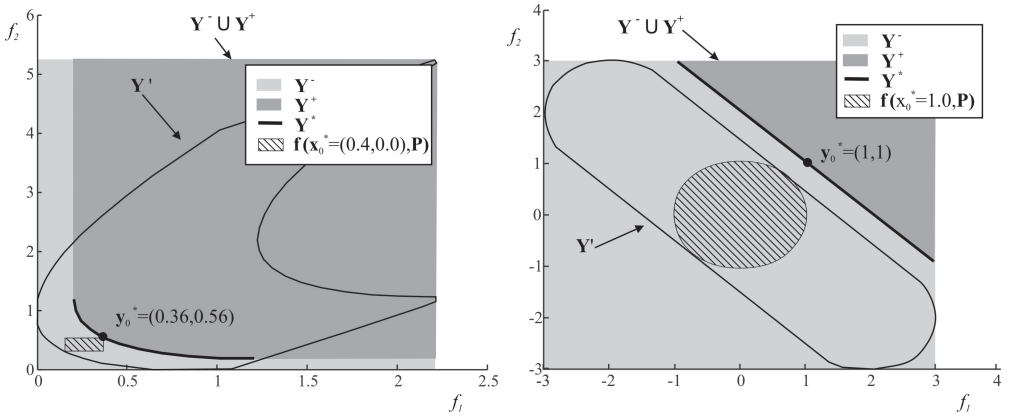


Fig. 3.1: Os espaços de busca, de incerteza e dos objetivos no problema de otimização multi-objetivo robusto.



(a) Problema onde $\mathbf{Y}^* \subset \mathbf{Y}'$. (b) Problema onde $\mathbf{Y}^* \not\subset \mathbf{Y}'$.

Fig. 3.2: Exemplos de problema multi-objetivo robusto. Observe em (b) que toda a fronteira robusta está fora da imagem das funções objetivo.

Exemplo 12 ***Problema com soluções robustas não pertencentes à imagem*** $\mathbf{Y}'$.

$$\begin{aligned} \min_{x\in[-2,2]} \max_{\|\mathbf{p}\|\leq 1} \quad & f_1(x,p_1) = -x + p_1, \\ & f_2(x,p_2) = x + p_2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Problema irrestrito, logo $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$. *O pior caso acontece quando* $\| \mathbf{p} \| = \mathbf{1}$ *para qualquer instante da variável* x. *Como mostrado na Fig. 3.2(b), a fronteira robusta* $\mathbf{Y}^* \not\subset \mathbf{Y}'$.

3.4 Algoritmo Intervalar Multi-Objetivo Robusto I

3.4.1 Preliminares

Encontrar a fronteira de Pareto robusta $\mathbf{Y}^*$ e o conjunto de minimizadores $\mathbf{X}^*$ pode ser uma tarefa dispendiosa em termos de esforço computacional e, difícil de ser concluída com êxito. Entretanto, computar precisos envelopes que contenham $\mathbf{Y}^*$ e $\mathbf{f}(\mathbf{X}^*, \mathbf{P})$ é mais fácil e considerou-se uma contribuição importante. O primeiro método robusto desta tese computa estes envelopes, e sua precisão depende diretamente da representação de $\mathbf{Y}^*$ que é descrita nas próximas definições.

Definição 19 *Considere* $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, $\mathbf{U} \subset \mathbf{Y}^-$. *Então, a representação computável de* $\mathbf{Y}^-$ *associada com* $\mathbf{U}$ *é*

$$\mathbf{K}^- = \{\mathbf{u}' \in [\mathbf{Y}]' \mid \exists \mathbf{u} \in \Upsilon_{\succeq}(\mathbf{U}), \mathbf{u}' \preceq \mathbf{u}\}. \tag{3.21}$$

Analogamente, se $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, $\mathbf{V} \subset \mathbf{Y}^+$, *então a representação computável de* $\mathbf{Y}^+$ *associada com* $\mathbf{V}$ *é*

$$\mathbf{K}^+ = \{\mathbf{v}' \in [\mathbf{Y}]' \mid \exists \mathbf{v} \in \Upsilon_{\preceq}(\mathbf{V}), \mathbf{v} \preceq \mathbf{v}'\}. \tag{3.22}$$

Definição 20 *A fronteira superior de* $\mathbf{K}^-$ *e a fronteira inferior de* $\mathbf{K}^+$ *são definidas como*

$$\partial\mathbf{K}^- = \{\mathbf{u} \in \mathbf{K}^- \mid \nexists \mathbf{u}' \in \mathbf{K}^-, \mathbf{u} \preceq \mathbf{u}'\}; \tag{3.23}$$
$$\partial\mathbf{K}^+ = \{\mathbf{v} \in \mathbf{K}^+ \mid \nexists \mathbf{v}' \in \mathbf{K}^+, \mathbf{v}' \preceq \mathbf{v}\}. \tag{3.24}$$

Definição 21 *Simbolizando* $\setminus$ *como operador complemento, as porções não computáveis diretamente de* $\mathbf{Y}^-$ *e* $\mathbf{Y}^+$ *são definidas por*

$$\Delta\mathbf{K}^- = (\mathbf{Y}^- \setminus \mathbf{K}^-) \cup \partial\mathbf{K}^-; \tag{3.25}$$
$$\Delta\mathbf{K}^+ = (\mathbf{Y}^+ \setminus \mathbf{K}^+) \cup \partial\mathbf{K}^+. \tag{3.26}$$

Teorema 2 (Envelope sobre a fronteira Pareto robusta) *Dada a precisão para computação de* $\mathbf{K}^-$ *e* $\mathbf{K}^+$, *a seguinte inclusão é sempre verdadeira*

$$\mathbf{Y}^* \subset \Delta\mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}^+. \qquad \blacksquare$$

Prova: De (3.15), $[\mathbf{Y}]' = \mathbf{Y}^- \cup \mathbf{Y}^+$. De (3.25) e (3.26), $\mathbf{Y}^- = \mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}^-$, $\mathbf{K}^- \cap \Delta\mathbf{K}^- = \partial\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{Y}^+ = \mathbf{K}^+ \cup \Delta\mathbf{K}^+$, $\mathbf{K}^+ \cap \Delta\mathbf{K}^+ = \partial\mathbf{K}^+$. Substituindo $\mathbf{Y}^-$ e $\mathbf{Y}^+$ em (3.15), resulta em

$$[\mathbf{Y}]' = \big(\mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}^-\big) \cup \big(\mathbf{K}^+ \cup \Delta\mathbf{K}^+\big).$$

Mas, $\mathbf{K}^- \cap \Delta\mathbf{K}^- = \partial\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+ \cap \Delta\mathbf{K}^+ = \partial\mathbf{K}^+$ e portanto, há ocorrências extras de $\partial\mathbf{K}^-$ e $\partial\mathbf{K}^+$ que podem ser removidas. Então,

$$\begin{aligned}[\mathbf{Y}]' &= \big((\mathbf{K}^- \setminus \partial\mathbf{K}^-) \cup \Delta\mathbf{K}^-\big) \cup \big((\mathbf{K}^+ \setminus \partial\mathbf{K}^+) \cup \Delta\mathbf{K}^+\big);\\ [\mathbf{Y}]' &= \big((\mathbf{K}^- \setminus \partial\mathbf{K}^-) \cup (\mathbf{K}^+ \setminus \partial\mathbf{K}^+)\big) \cup \big(\Delta\mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}^+\big).\end{aligned}$$

As expressões (3.18), (3.21) e (3.22) asseguram que $\mathbf{Y}^* \not\supset (\mathbf{K}^- \setminus \partial\mathbf{K}^-)$ e $\mathbf{Y}^* \not\supset (\mathbf{K}^+ \setminus \partial\mathbf{K}^+)$. Então,

$$\mathbf{Y}^* \subset \Delta\mathbf{K}, \quad \textit{sendo} \quad \Delta\mathbf{K} = \Delta\mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}^+. \qquad \blacksquare$$

De fato, (3.18) garante que $\mathbf{Y}^* \subset \Delta\mathbf{K}^+$. Mas $\Delta\mathbf{K}^+$ sozinho não pode ser diretamente envelopado. A Fig. 3.3 ilustra a representação das aproximações das regiões robustas.

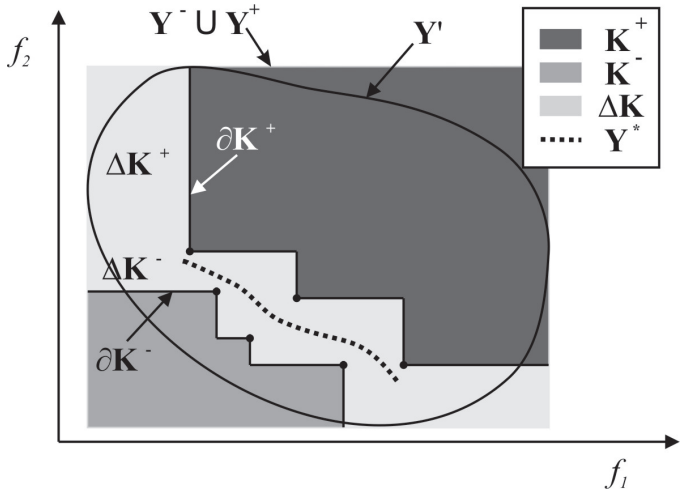


Fig. 3.3: Representação computável das regiões robustas.

Teorema 3 (Envelope sobre os minimizadores robustos) *A seguinte inclusão é sempre verdadeira*

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}^*, \mathbf{P}) \subset \mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}^+. \qquad \blacksquare$$

Prova: De (3.15), $[\mathbf{Y}]' = \mathbf{Y}^- \cup \mathbf{Y}^+$. De (3.16), $\mathbf{f}(\mathbf{X}^*, \mathbf{P}) \not\subset \mathbf{Y}^+$. Desse modo, $\mathbf{f}(\mathbf{X}^*, \mathbf{P}) \subset [\mathbf{Y}]' \setminus \mathbf{Y}^+$. Como $\mathbf{Y}^+ = \mathbf{K}^+ \cup \Delta\mathbf{K}^+$ e somente $\mathbf{K}^+$ pode ser diretamente computável, então é também verdade

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{X}^*, \mathbf{P}) &\subset [\mathbf{Y}]' \setminus \mathbf{K}^+; \\
\mathbf{f}(\mathbf{X}^*, \mathbf{P}) &\subset \mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}^+; \\
\mathbf{f}(\mathbf{X}^*, \mathbf{P}) &\subset \mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}, \ \textit{sendo} \ \Delta\mathbf{K} = \Delta\mathbf{K}^- \cup \Delta\mathbf{K}^+. \blacksquare
\end{aligned}$$

Estes dois teoremas suportam o algoritmo apresentado na próxima subseção a envelopar a fronteira de Pareto robusta, segundo dada precisão. A validação é feita no capítulo seguinte.

3.4.2 [I]RMOA I

O primeiro algoritmo para otimização robusta proposto aqui, [I]RMOA I (Interval Robust Multi-Objective Algorithm) [110], é uma técnica heurística baseada inteiramente em Análise Intervalar desenvolvida para envelopar $\mathbf{Y}^*$. Em poucas palavras, o algoritmo inicia com um conjunto de amostras uniformemente distribuídas no espaço de busca e aleatoriamente no espaço das incertezas. As soluções são avaliadas pela função $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ e seus resultados são armazenados em uma lista encadeada tipo fila. Cada elemento desta fila é testado se ele pertence à $\mathbf{K}^-$ ou $\mathbf{K}^+$. Após a classificação completa, [I]RMOA I tem informação suficiente para encontrar $\Delta\mathbf{K}$. Por exemplo, $\Delta\mathbf{K} = [\mathbf{Y}]' \setminus (\mathbf{K}^+ \cup \mathbf{K}^-)$, e conseqüentemente $\Delta\mathbf{K} \supset \mathbf{Y}^*$. Em adição, a região definida por $\mathbf{K}^-$ e $\Delta\mathbf{K}$ contém $\mathbf{f}(\mathbf{X}^*, \mathbf{P})$.

Considerando a existência de suporte computacional para a aritmética dos métodos intervalares apresentados na Seção 2.3, a implementação do [I]RMOA I foi dividida em duas partes: a) o algoritmo principal e; b) o algoritmo para as funções FPS (feasible point searcher) e CSC (computable sufficient conditions). FPS e CSC foram introduzidas por Jaulin *et al.* em [64] para dividir intervalos e resolver aplicações na área de controle. Aqui, estas funções são usadas no contexto de otimização. O pseudo código do [I]RMOA I está na Tab.3.1 e seus símbolos na Tab.3.2. Neste método, a estrutura de dados principal são filas. A precisão final do método é assegurada por dois parâmetros ε declarados na entrada. O passo 1 contém as inicializações das filas. No passo 2, o espaço de busca é amostrado pela função *grade*, que divide cada dimensão do espaço de busca em fatias de tamanho máximo $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$. Para cada amostra $\mathbf{x}$, um valor de incerteza $\mathbf{p}$ é escolhido aleatoriamente. Todos os pares $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ da função grade são avaliados pelas funções objetivo e inseridos em $\mathbf{Q}_{\mathbf{fxp}}$. O laço principal do algoritmo, entre os passos 3 e 14, se mantém ativo enquanto $\mathbf{Q}_{\mathbf{fxp}}$ for não vazio. Nos passos 4, 5 e 6

Tab. 3.1: Algoritmo [I]RMOA I.

entrada ($[\mathbf{X}]$,$[\mathbf{P}]$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$,$\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$)
saída($\mathbf{K}^-$,$\mathbf{K}^+$)

1 inicialize $\mathbf{Q_{fxp}}$, $\mathbf{Q_{K^+}}$,$\mathbf{Q_{K^-}}$ com $\emptyset$ e $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ com $[\mathbf{X}]$
2 grade($[\mathbf{X}]$, $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$,$[\mathbf{P}]$), avalie as amostras usando $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ e armazene os resultados em $\mathbf{Q_{fxp}}$
3 se $\mathbf{Q_{fxp}} = \emptyset$ então siga para 15
4 retire $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ de $\mathbf{Q_{fxp}}$
5 se existe um $\mathbf{v}$ em $\mathbf{Q_{K^+}}$ tal que $\mathbf{v} \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ então siga para 3
6 se existe um $\mathbf{u}$ em $\mathbf{Q_{K^-}}$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \preceq \mathbf{u}$ então siga para 3
7 chame FPS($[\mathbf{P}]$,$[\mathbf{X}]$,$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$,$\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$)
8 se FPS retornar $\mathbf{x}^*$
9 descarte todos $\mathbf{v}$ em $\mathbf{Q_{K^+}}$ tais que $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \preceq \mathbf{v}$
10 insira $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ em $\mathbf{Q_{K^+}}$
11 senão
12 descarte todos $\mathbf{u}$ em $\mathbf{Q_{K^-}}$ tal que $\mathbf{u} \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$
13 insira $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ em $\mathbf{Q_{K^-}}$
14 siga para 3
15 compute $\mathbf{K}^-$ usando os elementos de $\mathbf{Q_{K^-}}$ em (3.21)
16 compute $\mathbf{K}^+$ usando os elementos de $\mathbf{Q_{K^+}}$ em (3.22)
17 retorne $\mathbf{K}^-$, $\mathbf{K}^+$

os pontos são avaliados e comparados com todos os elementos em $\mathbf{Q_{K^+}}$ e/ou $\mathbf{Q_{K^-}}$. Se $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ é maior que algum ponto em $\mathbf{Q_{K^+}}$, ele certamente pertence a $\mathbf{K}^+$ e pode ser descartado. Também, se $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ é menor que algum ponto em $\mathbf{Q_{K^-}}$ ele certamente pertence a $\mathbf{K}^-$ e pode ser descartado. No início, as filas $\mathbf{Q_{K^+}}$ and $\mathbf{Q_{K^-}}$ são vazias e o algoritmo é dirigido a 7. Os procedimentos 5 e 6 evitam esforço computacional extra no passo 7, A função FPS e sua subfunção CSC dividem o espaço de busca armazenado em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ e a incerteza $[\mathbf{P}]$ para encontrar um minimizador para $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$. Se o teste retorna "$\mathbf{x}^*$", então $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ tem que ser inserido em $\mathbf{Q_{K^+}}$ (passo 10), por outro lado, FPS retorna "sem solução" e $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ tem que ser inserido em $\mathbf{Q_{K^-}}$ (passo 13). Antes da inserção, novas comparações são executadas entre $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ com sua respectiva fila para eliminar pontos redundantes (passos 9 e 12). O passo 14 marca o final da inserção de uma iteração e conduz o algoritmo para o passo 3. Depois da classificação de todo elemento em $\mathbf{Q_x}$, [I]RMOA I sai do laço principal retorna os pontos que definem $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ (passos 15 e 16). As versões

Tab. 3.2: Símbolos nos algoritmos [I]RMOA I, FPS e CSC.

Símbolos	Descrição Conteúdo	Tipo
$[\mathbf{X}]$	espaço de busca inicial	$\mathbb{IR}^{n_x}$
$[\mathbf{P}]$	espaço de incerteza inicial	$\mathbb{IR}^{n_p}$
$[\mathbf{p}]$	parâmetro de incerteza	$\mathbb{IR}^{n_p}$
$[\mathbf{x}]$	parâmetro de busca	$\mathbb{IR}^{n_x}$
$\mathbf{x}^*$	minimizador para $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$	$\mathbb{R}^{n_x}$
$\mathbf{f}$	função objetivo	$\mathbb{R}^{n_f}$
$[\mathbf{f}]$	função de inclusão para $\mathbf{f}$	$\mathbb{IR}^{n_f}$
$\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$	mínima precisão para a função grade	$\mathbb{R}$
$\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$	mínima largura para $[\mathbf{x}]$	$\mathbb{R}$
$\mathbf{Q_{fxp}}$	amostras avaliadas da função grade	Fila: $\mathbb{R}^{n_f}$
$\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$	subpavimentos do parâmetro de busca	Fila: $\mathbb{IR}^{n_x}$
$\mathbf{Q}$	cópia de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$	Fila: $\mathbb{IR}^{n_x}$
$\mathbf{Q}_{\mathbf{K}^+}$	pontos que definem $\mathbf{K}^+$	Fila: $\mathbb{R}^{n_f}$
$\mathbf{Q}_{\mathbf{K}^-}$	pontos que definem $\mathbf{K}^-$	Fila: $\mathbb{R}^{n_f}$
$\mathbf{S}_{[\mathbf{p}]}$	subpavimentos do parâmetro de incerteza	Pilha: $\mathbb{IR}^{n_p}$

originais do FPS (Tab.3.3) e do CSC (Tab.3.4) em [64] foram adaptadas para [I]RMOA I. Detalhes técnicos e provas de convergência são encontradas na referência citada. Por agora, FPS bissecta o espaço de busca e tenta encon-

Tab. 3.3: Algoritmo FPS.

entrada ($[\mathbf{P}]$,$[\mathbf{X}]$,$\mathbf{y}$,$\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$)
saída($\mathbf{x}^*$ ou "sem solução")

1 inicialize $\mathbf{Q}$ com $[\mathbf{X}]$
2 retire $[\mathbf{x}]$ de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$
3 se $w([\mathbf{x}]) \leq \varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ siga para 9
4 chame CSC($[\mathbf{x}]$,$\mathbf{y}$,$[\mathbf{P}]$,$\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$)
5 se CSC retornar $\mathbf{x}^*$ então insira $[\mathbf{x}]$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ e retorne $\mathbf{x}^*$. Fim.
6 se CSC retornar "sem solução" então siga para 8
7 bissecte $[\mathbf{x}]$ e insira as duas caixas em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$
8 se $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ é não vazio então siga para 2
9 retorne "sem solução". Fim.

trar um minimizador para $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, considerando as incertezas. Então, FPS

começa com a primeira caixa $[\mathbf{x}]$ de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ e $[\mathbf{P}]$ e chama CSC exaustivamente até CSC retornar um ponto solução "$\mathbf{x}^*$" ou "sem solução". Se CSC retornar "sem conclusão" então FPS bissecta $[\mathbf{x}]$ e o processo é repetido. A precisão deste procedimento é definida pelo usuário na escolha de $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$. Na subrotina CSC, um processo similar a FPS acontece, mas somente o parâmetro de incerteza $[\mathbf{P}]$ is bissectado. Quando CSC retorna um ponto solução "$\mathbf{x}^*$" ou "sem solução" para FPS, FPS reenvia a informação para [I]RMOA I e o laço principal recomeça.

Tab. 3.4: Algoritmo CSC.

entrada ($[\mathbf{x}]$,$\mathbf{y}$,$[\mathbf{P}]$,$\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$)
saída($\mathbf{x}^*$ ou "sem conclusão" ou "sem solução")

1 empilhe $[\mathbf{P}]$ em $\mathbf{S}_{[\mathbf{p}]}$, $prossiga \leftarrow verdadeiro$
2 desempilhe de $\mathbf{S}_{[\mathbf{p}]}$ em $[\mathbf{p}]$
3 se $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}], \mathbf{c}([\mathbf{p}])) \succeq \mathbf{y}$ então retorne "sem solução". Fim.
4 se $[\mathbf{f}](\mathbf{c}([\mathbf{x}]), [\mathbf{p}]) \preceq \mathbf{y}$ então siga para 7
5 se $w([\mathbf{p}]) < \varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ então $prossiga \leftarrow falso$ e siga para 7
6 bissecte $[\mathbf{p}]$ e empilhe em $\mathbf{S}_{[\mathbf{p}]}$ as duas caixas resultantes
7 se $\mathbf{S}_{[\mathbf{p}]}$ é não vazio então vai para 2
8 se $prossiga = verdadeiro$ então $\mathbf{x}^* \leftarrow \mathbf{c}([\mathbf{x}])$ e retorne $\mathbf{x}^*$. Fim.
9 retorne "sem conclusão". Fim.

A qualidade das funções de inclusão e o parâmetro de precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ são os responsáveis pelo resultado correto algoritmos FPS e CSC, e conseqüentemente, do [I]RMOA I. Usualmente, se as relações $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} < w([\mathbf{P}])$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} < \frac{\varepsilon_{\#}}{2}$ puderem ser asseguradas o resultado de FPS e CSC é satisfatório. A primeira condição garante bissecções no espaço de incertezas e a segunda permite caixas menores que a precisão da amostragem inicial sejam analisadas.

Se a memória de máquina for disponível, garante-se que [I]RMOA I converge (Tab.3.1) porque todos os processos são finitos. A função grade no passo 2 é um processo finito baseado na divisão do espaço de busca. O laço principal no passo 3 e seus laços internos 5, 6, 9 e 12 são baseados em filas com finitos elementos. Finalmente, os detalhes de convergência no passo 7 são discutidos pelos autores de FPS em [64].

3.5 Algoritmo Intervalar Multi-Objetivo Robusto II

A expressão formal que define o problema robusto (3.9) deve ser interpretada como a maximização da interferência das incertezas sobre as funções objetivo, seguida pela minimização destes resultados. Neste sentido, o problema multi-objetivo robusto se assemelha a resolução de dois problemas multi-objetivos. Mas existe uma particularidade à comentar: para cada ponto viável $\mathbf{x}$, usualmente a fase de maximização resulta em conjunto de pontos, sendo o ponto ideal para maximização deste conjunto considerado como a imagem robusta para $\mathbf{x}$. Assim, considerando a computação de incertezas sobre todo o espaço de busca viável, o conjunto Pareto robusto é formado pelo menores pontos ideais para maximização. O [I]RMOA II (Interval Robust Multi-Objective Algorithm II) computa os pontos ideais levando vantagens de conceitos da Análise Intervalar. O cálculo dos pontos ideais e outros detalhes que suportam o [I]RMOA II são explicados nas próximas subseções.

3.5.1 Preliminares

Tratamento de restrições: O desenvolvimento desse tópico considera que as funções de restrição são escritas no formato $\mathbf{g} \leq 0$. Sendo utilizadas, para intervalos, a notação $[\mathbf{g}] \leq 0$ ou equivalentemente $[\mathbf{g}] \subseteq [-\infty, 0]$. O [I]RMOA II exclui espaço de busca não viável empregando testes de inclusão [t] sobre o vetor de funções de restrição $[\mathbf{g}]$. Assim, considerando os parâmetros de busca e de incerteza no formato de intervalos, o teste de inclusão foi expressado como

$$[t]([\mathbf{x}]) = \begin{cases} 1, & \text{caso } [\mathbf{g}]([\mathbf{x}],[\mathbf{p}]) \subseteq [-\infty, 0], \\ 0, & \text{caso } [\mathbf{g}]([\mathbf{x}],[\mathbf{p}]) \subset [0, \infty], \quad e \\ [0,1], & \text{por outro lado.} \end{cases} \tag{3.27}$$

Assim, $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$, $\mathbf{x}$ é viável se $[t]([\mathbf{x}]) = 1$ e não viável se $[t]([\mathbf{x}]) = 0$. Por outro lado, nada se pode concluir sobre os elementos de $[\mathbf{x}]$, e ele deverá ser encaminhado a bissecção. As caixas resultantes da bissecção são também submetidas ao teste $[t]([\mathbf{x}])$. Um parâmetro de esforço $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$, por exemplo $w([\mathbf{x}]) < \varepsilon_{[\mathbf{x}]}$, marca o fim das bissecções e o tomador de decisão deve decidir sobre o futuro de todas as caixas $[\mathbf{x}]$ tais que $w([\mathbf{x}]) < \varepsilon_{[\mathbf{x}]}$. Para o [I]RMOA II, optou-se pela exclusão de todas as soluções cuja condição acima não tenha sido satisfeita. Observe que o procedimento acima foi baseado no método SIVIA (veja 2.3.12). Para exemplificar o tratamento de restrições, considere o espaço de busca $[\mathbf{X}] = [-4, 4] \times [-3, 3]$ e o seguinte conjunto de

funções de inclusão de restrições

$$\begin{array}{l}[g_1] : -[x_1]^2 - [x_2]^2 + 1 \subseteq [-\infty, 0] \\ [g_2] : [x_2] - [x_1] - 3 \subseteq [-\infty, 0] \\ [g_3] : -[x_2] + [x_1] - 3 \subseteq [-\infty, 0] \\ [g_4] : [x_2] + [x_1] - 3 \subseteq [-\infty, 0] \\ [g_5] : -[x_2] - [x_1] - 3 \subseteq [-\infty, 0]. \end{array} \tag{3.28}$$

O parâmetro de incerteza foi omitido por motivos de simplicidade. O espaço viável $[\mathbf{X}]'$ é apresentado na Fig.3.28.

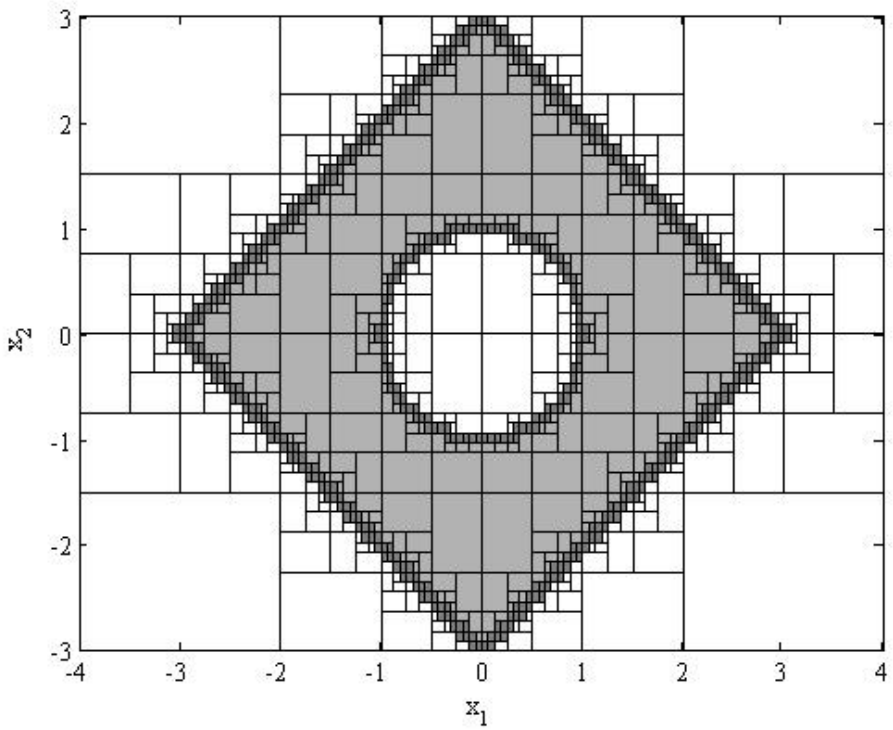


Fig. 3.4: O cinza claro representa o conjunto viável; o cinza escuro os intervalos de fronteira; e em branco os intervalos não viáveis. A figura foi obtida usando-se o algoritmo SIVIA (veja 2.3.12), com parâmetro de precisão $\varepsilon = 0.05$, para resolver as restrições propostas.

Processo de maximização e ponto ideal: O algoritmo [I]RMOA II maximiza a ação das incertezas sobre os pontos viáveis com a finalidade de descobrir o ponto ideal de maximização. O processo para computar o ponto

ideal inicia com a divisão do domínio das incertezas $\mathbf{P}$, convenientemente descrito na forma intervalar por $[\mathbf{P}]$, em n_{sp} subpavimentos sem sobreposição $[\mathbf{p}]_i$,

$$[\mathbf{P}] = \bigcup_{i=1,\ldots,n_{sp}} [\mathbf{p}]_i. \tag{3.29}$$

Após a subdivisão em subpavimentos, assuma que todos os $[\mathbf{p}]_i$ sejam armazenados na fila $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$, que $\mathbf{x}$ seja uma variável de busca viável e que $[\mathbf{f}](\mathbf{x}, [\mathbf{P}])$ represente sua função de inclusão. Assim, considerando a representação de $[\mathbf{P}]$ por subpavimentos $[\mathbf{p}]$ armazenados em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$, a rotina MIF$(\mathbf{x}, \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]})$ (Minimal Inclusion Function), que representa $[\mathbf{f}]^*_{\mathbf{x}}$, é computada como

$$\overline{[f_i]}^*_{\mathbf{x}} = \max_{[\mathbf{p}]\in\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}} \overline{[f_i]}(\mathbf{x}, [\mathbf{p}]), \quad i = \{1, \ldots, n_f\}; \tag{3.30}$$

$$\underline{[f_i]}^*_{\mathbf{x}} = \min_{[\mathbf{p}]\in\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}} \overline{[f_i]}(\mathbf{x}, [\mathbf{p}]), \quad i = \{1, \ldots, n_f\}. \tag{3.31}$$

Analogamente, a rotina MIF$([\mathbf{x}], \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]})$ computa a função de inclusão mínima para o intervalo $[\mathbf{x}]$. O ponto ideal para maximização, expressado por $\overline{[\mathbf{f}]}^*_{\mathbf{x}}$, é a imagem robusta de $\mathbf{x}$. Similarmente, $\overline{[\mathbf{f}]}^*_{[\mathbf{x}]}$ é a imagem robusta do intervalo $[\mathbf{x}]$. A Fig. 3.5 ilustra a computação do ponto ideal para maximização de um intervalo $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$ e de um de seus pontos internos $\mathbf{x}_0 \in [\mathbf{x}]$. Em alguns casos, a função de inclusão mínima pode ser computada de uma única vez. De acordo com a Subseção 2.3.8, se cada variável ocorre no máximo uma vez na formulação que vai ser computada, então a função natural é mínima.

Exclusão de regiões não robustas: No algoritmo [I]RMOA II, os pontos ideais são armazenados na fila $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$. Agora considere qualquer $[\mathbf{x}]$, avaliado pela função objetivo $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}], [\mathbf{p}])$, sendo $[\mathbf{p}] \in \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$ como anteriormente. A função de inclusão mínima $[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}$ é obtida conforme (3.30) e (3.31). Desta forma,

$$[\mathbf{x}] \text{ é descartado } \Leftrightarrow \exists \mathbf{y}^* \in \mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*},\ \mathbf{y}^* \preceq [\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}. \tag{3.32}$$

Portanto, a existência de pelo menos um elemento em $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ menor que $[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}$, é suficiente para excluir $[\mathbf{x}]$ sem risco de se perder nenhuma solução robusta.

3.5.2 [I]RMOA II

O algoritmo [I]RMOA II é apresentado na Tab.3.5. As entradas são as caixas $[\mathbf{X}]$ e $[\mathbf{P}]$ com seus respectivos parâmetros de precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ e $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$. Observando

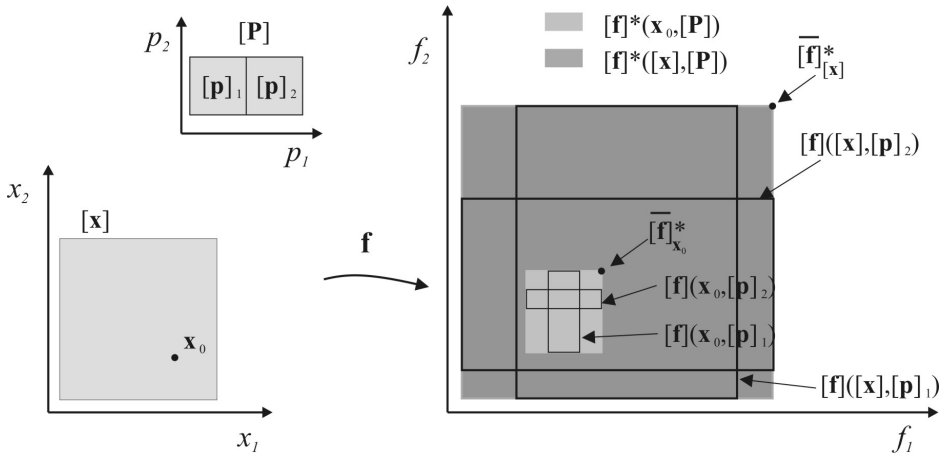


Fig. 3.5: Computação dos pontos ideais de maximização para intervalos $[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}$ e para pontos $[\mathbf{f}]^*_{\mathbf{x}}$ quando sujeitos à incerteza $[\mathbf{P}]$.

a largura mínima $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$, $[\mathbf{P}]$ é dividido em subpavimentos não sobrepostos que são armazenadas na fila $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$. Em seguida, $[\mathbf{X}]$ é inserido na fila $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$. Enquanto $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ permanecer não vazio, o processo de encontrar soluções robustas continua ativo. A primeira caixa retirada de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$, chamada de $[\mathbf{x}]$, é submetida aos testes de restrição descritos por $[\mathbf{g}]([\mathbf{x}], \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]})$. Por agora, suponha que os testes não possam assegurar que as caixas são viáveis ou não. Neste caso, a caixa $[\mathbf{x}]$ deve ser bissectada e as duas caixas resultantes são inseridas em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ e o laço recomeça. De modo similar, se $[\mathbf{g}]([\mathbf{x}], \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]})$ retornar que $[\mathbf{x}]$ é não viável, então $[\mathbf{x}]$ é descartado e outra caixa é retirada de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$. Por outro lado, se $[\mathbf{x}]$ é viável, os próximos passos são computar a função de inclusão mínima $[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}$ e comparar com os elementos na fronteira robusta em $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$. Se existe pelo menos um ponto em $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ menor que $[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}$ então $[\mathbf{x}]$ é descartado; senão $[\mathbf{x}]$ é inserido em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ e $[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{y}]}$. Para o próximo estágio, $\mathbf{c}([\mathbf{x}])$ é avaliado por $\text{MIF}(\mathbf{c}([\mathbf{x}]), \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]})$ e a saída é armazenada $[\mathbf{f}]^*_{\mathbf{x}}$. Uma vez mais, se existe elementos em $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ menores que $\overline{[\mathbf{f}]}^*_{\mathbf{x}}$, então $\mathbf{c}([\mathbf{x}])$ não é solução robusta e o laço é reiniciado. Se não existe pontos menores que $\overline{[\mathbf{f}]}^*_{\mathbf{x}}$, então o $\overline{[\mathbf{f}]}^*_{\mathbf{x}}$ faz parte da fronteira de Pareto robusta atual e é inserido em $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ e $\mathbf{c}([\mathbf{x}])$ to $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}^*}$. O processo cíclico se mantém até que todas as caixas factíveis $[\mathbf{x}]$ ($w([\mathbf{x}]) > \varepsilon_{[\mathbf{x}]}$) sejam investigadas. Ao final, é esperado que $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ envelope todas as soluções do problema robusto; $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}^*}$ e $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ são estimativas do conjunto solução e da fronteira robusta respectivamente. Como mostrado no Exemplo 12, talvez as supostas soluções de $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ não pertençam a $\mathbf{f}(\mathbf{X}', \mathbf{P})$. Portanto, outro método deve ser executado para validar os pontos em $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$, por exemplo o PROJ2D [27] que computa projeção de conjuntos. A

projeção de conjuntos está definida em (2.28) e a Fig. 2.3 ilustra um exemplo de projeção.

Tab. 3.5: Algoritmo [I]RMOA II.

entrada ($[\mathbf{X}]$,$[\mathbf{P}]$,$\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$,$\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$)
saída($\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}^*}$,$\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$)

1 inicialize $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}^*}$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$, $\mathbf{Q}_{[\mathbf{y}]}$ com $\emptyset$, $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ com $[\mathbf{X}]$ e $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$ com $[\mathbf{P}]$
2 se $w(\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}\{1\}) > \varepsilon_{[\mathbf{p}]}$
3 retire $[\mathbf{p}]$ de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$
4 bissecte $[\mathbf{p}]$, insira as duas caixas resultantes em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$ e siga para 2
5 se $w(\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}\{1\}) \leq \varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ siga para 20
6 retire $[\mathbf{x}]$ de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$
7 se $[\mathbf{g}]([\mathbf{x}], \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}) \subset [0, \infty]$ então siga para 5
8 se $[\mathbf{g}]([\mathbf{x}], \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}) \subseteq [-\infty, 0]$ então siga para 12
9 se $w([\mathbf{x}]) > \varepsilon_{[\mathbf{x}]}$
10 então bissecte $[\mathbf{x}]$, insira as duas caixas resultantes em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ e siga para 5
11 senão insira $[\mathbf{x}]$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ e siga para 5
12 chame MIF($[\mathbf{x}], \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$), insira seu resultado em $[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}$
13 se existe um $\mathbf{y}$ em $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ tal que $\mathbf{y} \preceq [\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}$ então vai para 5
14 insira $[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{y}]}$ e insira $[\mathbf{x}]$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$
15 chame MIF($\mathbf{c}([\mathbf{x}]), \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$), insira seu resultado em $[\mathbf{f}]^*_{\mathbf{x}}$
16 se existe um $\mathbf{y}$ em $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ tal que $\mathbf{y} \preceq \overline{[\mathbf{f}]}^*_{\mathbf{x}}$ então siga para 5
17 descarte todo $\mathbf{y}$ em $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ tal que $\overline{[\mathbf{f}]}^*_{\mathbf{x}} \preceq \mathbf{y}$ e seus respectivos elementos em $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}^*}$
18 insira $\overline{[\mathbf{f}]}^*_{\mathbf{x}}$ em $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ e insira $\mathbf{c}([\mathbf{x}])$ em $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}^*}$
19 descarte todo $[\mathbf{y}]$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{y}]}$ tal que $[\mathbf{f}]^*_{\mathbf{x}} \preceq [\mathbf{y}]$ e suas respectivas caixas em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$
20 retorne $\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}^*}$ e $\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$

3.6 Algoritmo Evolucionário Intervalar Multi-Objetivo Robusto

Os algoritmos evolucionários utilizam processos estocásticos para guiar a busca pelas soluções ótimas. Contrariamente, algoritmos de otimização intervalares utilizam geralmente processos determinísticos. Considerando o modelo de otimização robusta descrito pelas expressões (3.9)-(3.18), apresenta-se nesta seção um algoritmo que mescla conceitos evolucionários e intervalares. Enquanto que a aritmética e algumas funções intervalares são empregadas

para computar as incertezas sobre as soluções candidatas, os mecanismos evolucionários como seleção, recombinação e diversidade conduzem o método à convergência para a fronteira robusta. Denominou-se este algoritmo de [I]RMOEA (Interval Robust Multi-Objective Evolutionary Algorithm).

3.6.1 Preliminares

Formação da população: O parâmetro de busca $[\mathbf{x}]^i$ corresponde à figura de um dado indivíduo i no [I]RMOEA, sendo formado pela concatenação de intervalos pertencentes ao espaço de busca $[\mathbf{X}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$, escrito na forma intervalar por conveniência. Algebricamente,

$$[\mathbf{x}]^i = [x_1]^i \times [x_2]^i \times \ldots \times [x_{n_x}]^i, \;\; [\mathbf{x}]^i \in [\mathbf{X}], \tag{3.33}$$

sendo i o identificador individual dentre os n_{pop} indivíduos da população. Na seqüência, numa geração t, a população é dada por

$$\mathbf{pop}_t = \left\{[\mathbf{x}]^1, \ldots, [\mathbf{x}]^i, \ldots, [\mathbf{x}]^{n_{pop}}\right\}, \tag{3.34}$$

sendo $\mathbf{pop}_t(i)$ a forma de acesso ao *i-ésimo* membro.

Avaliação a população: A cada geração t, o desempenho da população $\mathbf{des}_t$ frente a presença do espaço das incertezas é representado por $[\mathbf{f}](\mathbf{pop}_t, [\mathbf{P}])$. A computação de $[\mathbf{f}]$ é feita utilizando-se de métodos intervalares, similarmente ao [I]RMOA II conforme mostrado a seguir. Em primeiro lugar, assuma que $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$ armazene todos os n_{sp} subpavimentos de $[\mathbf{P}]$, como já descrito anteriormente. Em segundo lugar, o desempenho de cada indivíduo $[\mathbf{x}]^i$ é um envelope sobre uma região que considera a computação dos subpavimentos sobre $[\mathbf{x}]^i$. Finalmente, $\mathbf{des}_t$ é definido como o ponto ideal de maximização de cada $[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]^i}$, ou seja

$$\mathbf{des}_t = \left\{\overline{[\mathbf{f}]}^*_{[\mathbf{x}]^1}, \ldots, \overline{[\mathbf{f}]}^*_{[\mathbf{x}]^i}, \ldots, \overline{[\mathbf{f}]}^*_{[\mathbf{x}]^{n_{pop}}}\right\}. \tag{3.35}$$

O acesso ao *i-ésimo* membro é feito de forma análoga a $\mathbf{pop}_t$. O algoritmo da Tab.3.6 apresenta como é calculado o desempenho da população.

Tratamento de restrições: A eliminação da regiões não viáveis ocorre de maneira análoga àquela apresentada na Subseção 3.5.1, diferenciando apenas na variável de busca que no [I]RMOEA é real. Assim, o teste de inclusão que representa as funções de restrição torna-se

$$[t](\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{caso } [\mathbf{g}](\mathbf{x}, [\mathbf{p}]) \subseteq [-\infty, 0], \\ 0, & \text{caso } [\mathbf{g}](\mathbf{x}, [\mathbf{p}]) \subset [0, \infty], \;\; e \\ [0,1], & \text{por outro lado.} \end{cases} \tag{3.36}$$

Tab. 3.6: Computação de $[\mathbf{f}](\mathbf{pop}_t, [\mathbf{P}])$.

entrada ($\mathbf{pop}_t$,$\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$) % $[\mathbf{P}] = \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$
saída($\mathbf{des}_t$)

1 para $i = 1$ até n_{pop} faça
2 chame MIF($\mathbf{pop}_t(i), \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$), insira seu resultado em $[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]^i}$
3 fim para
4 armazene $\left\{\overline{[\mathbf{f}]}^*_{[\mathbf{x}]^1}, \ \ldots, \ \overline{[\mathbf{f}]}^*_{[\mathbf{x}]^i}, \ldots, \overline{[\mathbf{f}]}^*_{[\mathbf{x}]^{n_{pop}}}\right\}$ em $\mathbf{des}_t$
5 retorne $\mathbf{des}_t$

Método de seleção: A seleção dos indivíduos para o cruzamento é realizada de acordo com o método Roleta, sendo no caso mono-objetivo, o percentual de escolha do indivíduo dependente do desempenho perante a população. Aqui, o método Roleta foi adaptado para o caso multi-objetivo avaliando o desempenho com o auxílio da técnica de nicho baseada em intervalos e da posição individual nas fronteiras de não dominância da geração atual. A técnica de nicho é descrita na próxima seção, mas para o momento, assuma que ela disponibilize informações sobre os nichos formados e os n_{nicho} indivíduos neles contidos. Então o desempenho de um indivíduo i segundo o nicho que ele participa é $f^i_{nicho} = n_{nicho}$. Suponha também que todos os indivíduos tenham sido classificados em fronteiras. O desempenho f^i_{front} é fixado em 1 caso o indivíduo i pertença à primeira fronteira, 2 para a segunda fronteira, etc. O resultado é o *desempenho útil* $\mathbf{des}'_t(i) : \mathbb{R}$ medido como

$$\mathbf{des}'_t(i) = \frac{1}{f^i_{nicho}} + \frac{1}{f^i_{front}}. \tag{3.37}$$

O método da Roleta usa $\mathbf{des}'_t(i)/\Sigma_{j=1}^{n_{pop}}\mathbf{des}'_t(j)$ para computar a probabilidade de cada indivíduo i ser escolhido. O método Roleta permite que alguns indivíduos sejam escolhidos várias vezes e outros nenhuma. Logo, considerando a transição da geração t para geração $t+1$, é possível a perda de soluções pertencentes à fronteira eficiente. Por isso, tornou-se necessário aplicar uma técnica de elitismo para assegurar a permanência dos indivíduos considerados melhores que aqueles gerados na geração vigente.

Método de elitismo: Os métodos de elitismo têm a finalidade de impedir que soluções avaliadas como "melhores" ou "não piores" deixem de participar da próxima geração. A estratégia elitista utilizada aqui foi baseada na

estratégia empregada no NSGA II em [32]. Em poucas palavras, o método une a população na geração corrente $\mathbf{pop}_t$ com a população recém surgida da aplicação dos operadores genéticos $\mathbf{pop}_{aux}$. Em seguida, compara todos os integrantes, separando os primeiros n_{pop} indivíduos da primeira fronteira para compor a nova população $\mathbf{pop}_{t+1}$. Enquanto o número de integrantes da primeira fronteira for menor que n_{pop} a técnica de nicho do [I]RMOEA é exatamente a mesma do NSGA II. Entretanto, quando a união de $\mathbf{pop}_t$ com $\mathbf{pop}_{aux}$ resultar em uma população na primeira fronteira maior que n_{pop} então a técnica de nicho novamente é acionada, e a população na primeira fronteira é dividida em nichos. Os nichos são percorridos, e a cada visita um de seus integrantes é selecionado aleatoriamente e retirado para compor a nova população. O processo continua até a seleção dos n_{pop} indivíduos.

3.6.2 Técnica de Nicho por Bissecção Intervalar

As técnicas de nicho foram desenvolvidas para preservar diversidade. Elas degradam a função objetivo conforme a distância entre as soluções, medida por uma *função de partilha*. Se há comparações entre todas as n_{pop} soluções com n_f objetivos é fácil perceber que o custo computacional é elevado. O custo é ainda mais crítico para algoritmos que classificam as fronteiras. Segundo Deb [34], enquanto MOEAs desta natureza despendem esforço na ordem de $O(n_f * n_{pop}^3)$, seu NSGA II gastava apenas $O(n_f * n_{pop}^2)$. Nesta seção é proposto uma técnica de nicho em que o custo não depende de comparações entre as n_{pop} soluções e os n_f objetivos, é a técnica de *Nichos por Bissecção Intervalar*.

Em poucas palavras, a técnica NB[I] (Nichos por Bissecção Intervalar) bissecta o espaço dos objetivos diversas vezes formando os nichos. A cada bissecção o volume dos nichos cai pela metade, e as soluções candidatas são classificadas nas sub-regiões acima e abaixo do ponto de corte. O resultado final fica disponível para o processo de seleção, onde as soluções têm seus desempenhos penalizados segundo o número de indivíduos de seu nicho. A técnica de nicho NB[I] é pontual podendo ser utilizada diretamente em algoritmos evolucionários tradicionais ou indiretamente nos algoritmos intervalares utilizando-se algum ponto de referência de intervalos para a classificação de pertinência aos nichos. Aqui, decidiu-se pela descrição do método conforme o emprego no algoritmo evolucionário-intervalar e utilizou-se o ponto ideal para maximização como o ponto de referência do intervalo.

A descrição da técnica de nichos, inicia-se assumindo uma população com n_{pop} indivíduos $[\mathbf{x}]^i$. Na iteração t, considere que o desempenho $\mathbf{des}_t$ de cada $[\mathbf{x}]^i$ seja calculado conforme mostrado na Tab.3.6. Então, é sempre verdadeira

a seguinte inclusão

$$\overline{[\mathbf{f}]}^{*}_{[\mathbf{x}]^i} \subseteq [\mathbf{F}]_0, \quad [\mathbf{F}]_0 = [\underline{F}_1 \, , \overline{F}_1] \times \ldots \times [\underline{F}_j \, , \overline{F}_j] \times \ldots \times [\underline{F}_{n_f} \, , \overline{F}_{n_f}], \tag{3.38}$$

sendo

$$\underline{F}_j = \min_{i=1,\ldots,n_{pop}} \overline{[f_j]}^{*}_{[\mathbf{x}]^i} \;\text{ e }\; \overline{F}_j = \max_{i=1,\ldots,n_{pop}} \overline{[f_j]}^{*}_{[\mathbf{x}]^i}. \tag{3.39}$$

Em toda geração, $[\mathbf{F}]_0$ representa o nicho inicial contendo toda a população. O próximo passo é bisseccionar $[\mathbf{F}]_0$ em uma de suas n_f funções objetivo, escolhida aleatoriamente. Por exemplo, assuma que a função objetivo j seja sorteada. O resultado são dois novos nichos $[\mathbf{F}]_1$ e $[\mathbf{F}]_2$ tais que

$$[\mathbf{F}]_1 \;=\; [F_1] \times \ldots \times [\underline{F}_j \, , \; \frac{\underline{F}_j + \overline{F}_j}{2}] \times \ldots \times [F_{n_f}], \tag{3.40}$$

$$[\mathbf{F}]_2 \;=\; [F_1] \times \ldots \times [\frac{\underline{F}_j + \overline{F}_j}{2} \, , \; \overline{F}_j] \times \ldots \times [F_{n_f}]. \tag{3.41}$$

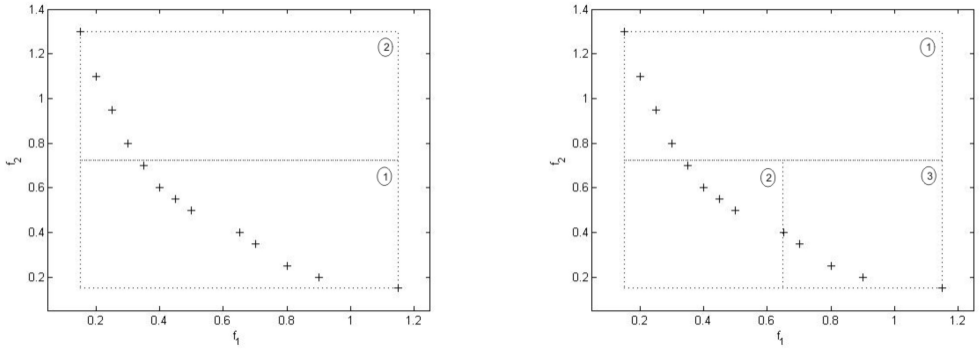
Assim, a classificação de cada $[\mathbf{x}]^i$ é dada por

$$\begin{cases} \overline{[\mathbf{f}]}^{*}_{[\mathbf{x}]^i} \in [\mathbf{F}]_1, & \text{caso } \overline{[f_j]}^{*}_{[\mathbf{x}]^i} \leq \frac{\underline{F}_j + \overline{F}_j}{2}], \\ \overline{[\mathbf{f}]}^{*}_{[\mathbf{x}]^i} \in [\mathbf{F}]_2, & \text{por outro lado.} \end{cases} \tag{3.42}$$

Após o processo de classificação, se algum nicho for vazio, ele é eliminado. O processo de bissecção continua enquanto algum critério de parada seja atingido, como o *número máximo de rodadas de bissecção* r_{bis}^{max}. A Fig. 3.6 mostra quatro primeiras bissecções num problema genérico com dois objetivos.

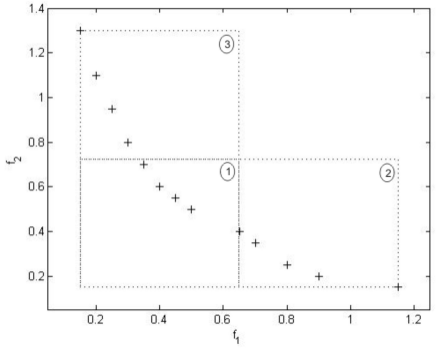
Analisando o grupo de gráficos da Fig. 3.6, percebe-se que o processo de agrupar pontos vizinhos é simples. Decidiu-se por implementá-lo usando a estrutura dados baseada em listas encadeadas FIFO para armazenar os nichos e os índices dos indivíduos que cada um contém. O algoritmo da Tab.3.7. apresenta a técnica NBI[I] e a Tab.3.8 descreve a simbologia empregada no algoritmo.

Como qualquer método de nicho, NB[I] também contém parâmetros críticos que interferem na qualidade da formação dos nichos. Estes parâmetros são ligados ao critério de parada escolhido. Por exemplo, a Fig. 3.7 mostra os nichos resultantes da técnica NB[I] para diferentes valores para r_{bis}^{max}. Se muitas bissecções ocorrerem, os nichos limitam apenas um ponto isolado, veja Fig. 3.7(a). Por outro lado, se poucos cortes forem feitos, a técnica de nicho falha em agrupar somente soluções vizinhas. Considerando o caso onde o critério baseia-se em r_{bis}^{max}, percebe-se que há necessidade descobrir

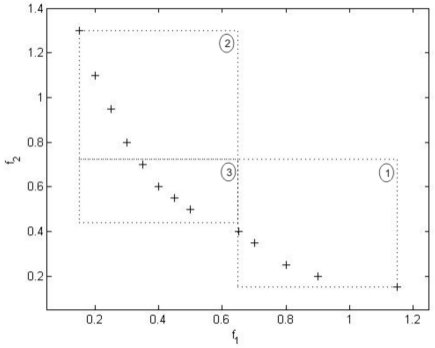


(a) $n_{bis} = 1$.

(b) $n_{bis} = 2$.



(c) $n_{bis} = 3$.



(d) $n_{bis} = 4$.

Fig. 3.6: NB[I]: primeiras bissecções sobre uma população com 13 indivíduos. Assuma que "+" denote $\overline{[\mathbf{f}]}^{*}_{[\mathbf{x}]^i}$. Observe que entre (c) e (d) há exclusão das regiões que não contém solução. No canto direito superior de cada região há indicação da ordem de classificação das caixas para bissecção.

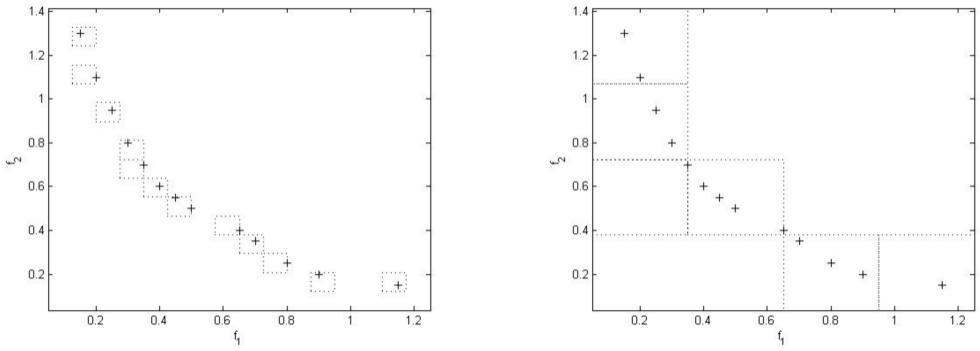
um valor satisfatório de bissecções que permita explorar a informação de proximidade entre os indivíduos. Uma solução seria deixar o valor de r_{bis}^{max} variar, por exemplo, segundo um valor de uma *densidade populacional*. Mas isso significa acréscimo de mais um parâmetro crítico. A Fig. 3.7(b) mostra outro aspecto importante: soluções próximas que estão em nichos diferentes. Este problema pode ser amenizado executando NB[I] mais vezes, porém utilizando-se de espaços de busca iniciais diferentes. No final, o desempenho seria calculado empregando-se uma média aritmética entre as densidades populacionais que dada solução participa.

O algoritmo NB[I] pode ser facilmente adaptado para outros critérios de parada, como por exemplo, o NB[I] pode encerrar as bissecções impedindo que o volume do nicho seja menor que o volume de nicho mínimo, fixado

Tab. 3.7: Algoritmo NB[I].

entrada ($\mathbf{des}_t$,r_{bis}^{max})
saída($\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$,$\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}$)

1 inicialize r_{bis} com 0, $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ com $\emptyset$ e $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}\{1\}$ com os índices $1, \ldots, n_{pop}$
2 usando $\mathbf{des}_t$ em (3.38) e (3.39) compute $[\mathbf{F}]_0$ e insira em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$
3 se $r_{bis} > r_{bis}^{max}$ siga para 14
4 adicione 1 a r_{bis}
5 retire o primeiro elemento de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ e armazene em $[\mathbf{F}]$
6 retire os índices de $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}\{1\}$ e armazene em $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]}$
7 bissecte $[\mathbf{F}]$ e armazene o resultado em $[\mathbf{F}]_{\mathbf{1}}$ e $[\mathbf{F}]_{\mathbf{2}}$
8 usando (3.42), classifique os índices em $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]}$
e armazene o resultado em $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]_{\mathbf{1}}}$ e $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]_{\mathbf{2}}}$
9 se $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]_{\mathbf{1}}} = \emptyset$ siga para 11
10 insira $[\mathbf{F}]_{\mathbf{1}}$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ e $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]_{\mathbf{1}}}$ em $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}\{(\text{última posição}) + 1\}$
11 se $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]_{\mathbf{2}}} = \emptyset$ siga para 3
12 insira $[\mathbf{F}]_{\mathbf{2}}$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ e $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]_{\mathbf{2}}}$ em $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}\{(\text{última posição}) + 1\}$
13 siga para 3
14 retorne $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ e $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}$



(a) $r_{bis}^{max} = 8$ e $n_{bis} = 49$. (b) $r_{bis}^{max} = 4$ e $n_{bis} = 10$.

Fig. 3.7: Técnica NB[I] - problemas com bissecções. Em (a), NB[I] falha pois os nichos contém apenas um indivíduo cada. Em (b), indivíduos próximos se situam em nichos diferentes.

previamente.

Tab. 3.8: Símbolos no algoritmo NB[I].

Símbolos	Descrição Conteúdo	Tipo
n_{pop}	tamanho da população	$\mathbb{R}$
r_{bis}	contador de rodadas de bissecção	$\mathbb{R}$
r_{bis}^{max}	número máximo de rodadas de bissecção	$\mathbb{R}$
$\mathbf{des}_t$	desempenho da população	$\mathbb{R}^{n_f}$
$[\mathbf{F}]$	caixa do nicho corrente	$\mathbb{IR}^{n_f}$
$[\mathbf{F}]_\mathbf{1}$, $[\mathbf{F}]_\mathbf{2}$	caixas dos nichos recém bisseccionados	$\mathbb{IR}^{n_f}$
$\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$	Lista FIFO com nichos ativos	Fila: $\mathbb{IR}^{n_f}$
$\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]}$	Lista FIFO com índices dos indivíduos de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}\{1\}$	Fila: $\mathbb{R}$
$\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]_\mathbf{1}}$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]_\mathbf{2}}$	Lista FIFO com índices de nichos correntes	Fila: $\mathbb{IR}^{n_f}$
$\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}\{.\}$	Lista FIFO com índices dos indivíduos de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}\{.\}$	Fila: $\mathbb{R}$

3.6.3 [I]RMOEA

O algoritmo [I]RMOEA apresentado na Tab.3.9 tem estrutura semelhante a de outros algoritmos genéticos multi-objetivo, no entanto, a estrutura de dados e as operações genéticas são baseadas em parâmetros reais e intervalares. A entrada contém todos os parâmetros utilizados no [I]RMOEA, cuja descrição está mostrada na Tab.3.10. Parte deles são utilizados nas inicializações descritas nos passos 1 e 2. Nos passos $3-5$ os subpavimentos do parâmetro de incerteza são gerados e armazenados em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$. Em 6 as soluções são testadas quanto à viabilidade; as não viáveis são substituídas. Em 7, a população é submetida a avaliação de desempenho expressa pelas funções objetivo. O resultado é armazenado em $\mathbf{des}_t$. O desempenho $\mathbf{des}_t$ é utilizado na separação de fronteiras no passo 8. O passo 9 marca o início do laço principal. O critério de parada foi definido como número máximo de gerações. Segundo sua conveniência, o decisor pode inserir outro critério. O contador de gerações é atualizado e em seguida, no passo 11 a técnica de nicho NB[I] é aplicada e o resultado f_{nicho}^i torna-se suporte para *seleção* na etapa subseqüente. Nos passos $12-14$, as operações genéticas para criação da nova geração começam com a seleção de indivíduos para o *cruzamento*. Após a fase de troca de material genético, todos os indivíduos são sujeitos ao operador *mutação* e nova avaliação de desempenho é realizada. Em 15, os testes de restrição avaliam a nova população. Em $16-19$, As populações $\mathbf{pop}_{t-1}$ e $\mathbf{pop}_{aux}$, e os desempenhos $\mathbf{des}_{t-1}$ e $\mathbf{des}_{aux}$ são acoplados, e fronteiras robustas separadas pelo método do elitismo. Os primeiros n_{pop} elementos das primeiras fronteiras formam $\mathbf{pop}_t$. O restante dos indivíduos são excluídos. Os demais passos marcam o fim do laço principal e fim do algoritmo. Clara-

Tab. 3.9: Algoritmo [I]RMOEA.

entrada (n_{bits},n_f,n_{pop},n_{gen},p_c,p_m,$[\mathbf{X}]$,$[\mathbf{P}]$,$\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$)
saída($\mathbf{pop}_t$,$\mathbf{des}_t$)

1 inicialize t com 0 e $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$ com $[\mathbf{P}]$
2 inicialize $\mathbf{pop}_t$ com n_{bits}, n_f, n_{pop} e $[\mathbf{X}]$
3 se $w(\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}\{1\}) > \varepsilon_{[\mathbf{p}]}$
4 retire $[\mathbf{p}]$ de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$
5 bissecte $[\mathbf{p}]$, insira as duas caixas resultantes em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$ e siga para 3
6 substitua todo indivíduo $\mathbf{x} \in \mathbf{pop}_t$ tal que $[\mathbf{g}](\mathbf{x}, \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}) \subset [0, \infty]$
por outro gerado aleatoriamente tal que $[\mathbf{g}](\mathbf{x}, \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}) \subseteq [-\infty, 0]$
7 compute o desempenho $[\mathbf{f}](\mathbf{pop}_t, \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]})$ e armazene-o em $\mathbf{des}_t$
8 separe as fronteiras e armazene o resultado em f^i_{front}
9 se $t > n_{gen}$ siga para 21
10 incremente 1 a t
11 chame NBI e armazene o resultado em f^i_{nicho}
12 utilize 3.37 para computar $\mathbf{des}'_t$
13 utilize $\mathbf{des}'_t$ para selecionar casais para *cruzamento*
14 realize *cruzamento*; *mutação* segundo a probabilidade p_m,
armazene o resultado em $\mathbf{pop}_{aux}$
15 substitua todo indivíduo $\mathbf{x} \in \mathbf{pop}_{aux}$ tal que $[\mathbf{g}](\mathbf{x}, \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}) \subset [0, \infty]$
por outro gerado aleatoriamente tal que $[\mathbf{g}](\mathbf{x}, \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}) \subseteq [-\infty, 0]$
16 compute o desempenho $[\mathbf{f}](\mathbf{pop}_{aux}, \mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]})$ e armazene-o em $\mathbf{des}_{aux}$
17 armazene $\mathbf{pop}_{t-1} \cup \mathbf{pop}_{aux}$ em $\mathbf{pop}_{aux}$; $\mathbf{des}_{t-1} \cup \mathbf{des}_{aux}$ em $\mathbf{des}_{aux}$
18 separe as fronteiras e armazene o resultado em f^i_{front}
19 finalize a população para a próxima geração
com os n_{pop} primeiros indivíduos de f^i_{front}
20 siga para 9
21 retorne $\mathbf{pop}_t$ e $\mathbf{des}_t$

mente, o algoritmo descrito acima se assemelha a um MOEA típico, que não leva em conta o tratamento de incertezas. Contudo, as diferenças estão nos detalhes: a) as funções objetivo contém o parâmetro de incerteza $[\mathbf{P}]$; e b) os métodos intervalares são empregados para computar a incerteza e para classificar os indivíduos na técnica de nicho.

Como dito anteriormente, os algoritmos evolucionários buscam pelos pontos ótimos via mecanismos estocásticos. Portanto, o desempenho destes al-

Tab. 3.10: Parâmetros do [I]RMOEA

Parâmetro	Descrição Conteúdo	Tipo
n_{bits}	número de bits da cadeia binária	$\mathbb{Z}$
n_{gen}	número de gerações	$\mathbb{Z}$
n_{pop}	número de indivíduos da população	$\mathbb{Z}$
n_f	número de funções objetivo	$\mathbb{Z}$
p_c	probabilidade de cruzamento	$\mathbb{R}$
p_m	probabilidade de mutação	$\mathbb{R}$
f^i_{front}	desempenho do indivíduo i segundo sua fronteira	$\mathbb{Z}$
f^i_{nicho}	desempenho do indivíduo i segundo seu nicho	$\mathbb{Z}$
$\mathbf{des}_t$	desempenho da população na geração t	Vetor: $\mathbb{R}^{n_f}$
$\mathbf{pop}_t$	população na geração t	Vetor: $\mathbb{IR}^{n_f}$
$\mathbf{des}_{aux}$	desempenho da população auxiliar	Vetor: $\mathbb{R}^{n_f}$
$\mathbf{pop}_{aux}$	população auxiliar	Vetor: $\mathbb{IR}^{n_f}$

goritmos está associado a escolha correta dos parâmetros de controle destes mecanismos.

3.7 Métricas para Medir Desempenho Revisadas

Na Seção 2.2.6 foram apresentadas algumas métricas utilizadas para testar desempenho dos MOEAs. Agora, apresenta-se a Métrica por Bissecção de Intervalar que é empregada para avaliar algoritmos propostos nesta Tese com relação à aproximação da fronteira robusta.

3.7.1 Métrica por Bissecção Intervalar - MB[I]

A métrica foi desenvolvida para qualificar a uniformidade de um conjunto de soluções não dominadas de um espaço bidimensional em relação ao conjunto Pareto $\mathbf{Y}^*$. Os casos n-dimensionais podem ser obtidos por analogia. Seguindo a idéia básica da técnica de nicho NB[I], esta métrica subdivide o espaço dos objetivos escolhendo, a cada iteração, a imagem de uma solução como ponto de bissecção para as duas novas regiões. As bissecções vão ocorrendo até não haja mais soluções internas às regiões restantes dos processos de bissecção. A Fig. 3.8 ilustra quatro etapas do processo.

A descrição formal do método MB[I] inicia-se por considerar o desem-

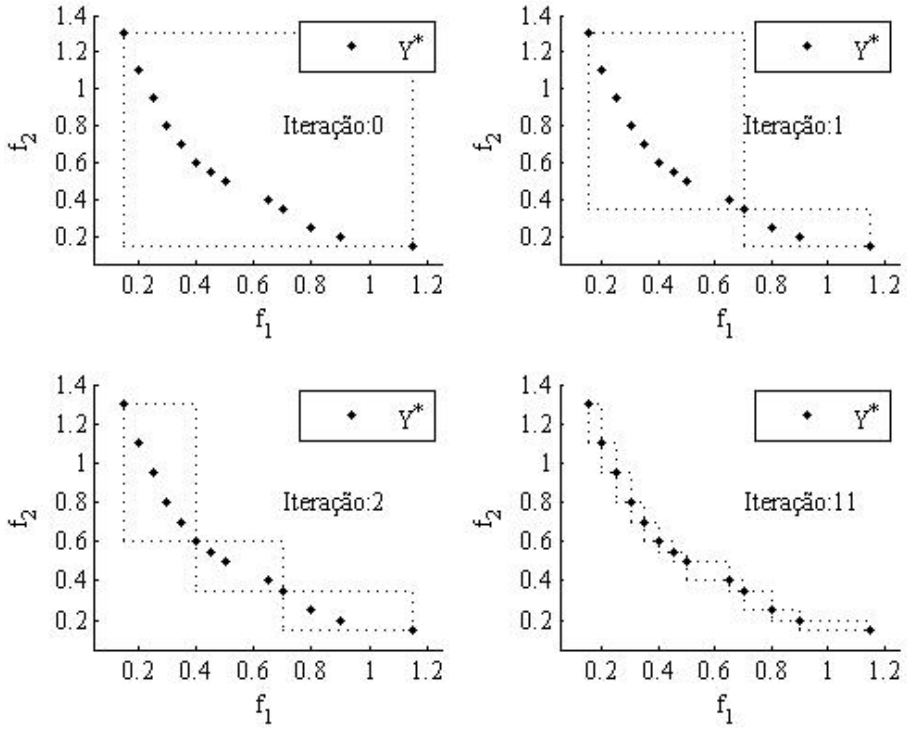


Fig. 3.8: Algumas iterações da métrica MB[I] sobre uma população de soluções não dominadas. Em cada iteração há exclusão das regiões que não contém solução.

penho $\mathbf{des}_t$ de uma população de pontos em uma geração t, como

$$\mathbf{des}_t = \left\{\mathbf{f}_{\mathbf{x}^1}, \ldots, \mathbf{f}_{\mathbf{x}^i}, \ldots, \mathbf{f}_{\mathbf{x}^{n_{pop}}}\right\}, \quad i = \{1, \ldots, n_{pop}\} \tag{3.43}$$

sendo $\mathbf{f}_{\mathbf{x}^i} \in \mathbb{R}^{n_f}$ e o acesso à *j-ésima* função objetivo do indivíduo $\mathbf{x}^i$ dá-se por $f_{j_{\mathbf{x}^i}}$. Assim, para todo indivíduo $\mathbf{f}_{\mathbf{x}^i}$ da população é sempre verdadeira a seguinte inclusão

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}^i} \subseteq [\mathbf{F}]'_0, \quad [\mathbf{F}]'_0 = [\underline{F}'_1\ , \overline{F}'_1] \times \ldots \times [\underline{F}'_j\ , \overline{F}'_j] \times \ldots \times [\underline{F}'_{n_f}\ , \overline{F}'_{n_f}], \tag{3.44}$$

sendo

$$\underline{F}'_j = \min_{i=1,\ldots,n_{pop}} f_{j_{\mathbf{x}^i}} \ \text{ e } \ \overline{F}_j = \max_{i=1,\ldots,n_{pop}} f_{j_{\mathbf{x}^i}}. \tag{3.45}$$

Um exemplo da construção de $[\mathbf{F}]'_0$ pode ser visto na Fig. 3.8, iteração 0. A caixa $[\mathbf{F}]'_0$ inicializa a fila de caixas $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$. O próximo passo é bisseccionar $[\mathbf{F}]'_0$, segundo um de seus pontos internos, ou seja quaisquer pontos exceto

aqueles locados nos vértices. Os índices dos indivíduos situados nos vértices são armazenados em $\mathbf{Q}^{v}_{[\mathbf{F}]}$escolhas aleatórias são feitas: a) um índice k ($k = \{1, \ldots, n_{pop}\}$ e $k \notin \mathbf{Q}^{v}_{[\mathbf{F}]}$) para o indivíduo de corte $\mathbf{f}_{\mathbf{x}^k}$; e b) um índice j para a função objetivo do indivíduo k escolhido, $f_{j_{\mathbf{x}^k}}$. Após as escolhas, duas novas regiões são geradas $[\mathbf{F}]_1$ e $[\mathbf{F}]_2$ expressadas como

$$[\mathbf{F}]'_1 = [F_1] \times \ldots \times [\underline{F}_j \ , \ f_{j_{\mathbf{x}^k}}] \times \ldots \times [F_{n_f}], \tag{3.46}$$

$$[\mathbf{F}]'_2 = [F_1] \times \ldots \times [f_{j_{\mathbf{x}^k}} \ , \ \overline{F}_j] \times \ldots \times [F_{n_f}]. \tag{3.47}$$

Para melhor compreensão, veja Fig. 3.8, iteração 1. A lista de vértices $\mathbf{Q}^{v}_{[\mathbf{F}]}$ deve ser atualizada após a bissecção incluindo o ponto de corte entre as novas caixas $[\mathbf{F}]'_1$ e $[\mathbf{F}]'_2$. Em seguida, os indivíduos até então pertencentes a $[\mathbf{F}]'_0$ devem ser classificados quanto ao novo espaço a que pertencem, com

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\mathbf{x}^i} \in [\mathbf{F}]_1, & \text{caso } f_{j_{\mathbf{x}^i}} \leq f_{j_{\mathbf{x}^k}}, \\ \mathbf{f}_{\mathbf{x}^i} \in [\mathbf{F}]_2, & \text{por outro lado.} \end{cases} \tag{3.48}$$

O processo de bissecção continua enquanto houver soluções internas às caixas intervalares, ou similarmente quando o número de elementos de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ for igual a $n_{pop} - 1$. Um exemplo de fim das bissecções é mostrado na Fig. 3.8, iteração 11. Depois de executar todas as bissecções, computam-se os volumes $v([\mathbf{F}])$ das caixas intervalares restantes, para então calcular o desvio padrão $\sigma_{v([\mathbf{F}])}$ do grupo. Esse desvio padrão $\sigma_{v([\mathbf{F}])}$ corresponde ao valor quantitativo da métrica MB[I], ou formalmente

$$\text{MB[I]} = \sigma_{v([\mathbf{F}])}. \tag{3.49}$$

Quanto menor $\sigma_{v([\mathbf{F}])}$ mais uniformemente está distribuída a população. O algoritmo da Tab.3.11. apresenta a técnica MBI[I] e a Tab.3.12 descreve a simbologia empregada no algoritmo.

A aplicação da métrica MB[I] para qualificar a uniformidade de um conjunto de pontos não dominados só tem validade quando comparado com um valor de referência, como por exemplo, o valor da métrica sobre a fronteira de Pareto computada sob dada precisão, aqui designada por MB[I]_{front}. Ainda, comparar o valor de MB[I] diretamente com MB[I]_{front} pode não resultar em análise clara, por causa dos valores numéricos que MB[I] pode gerar. A situação se agrava quando há comparação simultânea da métrica para mais de uma simulação. Por tudo isso, torna-se importante desenvolver uma função de transformação para normalizar a métrica MB[I]. A métrica por bissecção intervalar normalizada MB[I]_{norm} é descrita como

$$\text{MB[I]}_{norm} = \frac{\text{MB[I]} - \text{MB[I]}_{front}}{\text{MB[I]}_{\max} - \text{MB[I]}_{front}}, \ \ \text{MB[I]}_{\max} \neq \text{MB[I]}_{front}, \tag{3.50}$$

Tab. 3.11: Algoritmo MB[I].

entrada ($\mathbf{des}_t$)
saída(MB[I])

1 inicialize $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ e $\mathbf{Q}^v_{[\mathbf{F}]}$ com $\emptyset$; $\mathbf{Q_{ind}}$ com os índices $1, \ldots, n_{pop}$
2 compute $[\mathbf{F}]'_0$ usando $\mathbf{des}_t$ em (3.44) e (3.45)
3 insira $[\mathbf{F}]'_0$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$
4 insira os índices dos pontos que definem os vértices de $[\mathbf{F}]'_0$ em $\mathbf{Q}^v_{[\mathbf{F}]}$
5 atualize $\mathbf{Q_{ind}}\{1\}$ com $\mathbf{Q_{ind}}\{1\} \setminus \mathbf{Q}^v_{[\mathbf{F}]}\{1\}$
6 se o número de elementos de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ é igual a $n_{pop} - 1$ siga para 19
7 retire o primeiro elemento de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ e armazene em $[\mathbf{F}]$
8 retire os índices de $\mathbf{Q_{ind}}\{1\}$ e armazene em $[\mathbf{F}]_{\mathbf{ind}}$
9 se $[\mathbf{F}]_{\mathbf{ind}} = \emptyset$ insira: $[\mathbf{F}]$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ e $[\mathbf{F}]_{\mathbf{ind}}$ em $\mathbf{Q_{ind}}$; siga para 6
10 sorteie um índice de $[\mathbf{F}]_{\mathbf{ind}}$ e armazene em k
11 sorteie um objetivo de $\{1, \ldots, n_f\}$ e armazene em j
12 bissecte $[\mathbf{F}]$ em $\mathbf{f}_{j\mathbf{x}^k}$ e armazene os resultados em $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{1}}$ e $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{2}}$
13 classifique os indivíduos em $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{1}}$ e $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{2}}$ usando (3.48), armazenando seus índices em $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{1\ ind}}$ e/ou $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{2\ ind}}$
14 se $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{1\ ind}} = \emptyset$ siga para 16
15 insira $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{1}}$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ e $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{1\ ind}}$ em $\mathbf{Q_{ind}}$
16 se $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{2\ ind}} = \emptyset$ siga para 6
17 insira $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{2}}$ em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$ e $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{2\ ind}}$ em $\mathbf{Q_{ind}}$, siga para 3
18 siga para 6
19 compute os volumes $v(\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}\{i\})$, sendo $i = 1, \ldots, n_{pop} - 1$
20 calcule o desvio padrão $\sigma_{v(\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}\{i\})}$ e armazene o resultado em MB[I]
21 retorne MB[I]

sendo MB[I] o valor da métrica para dada execução e $\text{MB[I]}_{\max}$ o valor máximo da métrica para todas execuções em um dado teste.

3.7.2 MB[I] × Métricas Apresentadas

Após a apresentação da Métrica por Bissecção de Intervalos, é feita nesta subseção, uma análise numérica de todas as métricas apresentadas através do estudo de casos fictícios de fronteiras Pareto, que podem ser robustas ou não. Em seguida, é feita a justificativa das métricas escolhidas para avaliar o algoritmo evolucionário no próximo capítulo. Para melhor compreensão da análise numérica registra-se que: a) em todos os gráficos, existem dois

Tab. 3.12: Símbolos no algoritmo MB[I].

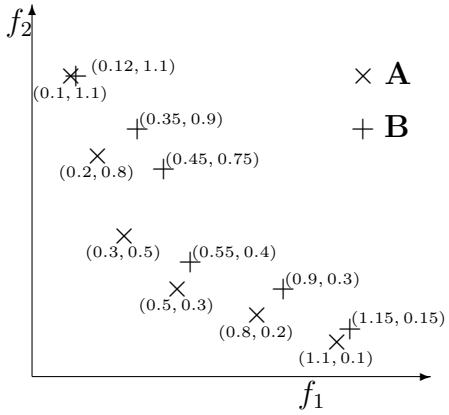
Símbolos	Descrição/Conteúdo	Tipo
n_{pop}	tamanho da população	$\mathbb{R}$
$n_{pop}-1$	nº máximo de caixas intervalares entre soluções	$\mathbb{R}$
$\mathbf{des}_t$	desempenho da população	Vetor: $\mathbb{R}^{n_f}$
$\mathbf{f}_{\mathbf{x}^k}$	desempenho do indivíduo k	$\mathbb{R}^{n_f}$
$[\mathbf{F}]_0$	caixa intervalar inicial	$\mathbb{IR}^{n_f}$
$[\mathbf{F}]$	caixa intervalar corrente	$\mathbb{IR}^{n_f}$
$[\mathbf{F}]'_{\mathbf{1}}$, $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{2}}$	caixas intervalares temporárias	$\mathbb{IR}^{n_f}$
$[\mathbf{F}]_{\mathbf{ind}}$	índices dos indivíduos internos a $[\mathbf{F}]$	Vetor: $\mathbb{R}$
$[\mathbf{F}]'_{\mathbf{1\ ind}}$, $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{2\ ind}}$	índices dos indivíduos internos a $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{1}}$ e $[\mathbf{F}]'_{\mathbf{2}}$	Vetor: $\mathbb{R}$
$\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$	caixas intervalares	Fila: $\mathbb{IR}^{n_f}$
$\mathbf{Q}^v_{[\mathbf{F}]}$	índices dos indivíduos nos vértices	Fila: $\mathbb{R}$
$\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}$	índices dos indivíduos internos a $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}$	Fila: $\mathbb{R}$
$v(\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}\{i\})$	volume da caixa armazenada em $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}\{i\}$	$\mathbb{R}^{n_f}$
$\sigma_{v(\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}\{i\})}$	desvio padrão dos volumes $v(\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}\{i\})$	$\mathbb{R}$

conjuntos de pontos **A** e **B** e, ocasionalmente um terceiro conjunto C; b) a fronteira de Pareto $\mathbf{Y}^*$ não está explicitada para deixar mais claros os exemplos gráficos. Para o leitor que deseje examinar métricas, basta observar que $\mathbf{Y}^*$ é formado por todos os pontos eficientes existentes no gráfico; c) os conjuntos avaliados são, dentro de seu grupo, não dominados; d) índices quando acrescentados denota o conjunto sobre o qual a métrica foi calculada; e) os cálculos para obtenção dos resultados mostrados nas figuras foram arredondados com precisão de 0.001; f) não empregou-se métrica MB[I] normalizada por causa da simplicidade dos testes, sendo utilizado o resultado direto do algoritmo da Tab.3.11; e g) durante a avaliação de caso de teste, as métricas são marcadas com o sinal "$\surd$" para indicar a aprovação da métrica, e com o "?" para indicar que a métrica não obteve resultado satisfatório para a avaliação dos conjuntos solução.

Caso 1: dominância completa entre conjuntos solução

No primeiro estudo, mostrado pela Fig. 3.9, é fácil notar que o conjunto **A** domina completamente **B**, e ainda que **A** é melhor distribuído que **B**.

Como pode ser visto, as métricas apontam **A** melhor que **B** e por isso todas são avaliadas positivamente. Cada componente de **B** é dominado por pelo menos um componente de **A**. Nota-se claramente que a métrica TE contabiliza a presença dos elementos de **A** em $\mathbf{Y}^*$. Entretanto, considere que



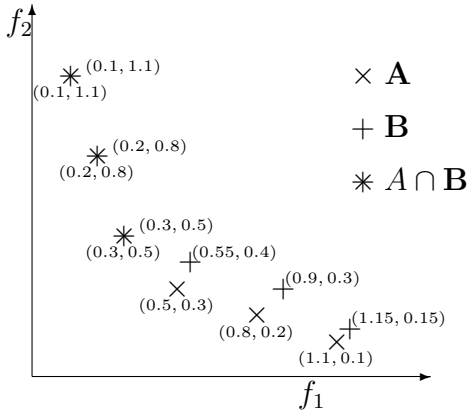
Métrica	**A**	**B**	OK
TE	0	1	$\surd$
$\mathcal{C}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$; $\mathcal{C}_{\mathbf{B},\mathbf{A}}$	6	0	$\surd$
HVR	1	0.82	$\surd$
$\mathcal{S}$	0	0.08	$\surd$
$\triangle$	0	0.16	$\surd$
MB[I]	1	3	$\surd$

Fig. 3.9: Dominância completa do conjunto **A** em relação ao conjunto **B**.

os conjuntos **A** e **B** fossem translados de tal forma que mantivessem o mesmo posicionamento entre si, porém com nenhum ponto de **A** em $\mathbf{Y}^*$. Neste caso, a métrica não deixaria claro quem teria a melhor ou pior fronteira.

Caso 2: dominância forte entre conjuntos solução

A Fig. 3.10 demonstra uma situação na qual os elementos de **A** dominam fortemente os elementos de **B**.



Métrica	**A**	**B**	OK
TE	0	0.5	$\surd$
$\mathcal{C}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$; $\mathcal{C}_{\mathbf{B},\mathbf{A}}$	3	0	$\surd$
HVR	1	0.93	$\surd$
$\mathcal{S}$	0	0.02	$\surd$
$\triangle$	0	0.06	$\surd$
MB[I]	1	1.25	$\surd$

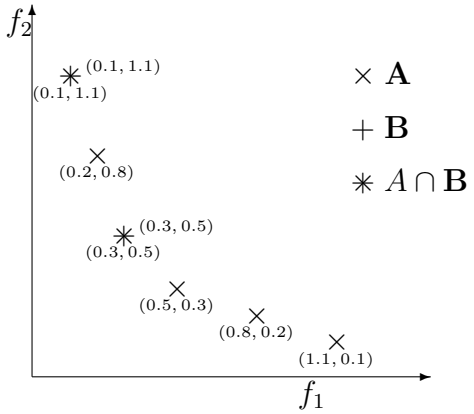
Fig. 3.10: **A** domina **B** fortemente.

Neste caso, também não há dúvidas sobre a superioridade do conjunto **A**. As métricas convergem para mostrar esse resultado. Comparando com o

Caso 1, observa-se que as métricas foram sensíveis à melhoria do conjunto **B** deste exemplo em relação ao anterior.

Caso 3: dominação fraca entre conjuntos solução

A Fig. 3.11 expõe um caso onde ambos conjuntos soluções retornam corretamente pontos na fronteira eficiente. No entanto, está claro que o resultado **A** é superior a **B**, pelo número de soluções geradas.



Métrica	**A**	**B**	OK
TE	0	0	?
$\mathcal{C}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$; $\mathcal{C}_{\mathbf{B},\mathbf{A}}$	0	0	?
HVR	1	0.79	$\surd$
$\mathcal{S}$	0	0	?
$\triangle$	0	0.53	$\surd$
MB[I]	1	0.00	?

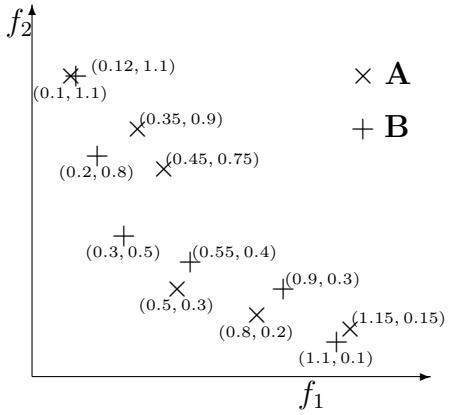
Fig. 3.11: **A** domina **B** fracamente.

As fronteiras eficientes **A** e **B** estão completamente sobre $\mathbf{Y}^*$, mas o conjunto **A** possui mais pontos que **B**. A métrica Espalhamento acusa distribuição de **B** inferior a de **A**, por **B** não possuir pontos nas extremidades. Caso os dois únicos pontos de **B** estivessem nos extremos, a métrica também retornaria $\triangle_B = 0$ indicando igualdade com **A**, e então, somente a métrica Hipervolume acusaria a superioridade de **A**. MB[I] aponta que o conjunto mais bem distribuído é **B**. No entanto, o número de soluções oferecidas em **A** deixa ele em vantagem em relação a **B**. Logo, a técnica MB[I] falha neste caso.

Caso 4: conjuntos solução de desempenho equivalente

A Fig. 3.12 exibe uma situação onde visualmente não há como afirmar que um grupo de soluções supera o outro. Pela figura, nenhuma fronteira é completamente eficiente.

As métricas TE e $\mathcal{C}$ concordam entre si apontando equivalência em desempenho do conjunto **A** em relação ao conjunto **B**. Por outro lado, as métricas que medem a distância entre as soluções apontam que o conjunto **B** contém



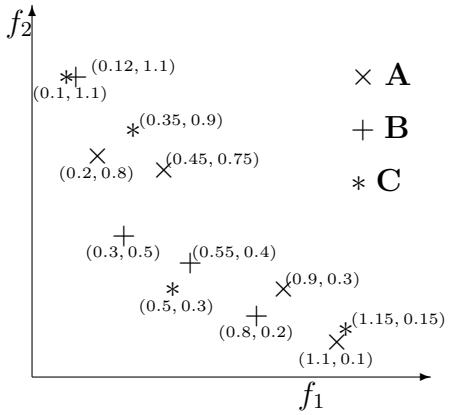
Métrica	**A**	**B**	OK
TE	0.5	0.5	√
$\mathcal{C}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$; $\mathcal{C}_{\mathbf{B},\mathbf{A}}$	3	3	√
HVR	0.90	0.94	√
$\mathcal{S}$	0.08	0.02	?
△	0.14	0.03	√
MB[I]	3.50	1.75	√

Fig. 3.12: **A** e **B** tem desempenho melhor sobre o outro em três pontos.

soluções mais uniformemente distribuídas que **A**. A métrica do Hipervolume, destinada a medir tanto proximidade com $\mathbf{Y}^*$ quanto distribuição, apresenta superioridade de **B**. Idem para MB[I].

Caso 5: comparação entre três conjuntos solução

A Fig. 3.13 apresenta um caso interessante onde os conjuntos internamente não dominados **A**, **B** e **C** têm, aparentemente, desempenho superior um ao outro.



Métrica	**A**	**B**	**C**	OK
TE	0.33	0.33	0.33	√
$\mathcal{C}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$; $\mathcal{C}_{\mathbf{A},\mathbf{C}}$	-	0	2	√
$\mathcal{C}_{\mathbf{B},\mathbf{A}}$; $\mathcal{C}_{\mathbf{B},\mathbf{C}}$	2	-	1	√
$\mathcal{C}_{\mathbf{C},\mathbf{A}}$; $\mathcal{C}_{\mathbf{C},\mathbf{B}}$	0	2	-	√
HVR	0.87	0.93	0.76	?
$\mathcal{S}$	0.18	0.16	0.05	?
△	0.18	0.38	0.30	?
MB[I]	6.5	10.8	25.8	?

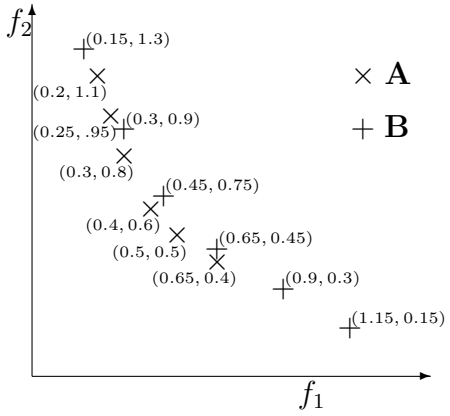
Fig. 3.13: Os conjuntos **A**, **B** e **C** são, entre si, equivalentes.

Ao comparar três conjuntos simultaneamente, as métricas TE e $\mathcal{C}$ convergiram para indicar, novamente, equivalência entre os três conjuntos solução.

Analisando as outras medições, a métrica $\mathcal{S}$ apresenta o conjunto **C** como melhor, $\triangle$ indica **A**, o HVR mostra **B** como melhor e MB[I] registra superioridade do conjunto **A**. Em outras palavras, não há convergência para o conjunto com a melhor distribuição.

Caso 6: uniformemente de distribuição dos conjuntos solução

A Fig. 3.14 mostra uma situação onde **A** e **B** estão distribuídos uniformemente, porém **B** possui soluções em uma extensão superior a **A**.



Métrica	**A**	**B**	OK
TE	0	0.5	$\surd$
$\mathcal{C}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$; $\mathcal{C}_{\mathbf{B},\mathbf{A}}$	3	0	$\surd$
HVR	0.94	0.90	$\surd$
$\mathcal{S}$	0.02	0.08	$\surd$
$\triangle$ ($\triangle_{\mathbf{Y}^*} = 0.08$)	0.43	0.11	$\surd$
MB[I]	0.46	1.46	$\surd$

Fig. 3.14: Uniformidade e extensibilidade das soluções de **A** e **B**.

Quatro métricas registram superioridade de **A**. Contudo, como foi abordado no Capítulo 4, é desejado que as soluções tenham soluções ao longo das extremidades da fronteira de Pareto, portanto seguindo este critério **B** tem conjunto mais representativo.

Conclusões sobre as métricas

Nos casos de comparação de conjuntos apresentados pôde ser observado que as métricas atingem o objetivo ao qual foram propostas. No entanto, nenhuma delas cobre adequadamente e simultaneamente os quesitos de proximidade da fronteira de Pareto e de distribuição uniforme dentro do conjunto solução. Dentre as métricas apresentadas, para o capítulo de testes decidiu-se por empregar a métrica TE para medir proximidade e MB[I] para medir uniformidade de conjuntos solução pela simplicidade de implementação e pelos poucos parâmetros exigidos.

3.8 Considerações Finais

Conforme discutido neste capítulo, são várias as as formas de se abordar a otimização robusta. A forma adotada nesta Tese, descreve a otimização robusta como um problema min max, ou seja, como a minimização da máxima interferência da incerteza. Em outras palavras, o problema de otimização robusta consiste em encontrar os minimizadores com os menores valores de desempenho quando observado pior caso de incerteza. Uso de Análise Intervalar para contabilização da ação das incertezas é vantajoso quando o parâmetro de incertezas aparece apenas um vez na expressão formal do problema de otimização. Nestes casos a função objetivo de inclusão é mínima e a computação das incertezas é feita com apenas um cálculo. Por outro lado, quando há múltiplas ocorrências do parâmetro de incerteza, a função objetivo de inclusão mínima é gerada a partir da divisão do parâmetro de incertezas em subpavimentos e da computação isolada de cada um destes subpavimentos. A precisão da função de inclusão e o esforço computacional crescem com o número de subpavimentos, podendo deixar a aplicação do método intervalar inviável.

Três novos métodos de otimização foram apresentados para resolver o problema robusto proposto, são eles: a) o [I]RMOA I; o [I]RMOA II; e o [I]RMOEA. Todos empregam técnicas intervalares para computar a incerteza e para realizar outros processos internos, no entanto, cada um tem suas particularidades. As considerações sobre cada um deles é dada a seguir.

O [I]RMOA I foi desenvolvido para definir um envelope sobre os minimizadores robustos ao invés de encontrá-los. O envelope é construído da seguinte forma: a partir da amostragem do espaço de busca e do espaço de incertezas, o [I]RMOA I classifica cada exemplar como pertencente às regiões superior ou inferior à fronteira robusta. Observa-se que classificar um exemplar como pertencente à região inferior à fronteira robusta conduz a um custo computacional elevado, pois os espaços de busca e de incertezas devem ser continuamente bisseccionados e investigados. Nota-se que espaços multi-dimensionais sejam eles de busca e/ou de incertezas deixam o processo ainda mais caro. Dentre os pontos fortes do método, destacam-se a simplicidade, o uso de poucos parâmetros e o fornecimento de uma região onde os pontos da fronteira de Pareto robusta se encontram, segundo dada precisão do método. Por causa deste último item, o [I]RMOA I pode ser interpretado como um método de validação.

O [I]RMOA II computa intervalos diretamente nas funções objetivo durante o processo de busca dos minimizadores robustos. Em poucas palavras, o algoritmo subdivide os espaços de busca e de incertezas, utiliza estes intervalos como argumentos das funções objetivo de inclusão e realiza as com-

parações de dominância usando os intervalos gerados pelas funções objetivo de inclusão. Empregando uma filosofia "pessimista", somente são excluídos os intervalos que, seguramente, não contém minimizadores. Como conseqüência, o [I]RMOA II garante encontrar todos os minimizadores robustos. A garantia do método depende das funções objetivo de inclusão; quando for possível assumir que elas sejam monotônicas e convergentes (veja a Fig. 2.5) o [I]RMOA II converge garantidamente para o conjunto solução. Mas, a garantia do [I]RMOA II custa caro; qualquer intervalo com uma ínfima probabilidade de conter minimizadores robustos não pode ser excluído. Assim o [I]RMOA II mantém armazenado em sua estrutura de dados todas as caixas intervalares candidatas a conterem minimizadores. Se fosse utilizada uma filosofia "otimista" (2.8) a estrutura de dados poderia ser otimizada, o esforço computacional seria menor, mas em contrapartida, a garantia de encontrar todos os minimizadores seria perdida.

O [I]RMOEA é um método híbrido que associa intervalos a algoritmos evolucionários, especificamente, o grupo dos Algoritmos Genéticos. O processo de busca das soluções robustas é composto por etapas tradicionais dessa classe de algoritmos, sendo que os vínculos com os métodos intervalares ocorrem na computação da incerteza, no tratamento das funções de restrição, no processo de seleção e na escolha de soluções na fronteira robusta. No último caso, quando a fronteira robusta tem mais soluções candidatas que o número máximo estabelecido por n_{pop}. O custo computacional é fixo por geração e menos sensível à dimensionalidade dos espaços de busca e de incertezas que os demais algoritmos apresentados.

Além dos algoritmos, este capítulo apresentou como pode ser feito o tratamento de restrições com métodos intervalares. As funções de restrição são escritas na forma de funções de inclusão. Assumindo-se que estas funções são monotônicas e convergentes, elas asseguram a exclusão de porções não viáveis do espaço de busca. Claramente, elas são também dependentes da dimensionalidade dos espaços de busca e de incertezas.

As técnicas de nicho tradicionais buscam descobrir informações de proximidade entre as soluções. O esforço para medir essas distância é considerado como "alto" por diversos pesquisadores. Refletindo sobre essa questão de custo, elaborou-se a técnica de Nicho por Bissecção Intervalar NB[I] que usa um mecanismo diferente para criar nicho que é independente da medida da distância entre as soluções. As bissecções no espaço dos objetivos separam a cada iteração os nichos em duas partes. As soluções internas em cada nicho são também separadas nos novos nichos gerados de acordo com os seus valores de desempenho. Sobre as soluções que participam de um mesmo nicho, seja lá que critério seja tomado, pode-se afirmar que elas são vizinhas segundo aquele critério. Em princípio, os nichos deixam pontos vizinhos agrupados, mas há

exceções como pôde ser visto na Fig. 3.7. O único parâmetro é o número de rodadas de bissecção r_{bis}, que na verdade é o critério de parada. Outros critérios de parada podem substituir r_{bis}, como por exemplo a definição de um "tamanho" máximo para o nicho.

A métrica por bissecção de intervalos MB[I] foi desenvolvida para medir a uniformidade de conjuntos compostos por elementos não dominados entre si. Sucintamente, a métrica bissecciona o espaço dos objetivos até que todas as soluções estejam "unidas" por uma caixa intervalar. A uniformidade do conjunto é medida pelo desvio padrão dos volumes dessas caixas. No entanto, o resultado deve ser comparado com um valor de referência calculado sobre uma fronteira de Pareto cujos pontos sejam conhecidos, ou ainda, a métrica pode ser utilizada comparar dois conjuntos soluções quaisquer. Menor valor de desvio padrão, melhor distribuição de conjunto solução.

4. VALIDAÇÃO NUMÉRICA DOS ALGORITMOS PARA OTIMIZAÇÃO ROBUSTOS

A otimização robusta tem uma formulação mais complexa que a otimização tradicional, e conseqüentemente, os métodos para resolvê-la são também mais elaborados. Os algoritmos para tratar problemas de otimização robusta apresentados neste trabalho carecem agora de serem validados. Neste contexto, o termo "validação numérica" é empregado para representar os procedimentos de observação, comparação e avaliação do grau de fidelidade dos algoritmos com suas especificações técnicas, através de simulações implementadas com uso de funções teste de minimização. Os métodos são considerados "validados" se for comprovado que eles conseguem resolver, dentro dos limites de precisão definidos, os problemas teste propostos. Além da validação, foram analisados outros aspectos considerados importantes para avaliação de quaisquer métodos numéricos como a flexibilidade de adaptação a problemas diferentes, simplicidade de escolha dos parâmetros e esforço computacional para executar a tarefa de otimização.

Geralmente, a validação dos algoritmos é feita comparando-se com outros similares anteriormente criados para resolver o mesmo tipo de problema. Entretanto, não foram encontrados métodos intervalares para o modelo de otimização multi-objetivo robusta definido nas expressões (3.9-3.18). Outros métodos, como descrito por Kouvelis e Yu [75], resolvem a tarefas de maximização da incerteza e minimização das funções objetivo utilizando-se métodos puramente determinísticos que analisam todo o espaço de busca. Adicionalmente, se as funções objetivo e de restrições do problema robusto formarem uma região convexa, certamente algoritmos quasi-Newton ou que usam direções conjugadas do gradiente e planos de corte podem resolver o problema de forma confiável e eficiente. Boyd e Vandenberghe [13] (pg 13), apresentaram os métodos de pontos interiores como as melhores opções para otimização convexa. Importante observar, que os métodos propostos aqui não competem em velocidade e precisão com os métodos de otimização convexa pois é inversamente proporcional a relação entre esses dois quesitos nos métodos intervalares. Os pontos fortes dos métodos intervalares são: a) independência da convexidade e da continuidade da fronteira Pareto robusta; b) independência do cálculo de derivadas nas funções objetivo; b) globalidade

da busca; c) garantia de computação do pior caso da incerteza; d) garantia de envelopar a fronteira robusta nos métodos [I]RMOA I e [I]RMOA II; e) baixa quantidade de parâmetros; e f) simplicidade dos algoritmos. Por serem grandes as diferenças entre os algoritmos e formulações robustas existentes, decidiu-se por elaborar testes independentes de estudos anteriores.

A natureza dos problemas teste implementados cobrem diversos aspectos complexidades citados acima. A próxima seção descreve os detalhes de como foram organizados os testes e apresentação dos resultados.

4.1 Metodologia

Naturalmente, o desempenho dos algoritmos é sensível à estrutura dos problemas teste. Assim, foram escolhidas 5 funções com diferentes questões de complexidade. Considerando o espaço dos objetivos, esse conjunto de funções cobre situações de multimodalidade no espaço dos objetivos, onde as fronteiras de Pareto robusta podem ter forma convexa ou não convexa, contínua ou descontínua, e algumas possíveis combinações destas características.

Os testes foram organizados e especificados de tal forma que seja facilitada a compreensão do funcionamento dos algoritmos. Os problemas multi-objetivos escolhidos para teste se limitam a casos com dois critérios para auxiliar a análise visual do espaço dos objetivos. As funções teste foram expressadas formalmente sendo descritas algumas de suas características de complexidade com seus respectivos conjuntos solução. Observa-se que as funções utilizadas originaram-se de problemas de otimização tradicional, sendo os parâmetros de incerteza inseridos posteriormente. O efeito da incerteza nas funções teste também foi interpretado. No próximo passo, são definidos os valores dos parâmetros fixos de cada algoritmo, para cada problema. Finalmente, os experimentos são realizados, sendo os resultados mostrados em gráficos são discutidos.

4.2 Funções Teste

Como discutido no texto introdutório do Capítulo 3, a definição do problema de otimização robusta depende da interpretação do projetista. Logo, as funções teste para otimização robusta devem estar em sintonia com os mesmos conceitos da definição formal. Como conseqüência disso, decidiu-se por adaptar funções teste endereçadas para algoritmos multi-objetivos tradicionais uma vez que não foram encontradas funções teste para otimização robusta que sejam referência para o modelo de otimização utilizado neste trabalho.

Além da finalidade de encontrar soluções Pareto, os métodos de otimização multi-objetivo tradicionais também têm sido projetados para maximizar o número de pontos não dominados e ainda que estes pontos estejam espaçados o mais uniformemente possível. Funções teste que não tragam consigo nenhum empecilho quanto a estes dois fatores, podem ser consideradas não eficazes para comparação de desempenho entre algoritmos. Por exemplo, quando existe função objetivo multimodal ou com pontos Pareto isolados, os algoritmos terão mais dificuldade para ter sucesso na busca pela fronteira repleta de pontos homogeneamente distribuídos. Da mesma forma, não convexidade e descontinuidade da fronteira Pareto, presença de funções de restrição e dispersão das soluções no espaço de busca, são fatores que podem complicar a representatividade das soluções eficientes ao longo da fronteira eficiente. Além disso, o desempenho dos métodos intervalares fica comprometido quando a função objetivo de inclusão não for estreita. Em outras palavras, as ocorrências múltiplas de mesmos parâmetros na função objetivo aumenta o pessimismo na computação da função a qual produz um intervalo mais "largo" que é propagado ao longo do processo de otimização. Como conseqüência, os métodos intervalares perdem em precisão e desempenho. Os casos teste apresentados aqui simulam algumas situações citadas acima onde os algoritmos podem encontrar dificuldade de realizar a busca pelos pontos ótimos. As funções teste desta seção foram utilizadas como referência em várias publicações, como por exemplo Barichard e Hao [6], Coello e Sierra [21], Deb [34], Hiroyasu *et al.*2000, Jiménez *et al.*2002 e Hu *et al.*2003. Para encontrar mais detalhes sobre funções teste, veja Deb [32]. As funções teste estão descritas abaixo em duas formas: a) versão tradicional; e b) versão adaptada para otimização robusta.

Função Schaffer 2 (SCH2)A função Schaffer 2 [101] é irrestrita, utiliza uma única variável e se caracteriza pela descontinuidade da fronteira de Pareto. A forma tradicional da função é definida pelas expressões

$$\begin{aligned} \min_{x\in[-5,10]} \quad & f_1(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 1 \\ x-2, & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 4-x, & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ x-4, & \text{se } x > 4; \end{cases} \\ & f_2(x) = (x-5)^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

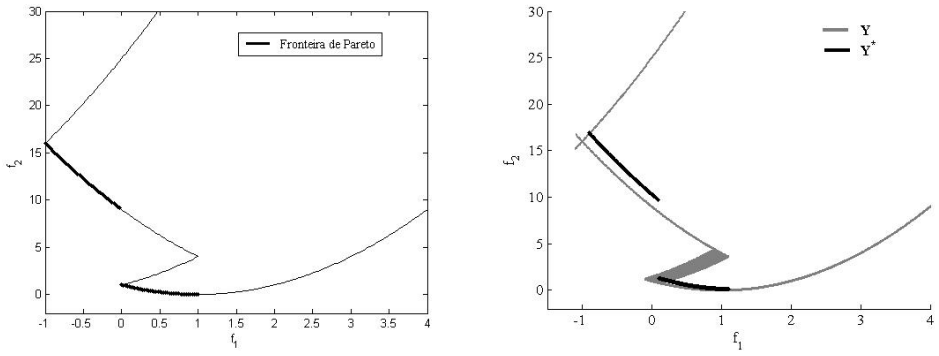
A fronteira de Pareto está destacada na Fig. 4.1(a) e ocorre quando $\mathbf{X}^* \in \{[1,2] \cup [4,5]\}$. A versão robusta de SCH2, veja Fig. 4.1(b), foi criada

adicionando-se o parâmetro de incerteza $\mathbf{p}$ conforme mostrado abaixo

$$\min_{x\in[-5,10]} \max_{\mathbf{p}\in[-\mathbf{0.1},\mathbf{0.1}]} \quad f_1(x,\mathbf{p}) = \begin{cases} -(x+p_1), & \text{se } x \leq 1 \\ (x+p_1)-2, & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 4-(x+p_1), & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ (x+p_1)-4, & \text{se } x > 4; \end{cases} \tag{4.2}$$

$$f_2(x,\mathbf{p}) = \big((x+p_1)-5\big)^2 + p_2.$$

O parâmetro p_1 pode ser interpretado como incerteza paramétrica e p_2 como uma imprecisão na medida de f_2. O conjunto solução permanece inalterado $\mathbf{X}^* \in \{[1,2] \cup [4,5]\}$, mesmo com a presença de incertezas. Importante observar que para dada solução x^*, diferentes $\mathbf{p}$ podem produzir opções ótimas não dominadas entre si. Por exemplo, considere a solução robusta $x_1^* = 4.34$. O pior caso para $f_1(x_1^*, \mathbf{p})$ ocorre quando $p_1 = 0.1$ e para $f_2(x_1^*, \mathbf{p})$ quando $\mathbf{p} = \{-0.1, 0.1\}$. Note que o pior caso de f_1 e de f_2 não podem acontecer ao mesmo tempo, pois usam diferentes instâncias de p_1. Como resultado, a fronteira robusta $\mathbf{Y}^* \not\subset \mathbf{f}(x,\mathbf{p})$. Observa-se ainda que a versão robusta da função SCH contém apenas simples ocorrências x e de $\mathbf{p}$. Logo a função de inclusão neste caso é considerada estreita.



(a) SCH2 - versão original [101]. (b) SCH2 - versão robusta.

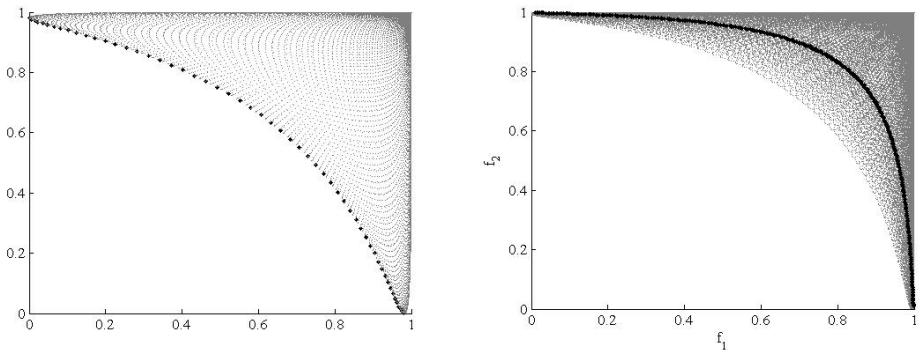
Fig. 4.1: Funções SCH2. Em ambas figuras, a cor cinza representa o espaço dos objetivos; a cor preta as fronteiras de Pareto (a) e fronteira de Pareto robusta (b). Observe que somente alguns pontos da fronteira robusta pertencem a imagem de $\mathbf{f}(x,\mathbf{p})$.

Função Fonseca e Fleming (FON) Fonseca e Fleming [43] apresentaram uma função de teste irrestrita, exponencial, não convexa de n variáveis e dois

objetivos descrita por

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in[-\mathbf{4},\mathbf{4}]} \quad & f_1(\mathbf{x}) = 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{\sqrt{n}})^2}; \\ & f_2(\mathbf{x}) = 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i + \frac{1}{\sqrt{n}})^2}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pelas expressões acima nota-se que os menores valores de desempenho em f_1 e f_2 ocorrem quando $x_i = 1/\sqrt{n}$ e $x_i = -1/\sqrt{n}$, respectivamente. O espaço dos objetivos da função FON é mostrado na Fig. 4.2(a). A imagem da função foi plotada amostrando-se o espaço de busca e de incerteza uniformemente. No entanto, o gráfico apresenta uma maior concentração de pontos nas regiões mais afastadas da fronteira de Pareto. Esta é uma conseqüência da contribuição exponencial na função objetivo e ainda é um fator que dificulta a convergência para a fronteira de Pareto. A versão robusta da função



(a) FON - versão original [43]. (b) FON - versão robusta; n=2.

Fig. 4.2: Funções FON. Em ambas figuras, a cor cinza representa o espaço dos objetivos; a cor preta as fronteiras de Pareto (a) e fronteira de Pareto robusta (b). Entretanto, neste caso é fácil perceber que $\mathbf{Y}^* \subset \mathbf{f}(\mathbf{x}, p)$.

FON foi construída assumindo-se a incerteza conforme mostrado abaixo

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in[-\mathbf{4},\mathbf{4}]} \max_{p\in[1.1,1.3]} \quad & f_1(\mathbf{x}, p) = 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{p}{\sqrt{n}})^2}; \\ & f_2(\mathbf{x}, p) = 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i + \frac{p}{\sqrt{n}})^2}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Similarmente, os menores valores de desempenho ocorrem em f_1 e f_2 quando $x_i = p/\sqrt{n}$ e $x_i = -p/\sqrt{n}$, respectivamente. Mas o pior caso de cada uma dessas funções, para dada solução x_i, acontece sempre no maior valor de p. Neste problema, p pode ser considerado como uma incerteza paramétrica. Nota-se em (4.4) que o parâmetro $\mathbf{p}$ é computado independentemente para cada x_i. Logo a função de inclusão neste caso é considerada estreita.

Família de funções ZDT Deb [31] apresentou um trabalho sobre construção de funções teste 2D. O gerador de funções é descrito pelas equações a seguir

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \quad & f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k); \\ & f_2(\mathbf{x}) = h'(x_{k+1}, \ldots, x_n) \times h(f_1, h'). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Manipulando adequadamente (4.5) criam-se funções teste com as complicações citadas anteriormente. Por exemplo, dependendo do valor de h as características de não convexidade e descontinuidade são introduzidas na fronteira Pareto. Escolhendo h' apropriadamente, tal como uma função multi-modal, dificulta-se a convergência para soluções não dominadas. Por outro lado, se f_1 for não linear ou multi-dimensional, as soluções estarão mais dispersas. Através da (4.5) Zitzler, Deb e Thiele criaram em [130] a família de funções ZDT. Foram escolhidas três delas para realização dos testes. A primeira, ZDT1 é descrita como

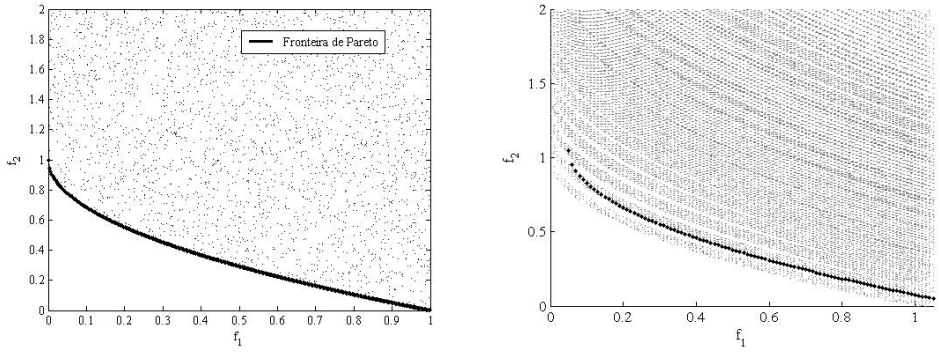
$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1, \\ h'(\mathbf{x}) &= 1 + \tfrac{9}{n-1}\textstyle\sum_{i=2}^{n} x_i, \\ h(f_1, h') &= \sqrt{f_1/h'}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

sendo $n = 1, \ldots, 30$ e o conjunto solução é formado por $x_1 \in [0, 1]$ e $x_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$. Como pode ser visto na Fig. 4.3, a região não dominada no espaço dos objetivos é convexa.

O parâmetro de incerteza foi introduzido em dois pontos do problema ZDT1: a) como incerteza paramétrica em f_1; e b) como imprecisão na formulação de f_2. As expressões em (4.7) apresentam o caso robusto para ZDT1.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \max_{\mathbf{p}\in[\mathbf{0},\mathbf{0.05}]} \quad & f_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = x_1 + p_1; \\ & f_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = h'(\mathbf{x}) \times h(f_1, h', \mathbf{p}). \\ \textit{sendo}: \quad & h'(\mathbf{x}) = 1 + \tfrac{9}{n-1}\textstyle\sum_{i=2}^{n} x_i, \\ & h(f_1, h', \mathbf{p}) = 1 - \sqrt{f_1/h'} + p_2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Observa-se em (4.7) que os parâmetros de busca e incerteza não são computados em multiplicidade. Assim, também para esse caso a função de inclusão pode ser considerada estreita.



(a) ZDT1 - versão original [130]. (b) ZDT1 - versão robusta; n=2.

Fig. 4.3: Funções ZDT1. Em (a) a fronteira de Pareto estende-se no intervalo de $[0, 1]$ para f_1 e f_2. Em (b), fica claro que a fronteira robusta sofre um deslocamento para direita em função do efeito aditivo do parâmetro de incerteza.

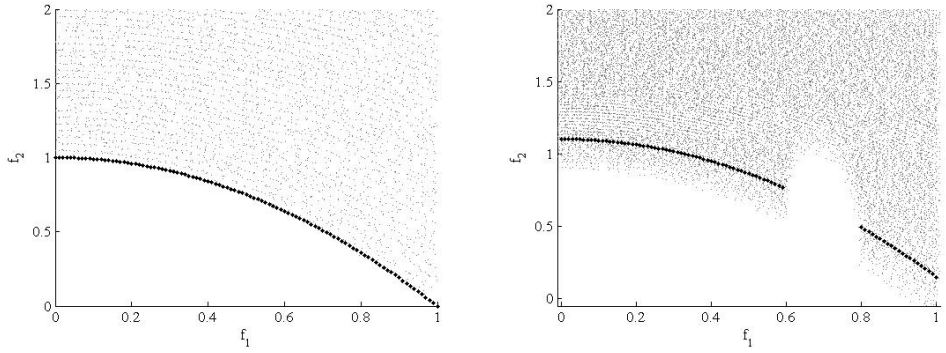
A função ZDT2, descrita abaixo, foi construída similarmente à ZDT1, diferenciando-se pela expressão formal da função h. No entanto, a mudança de h gerou uma fronteira de Pareto com forma não convexa, com pode ser observado na Fig. 4.4.

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1, \\ h'(\mathbf{x}) &= 1 + \tfrac{9}{n-1}\textstyle\sum_{i=2}^{n} x_i, \\ h(f_1, h') &= 1 - (f_1/h')^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Novamente, $n = 1, \ldots, 30$ e o conjunto solução é formado por $x_1 \in [0, 1]$ e $x_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$. A versão robusta da função ZDT2 é mostrada na Fig. 4.4(b) e descrita formalmente em (4.9).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \max_{\mathbf{p}\in[-\mathbf{0.05},\mathbf{0.05}]} \quad & f_1(\mathbf{x}, p) = x_1; \\ & f_2(\mathbf{x}, p) = h'(\mathbf{x}, p) \times h(f_1, h', p). \\ s.a. \quad & g(\mathbf{x}) = \sqrt{(x_1 - 0.7)^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} > 0.1 \\ sendo: \quad & h'(\mathbf{x}, p) = 1 + \tfrac{9}{n-1}(\textstyle\sum_{i=2}^{n} x_i) + p, \\ & h(f_1, h', p) = 1 - (f_1/h')^2 + p. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Neste caso, p representa imprecisão na computação de partes distintas da função f_2. Note que, para dado $\mathbf{x}$, h' cresce com crescimento de p e como



(a) ZDT2 - versão original [130]. (b) ZDT2 - versão robusta; n=2.

Fig. 4.4: Funções ZDT2. Observa-se em (b) a ação da função de restrição; parte do espaço dos objetivos e da fronteira de Pareto robusta são excluídos por serem não viáveis.

conseqüência h decresce. Por outro lado, a segunda contribuição de p produz um efeito direto a f_2; f_2 tem maior valor de desempenho quando o valor de incerteza p é maior. Logo, p age de forma contraditória dentro de f_2. Além do parâmetro de incerteza, foi introduzido a função de restrição quadrática $g(\mathbf{x})$. Observe que a restrição deixa inviável uma parte de fronteira robusta.

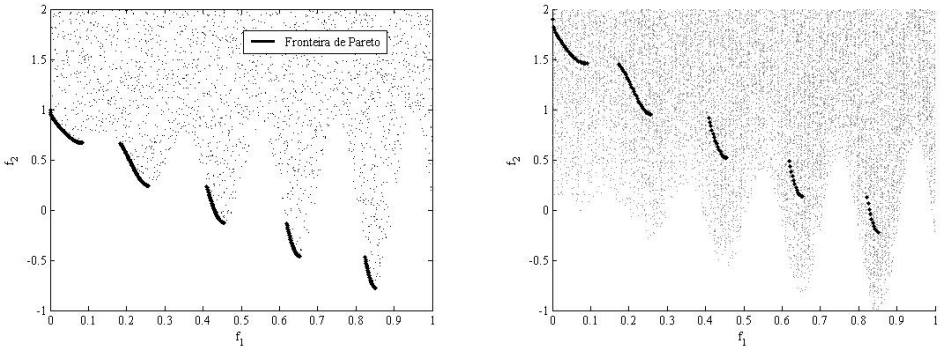
Na expressão robusta da função ZDT2 (4.9) verifica-se as a multiplicidade do parâmetro p. Logo, a função de inclusão não pode ser considerada estreita.

A função ZDT3, mostrada na Fig. 4.5, tem como características a multimodadilidade no espaço dos objetivos e a fronteira de Pareto descontínua. ZDT3 é dada por

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1, \\ h'(\mathbf{x}) &= 1 + \tfrac{9}{n-1}\textstyle\sum_{i=2}^{n} x_i, \\ h(f_1, h') &= 1 - \sqrt{f_1/h'} - (f_1/h')sen(10\pi f_1). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Como em ZDT1 e ZDT2, $n = 1, \ldots, 30$ e a fronteira de Pareto ocorre quando $x_2, x_3, \ldots, x_n = 0$.

A formulação robusta foi obtida inserindo-se o parâmetro de incerteza na função f_2 conforme mostrado abaixo. Observe que também neste caso, p



(a) ZDT3 - versão original [130]. (b) ZDT3 - versão robusta; n=2.

Fig. 4.5: Funções ZDT3. Em (b), observe que a descontinuidade na fronteira de Pareto robusta é mantida na versão robusta.

representa imprecisão na computação de f_2.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \max_{\mathbf{p}\in[-\mathbf{0.1},\mathbf{0.1}]} \quad & f_1(\mathbf{x},) = x_1; \\ & f_2(\mathbf{x}) = h'(\mathbf{x},p) \times h(f_1,h',p). \\ sendo: \quad & h'(\mathbf{x},p) = 1 + \tfrac{9}{n-1}\big((\textstyle\sum_{i=2}^{n} x_i) + p\big), \\ & h(f_1,h',p) = 1 - \sqrt{f_1/h'} - (f_1/h')sen(10\pi f_1). \end{aligned} \tag{4.11}$$

A função ZDT3 (4.11) contém repetidas ocorrências tanto de x_1 quanto de p. Logo, a função de inclusão neste caso não pode ser considerada estreita.

A partir da apresentação das funções teste, a próxima etapa descreve os experimentos com os algoritmos robustos e os resultados obtidos com cada função teste.

4.3 Testes e Resultados

Em um primeiro momento, os testes foram voltados ao estudo comparativo dos métodos, onde os mesmos casos de teste foram realizados. A finalidade foi acompanhar o comportamento de cada algoritmo frente à variação de alguns de seus parâmetros. Na seqüência, alguns testes independentes para cada algoritmo são executados, sendo que o foco principal está nas questões de desempenho e complexidade computacional.

Os critérios para a avaliação dos métodos foram definidos como se segue. Primeiramente, determinou-se uma aproximação para o conjunto de mini-

mizadores robustos $\mathbf{X}^*$, o conjunto solução discreto $\mathbf{X}_d^* \subset \mathbf{X}^*$, para servir de comparação. Alternativamente, utilizou-se a imagem de $\mathbf{X}_d^*$, $\mathbf{Y}_d^* \subset \mathbf{Y}^*$, quando a discussão dos resultados foi realizada no espaço dos objetivos. Os conjuntos $\mathbf{X}_d^*$ e $\mathbf{Y}_d^*$ de cada função teste foram obtidos com a discretização dos espaços de busca e de incerteza, seguida pela computação das funções objetivo e das fronteiras robustas. Finalizando as notações, o conjunto solução encontrado pelos algoritmos e sua respectiva imagem foram simbolizados por $\mathbf{X}_s^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$. Em segundo lugar, as avaliações dos métodos foram baseadas nas propostas de cada algoritmo. A proposta do [I]RMOA I é de envolver a fronteira de Pareto robusta por duas regiões demarcadas pelos elementos de $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$, segundo dada precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$. Então, o [I]RMOA I será considerado aprovado quando $\mathbf{Y}_d^* \subset [\mathbf{Y}]'/(\mathbf{K}^- \cup \mathbf{K}^+)$. Por outro lado, os algoritmos [I]RMOA II e [I]RMOEA têm a finalidade de encontrar o conjunto solução para a otimização robusta. Para esses casos utilizou-se, quando necessário, a métrica da TE para quantificar a proximidade da fronteira robusta encontrada com $\mathbf{Y}_s^*$ e a métrica por bissecção intervalar MB[I] para qualificar a distribuição dos pontos na fronteira. No entanto, nos testes do [I]RMOA II, a análise de proximidade do conjunto solução feita graficamente substitui as métricas citadas acima pois contém informação suficiente para concluir sobre a eficiência do método. A Tab.4.1 resume as características dos problemas robustos testados e em seguida, os testes são iniciados.

Tab. 4.1: Sumário dos problemas testes para otimização robusta.

Função	$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{p})$	$[\mathbf{X}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$	$[\mathbf{P}] \in \mathbb{IR}^{n_p}$	n_x	n_p
SCH2	(4.2)	$[-5, 10]$	$[-\mathbf{0.1}, \mathbf{0.1}]$	1	2
FON	(4.4)	$[-\mathbf{4}, \mathbf{4}]$	$[1.1, 1.3]$	2	1
ZDT1	(4.5) e (4.7)	$[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$	$[\mathbf{0}, \mathbf{0.05}]$	2	2
ZDT2	(4.5) e (4.9)	$[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$	$[-0.05, 0.05]$	2	1
ZDT3	(4.5) e (4.11)	$[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$	$[-0.1, 0.1]$	2	1

4.3.1 [I]RMOA I

Para cada função teste três tipos de resultados estão apresentados: a) a quantidade de elementos dos conjuntos $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ que demarcam o envelope sobre a fronteira robusta segundo o número de pontos da discretização do espaço de busca; b) o esforço computacional tanto para discretização do espaço de busca, quanto nos processos mais internos do [I]RMOA I; e c) qualidade do envelope sobre $\mathbf{Y}_d^*$ segundo o número de pontos em $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$. Em outras palavras, nestes experimentos foi examinado como o [I]RMOA I se comporta diante dos parâmetros $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$.

[I]RMOA I × SCH2

Nas simulações, empregaram-se $\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = [0.02 : 0.02 : 0.1]$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = [0.02 : 0.02 : 0.1]$. A Fig. 4.6 mostra alguns exemplos de como o número de elementos em $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ variam com $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$.

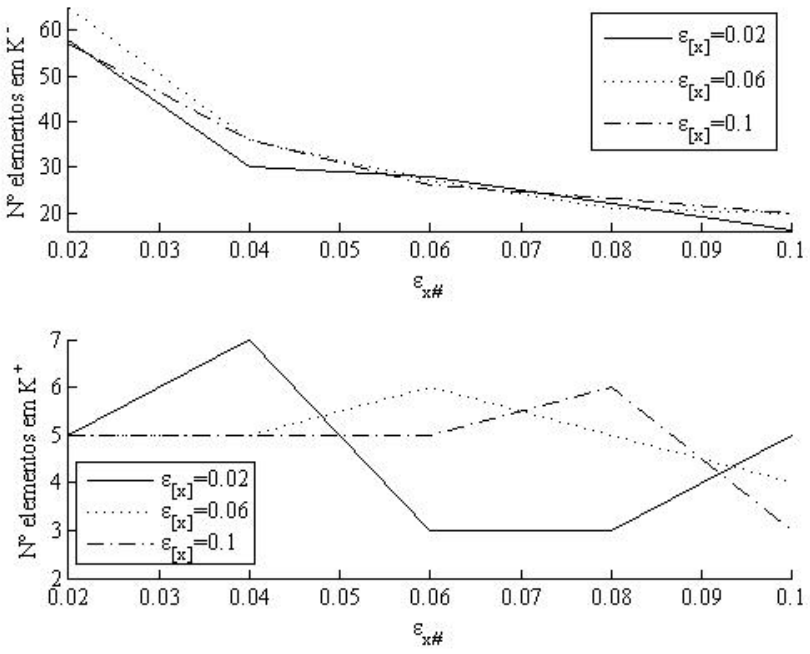


Fig. 4.6: SCH2 - [I]RMOA I: $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+ \times \varepsilon_{\mathbf{x}\#}$. Acima, o número de pontos no conjunto $\mathbf{K}^-$ diminui com o número de amostras. Abaixo, a quantidade de pontos de $\mathbf{K}^+$ não apresenta tendência com a variação de $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$.

Pela Fig. 4.1(b) nota-se que não são necessários muitos pontos em $\mathbf{K}^+$ para definir $\mathbf{Y}^+$. Assim, a relação entre $\mathbf{K}^+$ e $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$ não apresenta nenhuma tendência. Por outro lado, o conjunto $\mathbf{K}^-$ apresentou-se sensível ao número de pontos da função grade.

O custo computacional no [I]RMOA I foi considerado elevado, veja a Fig. 4.7, seja para a realização da discretização inicial com $\mathbf{f}(x, \mathbf{p})$, seja no processo de busca por soluções com $[\mathbf{f}](c([x]), [\mathbf{p}])$ e $[\mathbf{f}]([x], \mathbf{c}([\mathbf{p}]))$.

A qualidade dos envelopes sobre $\mathbf{Y}_d^*$ pode ser observada na Fig. 4.8. De acordo com as informações nas figuras Fig. 4.6 e Fig. 4.8 não percebe-se claramente que o envelope sobre a fronteira robusta é mais preciso para as simulações com maior quantidade de elementos em $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$.

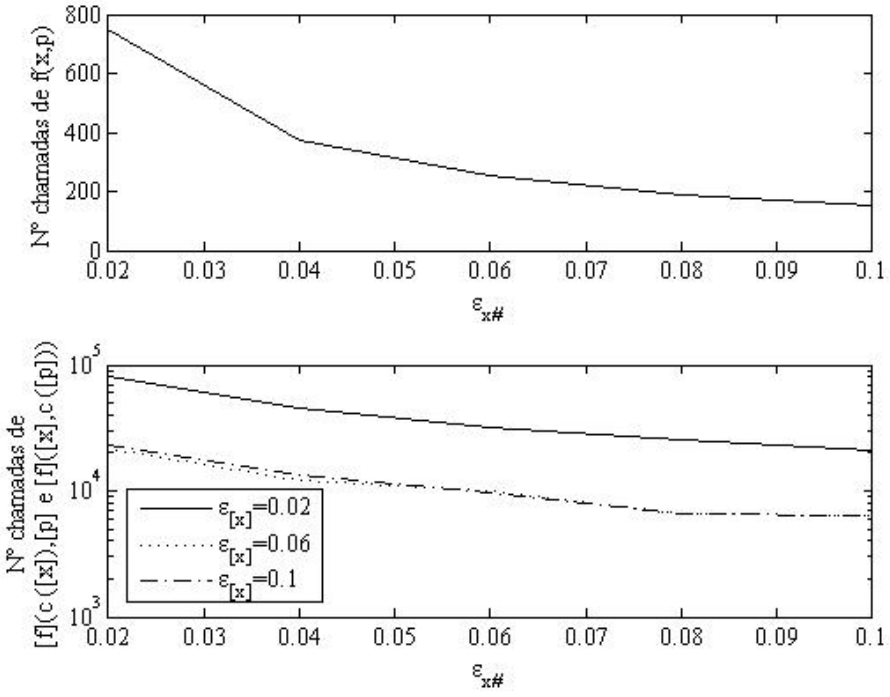
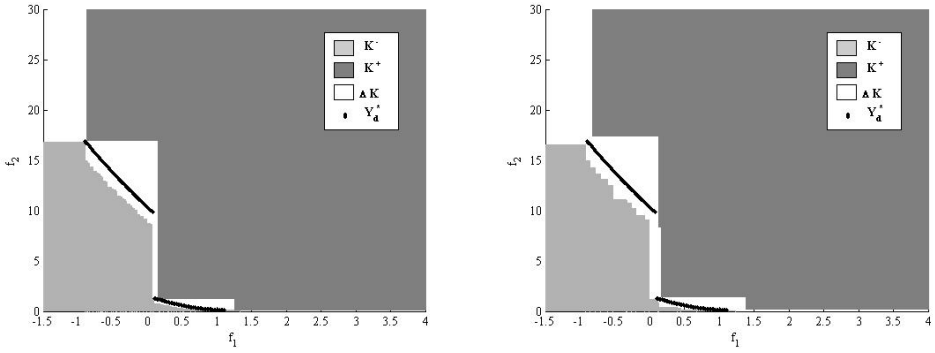


Fig. 4.7: SCH2 - [I]RMOA I: custo computacional. Acima, o esforço na função grade em número de cálculos de $\mathbf{f}(x, \mathbf{p})$. Abaixo, o número de chamadas das funções $[\mathbf{f}](c([x]), [\mathbf{p}])$ e $[\mathbf{f}]([x], \mathbf{c}([\mathbf{p}]))$ (Tab.3.4, linhas 3 e 4).



(a) SCH2 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.02$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.02$). (b) SCH2 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.04$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.08$).

Fig. 4.8: SCH2 - [I]RMOA I: envelopes sobre $\mathbf{Y}_d^*$. Por se tratar de uma fronteira simples para ser envelopada, não está visualmente claro que o aumento de precisão resulta em melhoria de qualidade no envelope.

[I]RMOA I× FON

Para a função FON, foram utilizados $\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = [0.05, 0.1, 0.2 : 0.2 : 1]$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = [0.2 : 0.2 : 1]$. Os resultados encontram-se nas Fig. 4.9, Fig. 4.10 e Fig. 4.11.

Examinando a Fig. 4.9 constata-se que o número de elementos de $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ decresce fortemente nos primeiros pontos no gráfico. Para evidenciar este comportamento, decidiu-se por inserir as simulações com os parâmetros de discretização $\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.05$ e $\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.1$.

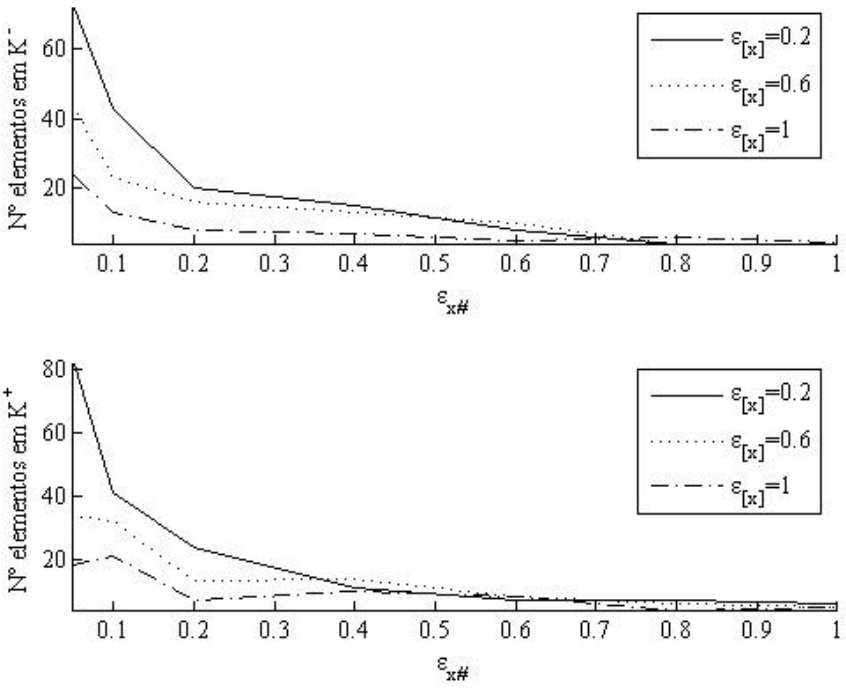


Fig. 4.9: FON - [I]RMOA I: $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+ \times \varepsilon_{\mathbf{x}\#}$. Em ambos os gráficos, o número de pontos nos conjuntos $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ diminuem com o número de amostras.

Os gráficos da Fig. 4.10 apresentam que os custos para para gerar as amostras e para envelopar $\mathbf{Y}_d^*$ são relativamente menores partir de $\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.2$. Conseqüentemente, reduziu-se também a qualidade dos envelopes.

A Fig. 4.11 apresenta duas simulações onde o [I]RMOA I falhou em criar envelopes rigorosos sobre $\mathbf{Y}_d^*$. Isso pode ocorrer quando $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ não é suficientemente menor que $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$ e quando $w([\mathbf{P}]) = \varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ (Tab.3.4, linha 5), pois são condições para gerar funções de inclusões estreitas. A discussão sobre este problema encontra-se detalhada no final desta seção.

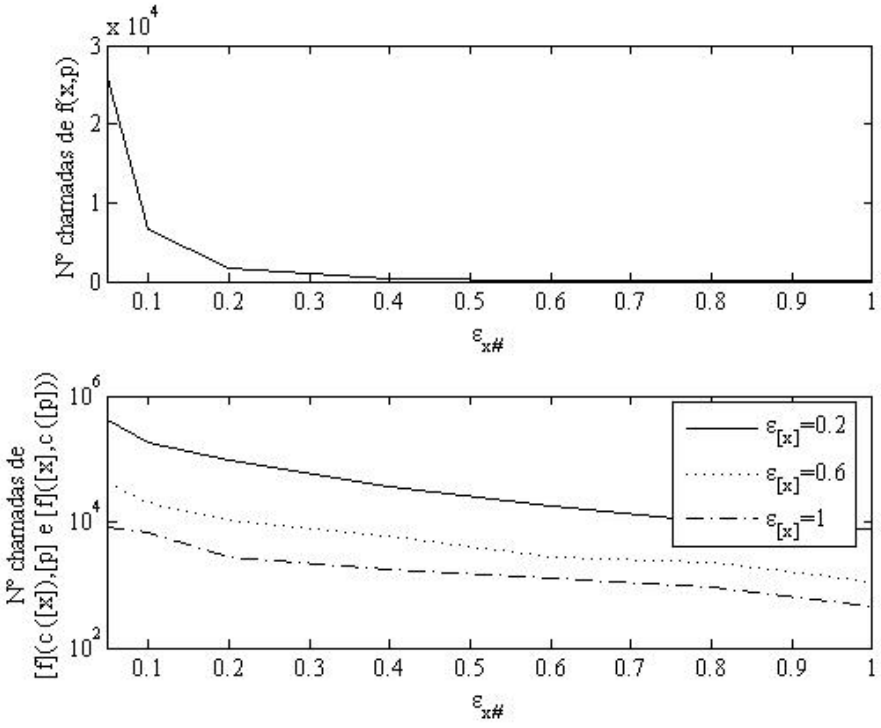
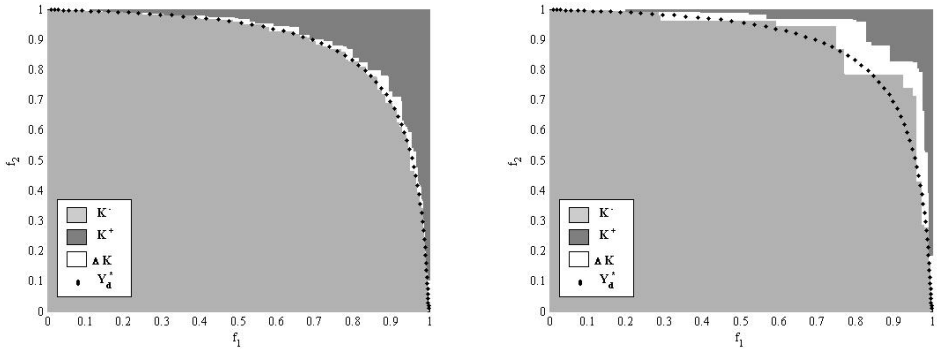


Fig. 4.10: FON - [I]RMOA I: custo computacional. Acima, o esforço na função grade, e a abaixo, o número de chamadas das funções $[\mathbf{f}](\mathbf{c}([\mathbf{x}]), [p])$ e $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}], c([p]))$.



(a) FON ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.2$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.04$). (b) FON ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.5$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.2$).

Fig. 4.11: FON - [I]RMOA I: envelopes sobre $\mathbf{Y}_d^*$. A qualidade do envelope sobre $\mathbf{Y}_d^*$ é melhor para menores valores $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ e $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$. Em (b), claramente o [I]RMOA I falha, pois em alguns pontos $\mathbf{Y}^* \subset \mathbf{K}^-$.

[I]RMOA I× ZDT1

Para a função ZDT1, foram utilizados $\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = [0.02 : 0.01 : 0.1]$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = [0.02 : 0.01 : 0.1]$. Os resultados encontram-se nas Fig. 4.12, Fig. 4.13 e Fig. 4.14.

Observa-se na Fig. 4.12 que os conjuntos $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ contém relativamente muitos pontos para definição do envelope sobre $\mathbf{Y}_d^*$, mesmo para não expressivos valores de $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$, tais como $\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.05$. Isto ocorre por causa da forma do espaço dos objetivos; ZDT1 tem fronteira robusta convexa e contínua.

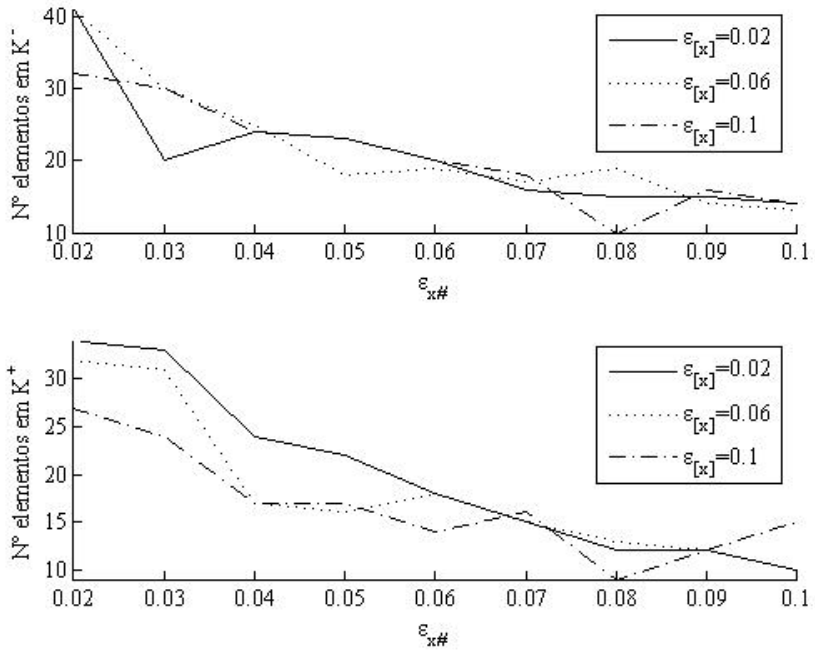


Fig. 4.12: ZDT1 - [I]RMOA I: $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+ \times \varepsilon_{\mathbf{x}\#}$. Em ambos os gráficos, o número de pontos nos conjuntos $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ diminuem com o número de amostras com mais regularidade que com as funções SCH2 e FON.

A Fig. 4.13 comprova novamente que o [I]RMOA I exige considerável esforço computacional para classificar os pontos da função grade.

Dois exemplos de envelopes sobre a fronteira robusta estão expostos na Fig. 4.14. Atente para o fato que o [I]RMOA I falha no caso (a), pois parte da fronteira robusta encontra-se sobre a região definida por $\mathbf{K}^-$. Isso ocorreu porque a discretização do espaço das incertezas foi insuficiente para resultar funções de inclusão mais estreita.

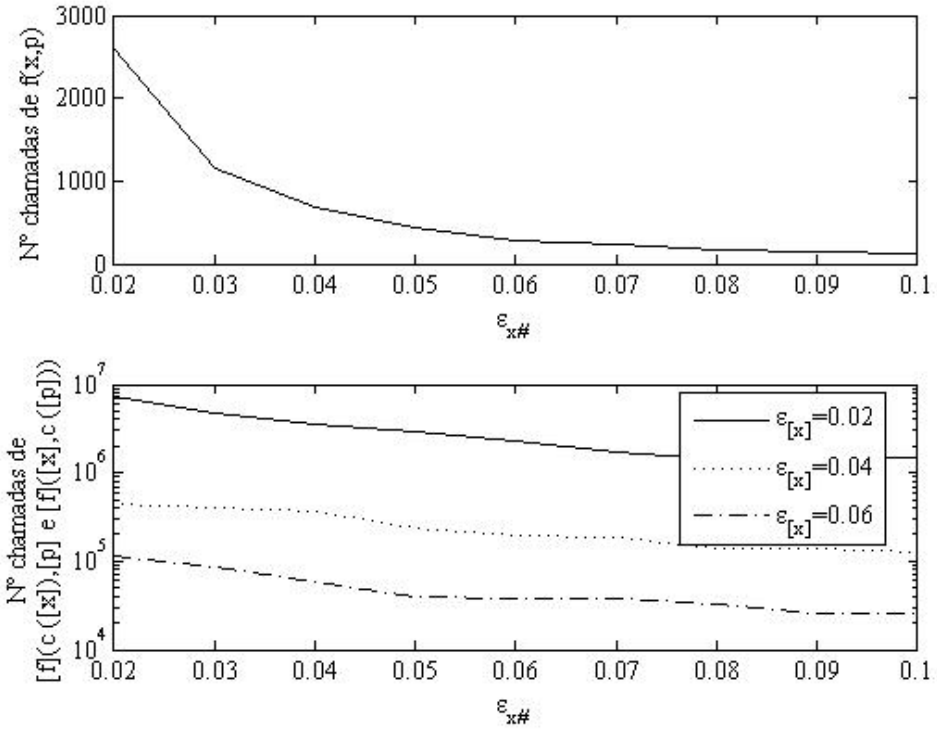
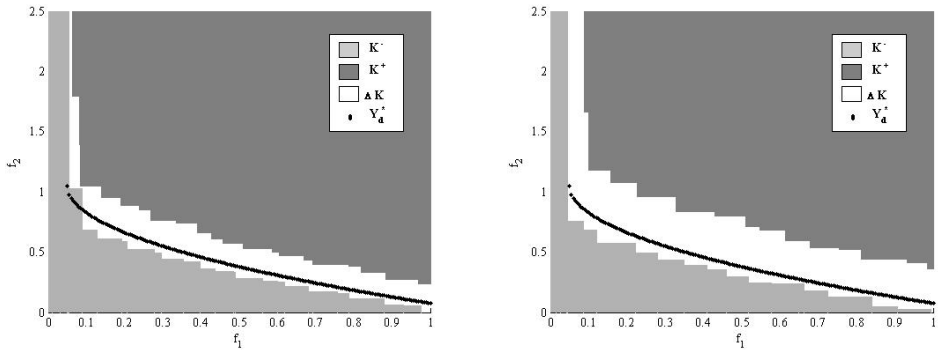


Fig. 4.13: ZDT1 - [I]RMOA I: custo computacional. Acima, o esforço na função grade, e a abaixo, nas funções de inclusão $[\mathbf{f}](\mathbf{c}([\mathbf{x}]), [\mathbf{p}])$ e $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}], \mathbf{c}([\mathbf{p}]))$.



(a) ZDT1 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.02$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.04$). (b) ZDT1 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.04$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.06$).

Fig. 4.14: ZDT1 - [I]RMOA I: envelopes sobre $\mathbf{Y}_d^*$. Em (a), note que alguns pontos de $\mathbf{Y}_d^*$ não são cercados pelo envelope $\mathbf{\Delta K}$. Em (b), o envelope sobre $\mathbf{Y}_d^*$ é realizado com sucesso.

[I]RMOA I× ZDT2

Para a função ZDT2, foram utilizados $\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = [0.02 : 0.02 : 0.1]$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = [0.01, 0.02 : 0.02 : 0.1]$. Os resultados estão apresentados nas figuras Fig. 4.15, Fig. 4.16 e Fig. 4.17.

O número de elementos de $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$, veja na Fig. 4.15, seria maior caso não houvesse restrições. Claramente, a separação da fronteira robusta em duas partes pela função de restrição interferiu na definição dos pontos em $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ que pertenceriam à região excluída pela restrição.

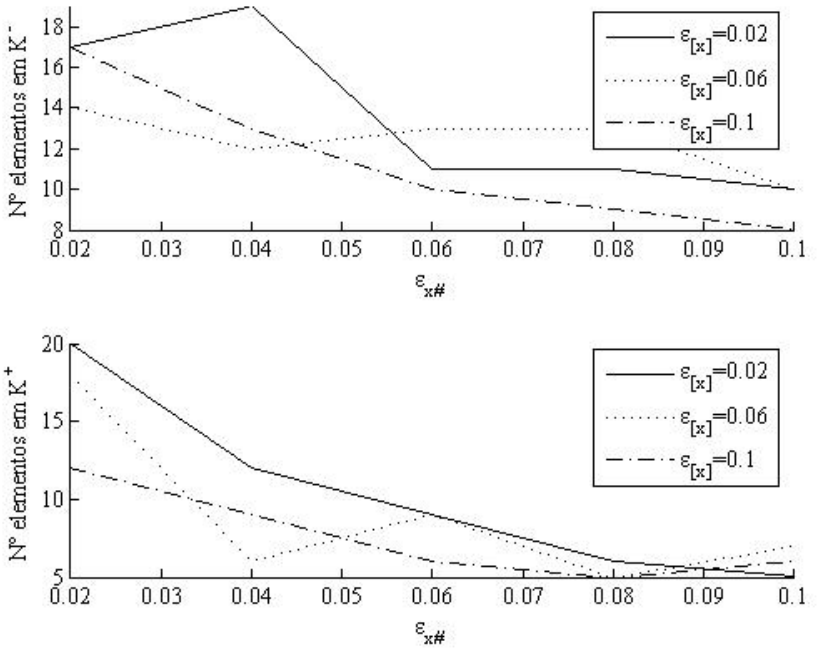


Fig. 4.15: ZDT2: $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+ \times \varepsilon_{\mathbf{x}\#}$. Em ambos gráficos, os trechos onde o número de pontos nos conjuntos $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ crescem com o número de amostras de $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$ indicam que a discretização não foi suficientemente adequada.

A Fig. 4.16 apresenta o custo computacional total, ou seja, está contabilizado as consultas às funções de restrição no início do algoritmo.

O tratamento da função de restrição foi realizado anteriormente à discretização, e portanto, nenhum ponto não viável foi gerado no espaço dos objetivos. Pela Fig. 4.17 não é possível visualizar a imagem da região não viável porque as regiões definidas pelos elementos pertencentes a $\mathbf{K}^+$ e $\mathbf{K}^-$ não levaram em consideração informações das funções de restrições.

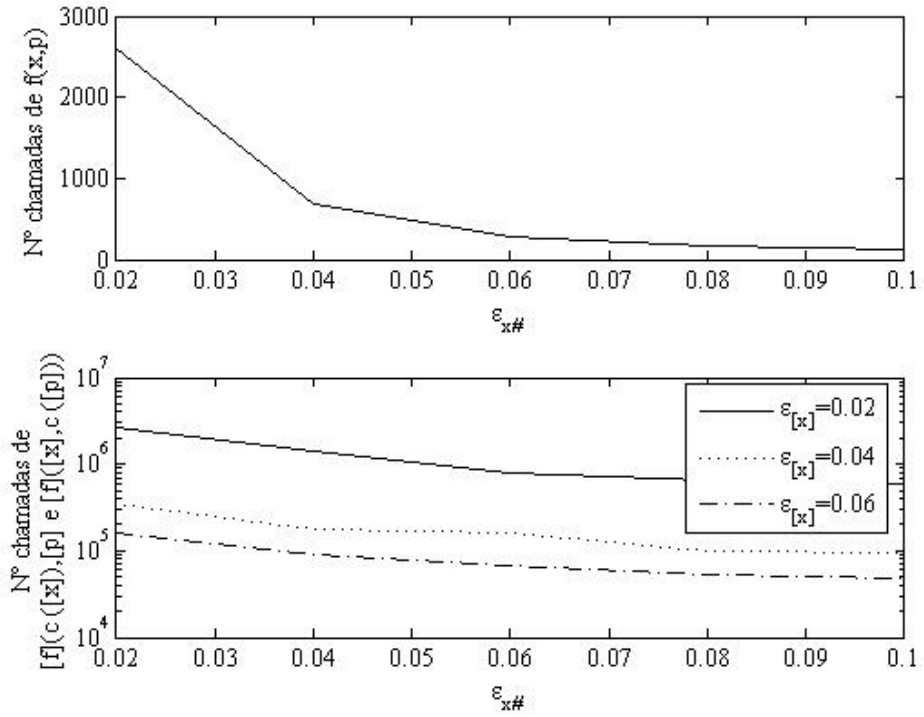
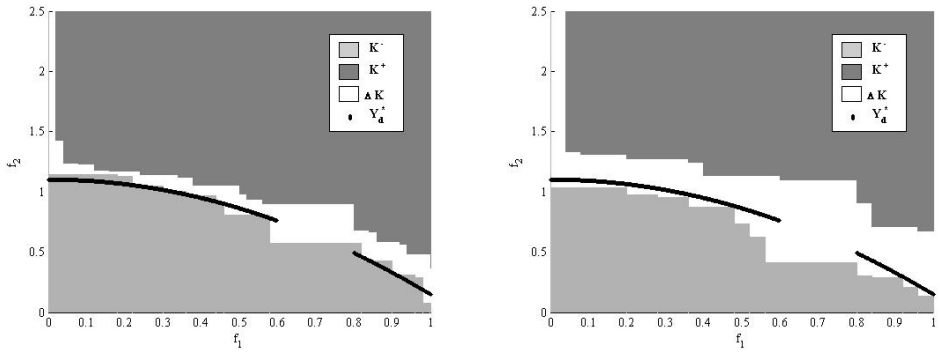


Fig. 4.16: ZDT2: custo computacional. Acima, o esforço da função grade, e a abaixo, o número de chamadas das funções objetivo $[\mathbf{f}](\mathbf{c}([\mathbf{x}]), [p])$ e $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}], c([p]))$.



(a) ZDT2 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.01$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.02$). (b) ZDT2 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.01$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.04$).

Fig. 4.17: ZDT2: envelopes sobre $\mathbf{Y}_d^*$. Em (a), claramente o [I]RMOA I falha pois, em alguns pontos $\mathbf{Y}^* \subset \mathbf{K}^-$.

[I]RMOA I× ZDT3

Para a função ZDT3, foram utilizados $\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = [0.02 : 0.02 : 0.1]$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = [0.02 : 0.01 : 0.1]$. Os resultados estão apresentados nas figuras Fig. 4.18, Fig. 4.19 e Fig. 4.20.

Dentre as funções teste, ZDT3 apresentou-se como a mais difícil de envelopar a fronteira robusta. Isso pode ser comprovado pela Fig. 4.18 que mostra o número reduzido de pontos em $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$.

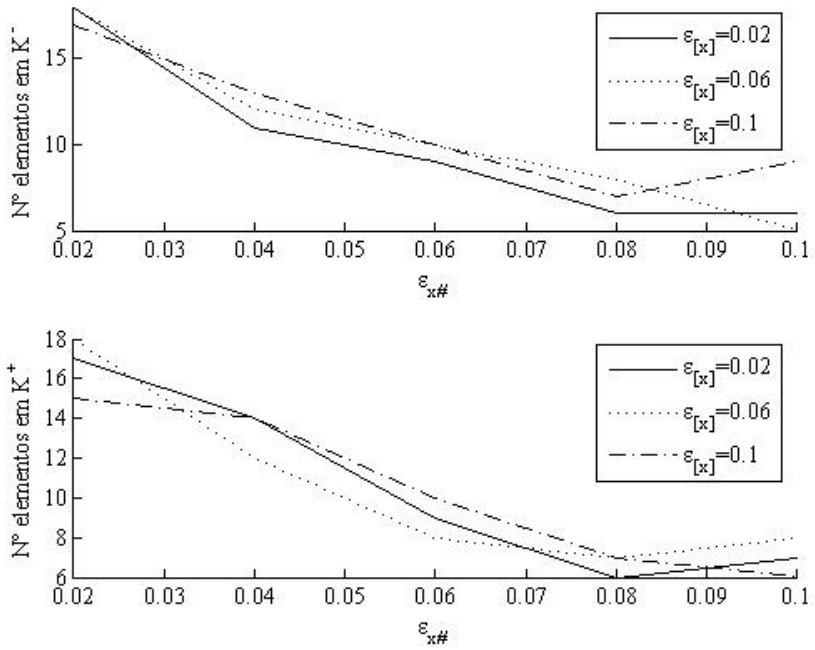


Fig. 4.18: ZDT3: $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+ \times \varepsilon_{\mathbf{x}\#}$. Em ambos gráficos, o número de pontos nos conjuntos $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ diminuem com o número de amostras de $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$.

De acordo com a Fig. 4.19, o custo alto para classificar os pontos discretizados também é confirmado para a função ZDT3.

A Fig. 4.20 exibe dois resultados de envelopes sobre a fronteira robusta. O [I]RMOA I falhou em envelopar $\mathbf{Y}_d^*$ para os valores de $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ e $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$ testados. Isto é resultado das funções de inclusão $[\mathbf{f}](\mathbf{c}([\mathbf{x}]), [p])$ e $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}], c([p]))$ (Tab.3.4, linhas 3 e 4) não terem sido desenvolvidas suficientemente estreitas. Uma forma de corrigir esse problema dividir $[P]$ (Tab.3.4, linhas 5) em subpavimentos $[p]$ menores ainda.

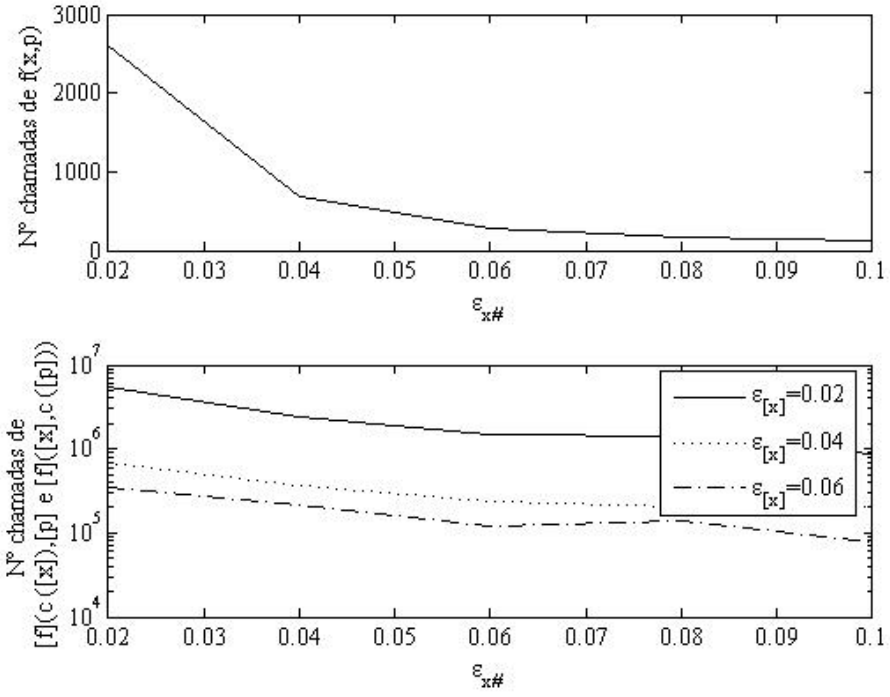
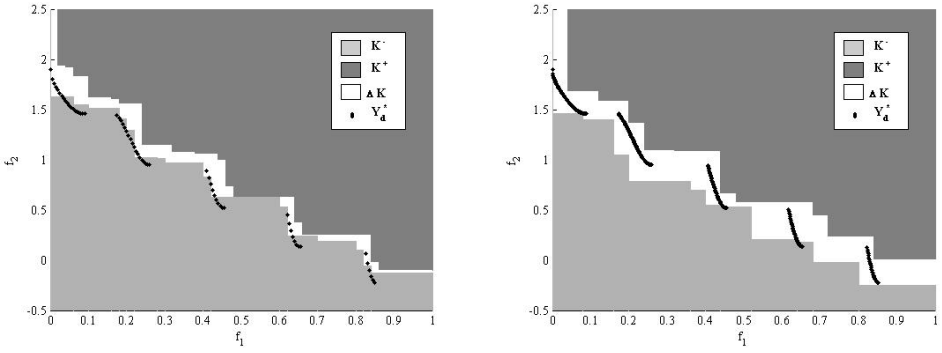


Fig. 4.19: ZDT3: custo computacional. Acima, o esforço da função grade, e a abaixo, o número de chamadas das funções objetivo $[\mathbf{f}](\mathbf{c}([\mathbf{x}]), [p])$ e $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}], c([p]))$.



(a) ZDT3 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.02$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.02$). (b) ZDT3 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.02$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.05$).

Fig. 4.20: ZDT3: envelopes sobre $\mathbf{Y}_d^*$. Ambas as tentativas de envelopar $\mathbf{Y}_d^*$ falham, visto que $\mathbf{Y}_d^* \subset \mathbf{K}^-$. O resultado em (b) sugere que os parâmetro $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ deve ser ainda mais preciso para envelopar satisfatoriamente $\mathbf{Y}_d^*$.

Considerações sobre o [I]RMOA I

De modo geral, os algoritmos de otimização concentram esforços para encontrar "diretamente" as soluções do problema em questão. Diferentemente, o [I]RMOA I busca por envelopar em $\Delta\mathbf{K}$ a região no espaço dos objetivos onde a fronteira de Pareto robusta está, por exemplo, $\Delta\mathbf{K} \subset [\mathbf{Y}]' \setminus (\mathbf{K}^+ \cup \mathbf{K}^-)$ e $[\mathbf{Y}]'$ como definido em (3.13) e (3.14). A partir dessas informações oferecidas pelo [I]RMOA I, pelo menos dois caminhos podem ser utilizados na seqüência. O primeiro seria computar a região no espaço de busca correspondente à imagem de $\Delta\mathbf{K}$ empregando-se de algoritmos de projeção de intervalos, tais como o desenvolvido por Dao em [27]. No entanto, para o contexto presente, existem diversas fontes de incerteza que podem prejudicar o resultado final da projeção de $\Delta\mathbf{K}$. Por exemplo, geralmente $[\mathbf{Y}]'$ contém porções extras de espaço (veja Fig. 3.1) e essas regiões também teriam sua projeção realizada. Neste caso, o resultado da projeção deveria ainda ser submetido à intersecção com o espaço de busca inicial, para eliminar os espaços extras. O segundo caminho seria considerar o [I]RMOA I como um método de validação. Em outras palavras, ele seria utilizado para auxiliar o projetista/decisor a examinar outros algoritmos robustos. Veja como. A precisão continuaria sendo estabelecida pelo parâmetro $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$ e a fronteira robusta do método em teste $\mathbf{Y}_s^*$ deveria obedecer à seguinte inclusão $\mathbf{Y}_s^* \subset [\mathbf{Y}]'/(\mathbf{K}^- \cup \mathbf{K}^+)$.

O [I]RMOA I é caro computacionalmente. O processo interno que mais despende esforço é o FPS (Tab.3.3) e CSC (Tab.3.4). Esse processo se baseia na bissecção do espaço de busca e de incertezas para definir se um ponto pertence a $\mathbf{K}^-$ ou $\mathbf{K}^+$. Logo, a dimensionalidade desses espaços pode inviabilizar a aplicação do método. A qualidade dessa busca, e conseqüentemente o custo, dependem dos parâmetros $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$, $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$, da discretização do parâmetro de incerteza $[\mathbf{P}]$ e da qualidade das funções de inclusão. O parâmetro $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ deve ser suficientemente menor que $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$, pelo menos $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} < \varepsilon_{\mathbf{x}\#}/2$, para garantir que a precisão de busca seja melhor que a precisão da discretização. Além disso, quanto mais $[\mathbf{P}]$ for bisseccinado para gerar subpavimentos mais estreita e mais precisa será a função de inclusão sobre os pontos solução (veja Fig. 3.5). Em outras palavras, subpavimentos $[\mathbf{p}]$ maiores que o adequado podem conduzir a de erros de precisão e conseqüentemente a erros na computação de pertinência das soluções candidatas às regiões $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$.

Portanto, quando utilizou-se n_{sp} adequado para cada teste, fronteira robusta discreta $\mathbf{Y}_s^*$ foi envelopada pelo [I]RMOA I. Considerando o quadro acima e as funções teste definidas anteriormente, o [I]RMOA I foi declarado aprovado.

4.3.2 [I]RMOA II

O método [I]RMOA II não precisa de discretizar o espaço de busca previamente como ocorre no [I]RMOA I. A discretização é realizada durante o processo de otimização, utilizando-se de um parâmetro de precisão para o espaço de busca $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ e um parâmetro de precisão para o espaço de incertezas $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$. Nos testes realizados, $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$ foi mantido constante, e portanto, o comportamento do [I]RMOA II foi examinado variando-se $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$. Para cada função teste três tipos de resultados estão apresentados: a) o número de soluções em relação à $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ juntamente com o esforço computacional medido em número de cálculo de funções objetivo; b) a comparação do conjunto solução $\mathbf{X}_s^*$ com o conjunto solução discreto $\mathbf{X}_d^*$; e c) a imagem do conjunto solução $\mathbf{Y}_s^*$ em relação a fronteira computada $\mathbf{Y}_d^*$.

[I]RMOA II × SCH2

Para a função SCH2, o parâmetro de precisão examinado foi $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = [0.1 : 0.1 : 1]$. Os resultados estão apresentados na Fig. 4.21, Fig. 4.22 e Fig. 4.23.

O número de soluções encontradas pelo [I]RMOA II e o esforço computacional estão mostrados na Fig. 4.21. Observe que, de forma geral, o número de soluções decresce com a diminuição da precisão. No entanto, em alguns trechos o número de soluções permanece inalterado. Nesses trechos, como por exemplo entre $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.5$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.9$, esse comportamento é justificado pois os parâmetros de precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ são equivalentes em termos de precisão.

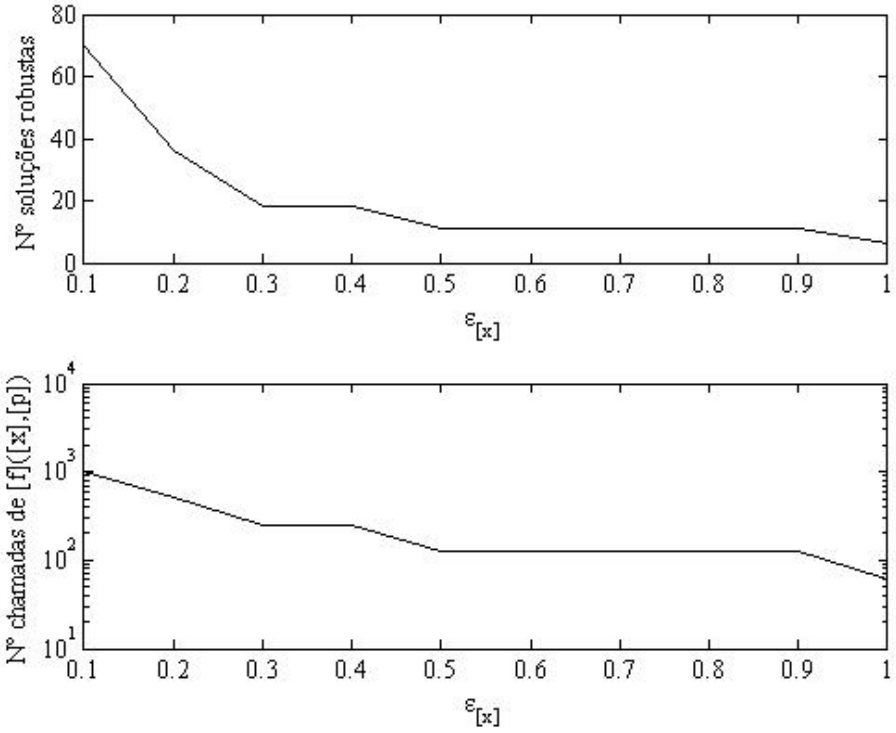


Fig. 4.21: SCH2 - [I]RMOA II: quantitativo de soluções robustas e de esforço computacional segundo o parâmetro de precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$.

A precisão do método e a uniformidade dos conjuntos solução podem ser examinadas na Fig. 4.22. Nota-se que não é necessário utilizar a métrica da TE, pois os conjuntos solução estão em concordância com a proposta de precisão definida pelo parâmetro $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$. A distribuição do conjunto solução homogênea também torna desnecessária a aplicação da métrica MB[I].

A Fig. 4.23 compara $\mathbf{Y}_d^*$ com $\mathbf{Y}_s^*$. Observa-se que o resultado cobre regularmente a fronteira robusta. No entanto, o espaçamento entre as imagens

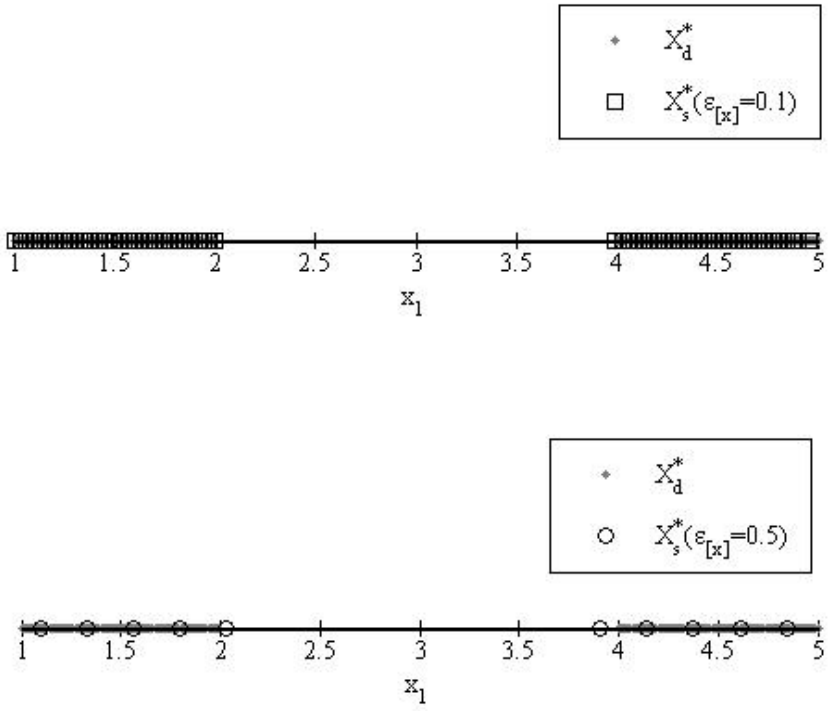
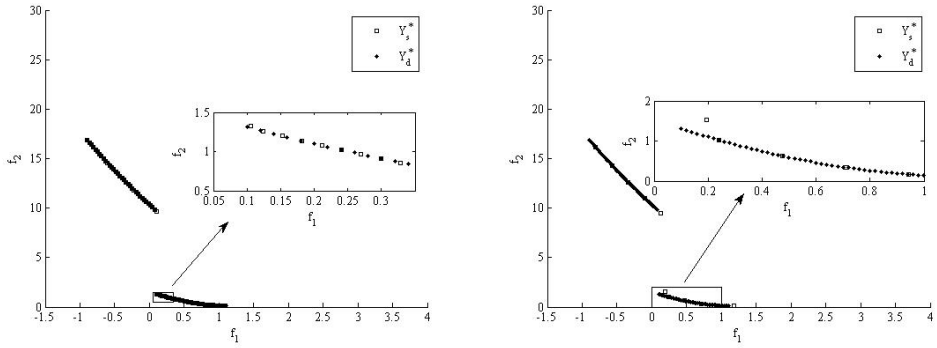


Fig. 4.22: SCH2 - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{X}_d^*$ e $\mathbf{X}_s^*$.

das soluções encontradas $\mathbf{Y}_s^*$ é devido à precisão utilizada em cada simulação.



(a) SCH2 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.1$). (b) SCH2 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.5$).

Fig. 4.23: SCH2 - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$.

[I]RMOA II × FON

Para a função FON, o parâmetro de precisão examinado foi $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = [0.1 : 0.1 : 1]$. Os resultados estão apresentados nas figuras Fig. 4.24, Fig. 4.25 e Fig. 4.26.

O processo de busca do [I]RMOA II mostrou-se independente da não convexidade da função FON. Na verdade, esse processo de busca é somente vinculado aos parâmetros de precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ e $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$. O número de soluções robustas e o esforço computacional estão mostrados na Fig. 4.24.

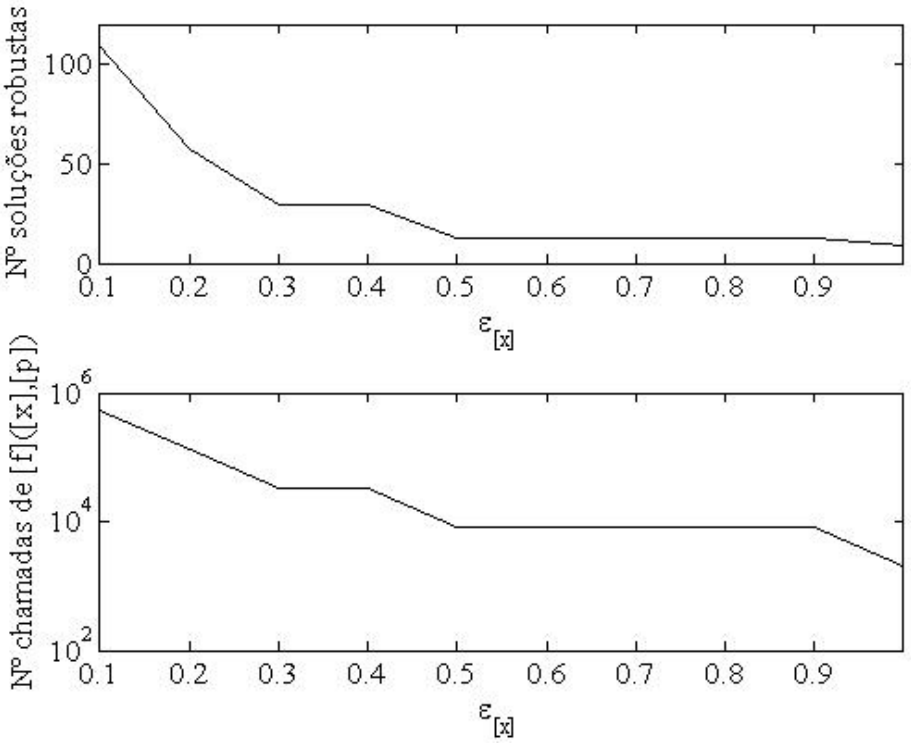


Fig. 4.24: FON - [I]RMOA II: quantitativo de soluções robustas e de esforço computacional segundo o parâmetro de precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$.

A Fig. 4.25 compara os conjuntos solução do [I]RMOA II para duas instâncias de $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$. Visualmente não está claro se a precisão em cada caso foi atendida. Por isso, aplicou-se a métrica TE, segundo a precisão proposta. O resultado foi de 100% de conformidade dos conjuntos $\mathbf{X}_s^*$ em relação a $\mathbf{X}_d^*$.

A imagem de dois conjuntos solução está mostrada na Fig. 4.26. Note que o espaçamento não uniforme no espaço de busca foi substituído por um espaçamento homogêneo no espaço dos objetivos. Esse resultado é devido a ação da técnica de nicho NB[I] no espaço dos objetivos.

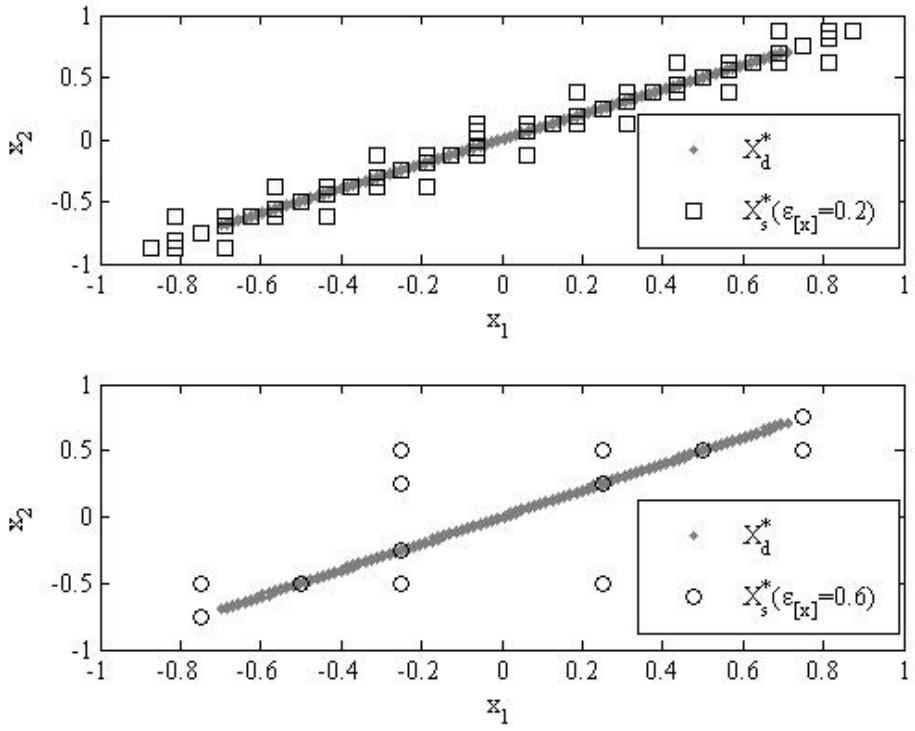
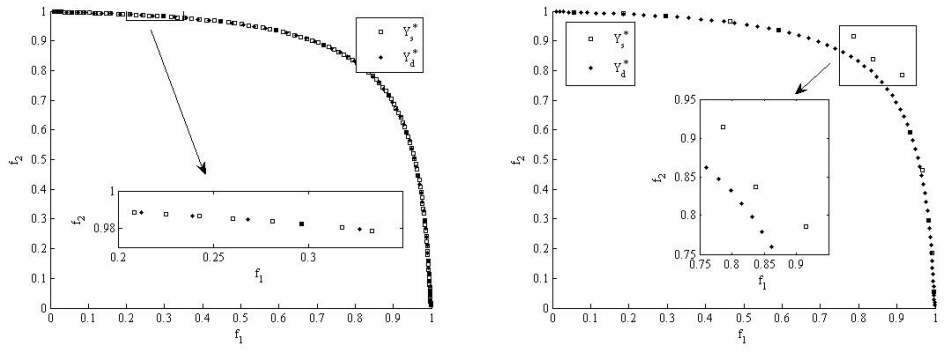


Fig. 4.25: FON - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{X}_d^*$ e $\mathbf{X}_s^*$. Percebe-se a aproximação ao conjunto solução discreto $\mathbf{X}_d^*$ a medida que diminue-se $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$.



(a) FON ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.1$). (b) FON ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.5$).

Fig. 4.26: FON - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$. Os gráficos contém resultados em conformidade com a precisão proposta. Entretanto, (a) apresenta um resultado mais interessante: $\mathbf{Y}_s^*$ no mesmo alinhamento de $\mathbf{Y}_d^*$.

[I]RMOA II × ZDT1

Para a função ZDT1, o parâmetro de precisão utilizado foi $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = [0.01 : 0.01 : 0.1]$. O custo computacional e o número de elementos de $\mathbf{X}_s^*$ estão apresentados na Fig. 4.27.

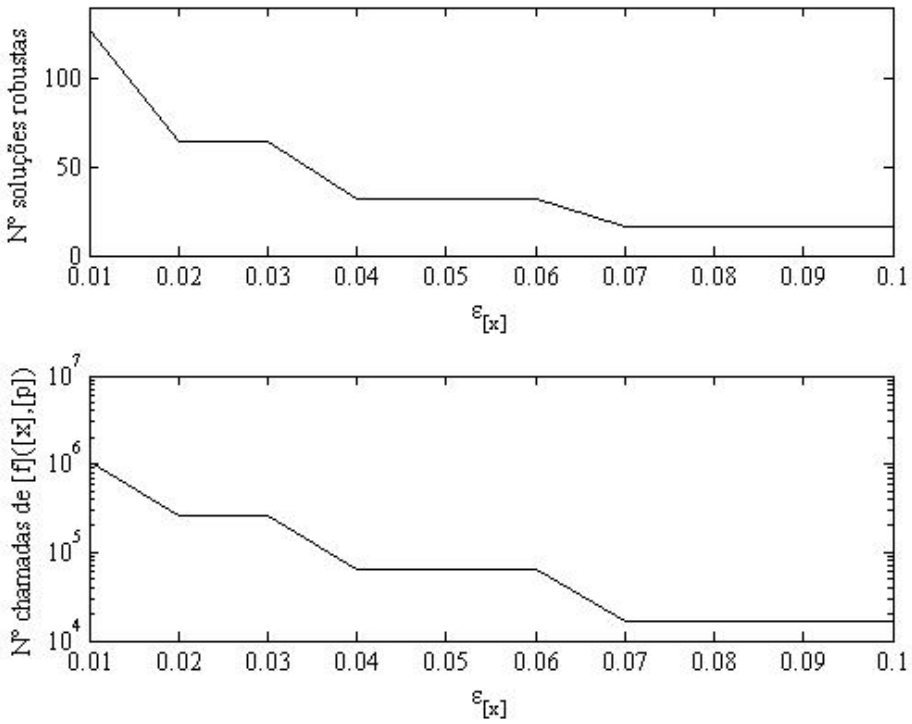


Fig. 4.27: ZDT1 - [I]RMOA II: quantitativo de soluções robustas e de esforço computacional segundo o parâmetro de precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$.

A Fig. 4.28 confronta $\mathbf{X}_d^*$ com vários $\mathbf{X}_s^*$. O exame visual da figura é suficiente para avaliar a precisão e uniformidade de espaçamento dos conjuntos solução. O número de soluções robustas para $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.05$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.1$ é contável diretamente da figura; para $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.01$ e demais valores de precisão, veja a Fig. 4.27.

A Fig. 4.29 mostra a fronteira gerada pelo [I]RMOA II em duas simulações. Ambas as fronteiras são homogêneas em espaçamento e respeitam o valor de $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ estipulado como precisão do método.

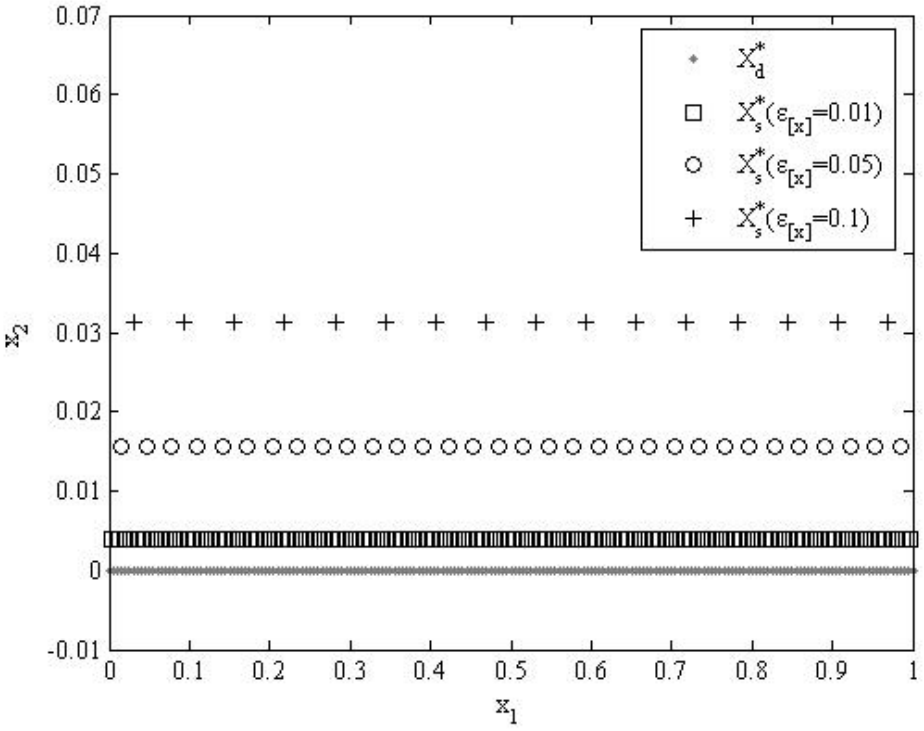
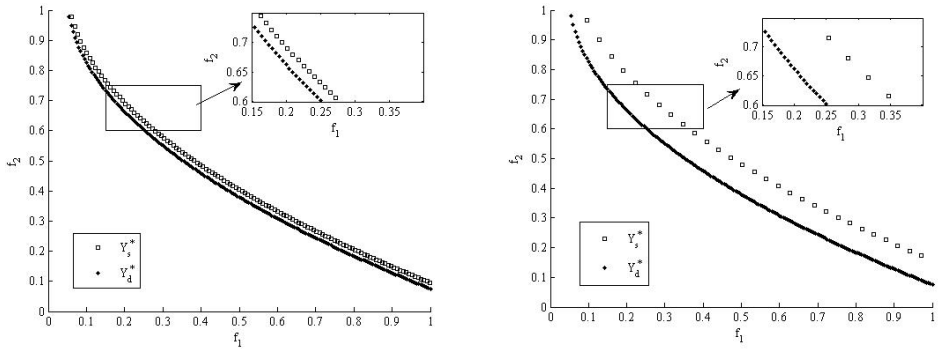


Fig. 4.28: ZDT1 - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{X}_d^*$ e $\mathbf{X}_s^*$. Observa-se que todos os conjuntos solução estão em conformidade como o valor de precisão proposto.



(a) ZDT1 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.01$). (b) ZDT1 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.05$).

Fig. 4.29: ZDT1 - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$. Nota-se que a convergência para fronteira $\mathbf{Y}_d^*$ depende nitidamente do parâmetro de precisão.

[I]RMOA II × ZDT2

Para a função ZDT2, o parâmetro de precisão analisado foi $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = [0.01 : 0.01 : 0.1]$. Considerando-se inicialmente as questões de custo e de número de soluções gerados, comparou-se os resultados para função ZDT1 (Fig. 4.27) com os resultados para ZDT2 (Fig. 4.30). Em valores numéricos, as duas simulações produziram resultados similares confirmando que a característica de convexidade não interfere nos processos de busca do [I]RMOA II. A semelhança entre os produtos das simulações seria ainda maior caso a função ZDT2 fosse irrestrita.

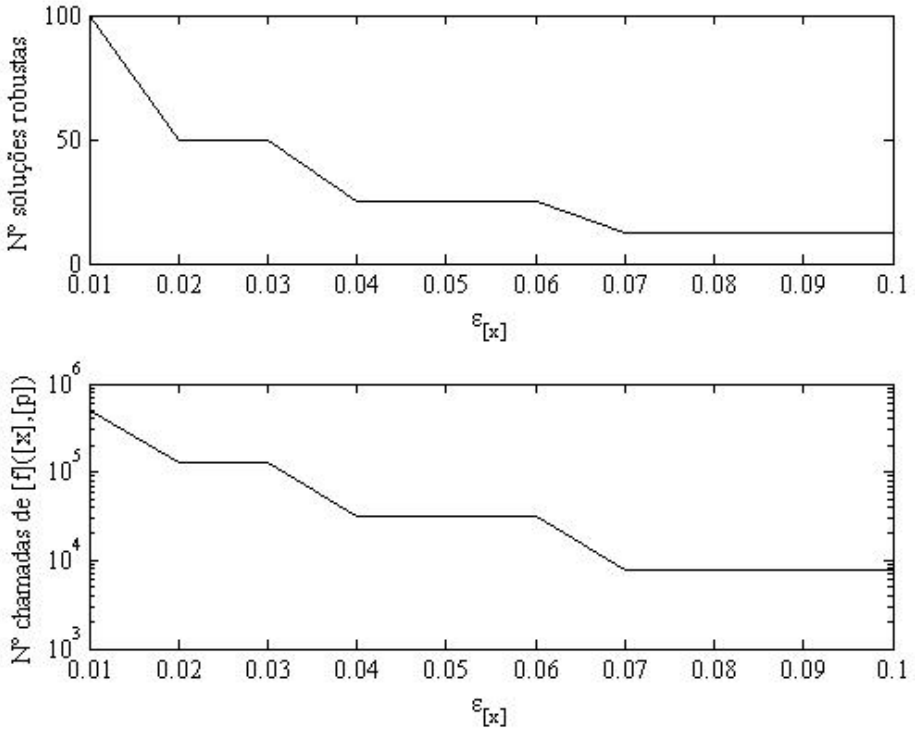


Fig. 4.30: ZDT2 - [I]RMOA II: quantitativo de soluções robustas e de esforço computacional segundo o parâmetro de precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$.

A Fig. 4.31 mostra os produtos do [I]RMOA II no espaço de busca. Atenta-se para o fato de que $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ interfere no mapeamento de pontos próximos à função de restrição. Veja na Seção 3.5.1 como as funções de restrição são tratadas para mais detalhes.

As imagens de dois conjuntos solução estão plotadas na Fig. 4.32. Novamente, nem a não convexidade da função e nem a restrição são empecilhos para o [I]RMOA II encontrar as soluções robustas.

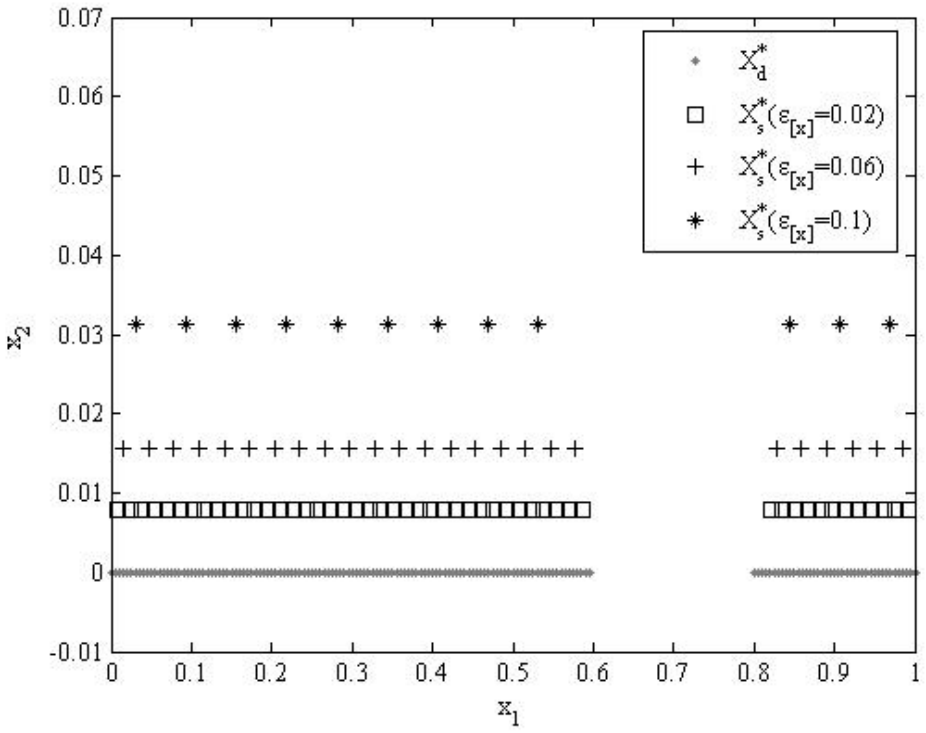


Fig. 4.31: ZDT2 - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{X}_d^*$ e $\mathbf{X}_s^*$. Percebe-se que nenhum ponto está presente na região não viável, pois somente são gerados pontos que respeitaram a função de inclusão de restrição.

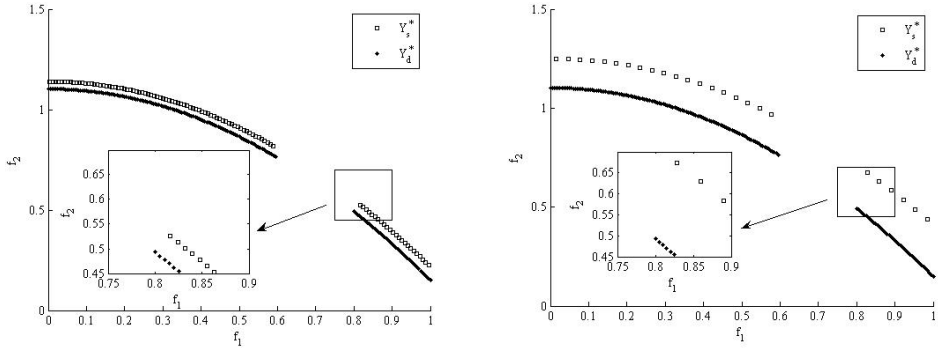
[I]RMOA II × ZDT3

Para a função ZDT3, o parâmetro de precisão examinado foi $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = [0.01 : 0.01 : 0.1]$. Os resultados encontram-se nas Fig. 4.30, Fig. 4.31 e Fig. 4.35.

O custo computacional é similar às demais funções da família ZDT. No entanto, a descontinuidade da fronteira robusta diminuiu a região efetiva da fronteira robusta. Logo, muito menos soluções foram encontradas para mesmo valor de precisão.

A uniformidade também pode ser verificada na função ZDT3, veja na Fig. 4.35, mesmo com menos elementos em cada região ótima.

As imagens de dois conjuntos robustos estão plotadas Fig. 4.35. As comparações entre os conjuntos $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$ confirmam que o [I]RMOA II garante encontrar a fronteira, segundo a precisão indicada.



(a) ZDT2 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.01$). (b) ZDT2 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.05$).

Fig. 4.32: ZDT2 - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$. A uniformidade de espaçamento entre as soluções e a precisão não foram prejudicados pela presença de restrições.

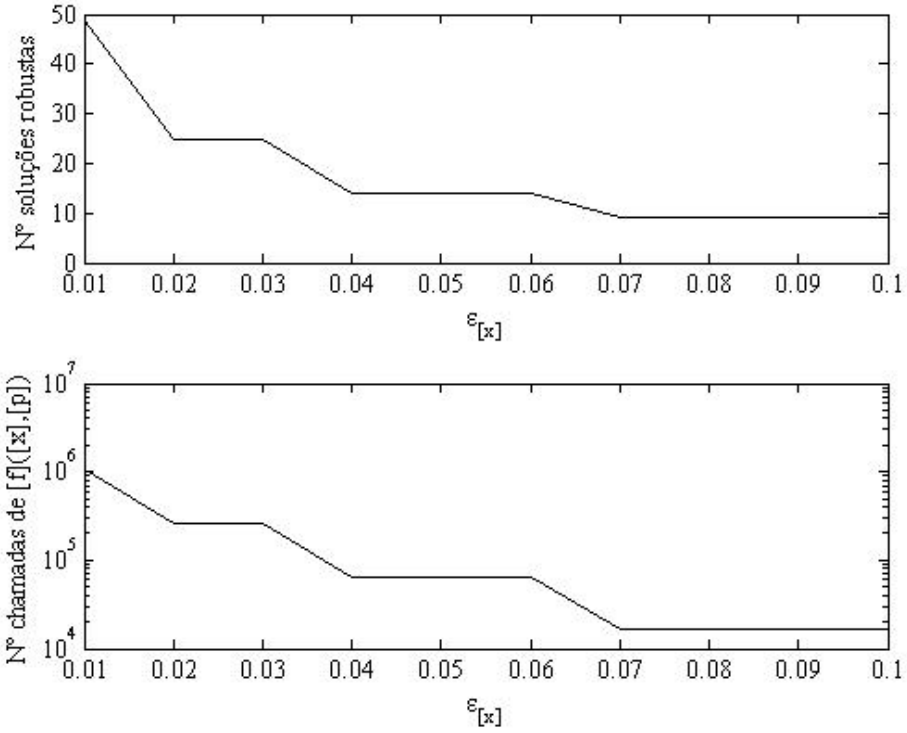


Fig. 4.33: ZDT3 - [I]RMOA II: quantitativo de soluções robustas e de esforço computacional segundo o parâmetro de precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$.

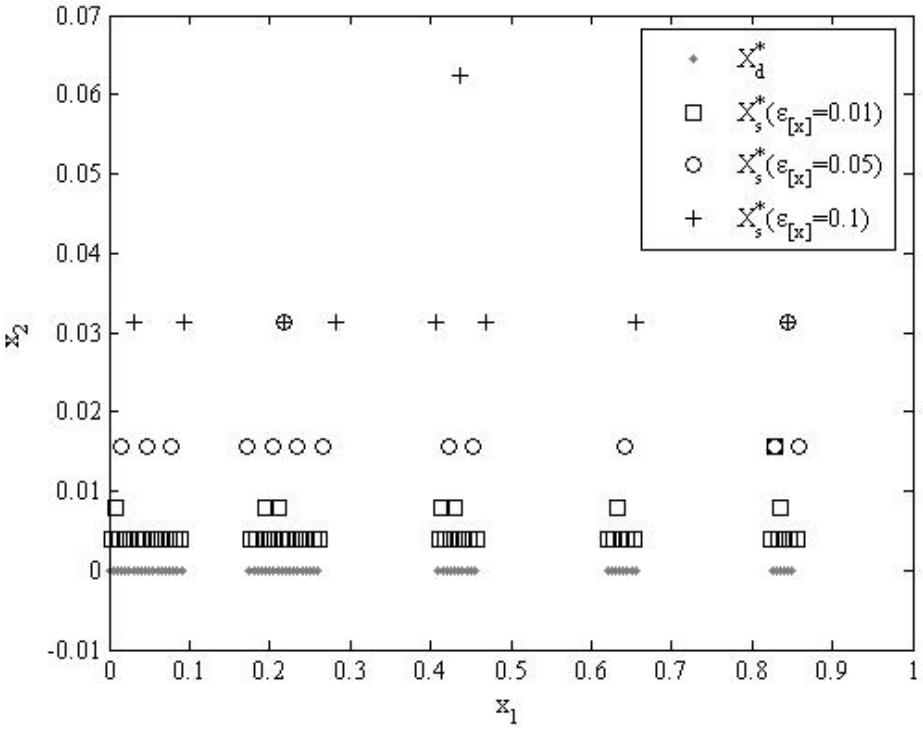
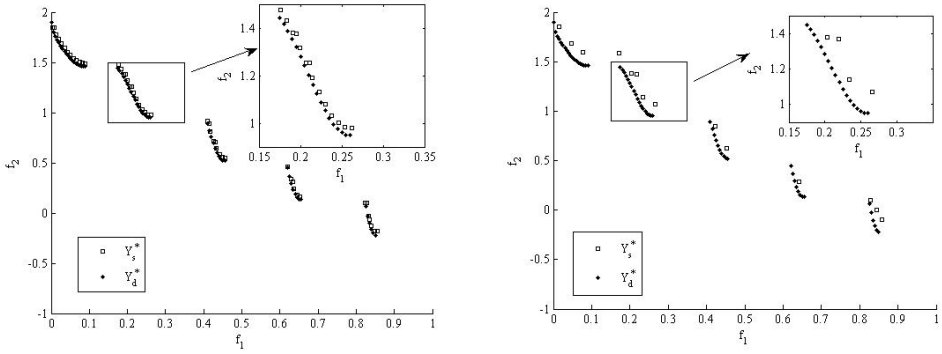


Fig. 4.34: ZDT3 - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{X}_d^*$ e $\mathbf{X}_s^*$.



(a) ZDT3 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.01$). (b) ZDT3 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.05$).

Fig. 4.35: ZDT3 - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$.

Considerações sobre o [I]RMOA II

O número de soluções robustas e o custo para encontrá-las dependem inversamente do valor o parâmetros de precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ e $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$.

De modo geral, os métodos intervalares buscam resolver problemas a que são propostos eliminando regiões onde a solução seguramente não está. As regiões restantes são normalmente armazenadas em listas de caixas intervalares, cuja quantidade de elementos é inversamente proporcional ao valor do parâmetro de precisão do método. O [I]RMOA II segue essa regra geral dos métodos intervalares, não descartando porções do espaço onde possa existir solução robusta, ou seja, o [I]RMOA II entrega estratégia pessimista (veja Fig.2.8). Por isso ele é considerado um método garantido. No entanto, existe um custo para armazenar e classificar as regiões não excluídas. A cada iteração essas regiões não excluídas são bisseccionadas, e portanto o trabalho para prosseguir nos processos de otimização é aumentado. O problema se agrava quando o espaço de busca e de incertezas é multi-dimensional. Se a memória de máquina disponível for considerada suficiente e tempo computacional for um fator menos importante, o [I]RMOA II converge globalmente para todas as soluções.

Uniformidade. As figuras dessa seção destinadas à visualização das das fronteiras robustas ou àquelas que apresentam os conjuntos de minimizadores exibem resultados claramente uniformes seja no espaço de busca seja no espaço dos objetivos. Isso devido a três razões simples: a) a bissecção é realizada por corte no ponto médio do primeiro intervalo com maior largura da caixa, resultando sempre em duas caixas simétricas; b) a cada iteração todas as caixas são bisseccionadas, resultando em um conjunto de caixas de mesma forma e volume; e c) o procedimento de não exclusão de espaços com solução, pois isso resulta na não existência de lacunas na fronteira robusta. Em conjunto, esses fatores resultam na convergência para fronteira robusta de forma gradual, uniforme e garantida. No entanto, a uniformidade pode ser corrompida nos problemas restritos, visto que o espaço de busca viável é formado, normalmente, por caixas de forma e volume não uniformes que passaram pelos testes das funções de restrição.

4.3.3 [I]RMOEA

Os algoritmos evolucionários e outras técnicas estocásticas de busca produzem resultados diferentes a cada nova execução, pois seus processos internos são guiados por operadores probabilísticos. Geralmente, são utilizados vários testes para estudar o comportamento desses métodos frente à mudança de seus operadores evolucionários. Especificamente, o [I]RMOEA foi estudado fixando-se alguns operadores e examinando-se os outros que mais influenciaram no processo de busca.

A avaliação do [I]RMOEA foi realizada fixando-se a probabilidade dos parâmetros genéticos $p_c = 1$ e $p_m = 0.001$ e variando-se os parâmetros n_{pop} e

n_{gen} para cada caso de teste. Cada indivíduo foi codificado com $n_{bit} = 10$ bits e para técnica de nicho empregou-se $r^max_{bis} = 8$ rodadas de bissecções. Para análise do [I]RMOEA, cinco tipos de resultados estão apresentados para cada função teste: a) a convergência do algoritmo medida em número de fronteiras em relação à n_{gen}, para diversos valores de n_{pop}; b) a métrica TE em relação à n_{pop}, para diversos valores de n_{gen}; c) a métrica MB[I] em relação à n_{pop}, para diversos valores de n_{gen}; d) a imagem do conjunto solução $\mathbf{Y}^*_s$ em relação a fronteira computada $\mathbf{Y}^*_d$; e) o esforço computacional por geração, medido em número de cálculo de funções objetivo, em relação à n_{pop}. Os itens (a-d) foram apresentados separadamente por função teste e, o item (e) está apresentado no gráfico da Fig.4.36.

Considerando o número de cálculos de funções objetivo, o esforço computacional (Fig. 4.36) no [I]RMOEA possui custo fixo com número de cálculos de função proporcional ao tamanho da população, sendo a constante de proporcionalidade o número de subpavimentos originados da discretização do espaço das incertezas (Tab.3.6).

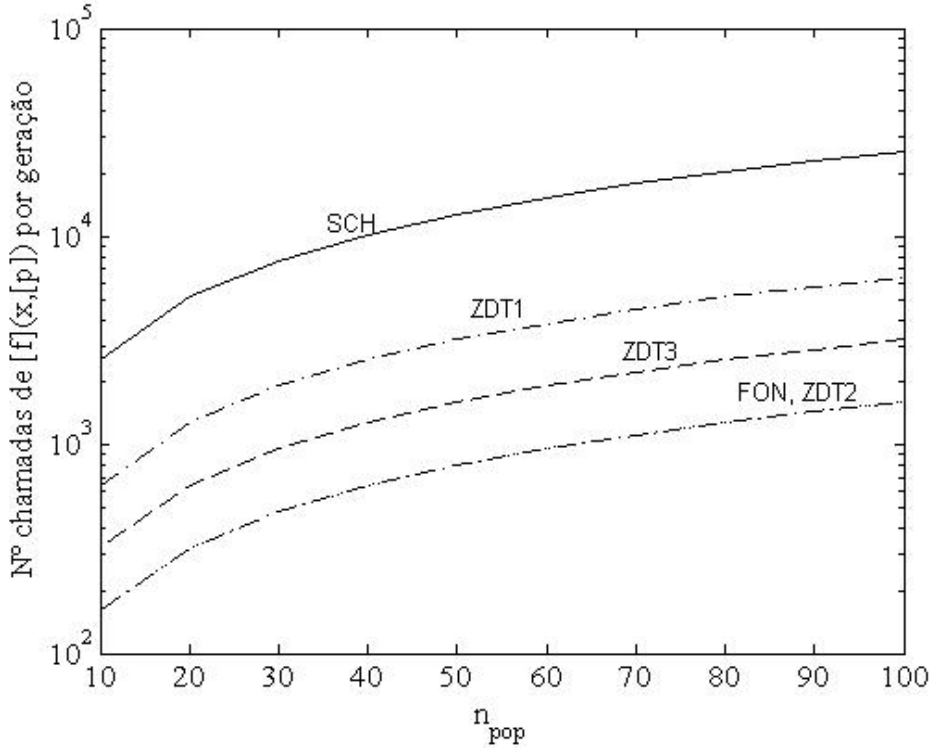


Fig. 4.36: [I]RMOEA: Custo computacional por geração. Observa-se que não foi considerado o custo da função de restrição para a função ZDT2.

[I]RMOEA × SCH2

Para a função SCH2, utilizou-se $n_{pop} = [10 : 10 : 100]$ e $n_{gen} = [10 : 10 : 50]$. A Fig. 4.37 apresenta a convergência do [I]RMOEA ao longo das gerações. Por se tratar de uma função com uma única variável e de simples convergência, o número de fronteiras diminuiu rapidamente já nas primeiras gerações, mesmo para as populações com maior número de indivíduos. Se fosse desejado, a convergência poderia ser desacelerada aumentando-se, por exemplo, a probabilidade de mutação p_m.

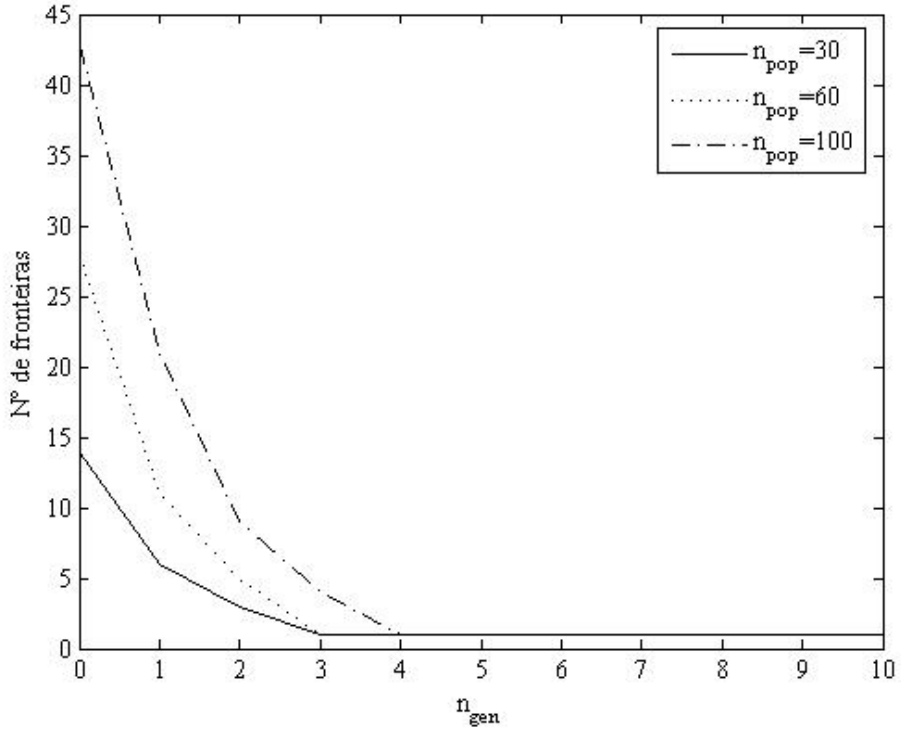


Fig. 4.37: SCH - [I]RMOEA: Convergência das fronteiras. O número de fronteiras decresce indicando que o algoritmo converge para sua primeira fronteira.

A Fig. 4.38 apresenta a eficiência do [I]RMOEA em encontrar o conjunto robusto, medida em termos de TE. A métrica TE, utilizada com precisão $\varepsilon_{TE} = 0.1$, acusou 0% de erro, ou seja, todas as soluções foram classificadas como pertencentes ao conjunto robusto $\mathbf{X}_d^*$. No entanto, para examinar com mais detalhes a proximidade com o conjunto solução contabilizou-se também TE com $\varepsilon_{TE} = 0.01$. A Fig. 4.38 (gráfico superior) apresenta que as populações maiores contém mais menores taxas de erro independentemente da geração pesquisada. O gráfico inferior apresenta que o número de indivíduos

iguais no conjunto solução obedece uma tendência independente relacionada ao tamanho da população.

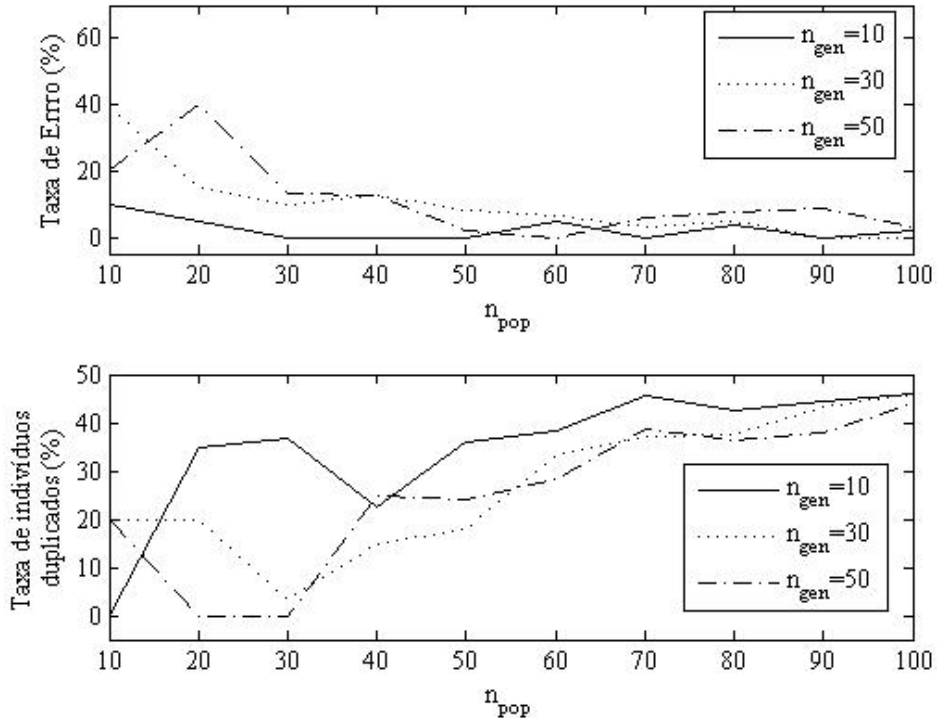


Fig. 4.38: SCH - [I]RMOEA: métrica TE. Em (a) a TE utilizando $\varepsilon_{TE} = 0.01$. Em (b) o número percentual de soluções iguais dentro de $\mathbf{X}_s^*$. Pelas informações de (a) e (b) pode-se estimar o número de soluções diferentes produzidas pelo [I]RMOEA.

A uniformidade do conjunto solução foi medida pela métrica MB[I]; o resultado encontra-se plotado na Fig. 4.39. A aproximação do valor normalizado MB[I]_{norm} de zero indica melhoria da uniformidade do espaçamento. Percebe-se que populações maiores atingem os melhores índices MB[I]_{norm}.

A imagem da fronteira robusta está plotada na Fig. 4.40. Como esperado, a simulação com população maior supera em qualidade a outra simulação.

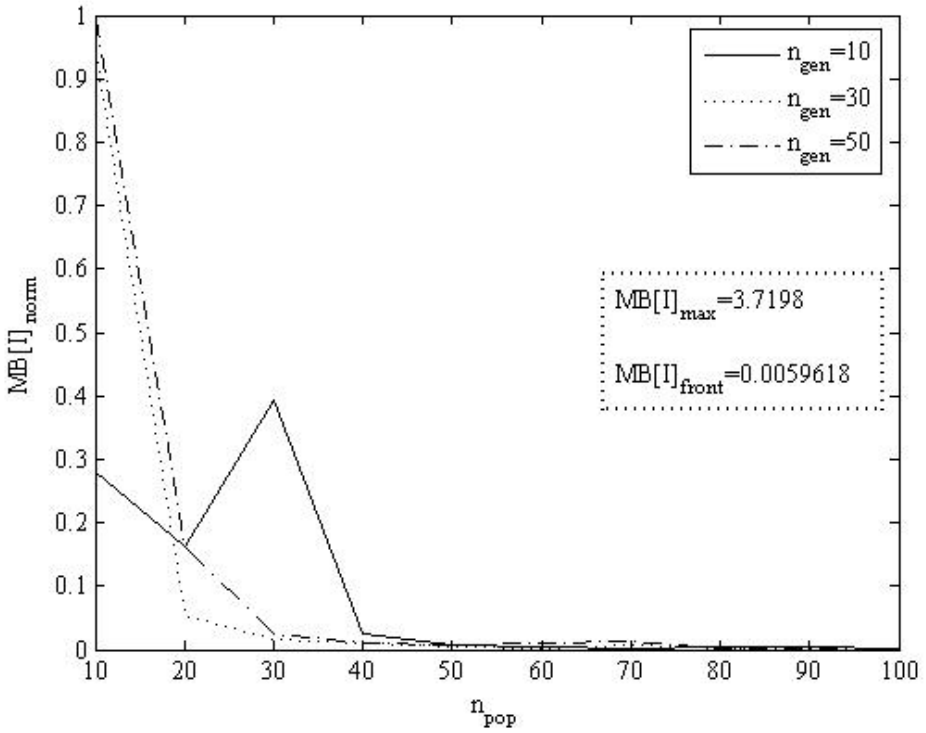
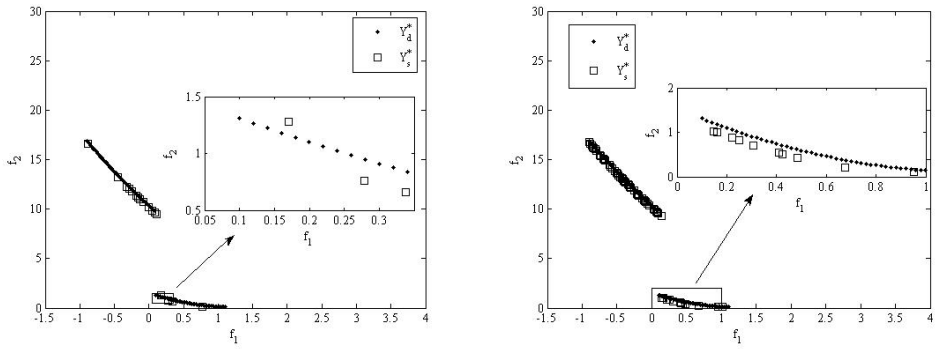


Fig. 4.39: SCH - [I]RMOEA: métrica MB[I]. A partir de $n_{pop} = 40$, a métrica indica ganho em uniformidade para todas as simulações.



(a) SCH2 ($n_{pop} = 50$; $n_{gen} = 20$). (b) SCH2 ($n_{pop} = 80$; $n_{gen} = 100$).

Fig. 4.40: SCH2 - [I]RMOEA: paralelo entre $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$. No gráficos em detalhe, é mostrada a proximidade e distribuição das populações ao longo da fronteira robusta.

[I]RMOEA × FON

Para a função FON, utilizou-se $n_{pop} = [10 : 10 : 100]$ e $n_{gen} = [10 : 10 : 50]$. A convergência do [I]RMOEA para a função é mais lenta que para a função SCH2, como pode ser visto na Fig. 4.41. Um dos fatores que retardaram a convergência foi o aumento do número de variáveis de busca. Na próxima seção, esse ponto ficará ainda mais claro com os testes realizados com mais variáveis. Novamente, nota-se que o tamanho da população é um fator determinante na convergência do algoritmo robusto.

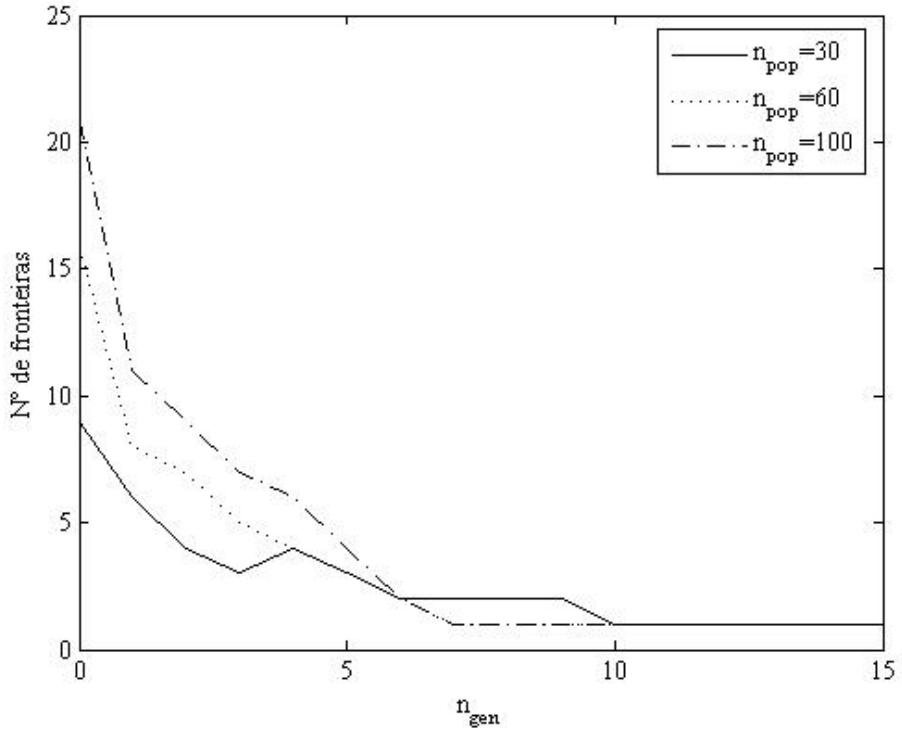


Fig. 4.41: FON - [I]RMOEA: Convergência das fronteiras. O número de fronteiras decresce mais lentamente que para a função SCH2.

A eficiência do algoritmo robusto frente função está mostrada na Fig. 4.42. A TE foi utilizada com precisão de $\varepsilon_{TE} = 0.05$. Observe que a métrica resultou em valores relativamente altos para as populações menores ($n_{pop} = 10$); e valores baixos a partir de $n_{pop} = 50$. No gráfico inferior, a simulação com $n_{pop} = 10$ apresentou uma evolução instável do número de indivíduos duplicados. De fato, as populações menores (pequenas amostras) são mais sensíveis a ação dos operadores evolucionários.

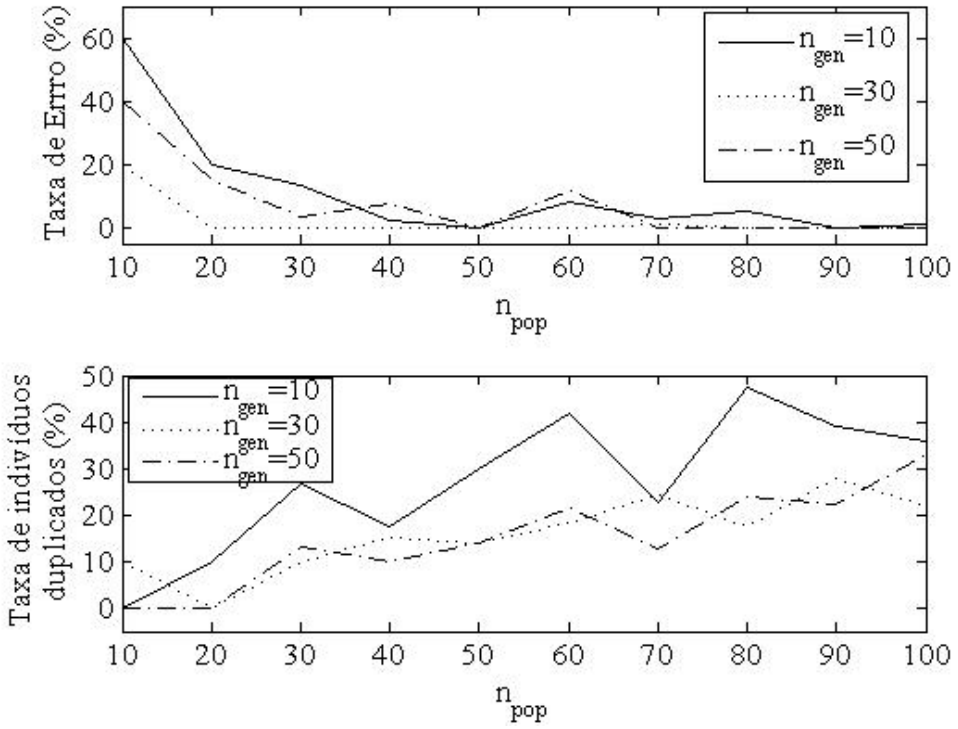


Fig. 4.42: FON - [I]RMOEA: métrica TE. Em (a) a TE utilizando $\varepsilon_{TE} = 0.05$. Em (b) o percentual de soluções iguais dentro de $\mathbf{X}_s^*$.

O resultado da avaliação da métrica MB[I] para a função FON está na Fig. 4.43. A uniformidade no espaço dos objetivos nesta função é relativamente difícil de ser obtida quando comparada às outras funções teste. Uma população uniformemente distribuída no espaço de busca se apresenta mais concentrada no espaço dos objetivos. Essa característica da função FON é devida ao termo exponencial em sua expressão formal. Novamente, as populações maiores atingem os melhores índices de uniformidade.

Duas imagens robustas foram escolhidas para exemplificar a saída do [I]RMOEA, veja-as na Fig. 4.44. A simulação com população de 100 indivíduos apresenta todos os pontos na fronteira robusta e com distância visualmente homogênea. Essa informação está em concordância com os gráficos da TE e MB[I] apresentados anteriormente.

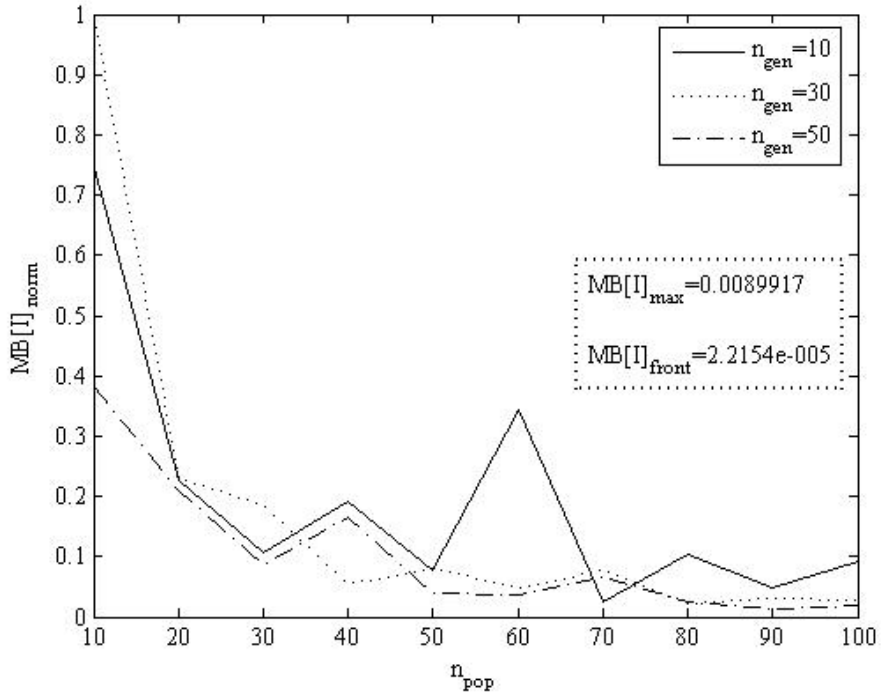
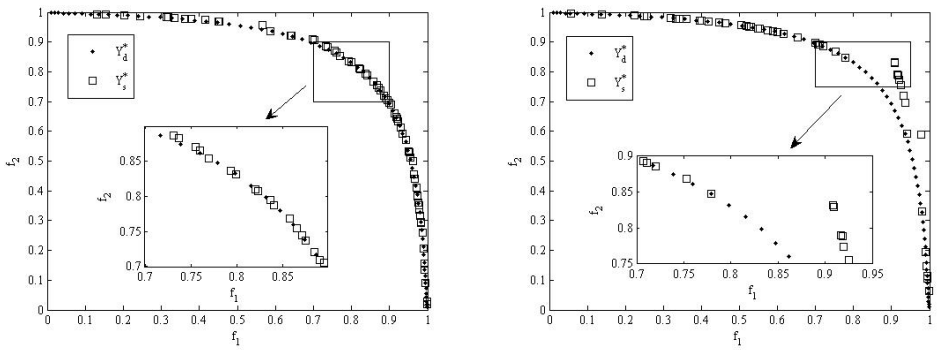


Fig. 4.43: FON - [I]RMOEA: métrica MB[I]. A uniformidade e convergência mais suave ocorreu para populações maiores.



(a) FON ($n_{pop} = 100$; $n_{gen} = 50$). (b) FON ($n_{pop} = 60$; $n_{gen} = 50$).

Fig. 4.44: FON - [I]RMOEA: paralelo entre $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$. Em (a), as fronteiras $\mathbf{Y}_d^*$ se $\mathbf{Y}_s^*$ confundem, devido à proximidade. Em (b), percebe-se a presença de alguns pontos fora da fronteira e sem espaçamento uniforme.

[I]RMOEA × ZDT1

Para a função ZDT1, utilizou-se $n_{pop} = [10 : 10 : 100]$ e $n_{gen} = [10 : 10 : 100]$.

A convergência do [I]RMOEA em termos de fronteiras é mostrada na Fig. 4.45. A partir geração 13, todas as simulações convergiram para a primeira fronteira. Uma vez que a população encontra-se na primeira fronteira, o processo de seleção e a técnica de nicho buscaram manter um nível aceitável de diversidade. Esta questão é tratada na Fig. 4.46 que mostra número de indivíduos repetidos.

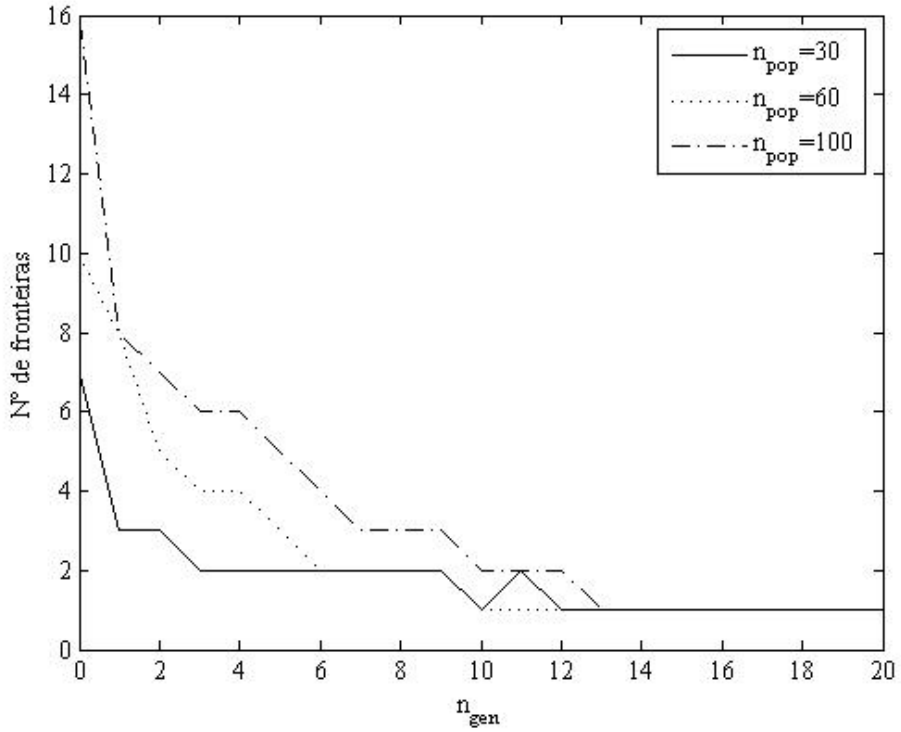


Fig. 4.45: ZDT1 - [I]RMOEA: Convergência das fronteiras. As populações maiores oferecem, inicialmente, mais diversidade em número de fronteiras. Nestas simulações, a diversidade inicial das fronteiras não foi suficiente para impedir a convergência simultânea para primeira fronteira na mesma geração.

A Fig. 4.46 apresenta os resultados da métrica TE com precisão de $\varepsilon_{TE} = 0.01$. A métrica apresentou que a partir de $n_{pop} = 50$ o [I]RMOEA produz conjuntos solução com todos os elementos do conjunto na fronteira robusta. Além disso, no gráfico inferior, o número de indivíduos duplicados é mais baixo que aqueles apresentados para outras funções teste. Isso ocorre pelo motivo de ZDT1 conter fronteira convexa e contínua, facilitando exploração de regiões robustas.

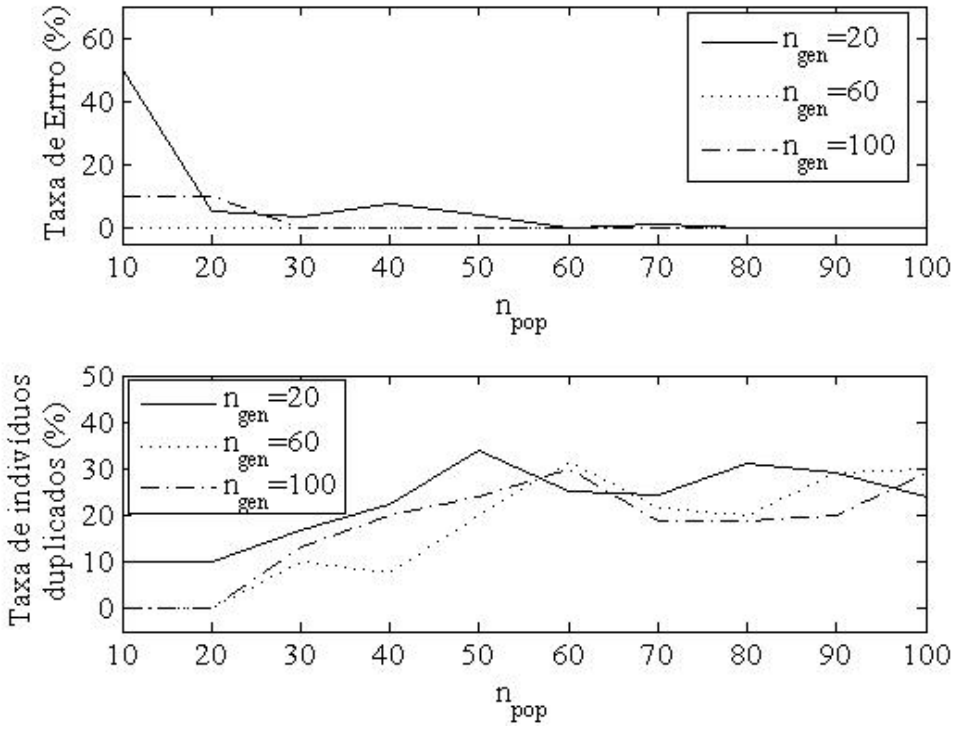


Fig. 4.46: ZDT1 - [I]RMOEA: métrica TE. Acima, a TE indica alto nível de conformidade para populações maiores. Abaixo, o número de indivíduos iguais foi mais baixo dos testes realizados.

O nível de uniformidade de espaçamento entre os elementos dos conjuntos solução está apresentado na Fig. 4.47. Uma vez que as simulações mostradas na Fig. 4.45 apresentaram a convergência para primeira fronteira ocorreu na 13ª geração, decidiu-se por examinar como a uniformidade se modifica para gerações maiores que 20. Por isso, a métrica MB[I] foi utilizada para gerações superiores a 20. Concluiu-se, que mesmo após a convergência a primeira fronteira, o algoritmo necessita de algumas gerações para atingir níveis aceitáveis de homogeneidade.

A Fig. 4.48 mostra as fronteiras robustas obtidas para duas execuções do [I]RMOEA. Há regiões com melhor representatividade de soluções que outras, principalmente para o caso (a). No entanto, considerando a natureza estocástica dos algoritmos evolucionários e o baixo índice de duplicatas, avaliou-se positivamente a qualidade de distribuição das soluções na fronteira robusta.

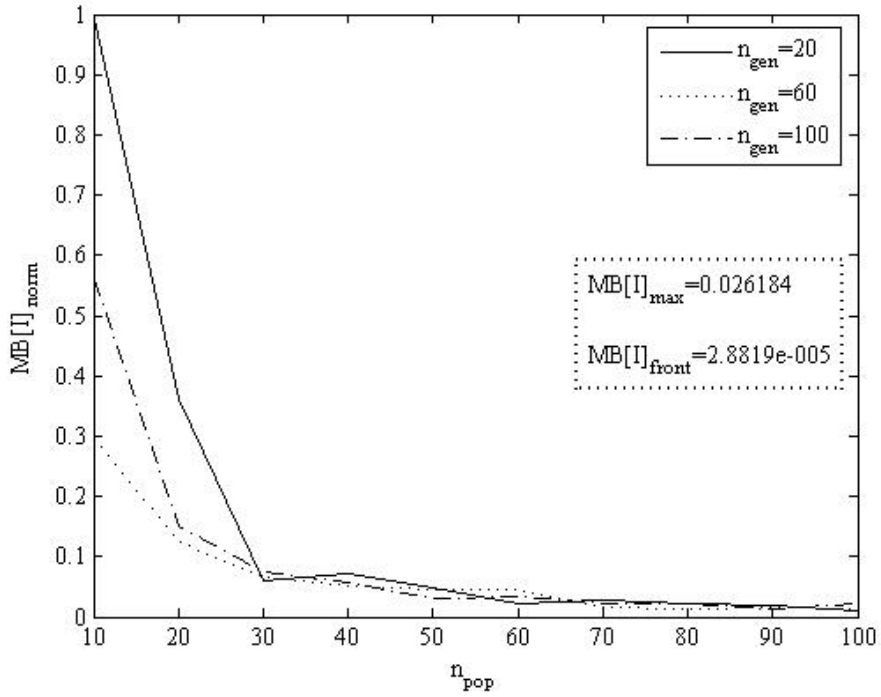
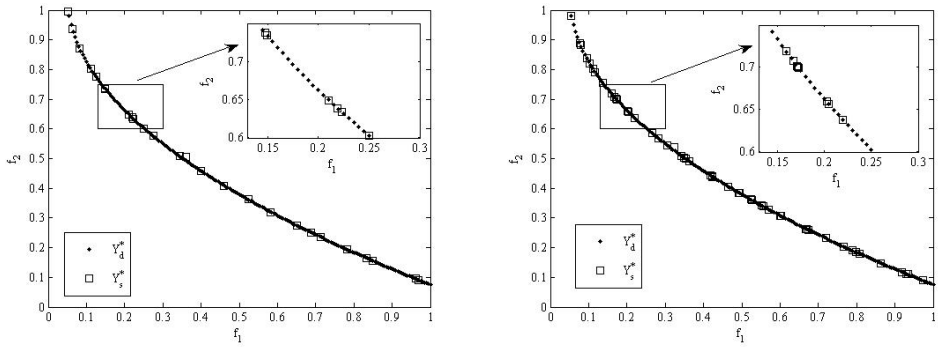


Fig. 4.47: ZDT1 - [I]RMOEA: métrica MB[I]. A métrica indica que a melhoria da uniformidade depende mais de n_{pop} que de n_{gen}.



(a) ZDT1 ($n_{pop} = 30$; $n_{gen} = 60$). (b) ZDT1 ($n_{pop} = 70$; $n_{gen} = 80$).

Fig. 4.48: ZDT1 - [I]RMOEA: paralelo entre $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$. Ambos gráficos confirmam a eficiência em encontrar a fronteira de Pareto robusta e a qualidade de distribuição das soluções sobre ela.

[I]RMOEA × ZDT2

Para a função ZDT2, utilizou-se $n_{pop} = [10 : 10 : 100]$ e $n_{gen} = [10 : 10 : 100]$.

Alguns testes foram realizados até a 100ª geração. No entanto, em todas as simulações a convergência para a primeira fronteira ocorreu antes da 20ª geração. O Resultado da convergência é mostrado na Fig. 4.49. A função ZDT2 é não convexa e restrita. Observou-se que tratamento de restrições do [I]RMOEA não influenciou em sua convergência das fronteiras porque é feito independentemente de outros processos internos do algoritmo. Quanto a não convexidade, os testes não foram conclusivos para compreender a relação com a convergência de fronteiras. Entretanto, comparando-se ZDT1 e ZDT2, ZDT2 teve convergência mais lenta.

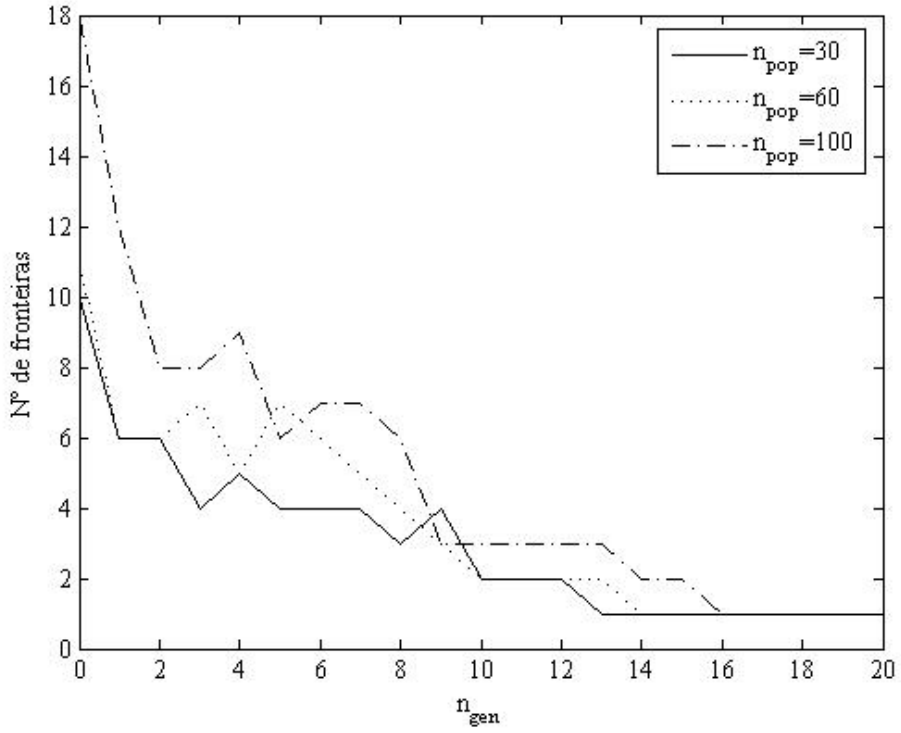


Fig. 4.49: ZDT2 - [I]RMOEA: Convergência das fronteiras. A presença de restrições não interfere na convergência de fronteiras. Por outro lado, populações maiores oferecem mais diversidade inicialmente e retardam, mesmo que suavemente, a convergência do algoritmo robusto.

A Fig. 4.50 apresenta os resultados da métrica TE com precisão de $\varepsilon_{TE} = 0.01$. A métrica apresentou "alto" nível de conformidade dos resultados para simulação com $n_{pop} = 100$. Isso significa que o [I]RMOEA produziu conjuntos solução completamente situados na fronteira robusta. No gráfico inferior, o número de indivíduos duplicados manteve-se abaixo dos 40%. Resultado

considerado normal frente ao testes já apresentados.

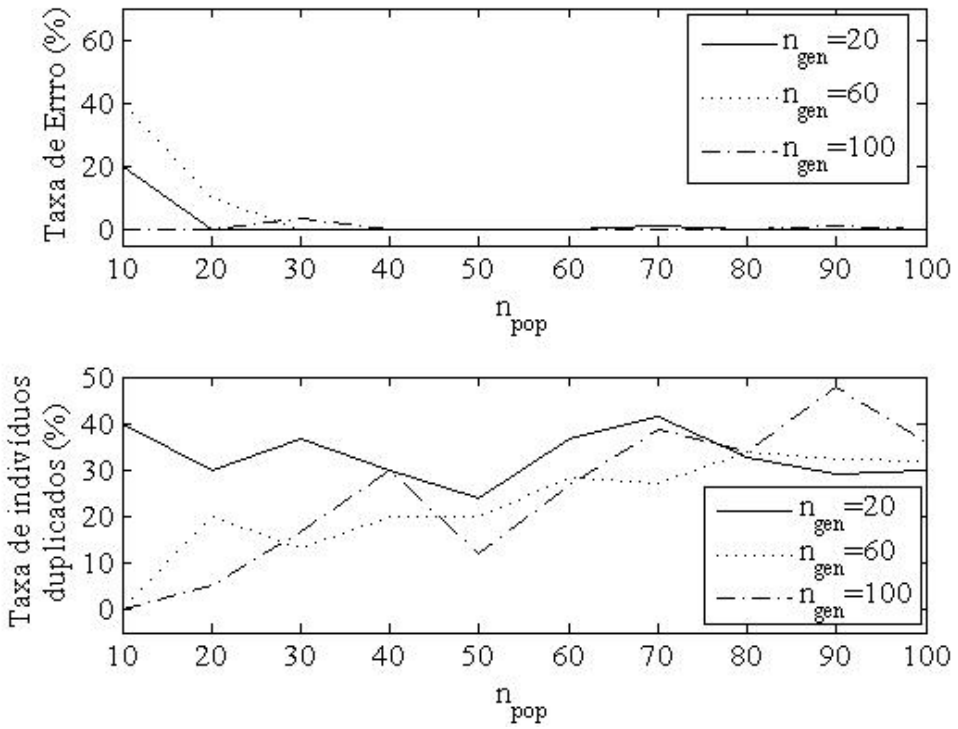


Fig. 4.50: ZDT2 - [I]RMOEA: métrica TE. Em (a), [I]RMOEA provou ser eficiente para resolver o problema ZDT2. Em (b), o percentual de soluções iguais dentro de $\mathbf{X}_s^*$ permanece com valor abaixo de 40%.

O resultado da métrica MB[I] está apresentado na Fig. 4.51. Observa-se que em pelo menos duas simulações ($n_{pop} = 70$; $n_{gen} = 60$) e ($n_{pop} = 90$; $n_{gen} = 100$) a métrica avaliou erroneamente a distribuição dos pontos em $\mathbf{X}_s^*$ melhor que em $\mathbf{X}_d^*$. Essa falha ocorreu porque esses conjuntos $\mathbf{X}_s^*$ geraram um ponto próximo à região não viável entre as partes descontínuas da fronteira robusta, causando uma melhoria "falsa" de distribuição dos pontos. Esse ponto solução falso pode ser visto na Fig. 4.52.

Uma função de inclusão foi empregada para avaliar a viabilidade de pontos solução gerados, na inicialização do algoritmo e após a troca de material genético através do cruzamento. A Fig. 4.52 mostra duas simulações onde pode ser notado a ausência de pontos na região da função de restrição.

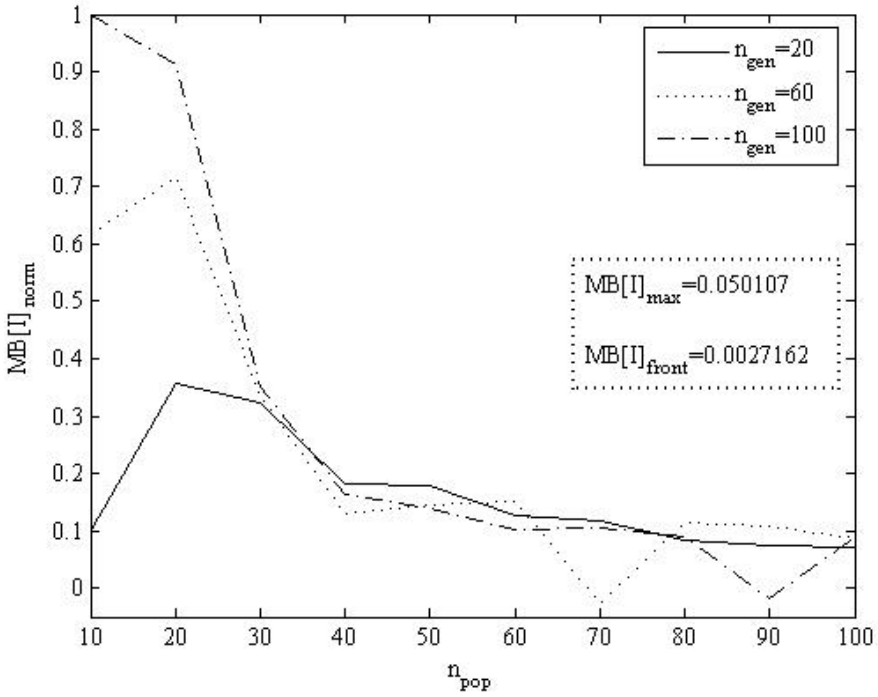
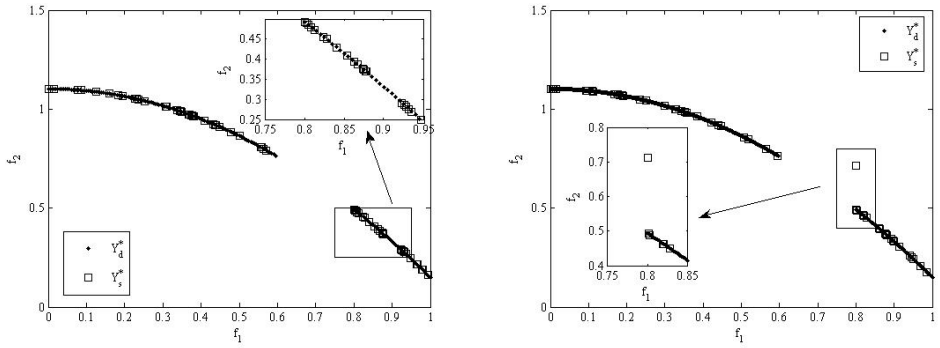


Fig. 4.51: ZDT2 - [I]RMOEA: métrica MB[I]. A métrica falha nos pontos abaixo de $\text{MB[I]}_{norm} = 0$, devido à presença de falsa solução robusta próxima à região não viável.



(a) ZDT2 ($n_{pop} = 100$; $n_{gen} = 100$). (b) ZDT2 ($n_{pop} = 70$; $n_{gen} = 60$).

Fig. 4.52: ZDT2 - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$. Em (a), a imagem da região não viável não contém pontos. Em (b), a solução isolada em $\mathbf{Y}_s^*$ é falsa.

[I]RMOEA × ZDT3

Para a função ZDT3, utilizou-se $n_{pop} = [10 : 10 : 100]$ e $n_{gen} = [10 : 10 : 100]$.

A Fig. 4.53 expõe três curvas de convergência do [I]RMOEA. O decrescimento do número de fronteiras é esperado conforme já visto nas simulações anteriores. No entanto, a simulação com $n_{pop} = 60$ indivíduos apresentou um traçado interessante; em três gerações o número de fronteiras cresceu. Isto ocorreu quando o algoritmo encontra um ou mais pontos em uma região robusta diferente. Na verdade, desde o início das gerações o [I]RMOEA encontra novas regiões com robustez melhor que as anteriores. Entretanto, pelo gráfico apresentado só é possível visualizar quando o número de fronteiras cresce. Após encontrar uma nova região, o [I]RMOEA busca convergir toda a população para a primeira fronteira.

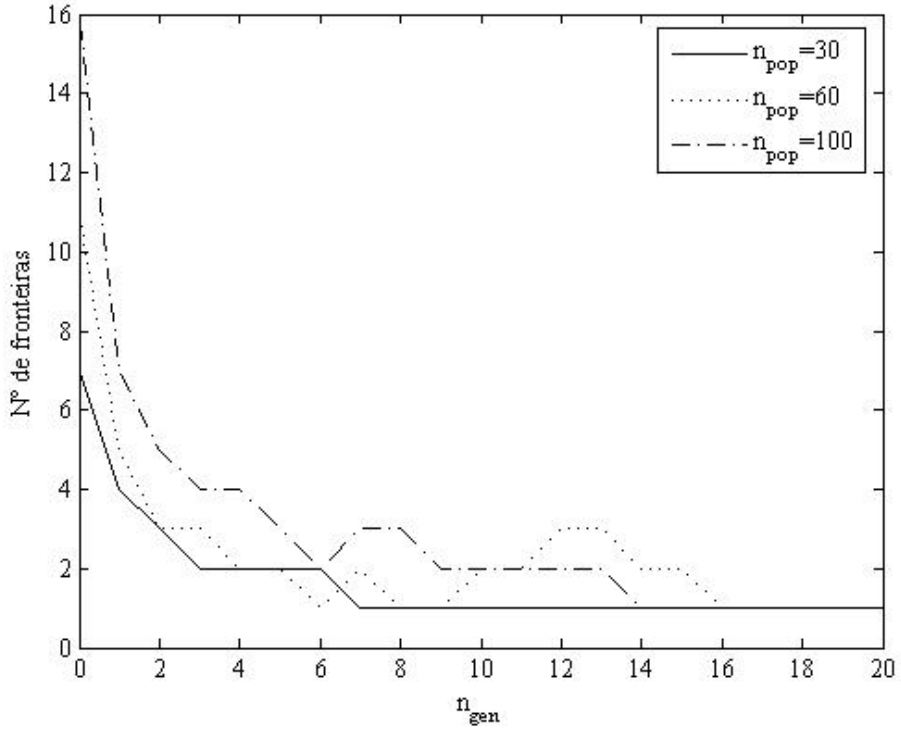


Fig. 4.53: ZDT3 - [I]RMOEA: Convergência das fronteiras. As gerações onde há crescimento do número de fronteiras indicam descoberta de novas regiões robustas.

A Fig. 4.54 apresenta os resultados da métrica TE com precisão de $\varepsilon_{TE} = 0.01$. Conforme anteriormente, a métrica comprovou que os melhores resultados ocorrem para populações maiores. A partir de $n_{pop} = 50$, o [I]RMOEA pro-

duz conjuntos solução com grande parte de seus os elementos do conjunto na fronteira robusta. O gráfico inferior mostra que número de indivíduos iguais no conjunto solução é próximo daquele contabilizado para as demais funções apresentadas da família ZDT. Dentre todas as funções, ZDT3 foi considerada a mais difícil de se encontrar o conjunto solução robusto, talvez por causa da continuidade de sua fronteira robusta ser interrompida em quatro regiões.

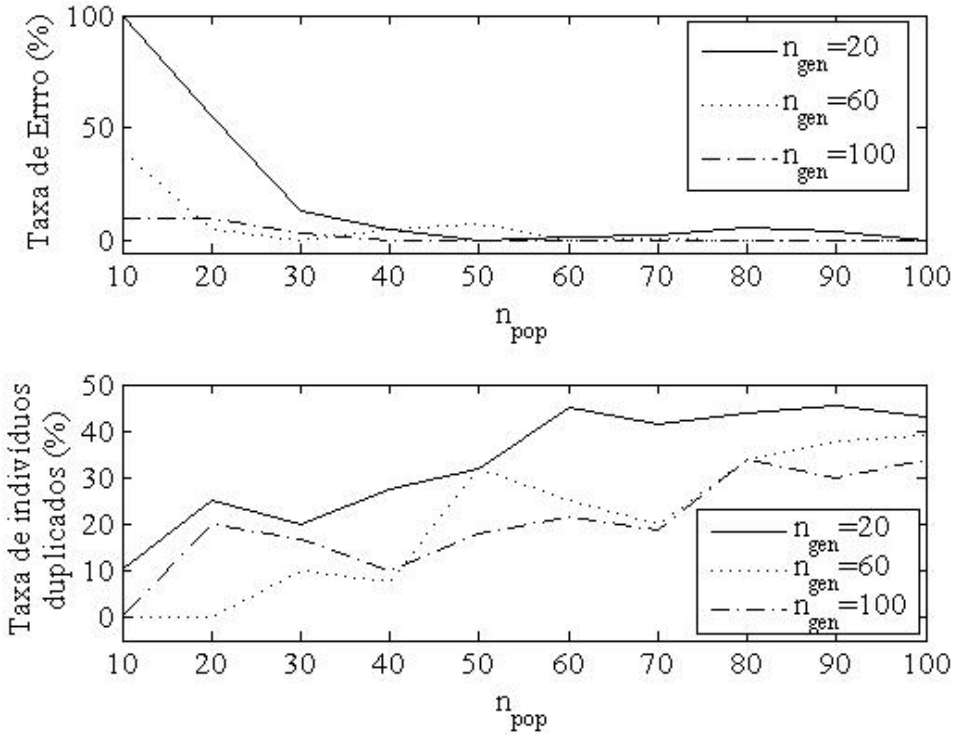


Fig. 4.54: ZDT3 - [I]RMOEA: métrica TE. Em (a), a TE utilizando $\varepsilon_{TE} = 0.01$; em (b), o percentual de soluções iguais dentro de $\mathbf{X}_s^*$.

A uniformidade do conjunto solução avaliada pela métrica MB[I] está apresentada na Fig. 4.55. A homogeneidade das soluções robustas para a função ZDT3 foram consideradas as piores de todas as funções teste investigadas. No entanto, a figura mostra que indicadores equivalentes às demais simulações foram obtidos para as populações maiores, neste caso $n_{pop} = 100$.

Duas imagens robustas foram escolhidas para exemplificar a saída do [I]RMOEA frente ZDT3, veja-as na Fig. 4.56. Ambas simulações contém todos os indivíduos locados na fronteira robusta. Contudo, a distribuição da população com 80 indivíduos é visualmente mais uniforme que no outro caso.

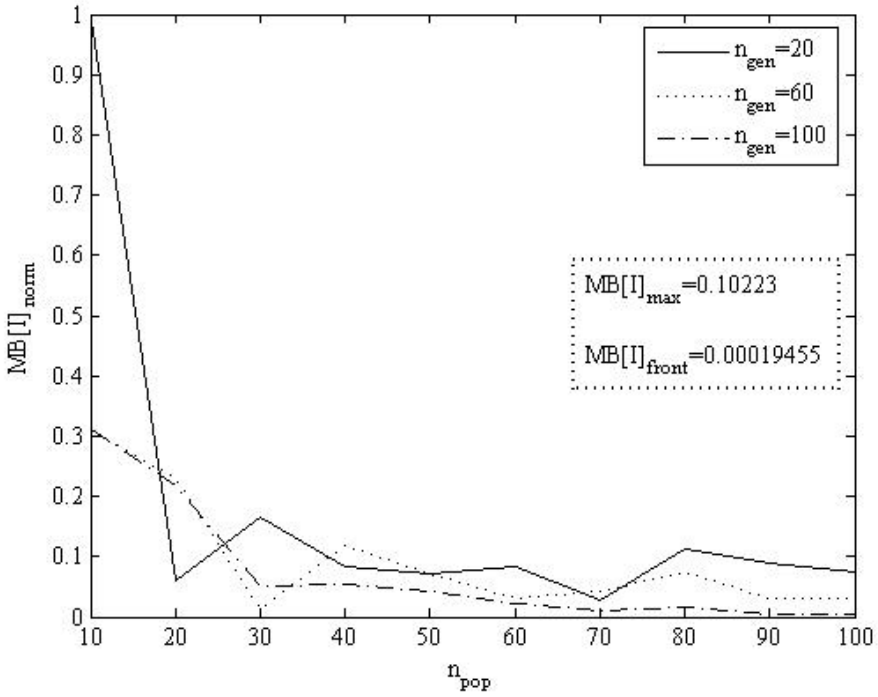
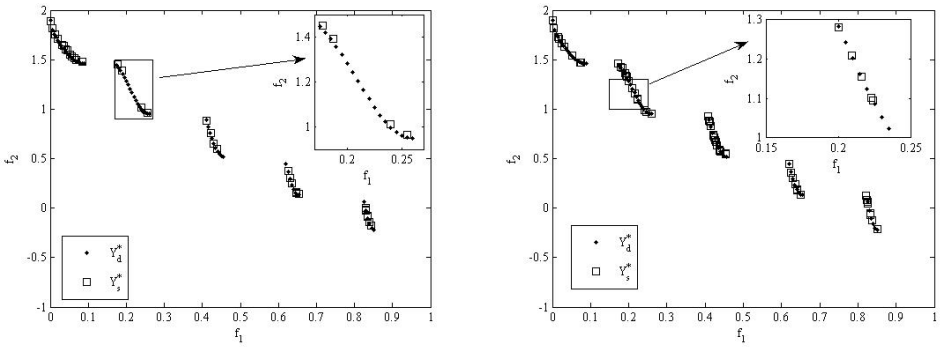


Fig. 4.55: ZDT3 - [I]RMOEA: métrica MB[I]. A métrica aponta dificuldade de se obter uniformidade no conjunto solução para n_{pop}=20 e n_{pop}=60.



(a) ZDT3 ($n_{pop} = 50$; $n_{gen} = 20$). (b) ZDT3 ($n_{pop} = 80$; $n_{gen} = 100$).

Fig. 4.56: ZDT3 - [I]RMOA II: paralelo entre $\mathbf{Y}_d^*$ e $\mathbf{Y}_s^*$. Em (a), pode se notar concentrações de soluções de forma não homogênea, como no gráfico em detalhe. Em (b), a imagem robusta está uniformizada.

Considerações sobre o [I]RMOEA

Levando em conta os resultados obtidos pelas métricas TE e MB[I] ao longo das simulações, considerou-se que o [I]RMOEA obteve sucesso em todos os casos de teste. Entretanto, alguns pontos merecem ainda ser comentados.

Custo fixo. Uma grande vantagem em muitos algoritmos evolucionários é manter o esforço computacional ao longo das gerações. Por exemplo, considerando-se que o critério de parada seja por número máximo de gerações, assumindo-se que a população permaneça com mesmo tamanho, que os operadores evolucionários conservem a mesma probabilidade e os demais processos evolucionários seguirem um padrão, então o custo computacional total pode ser estimado anteriormente à execução do algoritmo.

Critério de parada. O término do processo evolutivo foi estabelecido pela escolha, *a priori*, de um valor máximo para o número de gerações. No entanto, as figuras de convergência, como por exemplo Fig. 4.41 e Fig. 4.45, mostram que a convergência à primeira fronteira ocorreu antes da vigésima geração, isso foi verificado para todas as simulações. Por isso, pelo menos dois outros critérios de parada podem ser inseridos. O primeiro critério estaria relacionado à convergência do algoritmo, ou seja, o [I]RMOEA poderia ser finalizado após um número fixo de gerações que o algoritmo permanecesse com todos os indivíduos apenas na primeira fronteira. O segundo, seria um critério complementar ao descrito anteriormente. A técnica de nicho seria empregada para qualificar a distribuição de pontos na fronteira. O número de rodadas de bisseção seria aumentado em uma ou duas unidades, de forma que mais nichos fossem definidos sobre a fronteira. Como o processo de seleção busca distribuir os pontos para os nichos, espera-se um resultado ainda mais homogêneo na fronteira de Pareto Robusta.

Convergência. A convergência para primeira fronteira é desejada. Todavia, uma vez que a primeira fronteira é atingida por toda a população, é necessário manter a diversidade diminuindo ao máximo o número de duplicatas. Duas opções podem ser facilmente implementadas. Inicialmente, deve-se definir um índice de diversidade baseado, por exemplo, no número de indivíduos iguais dentro da primeira fronteira. De acordo com o índice: a) a probabilidade de mutação poderia ser aumentada dinamicamente para inserir diversidade, como por Soares [107]; ou b) o número de rodadas de bisseção seria alterado de forma a proporcionar a criação de mais nichos sobre a fronteira, permitindo ao processo de seleção distribuir melhor a população.

Tratamento de restrições. As restrições são escritas em forma de funções de inclusão, desta forma realiza-se a classificação de regiões como viáveis ou não. As regiões não viáveis são excluídas definitivamente e, as regiões declaradas como viáveis suportam o [I]RMOEA na oferta de soluções can-

didatas aleatórias, quando da criação da população inicial ou para substituir uma solução não viável fruto de uma operação como o cruzamento ou mutação.

Computação da robustez. Dada uma população de soluções candidatas, o pior caso da ação das incertezas é computado ponto a ponto, empregando-se uma função de inclusão mínima. O algoritmo da Tab.3.6 mostra como é simples o processo definição do valor robusto para os indivíduos da população.

O [I]RMOEA contém muitas vantagens, entre elas destacam-se: a) o custo fixo por geração; b) a computação da robustez utilizando-se de intervalos; c) a exclusão de espaços não viáveis definitivamente; e d) a técnica de nicho simples, eficiente e flexível. Dentre os três algoritmos robustos, o [I]RMOEA se apresenta como o mais promissor para tratar problemas de multidimensionais.

4.4 Testes Complementares

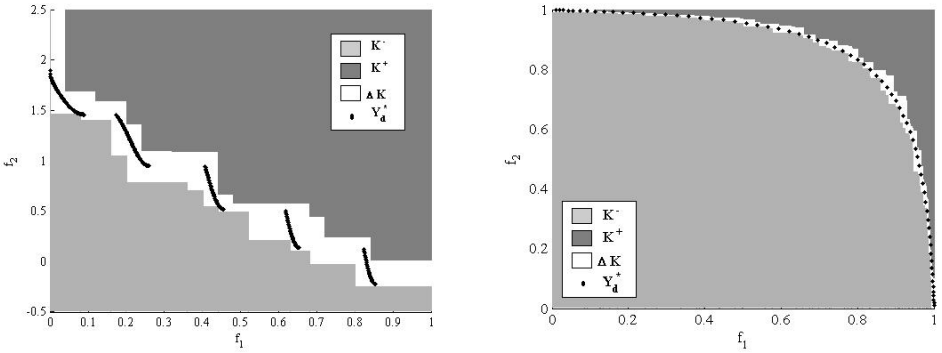
Os algoritmos [I]RMOA I e [I]RMOA II que são puramente determinísticos e suportados por intervalos, são sensivelmente dependentes da dimensionalidade dos espaços de busca e de incerteza, espaços onde ocorrem as bissecções. Por isso, a garantia de resolver o problema de otimização custa caro. Por outro lado, sem a vantagem garantir a convergência para o resultado correto, o método [I]RMOEA independente da dimensionalidade do espaço de busca, sendo a estrutura de dados de tamanho fixo geração após geração. Contudo, o [I]RMOEA é dependente do espaço de incerteza, pois a computação da interferência das incertezas é similar ao [I]RMOA II. A questão da dimensionalidade é tratada nesta seção para o [I]RMOA II e [I]RMOEA. Para o [I]RMOA I, apresenta-se como ele pode ser utilizado como ferramenta de validação.

4.4.1 [I]RMOA I como Ferramenta de Validação

Como dito anteriormente, o [I]RMOA I é uma ferramenta para validação de outros métodos multi-objetivos robustos. Os próximos experimentos, retirados de Soares *et al* [110], foram dedicados a mostrar como isso pode ser feito. O primeiro passo é descobrir, para dado problema, os valores dos parâmetros $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ e $\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$ que produzem um envelope estreito e correto. A comprovação da correteza desse envelope deve ser feita através do conhecimento prévio de um conjunto solução *referência* para um dado valor de incerteza $\mathbf{p}_1$. Assumindo que o conjunto solução do problema possa variar conforme o valor do parâmetro de incerteza, então o conjunto utilizado como referência para calibrar o [I]RMOA I perderia a validade quando valor de incerteza

fosse alterado para $\mathbf{p}_2$. Por outro lado, o processo do [I]RMOA I continua válido, bastando apenas ser executado uma vez mais para o novo valor de incerteza. Depois disso, o novo envelope pode ser utilizado para validar outros algoritmos.

As funções teste FON e ZDT3 foram as escolhidas para realizar os experimentos. Foram aproveitados alguns resultados das execuções realizadas para descrever a Subseção 4.3.1, que refere aos testes do [I]RMOA I. Veja na Fig.4.57 as configurações que geraram os envelopes com qualidade satisfatória sobre a fronteira robusta. Para simplificar os experimentos, o parâmetro $\mathbf{p}$



(a) ZDT3' ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.01$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.04$). (b) FON' ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.2$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.05$).

Fig. 4.57: Envelopes sobre ZTD3 e FON (fonte: resultados de testes realizados para Subseção 4.3.1).

que define a posição da fronteira robusta manteve-se constante, e um algoritmo puramente evolucionário foi empregado como o método a ser validado pelo [I]RMOA I. Trata-se de um de um algoritmo genético multi-objetivo com vetor das funções objetivo adaptado para lidar com problemas de otimização robusta. Doravante esse algoritmo é chamado de RMOGA (Robust Multi-Objective Genetic Algorithm), e possui a seguinte configuração: a) codificação binária; b) cruzamento com um ponto de corte; c) mutação pela mudança de bits; d) seleção pelo método da Roleta (desempenho individual calculado por (3.37); e) técnica de nicho NB[I] (veja Subseção 3.6.2); e f) elitismo utilizado no NSGA-II [34]. A descrição completa do algoritmo pode ser encontrada em [108]. Para esse método evolucionário, o problema multi-objetivo robusto 3.9, considerando a filosofia do pior caso, deve ser redefinido para funcionar segundo a estrutura estocástica, então

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \max_{\mathbf{p}'\in\mathbf{P}'} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}'), \tag{4.12}$$

sendo $\mathbf{P}'$ um conjunto finito de amostras selecionadas aleatoriamente de $\mathbf{P}$. Considerando que a qualidade da amostragem aumenta com a quantidade de elementos coletados, então quanto maior o número de amostras mais o algoritmo se aproxima da fronteira robusta correta. Todavia, esse aumento da qualidade acarreta um indesejável crescimento do tempo consumido no processo de otimização. Assim, para tentar encontrar uma relação custo-benefício vantajosa à aplicação do algoritmo estocástico, o [I]RMOA I foi empregado para validar um tamanho de amostra $\mathbf{P}'$ tal que o algoritmo estocástico gere a fronteira robusta correta.

Nos testes de validação, os valores dos parâmetros do RMOGA foram fixados em $p_c = 1$, $p_m = 0.0005$, $n_{pop} = 50$ e $n_{gen} = 40$. Dez diferentes tamanhos de amostra de $\mathbf{P}'$ foram testados, $5, 10, ..., 50$. Em cada teste o RMOGA foi executado 10 vezes, sendo os resultados julgados mais interessantes apresentados na Fig.4.58 e na Fig.4.59.

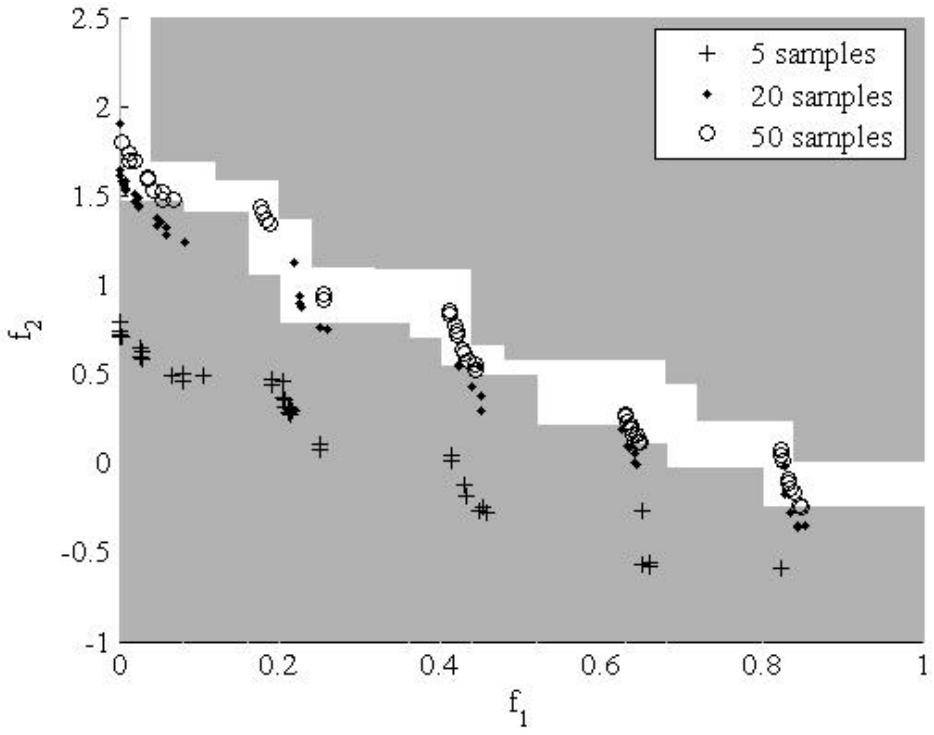


Fig. 4.58: ZDT3 ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.02$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.02$) - Validação do RMOGA. As pequenas amostragens produzem piores representações da fronteira de Pareto robusta.

Observe que cada tamanho de amostra de $\mathbf{P}'$ está associado a uma fron-

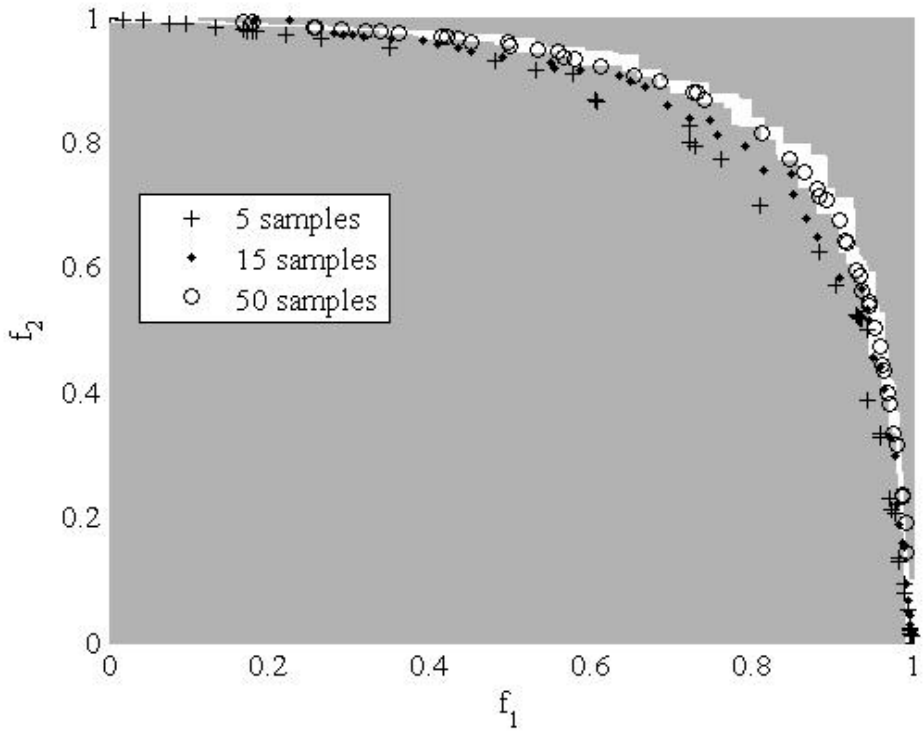


Fig. 4.59: FON ($\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.01$,$\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.04$) - Validação do RMOGA. As pequenas amostragens produzem piores representações da fronteira de Pareto robusta.

teira de Pareto robusta. Um dado tamanho de amostra foi considerado aceitável se a imagem de todo seu conjunto solução ficou situada dentro do envelope gerado pelo [I]RMOA I. Na Fig.4.58 e na Fig.4.59 nota-se que 50 amostras foi tamanho mínimo aceitável. Em outras palavras, para o RMOGA poder ser utilizado na resolução dos problemas robustos ZDT3 e FON é necessário que a amostragem mínima do espaço de incertezas seja de 50 elementos.

4.4.2 [I]RMOA II × Dimensionalidade do Espaço de Busca

Para esse experimento, somente a versão robusta da função ZDT3 foi utilizada. A precisão para computação da interferência das incertezas foi de $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.01$. O espaço de busca investigado foi formado por 3 e 4 variáveis, sendo utilizada a precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.04$ para limitar as bissecções no processo de busca. Simulações com número de variáveis acima de 4, para os mesmos valores de $\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ e $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$ citados acima, foram declaradas como "inviáveis" para o

equipamento utilizado. Os resultados são semelhantes aos apresentados na Subseção 4.3.2, por isso foram omitidos.

4.4.3 [I]RMOEA × Dimensionalidade do Espaço de Busca

Para essa bateria de testes, somente a versão robusta da função ZDT3 foi utilizada. O espaço de busca investigado foi formado por 5, 10, ..., 30 variáveis, e o número de integrantes da população variou irregularmente de 15 a 300 indivíduos, dependendo do caso. A precisão para computação das incertezas foi $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.01$. Foram utilizados dois critérios de parada: ou pelo número máximo de 200 gerações, ou pela estagnação de toda a população na primeira fronteira por 20 gerações consecutivas. De fato, somente as populações com $n_{pop} \leq 100$ convergiram pelo critério de parada (b). Três testes foram executados em cada caso simulado. Os resultados julgados mais interessantes estão apresentados a seguir.

A Fig.4.60 e Fig.4.61 exemplificam resultados das fronteiras de Pareto robusta para os casos com 10 e 30 variáveis respectivamente. Observe que a proximidade de $\mathbf{Y}_d^*$ depende do tamanho da população. Analisando o caso

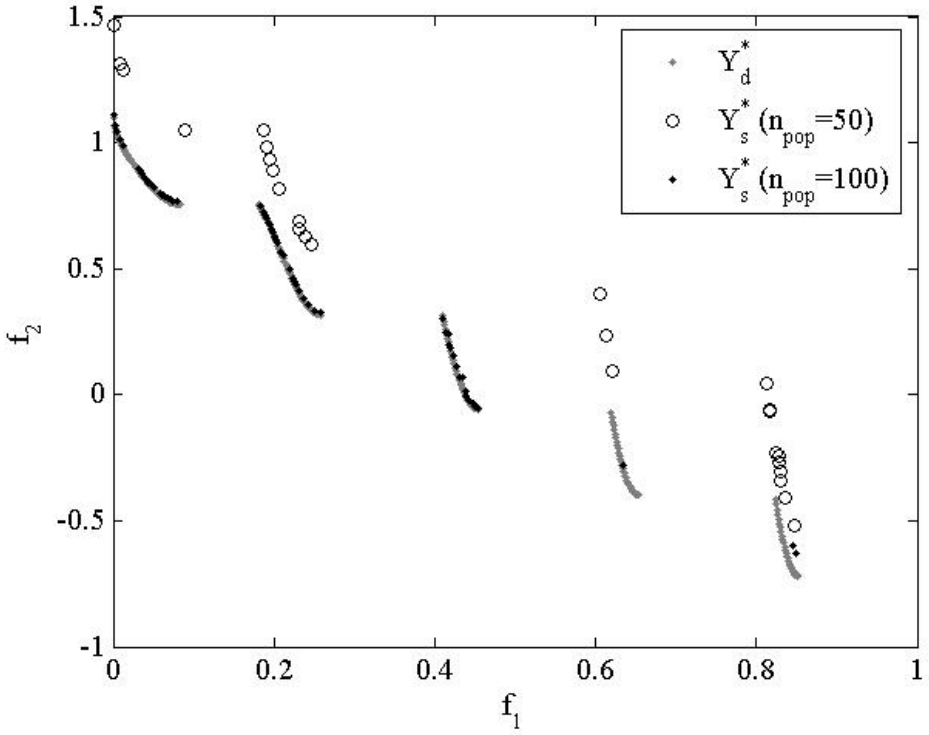


Fig. 4.60: ZDT3 (n=10 variáveis) × [I]RMOEA.

mais crítico, ZDT3 com n=30 variáveis, considerou-se o resultado da simulação do [I]RMOEAcomo satisfatório e seu desempenho ficou comprovado não depender da dimensionalidade no espaço de busca. A Tab.4.61 resume alguns dos resultados obtidos. A métrica TE foi calculada com precisão 0.01 para cada cada variável, ou seja $\varepsilon_{TE} = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n} 0.01^2}$, sendo n o número de variáveis. Similarmente, foram consideradas soluções duplicatas aquelas cujo desvio por variável foi menor que 0.0001. De fato, se for aumentado a proba-

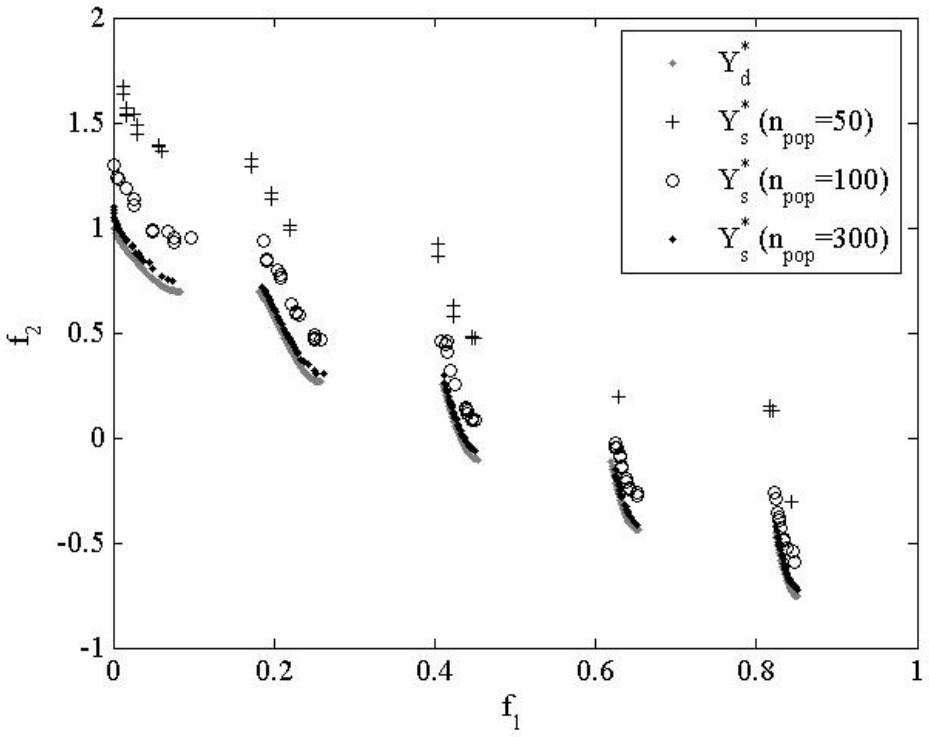


Fig. 4.61: ZDT3 (n=30 variáveis) × [I]RMOEA.

bilidade de mutação p_m, não haveria convergência por estagnação na primeira fronteira. Contudo, a busca poderia se tornar aleatória. Confirmou-se, com esse problema teste, que a diversidade deve vir da amostra (população) e diminuir gradualmente até um ponto de equilíbrio, balanceado pela técnica de nicho. Registra-se que pontos na fronteira de Pareto robusta foram obtidos com populações menores. No entanto, quando isso ocorreu a população apresentou índices maiores de duplicatas.

Tab. 4.2: Sumário dos testes complementares para otimização robusta.

n	n_{pop}	TE (%)	Duplicatas (%)	MB[I]
5	100	1.00	67.0	0.0040
10	100	3.00	52.0	0.0079
15	100	22.0	60.0	0.0244
20	200	1.50	62.5	0.0044
25	250	2.00	56.0	0.0040
30	300	3.33	47.7	0.0050

4.5 Considerações Finais

Vários outros testes poderiam ser acrescentados neste capítulo de experimentos. Por exemplo, em se tratando de algoritmos evolucionários uma prática comum tem sido realizar numerosas simulações para verificar a contribuição de cada operador evolucionário. Examinando estas simulações, encontram-se muitas vezes resultados não conclusivos respeito do desempenho de algoritmos, pois são muitos parâmetros a testar e a relação deles com os problemas teste é certamente particular; cada caso é um caso. Optou-se aqui por concentrar a atenção nos pontos julgados como mais importantes. Os algoritmos puramente intervalares possuem poucos parâmetros e portanto considerou-se fácil a tarefa de testar e demonstrar a dependência de desempenho e de convergência com os parâmetros de precisão tanto no [I]RMOA I quanto no [I]RMOA II. Por outro lado, conforme dito anteriormente o [I]RMOEA tem muitos parâmetros. Por isso não foram investigados os diversos operadores e métodos genéticos. Os experimentos cobriram, no entanto, a proximidade da fronteira robusta encontrada com a fronteira robusta computada quando observados o tamanho da população e o número de gerações do processo evolutivo. Os resultados numéricos obtidos foram considerados satisfatórios para a aplicação dos algoritmos desenvolvidos nesse estudo.

Como qualquer grupo de algoritmos de otimização, os algoritmos que utilizam intervalos têm vantagens e desvantagens. Como pontos positivos destacaram-se a garantia de convergência e da computação segura da incerteza, o número reduzido de parâmetros para ajustar, e a simplicidade do código, entre outros. Como aspectos negativos, sobressaiu-se o custo computacional pago por essas vantagens. De qualquer forma, classificou-se os resultados obtidos "encorajadores", de modo especial para aqueles problemas robustos que não dependem de resposta imediata. No entanto se há necessidade de considerar questões de memória e/ou velocidade de execução, então é necessário alterar aspectos de precisão e/ou perder a garantia de computação

do pior caso de incerteza. Alternativamente, existem outras técnicas a serem inseridas nos algoritmos para acelerar a busca como o uso de derivadas para intervalos ou de técnicas de *propagação intervalar de restrições* por exemplo. Acelerar o processo de busca é um tópico interessante para continuar a pesquisa.

5. OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTI-OBJETIVO PARA SINTONIA DE CONTROLADORES PID

A validação dos algoritmos robustos propostos foi realizada considerando-se funções objetivo analíticas cujo conjunto solução pudesse ser reconhecido via análise da expressão formal que lhes definia. As funções teste robustas abrangeram vários tipos de situações normalmente encontradas em situações reais, como descontinuidade e não convexidade da fronteira Pareto robusta. Ainda na validação, foi reforçada a necessidade de se criar funções de inclusão monotônicas, convergentes e mais estreitas possível. Estes quesitos foram atendidos para funções teste, exceto para ZDT2 e ZDT3 que contém ocorrências múltiplas de variáveis. Normalmente, o desenvolvimento de funções de inclusão parte da expressão analítica que descreve o problema. Como as funções teste continham apenas operadores matemáticos elementares, a função de inclusão natural foi suficiente para a finalidade de teste a que foram propostas. Em problemas reais, a obtenção de funções de inclusão pode ser tarefa complicada. Por isso, neste capítulo é tratado um exemplo de aplicação real em que o uso dos algoritmos robustos ficou restrito devido às particularidades de modelar o sistema de otimização pelas funções de inclusão e pelo emprego de técnicas intervalares nos algoritmos desenvolvidos nesta tese.

A escolha do problema e do estudo de caso específico levou em consideração aspectos tais como: a) a abrangência da aplicação na engenharia - quanto mais amplo melhor; b) o interesse da comunidade científica na área; e c) a aplicabilidade de métodos intervalares. Considerando estes critérios, decidiu-se pela otimização de processos controlados por PID (Proportional Integral Derivative). Nas próximas seções, uma formulação geral para o problema robusto multi-objetivo para sintonia de PID é apresentada; uma formulação específica para resolver o estudo de caso proposto é descrita juntamente com os detalhes de resolução pelos algoritmos [I]RMOA I, [I]RMOA II e [I]RMOEA. Antes das formulações, é feita uma revisão sobre os controladores PID e critérios de estabilidade.

5.1 Revisão sobre o Controlador PID

Os controladores PID, sejam eles analógicos ou digitais, são encontrados em diversas aplicações industriais como no controle de abastecimento e vazão de líquidos, no controle de temperatura e pressão de caldeiras e no controle de velocidade de motores, por exemplo. Astrom e Hugglund [5] justificam que pela simplicidade de funcionamento e com o desempenho muitas vezes considerado ótimo, o emprego de controladores PID na indústria chegou a atingir a cifra dos 95%, em se tratando de sistemas malha-fechada. A introdução de controladores do tipo PID tem como finalidade gerir processos com eficácia e precisão, tais que na ausência do controlador exigiriam atenção contínua de um ou mais operadores para realizar a tarefa de controle.

No controlador PID, o ajuste da variável de controle é feito de forma automática segundo às medidas obtidas na saída do processo $z(t)$ comparadas a um dado valor de referência $r(t)$, ao longo do tempo t. A diferença entre os valores de $r(t)$ e de $z(t)$ é o *sinal de erro* $e(t)$

$$e(t) = r(t) - z(t), \tag{5.1}$$

que se deseja minimizar ou eliminar, estabilizando $z(t)$ no ponto mais próximo de $r(t)$. A ação de controle age no processo de forma proporcional, integral e derivativa em relação ao sinal de erro conforme a expressão

$$m(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt + K_d \frac{de(t)}{dt}, \tag{5.2}$$

sendo $m(t)$ a saída do controlador, K_p o ganho proporcional, K_i o ganho de integração e K_d o ganho derivativo. Um esquema simples que contém um controlador PID associado a um processo genérico ou uma *planta* está apresentado na Fig.5.1.

O vetor de parâmetros do $\mathbf{K} = \{K_p, K_i, K_d\}$ do PID é ajustado em função da planta a ser controlada. A variável a ser manipulada assume os valores definidos pelo controlador, guiado pelo erro existente entre a referência e a saída real do sistema. A tarefa de selecionar valores apropriados para os ganhos $\mathbf{K}$ é chamada de *calibração ou sintonia de PID*. Existem diferentes métodos para calibração desses controladores, tais como: a) manualmente (tentativa-erro); b) pelo método de Ziegler-Nichols [127]; e c) pelo método Cohen-Coon [22]. Cada um desses métodos tem a sua aplicabilidade. Mais detalhes sobre sintonia de controladores podem ser encontrados em Visioli [120], Wang e Cai [123], e Chidambaram e Sree [19].

A ação dos ganhos $\mathbf{K}$ no controlador é linear, sendo o papel de cada ganho no controle da planta bem definido. Em poucas palavras, o termo

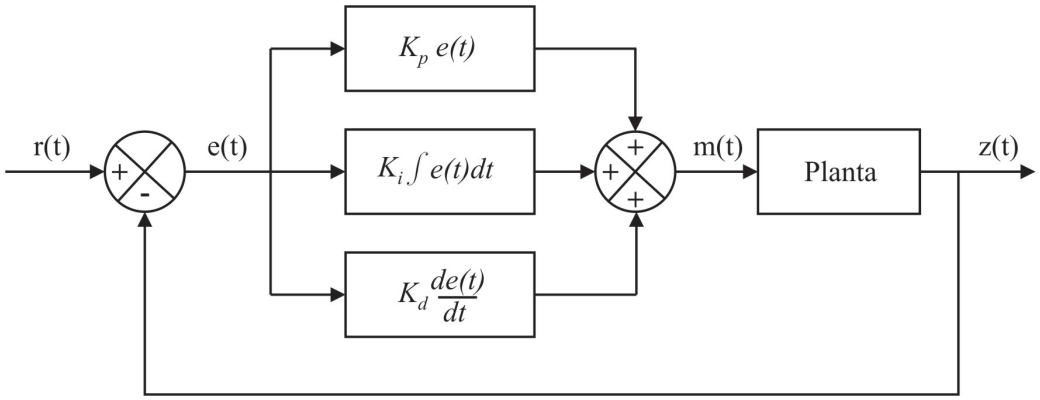


Fig. 5.1: Diagrama de blocos de um sistema malha-fechada com PID.

K_p acelera a resposta linear do sistema em direção ao valor de referência desejado. A integral relacionada ao ganho K_i computa a contribuição do erro acumulativo. Assim, o ganho K_i age sobre o erro conhecido ao longo do intervalo de integração. O termo derivativo contabiliza a variação do valor do erro no tempo. Assim, o ganho simbolizado por K_d funciona como um compensador para a taxa de desvio do valor de referência. Importante salientar que existe uma relação de dependência entre os ganhos; a alteração do valor de um, interfere no valor a ser ajustado nos outros.

5.2 Descrição do Problema

A otimização de sistemas controlados PI, PD ou PID para uma planta genérica, significa encontrar melhor conjunto de parâmetros K_p, K_i e K_d que minimizam algumas métricas/especificações de desempenho da resposta do sistema. As especificações no domínio do tempo são observáveis nos sistemas em que a resposta temporal é *estável*. A Fig.5.2 apresenta a identificação dessas métricas em um exemplo de resposta transitória de um sistema malha-fechada. O sobre-sinal máximo M_p é o valor mais alto da resposta transitória acima da referência. O tempo de subida t_s registra a velocidade com que o sistema responde à entrada, sendo portanto definido em intervalos de tempo proporcionais ao valor da entrada. Ogata [91] apresenta como valores típicos para t_s: a) de 10% a 90%, b) de 5% a 95% e c) de 0% a 100%. Para efeitos deste trabalho foi a faixa (c) para t_s. Similarmente, o tempo de pico t_p é medido como o tempo do início do processo até o valor de M_p. O tempo de acomodação t_a marca a estabilização da resposta do sistema numa faixa de valor estável (tolerância) próxima do valor de referência em que se deseja que o sistema atinja. A tolerância permitida é normalmente definida

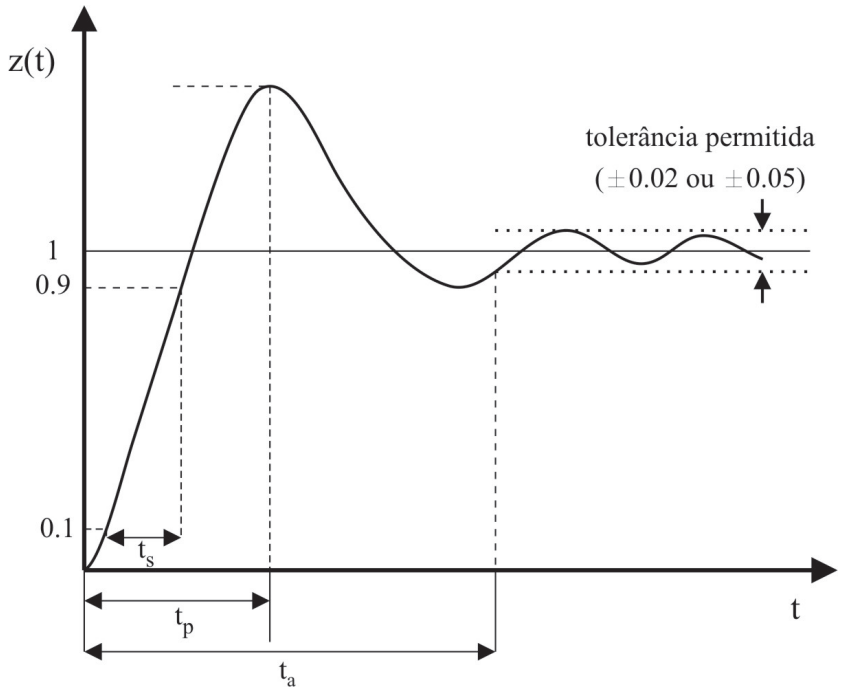


Fig. 5.2: Especificações para caracterizar a resposta transitória de um sistema de controle malha-fechada.

em torno de ±2% a ±5%. Segundo Ogata [91], exceto em certas aplicações em que não se pode aceitar oscilações, é desejável que a resposta transitória seja suficientemente rápida e amortecida. Portanto, considerando Ogata e as métricas da resposta transitória listadas acima, é desejável que o processo de otimização minimize M_p, t_s, t_p e t_a. Adicionalmente, foi escolhida uma métrica baseada no acúmulo do erro para contabilizar a medida da qualidade da resposta do sistema. Optou-se pela métrica ISE (Integral Square-Error) dada pela equação

$$\text{ISE} = \int_0^\infty e^2(t)dt. \tag{5.3}$$

As medidas de desempenho e qualidade descritas acima são utilizadas para formular o problema de otimização de sintonia de controladores PID. No entanto, antes de descrever o problema, são apresentados condições em que a estabilidade é garantida.

5.2.1 Análise da Estabilidade do Sistema

A estabilidade é fundamental em sistemas de controle realimentados, devendo portanto ser tratada como um pré-requesito para o projeto de sistemas de

controle lineares. Por isso, decidiu-se por aplicar um método para verificar se o sistema otimizado é estável ou não. Os detalhes do método são apresentados a seguir.

Critério de Routh-Hurwitz

Para o caso de controle estudado, escolheu-se o método RH (Routh-Hurwitz). Em poucas palavras, usando apenas os coeficientes da equação característica, o método RH é conclusivo sobre a existência ou não de raízes positivas da equação polinomial característica (denominador da função de transferência de malha-fechada), sem que haja necessidade de se resolver a equação. O método é apresentado considerando-se inicialmente a equação característica

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{5.4}$$

sendo os coeficientes grandezas reais. A partir de (5.4) constrói-se a Tab.5.1 apresentada a seguir.

Tab. 5.1: Coeficientes RH.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Os coeficientes $b_1, b_2, \ldots$ são calculados como

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad \cdots \tag{5.5}$$

E os coeficientes $c_1, c_2, \ldots$ por

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}, \quad \cdots \tag{5.6}$$

Pode-se concluir a partir do critério RH que o sistema é estável se todos os termos da coluna iniciada por a_n na Tab.5.1 forem positivos ou se todos forem negativos. Esse critério foi definido para pontos reais. A seguir a interpretação do critério RH para intervalos.

Polinômios de Kharitonov

O critério de RH pode ser estendido para tratar polinômios característicos cujos coeficientes sejam intervalos. No entanto, pode ser notado na Tab.5.1 que existem múltiplas ocorrências de coeficientes conduzindo o critério a um resultado muito conservativo. Uma alternativa para resolver o problema da estabilidade nesse caso é a aplicação da técnica de Kharitonov [70]. Para introduzir a descrição desta técnica, considere o seguinte polinômio característico intervalar

$$[a_n]s^n + [a_{n-1}]s^{n-1} + \cdots + [a_1]s + [a_0], \quad a_n \neq 0, \tag{5.7}$$

e os seguintes polinômios de Kharitonov

$$p_1 \;:\; \overline{a}_n s^n + \underline{a}_{n_1} s^{n-1} + \underline{a}_{n-2} s^{n-2} + \overline{a}_{n-3} s^{n-3} + \overline{a}_{n-4} s^{n-4} + \ldots \tag{5.8}$$

$$p_2 \;:\; \overline{a}_n s^n + \overline{a}_{n_1} s^{n-1} + \underline{a}_{n-2} s^{n-2} + \underline{a}_{n-3} s^{n-3} + \overline{a}_{n-4} s^{n-4} + \ldots \tag{5.9}$$

$$p_3 \;:\; \underline{a}_n s^n + \overline{a}_{n_1} s^{n-1} + \overline{a}_{n-2} s^{n-2} + \underline{a}_{n-3} s^{n-3} + \underline{a}_{n-4} s^{n-4} + \ldots \tag{5.10}$$

$$p_4 \;:\; \underline{a}_n s^n + \underline{a}_{n_1} s^{n-1} + \overline{a}_{n-2} s^{n-2} + \overline{a}_{n-3} s^{n-3} + \underline{a}_{n-4} s^{n-4} + \ldots \tag{5.11}$$

O sistema é declarado estável se p_1, p_2, p_3 e p_4 forem estáveis, segundo o critério RH. Para sistemas de ordem $n \leq 5$, Anderson *et al.* [3] apresentam as seguintes simplificações nos polinômios de Kharitonov

$$n = 2 \;:\; \text{estável se } a_2, a_1, a_0 < 0 \;\text{ ou }\; a_2, a_1, a_0 > 0 \tag{5.12}$$

$$n = 3 \;:\; \text{estável se } p_1 \;\text{ for RH} \tag{5.13}$$

$$n = 4 \;:\; \text{estável se } p_1, p_2 \;\text{ forem RH} \tag{5.14}$$

$$n = 5 \;:\; \text{estável se } p_1, p_2, p_3 \;\text{ forem RH} \tag{5.15}$$

Muitos casos de sistemas de controle são formulados como sistemas de ordem até 5. Logo as simplificações de Anderson *et al.* representam ganho "expressivo" na computação de estabilidade das plantas.

5.2.2 Formulação do Problema Multi-Objetivo Robusto para Sistemas de Controle com Planta Intervalar

Em recente pesquisa sobre trabalhos que envolvam controle robusto de plantas intervalares, observou-se o crescente interesse da comunidade científica nesta linha de pesquisa, como por exemplo Dahleh *et al.* [25], Pujara e Roy [94]; e Henrion e Bachelier [55]. No contexto acima, termo "controle robusto" está relacionado à manutenção da estabilidade do sistema caso haja alterações nos valores dos parâmetros do sistema, dentro de uma região delimitada por intervalos. O termo "robusto" no contexto de otimização definido nesta

tese tem significado semelhante: encontrar o melhor conjunto de parâmetros tais que, dentro de uma região garantidamente estável, maximize o desempenho da resposta transitória. A seguir, apresenta-se a descrição sobre alguns trabalhos que envolvem otimização de controladores em plantas intervalares.

Hsu e Yu [59] descreveram um sistema de otimização mono-objetivo usando o ISE como métrica a minimizar. Um algoritmo genético foi empregado para realizar tal tarefa. Importante salientar que foi utilizada a filosofia do pior caso para otimização robusta, com o critério RH funcionando como função de restrição, sendo a incerteza considerada apenas nos parâmetros da planta; os parâmetros do controlador foram considerados com valores fixos. Lordelo *et al.* [77] usaram plantas intervalares para localizar os pólos do sistema. Partindo da função de transferência da planta e do polinômio intervalar característico do sistema malha-fechada, os *controladores intervalares* foram obtidos via resolução da equação de Diofantina intervalar. Esses controladores, no formato de intervalos, contém todas as possibilidades de localização dos pólos. Na seqüência, os controladores foram empregados para caracterizar a região no plano que assegura o bom desempenho para o caso malha-fechada. Então, um método de otimização determinou os *controladores não-frágeis*, objetivo principal do trabalho. Takahashi *et al.* [117] apresentaram um método para otimizar o sistema de controle PID de plantas com incerteza nos parâmetros e ainda sujeita a distúrbio. A otimização de desempenho do sistema foi formulada como problema multi-objetivo, cujos critérios foram definidos empregando-se as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência dos distúrbios e da referência de entrada para o erro da saída controlada. Os autores garantiram a estabilidade pela inspeção de politopo construído a partir dos valores dos parâmetros com a respectiva tolerância.

Dentre os estudos apresentados acima, a aplicação proposta a seguir se assemelha: a) ao trabalho de Hsu e Yu [59] no que se refere ao tratamento do quesito estabilidade; b) ao artigo de Lordelo *et al.* [77], porque manipula os controladores como intervalos; e c) ao estudo de Takahashi *et al.* [117] quanto ao tipo de formulação multi-objetivo do problema. Assim, sendo o vetor $\mathbf{K}$ os ganhos do sistema e o parâmetro $\mathbf{p}$ a presença de incertezas, um problema robusto multi-objetivo para sintonia de controladores PID de uma

planta genérica de ordem n pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{K}\in[\mathbf{K}]} \max_{\mathbf{p}\in[\mathbf{P}]} && f_1, f_2, f_3, f_4 \\
&\text{sujeito a :} && g_1 = \text{critério RH;} \\
& && g_2 = \max(z(\mathbf{K}, \mathbf{p}, t)) < 1.3u(t), \;\; t = t_0; \\
& && g_3 = \text{singularidades Análise Intervalar;} \\
& && g_4 = \text{outras singularidades.} \\
&\text{Sendo :} && f_1 = z(\mathbf{K}, \mathbf{p}, t), \;\; t \in [0, \infty]; \\
& && f_2 = \arg \max_{t\in[0,\infty]} (f_1); \\
& && f_3 = \min_{t\in[0,\infty]} \{t \mid z(\mathbf{K}, \mathbf{p}, t) = r(t)\}; \\
& && f_4 = \text{ISE.}
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Normalmente o sobre-sinal máximo (f_1) e o tempo de pico (f_2) são especificações conflitantes, ou seja, o decréscimo do sobre-sinal acarreta no acréscimo do tempo de pico. O crescimento/decrecimento do tempo de subida (f_3) está em conformidade com o crescimento/decrecimento de t_p. Porém, em algumas situações M_p e t_p podem não existir, pois nem sempre há sobre-sinal. Com isso as métricas M_p e t_p podem resultar em quesitos "ruins" a otimizar. Por outro lado, o índice ISE (f_4) representa um quesito seguro a otimizar. O ISE contabiliza o menor erro acumulado no período transitório. Em (5.16), a restrição g_1 está relacionada à verificação da estabilidade via Routh-Hurwitz, Kharitonov e simplificações de Anderson *et al.*, quando for o caso. A restrição g_2 desqualifica as respostas "ruins" com erro em estado estacionário, até o tempo $t = t_0$. E, g_3 certifica a aplicabilidade dos métodos intervalares. Por exemplo, considere o intervalo $[a, b]$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Se $a < 0$ e $b > 0$, os cálculos $\sqrt{[a, b]}$ e $1/[a, b]$ representam singularidades, pois não estão definidos para Análise Intervalar que emprega sistemas finitos, que é o caso desta Tese. Finalmente, g_4 trata outras singularidades. Por exemplo, evita que a formulação gere resultados impossíveis tais como $t_s < 0$.

5.3 Estudo de Caso

A formulação proposta em (5.16) pode ser empregada em vários problemas de controle via PID. Por isso é necessário estabelecer o escopo para o estudo de caso abordado aqui. O caso considerado é simples. No entanto, a finalidade é

detalhar o processo de otimização robusta. O leitor interessado pode estender o procedimento para resolver sistemas cuja função de transferência tenha ordem $n \leq 4$. A limitação de ordem deve-se à necessidade da função de inclusão da resposta do sistema ser analítica. Como a resposta transitória depende do cálculo das raízes do polinômio característico, a solução analítica fechada fica restrita até equações de quarta ordem.

Para melhor descrição do estudo de caso, esta seção foi divida nas seguintes partes: a) Caracterização da Planta; b) Resposta Temporal do Sistema; c) Formulação Robusta Multi-Objetivo; d) Funções Objetivo; d) Análise das Funções Objetivo e de Restrição; e e) Experimento e Resultados.

5.3.1 Caracterização da Planta

No estudo de caso, é considerado um sistema de controle linear, invariante no tempo, sem atraso, sem distúrbio de entrada e com controle analógico proporcional-mais-derivativo para responder a uma entrada degrau unitário. O sistema está apresentado na Fig.5.3. A função de transferência resultante

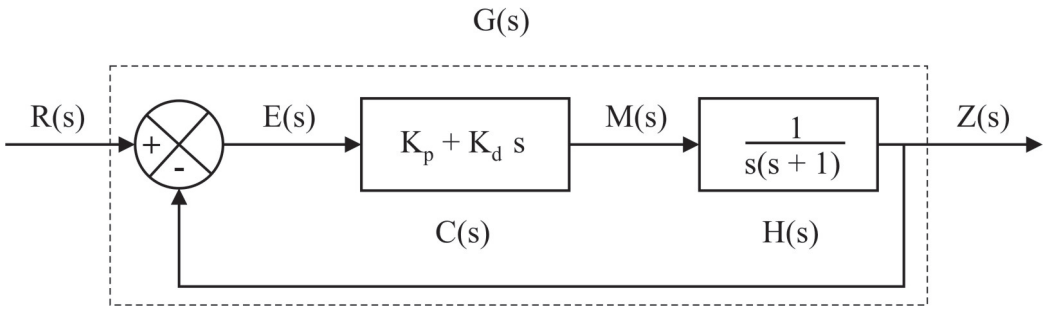


Fig. 5.3: Diagrama de blocos do estudo de caso.

$G(s)$ para o caso da Fig.5.3 é dada por

$$G(s) = \frac{H(s)C(s)}{1 + H(s)C(s)} = \frac{K_p + (K_d)s}{s^2 + (1 + K_d)s + K_p} \quad . \tag{5.17}$$

5.3.2 Resposta Temporal do Sistema

Aplicando o degrau unitário ($r(t) = 0, t = 0$; $r(t) = 1, t > 0$) e realizando a transformada inversa de Laplace obtém-se a seguinte resposta $z(K_p, K_d, t)$ do sistema

$$z(K_p, K_d, t) = 1 + e^{-\frac{(1+K_d)}{2}t}\left(-\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) + \frac{(-1 + K_d)}{\sqrt{\alpha}}\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t)\right) \tag{5.18}$$

sendo

$$\alpha = (K_d + 1)^2 - 4K_p. \tag{5.19}$$

Considerando a incerteza p na precisão do controlador analógico, os ganhos K_p e K_d devem ser reescritos como $K_p \pm p$ e $K_d \pm p$. A ação dos controladores K_p e K_d sobre a planta é linear, no entanto o efeito aditivo da incerteza p sobre K_p e K_d não é trivial. Assim, considerando p, as formulações em (5.18) e (5.19) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} z(K_p, K_d, p, t) \quad &= \quad 1 + e^{-\frac{(1+K_d+p)}{2}t}\left(-\cosh(\frac{\sqrt{\alpha'}}{2}t)\right) + \ \ldots \\ &\ldots \quad + e^{-\frac{(1+K_d+p)}{2}t}\left(\frac{(-1+K_d+p)}{\sqrt{\alpha'}}\sinh(\frac{\sqrt{\alpha'}}{2}t)\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

sendo

$$\alpha' = (K_d + p + 1)^2 - 4(K_p + p). \tag{5.21}$$

5.3.3 Formulação Robusta Multi-Objetivo

Considerado a resposta temporal do sistema descrita por (5.20) e (5.21), o problema robusto multi-objetivo para o estudo de caso é definido como

$$\begin{aligned} &\min_{K_p, K_d \in [0,15]} \quad \max_{p \in [-0.1, 0.1]} \quad f_1, f_2, f_3, f_4 \\ &\text{sujeito a :} \quad g_1 = s^2 + (1 + K_d + p)s + (K_p + p) \text{ for RH;} \\ &\qquad\qquad g_2 = \max\left(z\left(K_p, K_d, p, t\right)\right) < 1.3, \ \ t = 3s; \\ &\qquad\qquad g_3 = \alpha' > 1; \\ &\qquad\qquad g_4 = \frac{-\sqrt{\alpha'}+1-(Kd+p)}{\sqrt{\alpha'}+1-(Kd+p)} > 1, \ 0 \notin \sqrt{\alpha'} + 1 - (Kd + p). \\ &\text{Sendo :} \quad f_1 = z(K_p, K_d, p, t), \ \ t \in [0, \infty]; \\ &\qquad\qquad f_2 = \arg \max_{t \in [0,\infty]} (f_1); \\ &\qquad\qquad f_3 = \min_{t \in]0,\infty]} \{t \mid z(K_p, K_d, p, t) = r(t)\}, \ \ r(t) = 1; \\ &\qquad\qquad f_4 = \text{ISE}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

5.3.4 Funções Objetivo

As funções objetivo f_1 e f_2 referem-se ao sobre-sinal máximo M_p e ao tempo de pico t_p da resposta do sistema $z(K_p, K_d, p, t)$ descrita em (5.20). Para funções contínuas, a derivada de uma função tem valor nulo nos pontos de máximo e mínimo da função. Portanto, M_p e t_p ocorrem quando

$$\frac{dz(K_p, K_d, p, t)}{dt} = 0, \tag{5.23}$$

resultando em

$$t_p = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \ln \left(\frac{1 - \left(\sqrt{\alpha'} + (K_d + p)\right)^2}{1 - \left(\sqrt{\alpha'} - (K_d + p)\right)^2} \right), \tag{5.24}$$

e

$$M_p = z(K_p, K_d, p, t_s) - 1. \tag{5.25}$$

A dedução das equações (5.24) e (5.25) foi realizada no Apêndice A considerando um modelo sem o parâmetro de incerteza p e para valores fixos de K_p e K_d.

A função objetivo f_3, que trata do tempo de subida t_s, também é obtida da resposta do sistema $z(K_p, K_d, p, t)$. Considerando t_s como o período para o sistema atingir a referência ($r(t) = 1$), t_s é formulado como

$$t_s = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \ln \left(\frac{-\sqrt{\alpha'} + 1 - (K_d + p)}{\sqrt{\alpha'} + 1 - (K_d + p)} \right) \tag{5.26}$$

O desenvolvimento da equação para t_s foi realizado no Apêndice B, que sem perda de generalidade, foram fixados K_p e K_d, e o parâmetro p foi desconsiderado.

A função f_4, referente ao índice ISE, é calculada a partir da equação integral (5.3). A resolução da integral, feita no Apêndice C, produz como resultado

$$\begin{aligned} \text{ISE} \quad = \quad & -\frac{\left(1 + \frac{1-(K_d+p)}{\sqrt{\alpha'}}\right)^2}{\sqrt{\alpha'} - 1 - (K_d + p)} \quad \ldots \\ \ldots \quad & -\frac{2\left(1 - \left(\frac{1-(K_d+p)}{\sqrt{\alpha'}}\right)^2\right)}{-1 - (K_d + p)} - \frac{\left(1 - \frac{1-(K_d+p)}{\sqrt{\alpha'}}\right)^2}{-\sqrt{\alpha'} - 1 - (K_d + p)}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Os algoritmos para otimização robusta propostos nesta tese utilizam-se de funções de inclusão intervalares para o cálculo do desempenho das soluções

candidatas. As funções de inclusão criadas para as funções objetivo do estudo de caso foram classificadas como funções de inclusão naturais, ou seja, foram obtidas pela substituição da variável real pela sua correspondente variável intervalar. Como as funções objetivo descritas pelas equações (5.24-5.27) contém apenas operadores matemáticos elementares, pode-se afirmar que elas são convergentes e monotônicas. No entanto, a característica de ser mais estreita possível depende do número de ocorrências das variáveis internas e do tipo de operação em que essas ocorrências múltiplas estão envolvidas. Esse fato justifica as simplificações realizadas nos apêndices deste texto. Acredita-se que outras simplificações ainda são possíveis. Desta forma, decidiu-se por não afirmar que as funções de inclusão deduzias são estreitas. Contudo, elas atendem a finalidade de suporte à otimização pelos algoritmos propostos.

5.3.5 Análise das Funções Objetivo e de Restrição

O tratamento das restrições da formulação (5.22) é similar àquele procedimento apresentado na Subseção 3.5.1. No tratamento de restrições deste estudo de caso, os testes de inclusão classificam todo o espaço de busca em "viável" e "de fronteira", segundo dada precisão. Nenhum espaço foi classificado como "não viável" porque não foram adotadas funções de restrição que garantissem a instabilidade. A Fig.5.4 apresenta o espaço viável do estudo de caso que será objeto da tarefa de otimização.

Neste ponto, torna-se importante esclarecer como as funções de inclusão interpretam a resposta do sistema. Isso é feito através do exemplo que se segue. Considere a caixa viável $[\mathbf{K}]_\mathbf{0}$ formada por $[K_p]+[p] = [9.3749, 10.3126]$ e $[K_d] + [p] = [5.6249, 6.5626]$. A Fig.5.5 apresenta o envelope criado a partir da função de inclusão natural $[z]([K_p], [K_d], [p], t)$ de (5.20). A figura também mostra a resposta no ponto central desta caixa, ou seja, o ponto $\mathbf{c}([\mathbf{K}]_\mathbf{0}) = \{9.8438, 6.0938\}$. Os resultados das funções de inclusão referentes às equações (5.24-5.27) para o exemplo acima descrito estão mostrados na Tab.5.2. Observe que as funções de inclusão para M_p e ISE geram

Tab. 5.2: Análise das funções objetivo de inclusão em $[\mathbf{K}]_\mathbf{0}$ e $\mathbf{c}([\mathbf{K}]_\mathbf{0})$.

	M_p	t_p (s)	t_s (s)	ISE
$[\mathbf{K}]_\mathbf{0}$	[-644.5,2210.1]	$[0.178, 3.495]$	[0.104,2.447]	[-2.888,5.033]
$\mathbf{c}([\mathbf{K}]_\mathbf{0})$	1.0397	0.7737	0.4682	0.3106

resultados não estreitos e até mesmo irreais, como por exemplo, o sobresinal não poderia ser negativo. No entanto, considerando a filosofia do pior

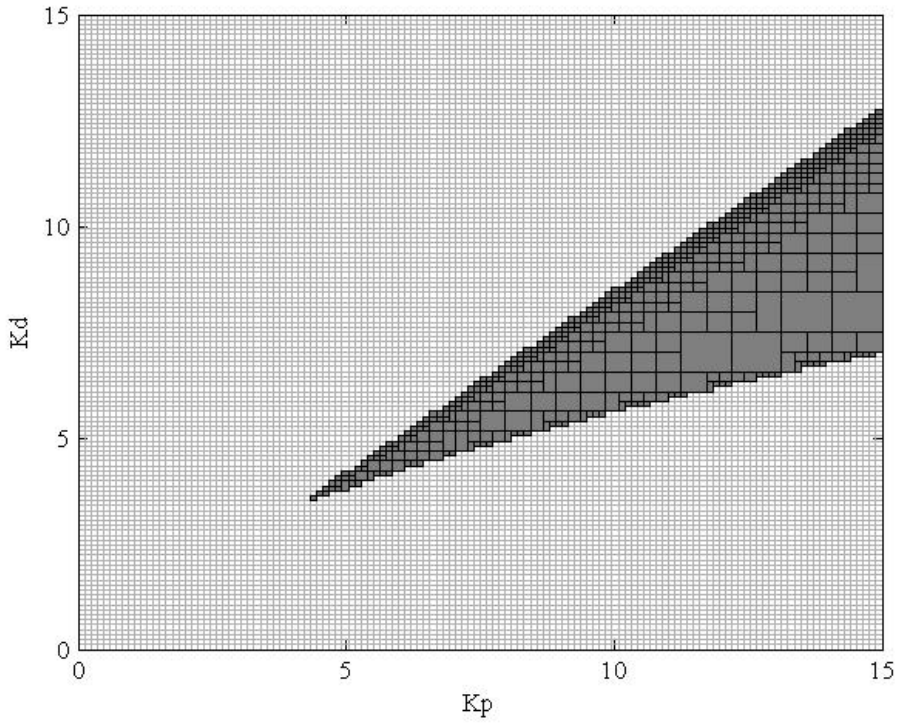


Fig. 5.4: Espaço de busca após o tratamento de restrições. A região em cinza escuro representa o espaço viável; em cinza claro, os intervalos que não puderam ser classificados como viáveis e nem como não viáveis. A figura foi obtida empregando-se o algoritmo SIVIA (2.3.12) para interpretar o resultado dos teste de inclusão das funções de restrição. Detalhes: parâmetro de precisão $\varepsilon = 0.1$; 590 caixas viáveis.

caso, o que conta para efeitos de avaliação de robustez são os limites superiores. Para analisar a convergência e monotonicidade das funções de inclusão, considere as caixas $[\mathbf{K}]_\mathbf{1} = [9.5749, 10.1126] \times [5.8249, 6.3626]$ e $[\mathbf{K}]_\mathbf{2} = [9.7749, 9.9126] \times [6.0249, 6.1626]$ com as características $[\mathbf{K}]_\mathbf{2} \subset [\mathbf{K}]_\mathbf{1} \subset [\mathbf{K}]_\mathbf{0}$ e $\mathbf{c}([\mathbf{K}]_\mathbf{2}) = \mathbf{c}([\mathbf{K}]_\mathbf{1}) = \mathbf{c}([\mathbf{K}]_\mathbf{0})$. A Tab.5.3 mostra os resultados. Por outro lado, a Fig.5.6 mostra a convergência e monotonicidade da resposta do sistema.

A medida em que as bissecções vão sendo realizadas sobre as soluções candidatas, as funções de inclusão vão aumentando sua precisão auxiliando os algoritmos a aproximarem-se do ponto que eles realmente devem representar. No entanto, as bissecções geram um custo computacional que se eleva exponencialmente com as dimensões do problema e com a precisão desejada.

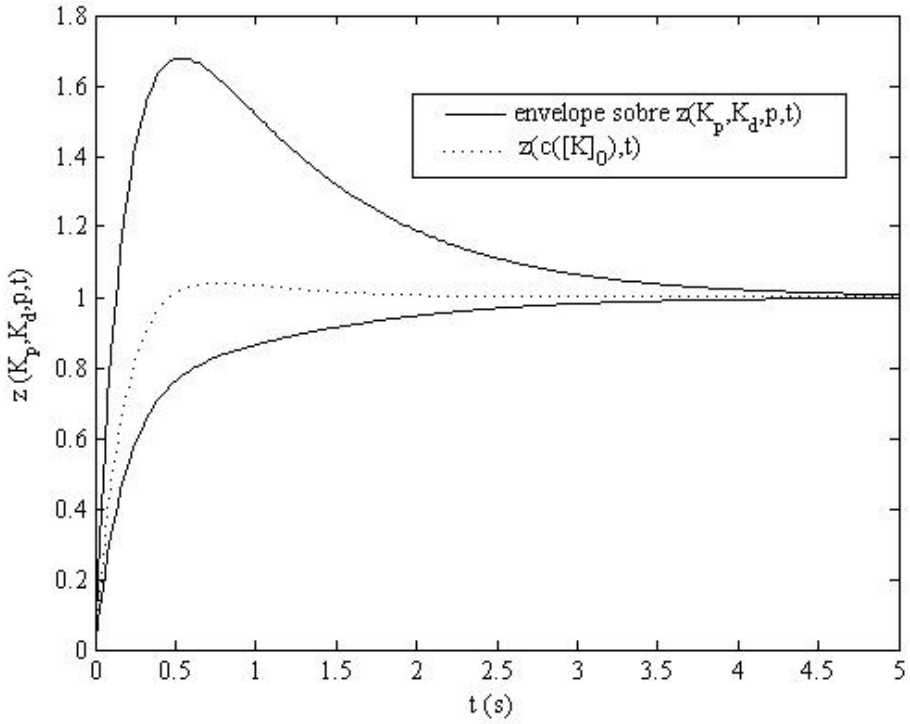


Fig. 5.5: Envelope sobre $z(K_p, K_d, p, t)$. A função de inclusão $[z]([K_p], [K_d], [p], t)$ engloba todas as possíveis respostas contidas nos intervalos especificados.

Tab. 5.3: Análise das funções objetivo de inclusão em $[\mathbf{K}]_\mathbf{1}$ e $\mathbf{c}([\mathbf{K}]_\mathbf{1})$.

	M_p	t_p (s)	t_s (s)	ISE
$[\mathbf{K}]_\mathbf{0}$	[-644.5,2210.1]	[0.178, 3.495]	[0.104,2.447]	[-2.888,5.033]
$[\mathbf{K}]_\mathbf{1}$	[-1.627,6.718]	[0.394, 1.536]	[0.233,0.975]	[-0.643,1.432]
$[\mathbf{K}]_\mathbf{2}$	[0.920,1.231]	[0.658, 0.911]	[0.395,0.556]	[0.108,0.520]
$\mathbf{c}([\mathbf{K}]_\mathbf{0})$	1.0397	0.7737	0.4682	0.3106

5.3.6 Experimento e Resultados

O experimento consistiu em utilizar os algoritmos [I]RMOA I, [I]RMOA II e [I]RMOEA, validados no Capítulo 4, para resolver o problema robusto multi-objetivo descrito em (5.22). Como trata-se de um problema com quatro objetivos a visualização gráfica ficou restrita para três objetivos simultâneos. Os resultados da otimização de (5.22) foram divididos em quatro grupos: a) envelopes sobre a fronteira robusta; b) conjuntos solução; c) fronteiras

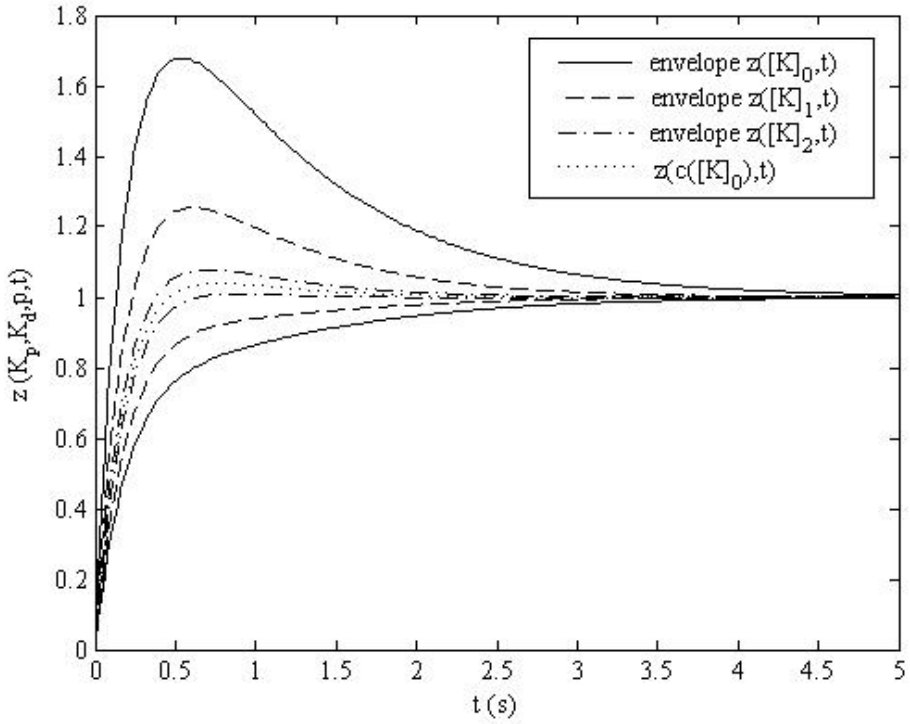


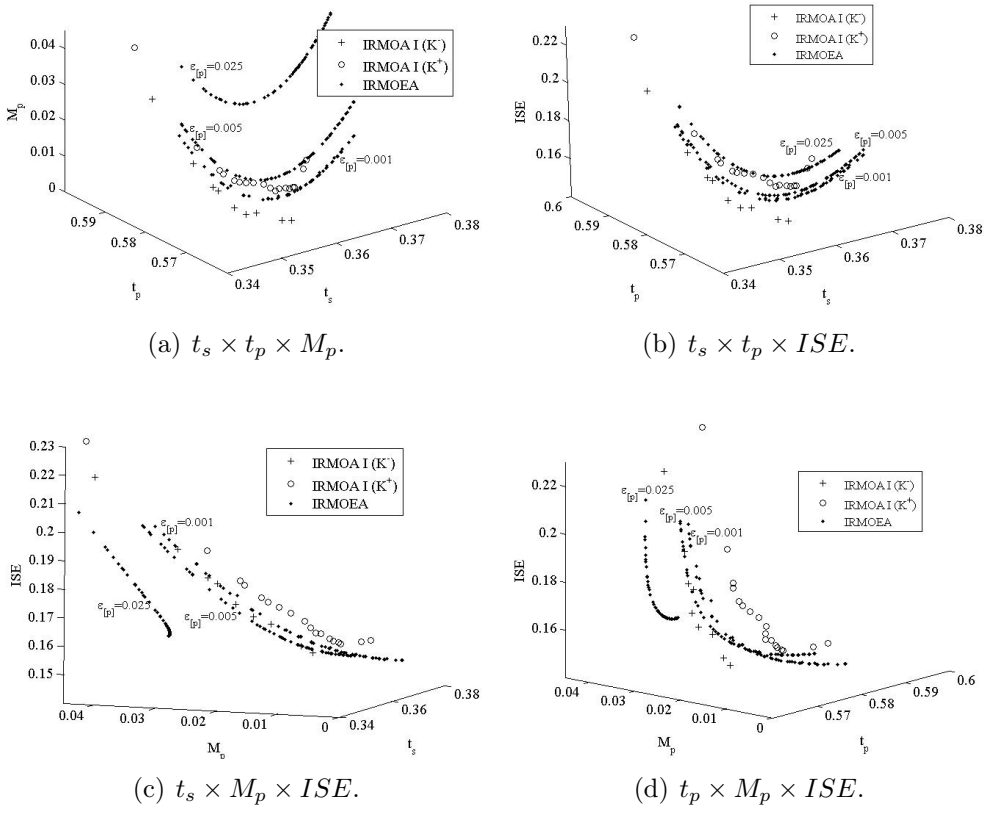
Fig. 5.6: Conjunto de envelopes sobre $z(K_p, K_d, p, t)$. Note as propriedades de convergência e monotonicidade da função de inclusão.

robustas; e d) análise de algumas soluções na resposta do sistema de controle. Em (a), os resultados no espaço dos objetivos dos três algoritmos são confrontados, mas o foco está nos envelopes. Em (b), os conjuntos solução encontrados via os algoritmos [I]RMOA II e [I]RMOEA são apresentados. Em (c), as fronteiras robustas do [I]RMOA II e do [I]RMOEA são traçadas e comparadas. E em (d), algumas soluções resultantes de [I]RMOA II e de [I]RMOEA são utilizadas como respostas para a sintonia do sistema de controle.

Para as execuções, conforme apresentado na formulação (5.22), foram empregados $K_p = [0, 15]$, $K_d = [0, 15]$ e $P = [-0.1, 0.1]$. Além destes parâmetros, foram configurados os seguintes parâmetros específicos: a) $\varepsilon_{\mathbf{x}\#} = 0.25$ e $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.05$ para o [I]RMOA I; b) $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.05$ e $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.025$ para o [I]RMOA II; e c) $p_c = 1$, $p_m = 0.0005$, $n_{pop} = 100$, $n_{gen} = 60$, $n_{bit} = 15$ e $r_{bis}^{max} = 8$ para o [I]RMOEA. No experimento que investiga os envelopes, também foram utilizados $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.005$ e $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.001$ para o [I]RMOA II e o [I]RMOEA.

Envelopes sobre a Fronteira Robusta

A visualização de envelopes 3D não é clara, por isso optou-se por apenas marcar as regiões de $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ pelos pontos que definem cada região e contrastar com as fronteiras robustas dos outros algoritmos. Os resultados estão apresentados nos gráficos que se seguem.



(a) $t_s \times t_p \times M_p$. (b) $t_s \times t_p \times ISE$.

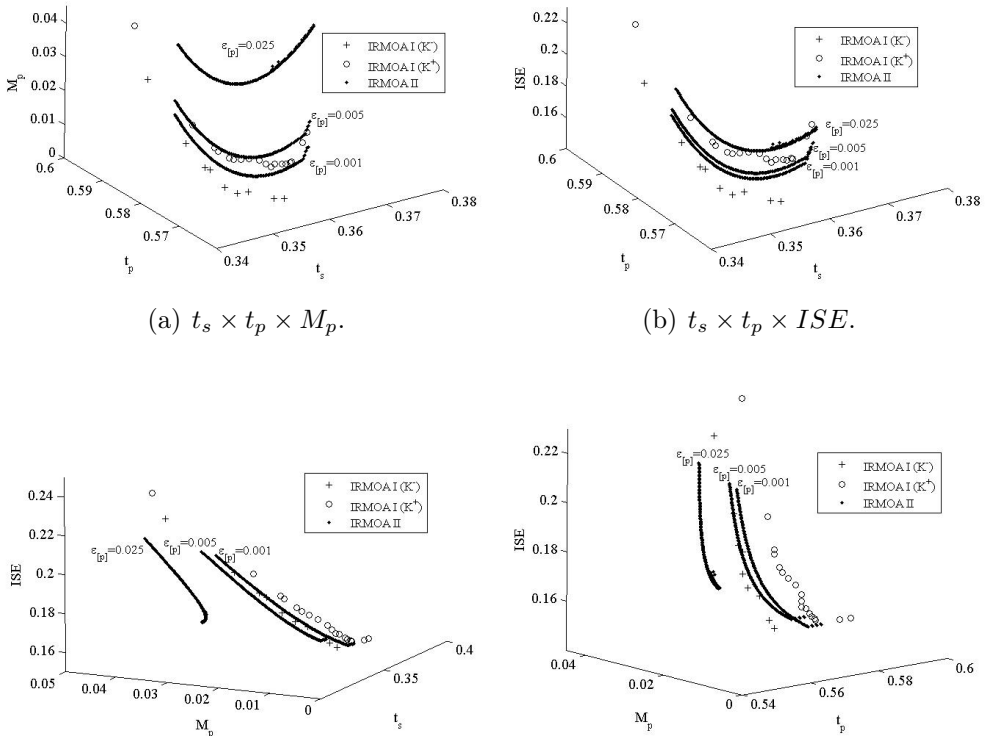
(c) $t_s \times M_p \times ISE$. (d) $t_p \times M_p \times ISE$.

Fig. 5.7: Estudo de Caso PD - [I]RMOA I $\times$ [I]RMOEA. O envelope definido por $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ reprovou as imagens robustas geradas pelo [I]RMOEA quando foram utilizados $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.005$ e $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.025$.

A Fig.5.7 mostra a dependência da fronteira robusta com relação à precisão $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$ do parâmetro de incerteza $\mathbf{p}$. Portanto, uma ou mais funções de inclusão dos objetivos não são mínimas (reveja Seção 2.3.8 para mais informações sobre funções de inclusão mínimas). Dentre as quatro sub-figuras, o envelope exibido no gráfico (b) envolveu tanto o resultado obtido com $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.001$, quanto $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.005$. Isto sugere que M_p, única função não plotada em (b), é função objetivo menos estreita. A confirmação desta in-

formação pode ser verificada resolvendo-se o problema formulado em (5.22) com menor número de objetivos.

Similarmente à figura anterior, a Fig.5.8 compara os envelopes com o conjunto solução gerado no [I]RMOA II.



(a) $t_s \times t_p \times M_p$. (b) $t_s \times t_p \times ISE$.

(c) $t_s \times M_p \times ISE$. (d) $t_p \times M_p \times ISE$.

Fig. 5.8: Estudo de Caso PD - [I]RMOA I $\times$ [I]RMOA II. O envelope definido por $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ mostrou conformidade do conjunto Pareto robusto gerado pelo [I]RMOA II quando foi empregado $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.001$. As fronteiras robustas para os demais valores de $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$ foram reprovadas.

A Fig.5.8 apresentou resultados semelhantes àqueles exibidos na Fig.5.7. Essa convergência de resultados, para esse estudo de caso, prova que: a) as funções objetivo, e conseqüentemente a fronteira de Pareto robusta, são dependentes de $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$; e b) o [I]RMOA I cumpriu o papel de ferramenta de verificação, reprovando as execuções com $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$ inadequado.

Espaço de Busca

Os conjuntos solução do problema robusto multi-objetivo em (5.22) determinados pelos métodos [I]RMOA II e [I]RMOEA encontram-se na Fig.5.9. Ao todo, foram geradas 181 ($\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.025$), 168 ($\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.005$ e $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.001$) soluções pelo [I]RMOA II. E, 100 soluções para o [I]RMOEA, sendo esse número igual ao tamanho da população utilizada. Os resultados na Fig.5.9 e na Fig.5.10 sugerem que o ganho K_p ótimo tem valor 15 e que K_d ótimo se situa dentro do intervalo $[9.5, 13.5]$. Registra-se que o [I]RMOA II encontrou o mesmo conjunto solução para $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.005$ e $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.001$.

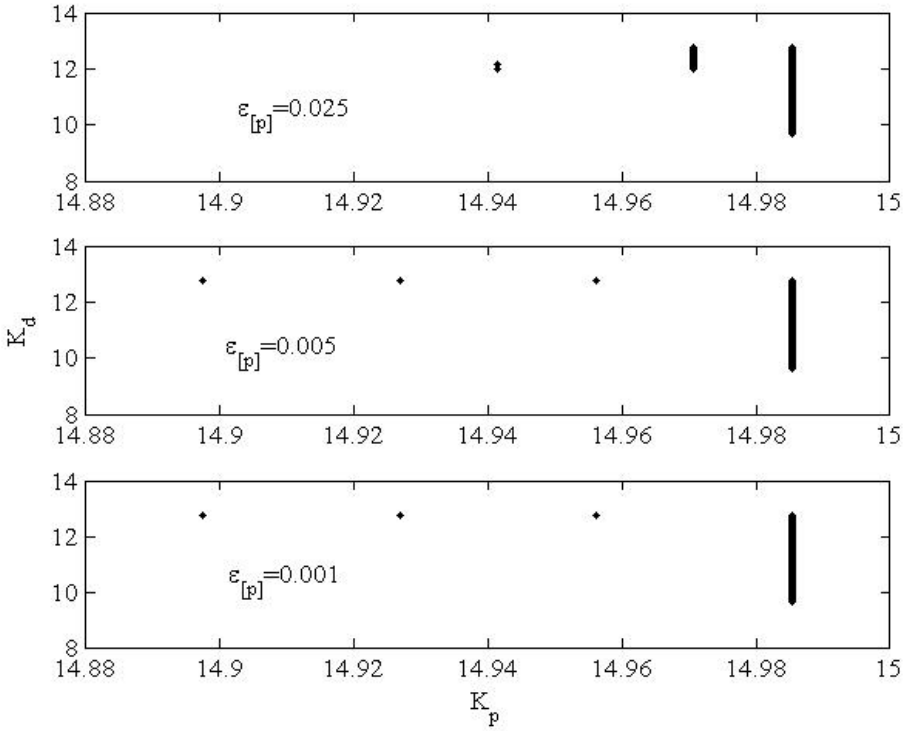


Fig. 5.9: Conjuntos solução do [I]RMOA II para o Estudo de Caso PD. A regularidade e proximidade da distribuição no conjunto solução do [I]RMOA II impede a visualização da distribuição das soluções. No entanto, é possível verificar que a precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.05$ foi atendida para a maioria das soluções.

Nota-se que apenas alguns elementos do conjunto solução [I]RMOA II que estão isolados à esquerda, não satisfizeram a precisão $\varepsilon_{[\mathbf{x}]} = 0.05$ definida como parâmetro no método. Não se trata de erro no método ou perda de garantia. Por causa da estratégia pessimista adotada, uma região no espaço

de busca só pode ser eliminada quando houver certeza que ela não contém solução robusta. Assim, os intervalos que contém as citadas soluções isoladas ainda são candidatos a proverem soluções robustas. Em uma suposta próxima rodada de bissecções, o pessimismo é diminuído e as soluções isoladas tendem a desaparecer, deixando a fronteira gerada pelo [I]RMOA II com a distribuição ainda mais homogênea.

Pela Fig.5.10, nota-se que a dispersão do conjunto solução aumenta à medida que $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$ diminui. Dentre as possíveis causas, cita-se que o aumento da precisão na computação das funções objetivos de inclusão permitiu que soluções próximas à região ótima apresentarem desempenho equivalente.

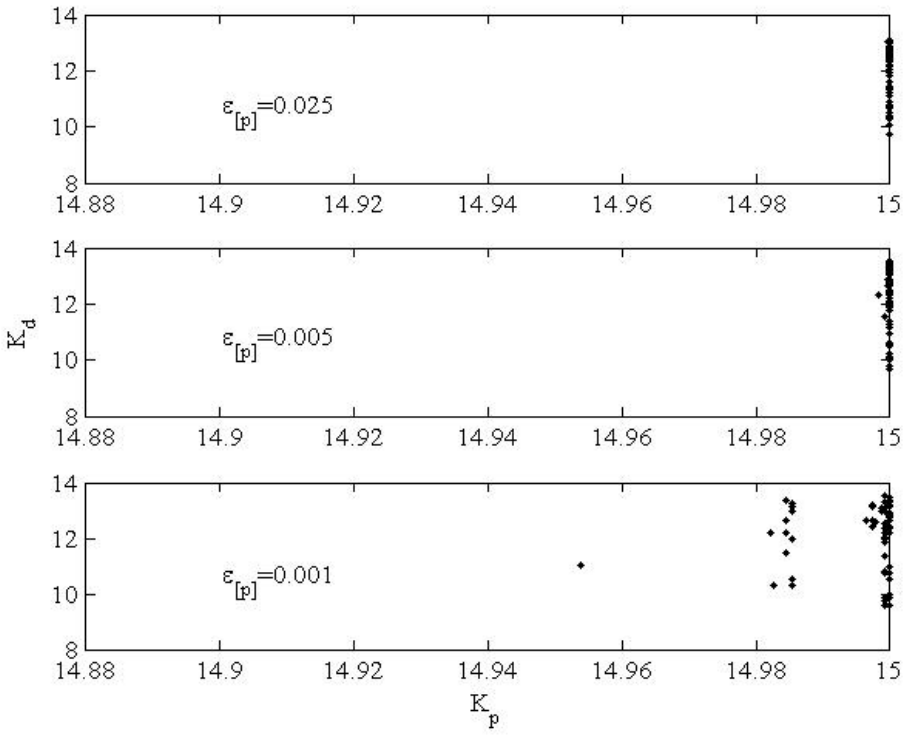
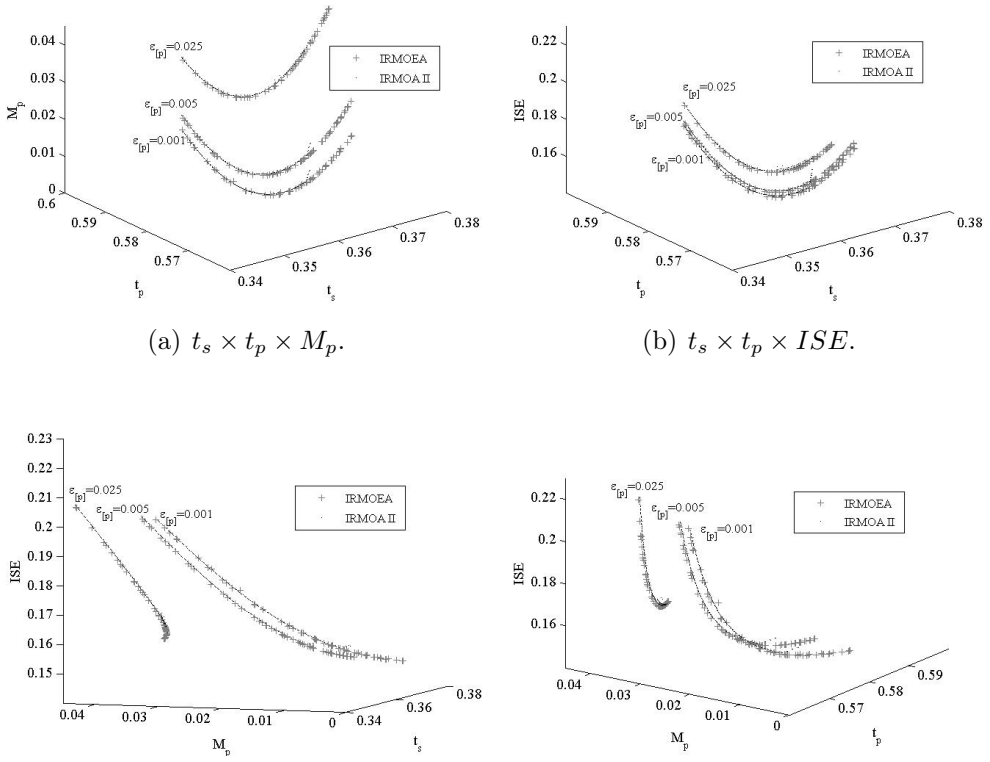


Fig. 5.10: Conjuntos solução do [I]RMOEA para o Estudo de Caso PD. Note que o número de soluções com $K_p = 15$ diminui com o decréscimo de $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$.

Observa-se que os conjuntos solução apresentados na Fig.5.9 e na Fig.5.10 convergiram para a região ótima independente do valor de $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$. Por outro lado, a imagem robusta desses conjuntos solução ocupou regiões diferentes no espaço dos objetivos (veja a Fig.5.7 e a Fig.5.8). Essa informação é útil, pois permite reduzir o custo da computação das funções de inclusão com emprego de $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$ maiores.

Comparações entre Fronteiras Robustas

Para um dado valor para $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$, os métodos [I]RMOA II e [I]RMOEA produziram fronteiras de Pareto robustas em regiões "próximas" no espaço dos objetivos, como pode ser observado na Fig.5.11. Como os métodos funcionam utilizando-se de processos de busca diferentes, essa coerência de resultados comprova a equivalência entre os métodos para resolver o problema robusto e que os conjuntos solução gerados situam-se realmente na região ótima.



(a) $t_s \times t_p \times M_p$. (b) $t_s \times t_p \times ISE$.

(c) $t_s \times M_p \times ISE$. (d) $t_p \times M_p \times ISE$.

Fig. 5.11: Comparações entre as fronteiras robustas do [I]RMOA II e do [I]RMOEA. Observa-se que os métodos produzem fronteiras equivalentes para os mesmos valores de $\varepsilon_{[\mathbf{p}]}$.

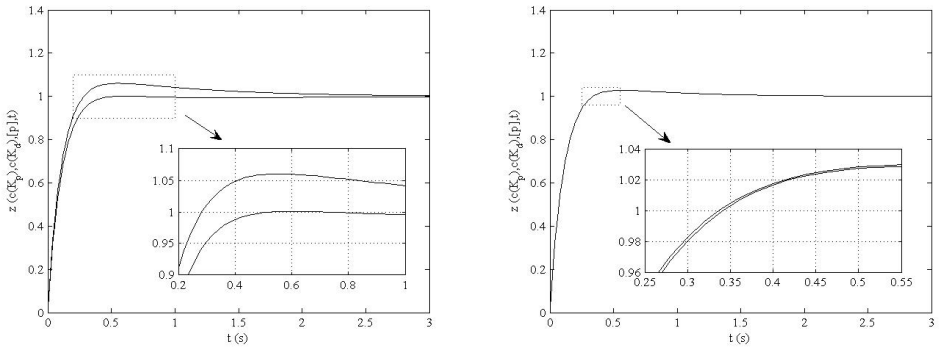
A Fig.5.11 apresenta distribuição do conjunto solução mais homogênea em [I]RMOA II que em [I]RMOEA. Por outro lado, a aproximação da fronteira robusta é melhor no [I]RMOEA, como pode ser visto na Fig.5.9 e na Fig.5.10.

Sintonia Ótima

Conforme a filosofia a *posteriori* (Subseção 2.1.3) empregada, durante o processo de otimização nenhuma preferência foi atribuída às funções objetivo. Portanto, o problema de otimização multi-objetivo proposto em (5.22) não pode ser considerado como concluído com a apresentação dos conjuntos solução e de suas respectivas fronteiras de Pareto robusta nesta seção. Para finalizar é necessário realizar a tomada de decisão, ou seja, definir a *solução robusta de projeto* $\mathbf{K}^{**} = \{K_p^{**}, K_d^{**}\}$ que sintoniza otimamente o controlador. Dois $\mathbf{K}^{**}$ foram escolhidos: um do conjunto solução do [I]RMOA II e outro do [I]RMOEA. O critério adotado para a tomada de decisão foi a mínima soma das funções objetivos normalizados. Assim, denotando o conjunto de soluções robustas por $\mathbf{K}^*$ e por $f_i^{\max}(\mathbf{K}^*, \mathbf{p})$ o máximo valor de desempenho da função objetivo f_i segundo $\mathbf{K}^*$, $\mathbf{K}^{**}$ é formulado como

$$\mathbf{K}^{**} = \arg \min_{\mathbf{k}^* \in \mathbf{K}^*} \sum_{i=1}^{n_f} \frac{f_i^{\max}(\mathbf{K}^*, \mathbf{p}) - f_i(\mathbf{k}^*, \mathbf{p})}{f_i^{\max}(\mathbf{K}^*, \mathbf{p})}, \quad \mathbf{p} \in \mathbf{P}, \tag{5.28}$$

sendo $f_i^{\max}(\mathbf{K}^*, \mathbf{p}) > 0$ garantido em (5.24)-(5.27). Assim, considerando a precisão $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.001$, a solução robusta selecionada pelo [I]RMOA II foi $K_p^{**} = 14.9854$ e $K_d^{**} = 9.6240$, e para o [I]RMOEA foi $K_p^{**} = 15.0000$ e $K_d^{**} = 9.6088$. As respostas do sistema estão mostradas nas figuras que se seguem. De acordo com as métricas de desempenho do sistema de con-



(a) $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.2$. (b) $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.001$.

Fig. 5.12: Resposta do sistema para sintonia ótima segundo o [I]RMOA II. Em cada gráfico, a resposta robusta é curva superior. À esquerda, a incerteza é computada com um único cálculo, $[p] = [-0.1, 0.1]$; À direita, o parâmetro de incertezas é subdividido em subpavimentos com precisão $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.001$. O envelope com $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0.001$ é mais preciso.

trole formuladas em (5.24)-(5.27), a solução do [I]RMOA II ($K_p^{**} = 14.9854$, $K_d^{**} = 9.6240$) resultou em $t_s = 0.3411$, $t_p = 0.5730$, $M_p = 0.0305$ e $ISE = 0.2031$, e o [I]RMOEA ($K_p^{**} = 15.0000$, $K_d^{**} = 9.6088$) em $t_s = 0.3409$, $t_p = 0.5728$, $M_p = 0.0307$ e $ISE = 0.2034$. Considerando a precisão de cada método, pode-se afirmar que os algoritmos convergiram para a mesma solução robusta, e por isso não foi necessário apresentar a resposta temporal [I]RMOEA. Observe na Fig.5.12 que a sintonia robusta ótima realmente produziu uma resposta eficiente ao sistema: estável, rápida, com sobre-sinal quase nulo e com resposta em regime permanente dentro da tolerância e, o mais importante, considerando as incertezas da formulação.

5.4 Considerações Finais

A resolução de um problema de engenharia pelos algoritmos propostos representa um papel importante nesta tese: verificar como os problemas reais são tratados e resolvidos pelos algoritmos [I]RMOA I, [I]RMOA II e [I]RMOEA. Para atingir essa finalidade, decidiu-se por detalhar o processo de otimização, conforme listado a seguir. O procedimento de otimização foi inicializado com a contextualização do problema, destacando-se algumas abordagens interessantes encontradas trabalhos científicos da área. Em seguida, foram apresentadas as métricas a serem otimizadas, as restrições a serem respeitadas e como pode ser inserido o parâmetro de incerteza. Como resultado, foi projetada uma formulação robusta multi-objetivo que atendesse a diversos problemas de sintonia de controladores PID. Um estudo de caso, foi escolhido e as equações específicas para as funções objetivo de restrição foram desenvolvidas. O comportamento das funções de inclusão tanto àquelas relativas aos objetivos quanto às demais endereçadas às restrições foi discutido. Finalmente os algoritmos intervalares foram aplicados e os resultados obtidos foram confrontados, comprovando o desempenho de cada um dos métodos. A seguir as observações sobre os fatos mais importantes ocorridos durante o processo.

A resposta temporal de um sistema de controle genérico, conforme ilustrado na Fig.5.1, pode ser obtida facilmente utilizando-se de funções computacionais já implementadas em ferramentas computacionais comerciais, tais como a função "step" do Matlab. Como estas funções utilizam-se de métodos numéricos para tratar a resposta temporal, elas não podem ser utilizadas pelos algoritmos intervalares propostos, pois usualmente os métodos numéricos acarretam na perda de garantia de convergência e monotonicidade das funções de inclusão. Como exemplo, reveja novamente as características de convergência e monotonicidade na Fig.5.6 da resposta temporal do

sistema. No entanto, a resposta temporal no formato de função de inclusão ainda não atendeu às necessidades de interpretação do problema de otimização. Por exemplo, considere a resposta temporal $[z]([\mathbf{K}]_\mathbf{0}, t)$ apresentada na Fig.5.5. O sobre-sinal máximo relativo a todos os vetores contidos em $[\mathbf{K}]_\mathbf{0}$ poderia ser interpretado como a máxima amplitude mostrada na figura. Mesmo que essa interpretação não correspondesse à realidade, ela ainda poderia ser aceita como uma definição do projetista. O problema de obtenção das métricas via análise gráfica se tornaria mais difícil para determinar o "menor" sobre-sinal máximo de todos os vetores contidos em $[\mathbf{K}]_\mathbf{0}$. Se o sobre-sinal máximo é uma métrica intervalar logo, ele deve ser definido por limites inferior e superior. Assim, os métodos intervalares também tem dificuldades em utilizar funções objetivos baseadas em valores medidos do sistema de otimização. Os métodos intervalares são mais facilmente aplicáveis quando a solução analítica das funções objetivo e de restrição forem disponíveis. Por isso, a resolução do problema de sintonia de controladores PID pelo procedimento descrito se limita a casos cuja equação polinomial característica seja de até quarto grau. A limitação deve-se ao fato da necessidade de se encontrar as raízes da equação característica pelo método analítico, que por sua vez é válido até a quarta ordem.

As restrições foram projetadas conforme as particularidades dos métodos intervalares e das métricas, e também para atender os requisitos de desempenho associados à planta. Uma grande vantagem dos métodos intervalares em relação a diversos outros métodos é o tratamento de restrições. As regiões não viáveis são excluídas permanentemente após a reprovação por alguma função de inclusão de restrição. Isso é sempre verdade quando as funções de restrição são conclusivas, o que não ocorreu na aplicação escolhida. O critério RH é um exemplo. Os intervalos eram testados quando à estabilidade. Os intervalos aprovados pelo critério eram selecionados; os demais eram continuamente bisseccionados, testados novamente pelo critério e reclassificados, até uma dada precisão. Uma função de inclusão mais eficiente para esse problema mediria a "instabilidade". Assim, as soluções consideradas instáveis poderiam ser eliminadas mais eficientemente.

Os algoritmos [I]RMOA I, [I]RMOA II e [I]RMOEA foram considerados aprovados para resolver a aplicação proposta, pois mostraram-se eficazes tanto para formar um envelope ([I]RMOA I) sobre a fronteira robusta quanto para elencar vários pontos dessa fronteira ([I]RMOA II e [I]RMOEA).

6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A motivação principal desse trabalho foi resolver problemas de otimização em situações onde pode-se constatar a presença de incertezas. Decidiu-se por desenvolver métodos de busca que acoplassem as disciplinas Análise Intervalar, Otimização Robusta Multi-Objetivo e Algoritmos Evolucionários. Em separado, cada um dos tópicos acima representa uma grande área de pesquisa; a união deles certamente resulta em um amplo tema multidisciplinar. Por isso, fugiu completamente do escopo desta tese (Seção 1.3) a tentativa esgotar qualquer um destes assuntos. Pelo contrário, a contribuição principal desta tese foi pontual: discutir otimização robusta multi-objetivo e introduzir ferramentas para resolvê-la cuja estrutura se baseia em métodos intervalares e evolucionários. Para finalizar esse estudo, nas seções que se seguem foram apresentadas as principais conclusões percebidas no decorrer da tese e alguns tópicos a serem cobertos em trabalhos fururos.

6.1 Conclusões

A escolha de estudar e propor algoritmos para tratar a filosofia de otimização robusta que considera o pior caso está ligada à decisão de se trabalhar com Análise Intervalar; a computação completa das incertezas é feita naturalmente nos métodos intervalares. Tratando as incertezas do sistema de otimização como um parâmetro separado, a computação pode ficar mais intuitiva. Se o parâmetro de incerteza aparece apenas uma vez na expressão da função objetivo robusta, com apenas uma avaliação da função objetivo pode-se computar toda incerteza com o mínimo de pessimismo (veja Subseção 3.5.1). Quando há múltiplas ocorrências do parâmetro de incerteza, então é necessária a criação de subpavimentos no espaço das incertezas para avaliar mais precisamente o desempenho robusto de dada solução. Vale a pena registrar que existem vantagens e desvantagens de se considerar o pior caso. Por exemplo, em otimização de dimensionamento de dispositivos a imagem de uma solução robusta pode, freqüentemente, ser um ponto fora do espaço dos objetivos. Em outras palavras, uma dada imagem robusta pode estar relacionada a pontos inviáveis no espaço de busca. A situação piora com o aumento da ordem do espaço de busca. Por outro lado, situações

onde não se pode correr risco, o pior caso deve ser a filosofia adotada para a otimização robusta.

O problema de otimização robusta é mais complexo que a otimização tradicional, pois considerando que as funções objetivo foram definidas como $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_p} \mapsto \mathbb{R}^{n_f}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$, nota-se que a ordem do problema cresce com o fator $n_x \times n_p$. Se o sistema de otimização robusta envolver apenas funções objetivos convexas, a resolução é simples, rápida e precisa através da aplicação de métodos dirigidos por derivadas [13] (pg 13). No entanto, na fase de planejamento da tese, foi decido desenvolver métodos para otimização robusta que fossem independentes de particularidades das funções objetivo e de restrições, como por exemplo não convexidade e descontinuidade.

Os métodos propostos para otimização robusta multi-objetivo [I]RMOA I, [I]RMOA II e [I]RMOEA apresentam, nesta ordem, a evolução temporal da criação dos algoritmos nessa tese. Cada um desses algoritmos teve sua contribuição. Primeiramente, a abstração da fronteira de Pareto robusta foi visualizada com os resultados do [I]RMOA I, através da construção de envelopes sobre a fronteira robusta. Uma vez que o [I]RMOA I é calibrado para dado valor de $\mathbf{P}$, o método está preparado para gerar outro envelope em um cenário robusto diferente de $\mathbf{P}$. Por outro lado, o [I]RMOA II busca as soluções robustas a partir de uma caixa contendo toda a região do espaço das variáveis. A região inviável é eliminada pelas funções de restrição, escritas também sob a forma intervalar. Utilizando uma filosofia pessimista, as regiões viáveis somente são descartadas quando puder ser provado que aquela região não contém soluções robustas. Assim, o ponto forte do [I]RMOA II é a garantia de armazenar toda a fronteira Pareto robusta, segundo dada precisão, dentro dos intervalos não excluídos. Tanto [I]RMOA I quanto [I]RMOA II sofrem com o aumento das dimensões no espaço de busca e de incerteza, porque são nesses espaços que são feitas as bissecções. Diferentemente, no [I]RMOEA a busca é probabilística e a influência das dimensões não causa aumento considerável no custo computacional. No entanto, o [I]RMOEA não garante encontrar soluções robustas. A contribuição dos métodos intervalares se restringe à computação das incertezas. Dentre outros aspectos, uma característica verificada nos algoritmos [I]RMOA I e [I]RMOA II, e comum nos métodos puramente intervalares, é a convergência do mecanismo de busca. Isso pode ser facilmente verificado uma vez que todos os processos são formados por passos finitos. No [I]RMOA I, o processo de fatiar o espaço de busca ou dos objetivos para gerar as amostras que formarão $\mathbf{K}^-$ e $\mathbf{K}^+$ é finito por definição. O procedimento de busca de minimizadores para as amostras geradas (funções FPS e CSC) tem convergência comprovada em [64]. No [I]RMOA II, o término do processo de busca também é certo e

previsível; o mecanismo tem início com uma única caixa, e ao longo das iterações, as bissecções vão ocorrendo até que todas as caixas atinjam um valor mínimo de largura. Por outro lado, no [I]RMOEA a convergência é imposta fixando-se o número de iterações. Alternativamente, critérios de parada podem ser definidos como alguma métrica que mede a diversidade, por exemplo. De qualquer forma, o [I]RMOEA finaliza a busca por soluções sem a certeza que esgotou todas as possibilidades de busca. Finalmente, os métodos [I]RMOA I e [I]RMOA II tem apenas dois parâmetros, ao passo que [I]RMOEA tem vários. Essas características dos métodos desenvolvidos nesta tese concordam com a natureza puramente determinística do [I]RMOA I e do [I]RMOA II, e estocástica-determinística do [I]RMOEA. A Tab.6.1 resume a comparação dos algoritmos propostos. Importante observar que quesitos como "custo" tem avaliação subjetiva, levando em conta a análise empírica realizada na fase de testes.

Tab. 6.1: Comparação dos métodos [I]RMOA I, [I]RMOA II e [I]RMOEA. O símbolo † denota uma relação de dependência do método em relação aos itens listados.

Propriedade	[I]RMOA I	[I]RMOA II	[I]RMOEA
Classificação	determinístico	determinístico	híbrido
Busca	global	global	global
Finalidade	envelopar $\mathbf{Y}^*$	envelopar $\mathbf{X}^*$	encontrar $\mathbf{X}^*$
Qualidade $\mathbf{Y}^*$	não se aplica	alta	média/alta
Convergência	sim	sim	critério de parada†
Garantia	$\{[\mathbf{f}], \varepsilon_{\mathbf{x}\#}, \varepsilon_{[\mathbf{x}]}\}^\dagger$	sim	não
Custo	alto	médio/alto	baixo
Dimensionalidade	dependente	dependente	independente
Parâmetros	poucos	poucos	muitos

O sucesso da uniformidade da fronteira robusta para o [I]RMOEA deve-se à técnica de nicho NB[I]. Pelos experimentos realizados, não há dúvidas quanto a sua eficiência e ao seu baixo custo computacional.

A métrica MB[I] mostrou-se eficaz na contabilização da uniformidade da fronteira robusta. Compare novamente os resultados na Subseção 3.7.2. Entretanto, ela foi desenvolvida para espaço dos objetivos com apenas duas dimensões.

Os métodos intervalares para otimização partem da construção de funções de inclusão convergentes, monotônicas e estreitas. Uma vez que os três quesitos sejam atendidos, os métodos intervalares podem excluir seguramente regiões onde a solução do sistema de otimização não está. Na verdade, a característica de ser estreita ajuda principalmente na redução do pes-

simismo gerado na computação dos intervalos. A propagação do pessimismo ao longo dos processos de otimização pode resultar em uma solução intervalar com largura tal que não ajuda no processo decisório. Dentre as funções teste apresentadas, a função de inclusão natural para ZDT3 não é estreita porque contém ocorrências repetidas de variáveis. Como conseqüência, o [I]RMOA I que depende da computação exaustiva de funções de inclusão teve seu desempenho prejudicado. No problema de otimização de sintonia dos controladores de processo a construção da função de inclusão das funções objetivo foi a tarefa mais complicada. Para sistemas de ordem maior que quatro, a construção dessas funções pelo método empregado não se aplica, pois as raízes do polinômio característico tem solução analítica até o quarto grau. A construção de funções de inclusão estreitas e a questão do pessimismo estão tratadas em [10] e [17].

Aplicação dos algoritmos propostos em um problema real estabeleceu uma conexão importante entre todas as etapas do processo de otimização. O problema escolhido foi a otimização de sintonia de controladores PID. Entre outras questões, foi detalhado como o problema deve ser modelado para ser tratado por métodos intervalares, com dedução analítica das funções de inclusão para os objetivos do problema específico. A estabilidade é, normalmente, uma característica desejável em sistemas de controle com malha-fechada. Por isso, decidiu-se interpretar os critérios de estabilidade como restrições. Além disso, outras restrições relativas às singularidades dos métodos intervalares e ao desempenho do sistema de controle foram adicionadas. O resultado do tratamento das restrições foi apresentado graficamente na Fig.5.4. Analisando a figura, fica claro como os métodos intervalares excluem eficientemente as porções de espaço classificadas como não viáveis, segundo dada precisão. O estudo de caso foi finalizado com a aplicação dos algoritmos propostos. As fronteiras robustas foram comparadas mostrando a aplicabilidade desses algoritmos.

6.2 Trabalhos Futuros

A Otimização robusta multi-objetivo é um problema de custo computacionalmente caro por definição ($\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_p}$). Por isso, boa parte das futuras direções de pesquisa foram relacionadas à otimização do tempo de busca pelas soluções robustas. Essas direções foram listadas a seguir.

Vários processos dos algoritmos apresentados são paralelizáveis, como a bissecção de caixas por exemplo. Assim, esses processos podem tirar vantagens, em termos de tempo de execução, com uma nova codificação desenvolvida para processamento em paralelo.

Para aumentar a aplicabilidade dos algoritmos propostos, decidiu-se por não desenvolver métodos dependentes de cálculos de derivadas. No entanto, se o problema for contínuo, a idéia de se usar derivadas em intervalos acelerará convergência e aumentará a precisão do resultados.

Em todos os métodos propostos para otimização robusta, as caixas intervalares foram armazenadas em listas encadeadas. A lista encadeada mais utilizada neste trabalho é do tipo fila; a estrutura pilha foi empregada para executar a função CSC. No entanto, espera-se ganho em redução do esforço e com a organização se as filas forem substituídas por estruturas de dados baseadas em árvores.

A métrica MB[I] foi projetada e implementada para espaço dos objetivos com duas dimensões. A extensão dessa métrica para espaços maiores que 2D ampliará a aplicabilidade do método.

A técnica NB[I] também pode ser aplicada ao [I]RMOA I, por exemplo numa etapa após a geração de pontos da função grade. Quando surgisse um primeiro ponto pertencente a $\mathbf{K}^+$ que dominasse todo o nicho, todas os pontos pertencentes aos nichos dominados seriam excluídos diretamente. Um procedimento similar pode ser usado quando se encontra pontos em $\mathbf{K}^-$. A expectativa é que o custo caia expressivamente.

Os nichos também poderiam ser mesclados ao algoritmo [I]RMOA II. A idéia seria não permitir que o método trabalhasse com um número de soluções candidatas acima de um valor máximo. Quando fosse ultrapassado esse limite a técnica de nicho seria empregada para eliminar soluções que ocupassem regiões mais concentradas. No entanto, o conceito de otimismo (2.8) para otimização robusta deverá ser utilizado para explicar a escolha de uma solução em detrimento de outra.

A técnica NB[I] foi guiada apenas por um parâmetro r_{bis}^{max} que determina o máximo de bissecções. No entanto, existem mais aspectos a investigar, por exemplo: a) qual a melhor maneira de reduzir problemas de pontos próximos classificados em nichos diferentes; b) qual o melhor valor r_{bis}^{max}; e c) como seria o comportamento do algoritmo de bissecção caso o corte não passe pelo centro do eixo de maior largura.

A lista das sugestões para continuar pesquisa não termina nas sugestões acima. Entretanto, acredita-se que esses tópicos são pontos chave para o aprimoramento dos algoritmos propostos.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Alefeld. Inclusion methods for systems of nonlinear equations - the interval Newton method and modifications. In Jurgen Herzberger, editor, *Topics in Validated Computations*, pages 7–26. Elsevier, 1994.

[2] G. Alefeld and G. Mayer. Interval analysis: theory and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (121):421–464, 2000. Amsterdam.

[3] B. D. O. Anderson, E. I. Jury, and Mansour. On robust hurwitz polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(10):909–913, 1987.

[4] J. Andersson. A survey of multiobjective optimization in engineering design, 2000.

[5] K. J. Astrom and T. Hagglund. New tuning methods for pid controllers. In *European Control Conference*, pages 2456–2462, Rome, Italy, 1995.

[6] V. Barichard and J. K. Hao. A population and interval constraint propagation algorithm for multi-objective optimization. In *Metaheuristics International Conference-MIC'03*, Kyoto, Japan, 2003.

[7] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4), 1998.

[8] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust optimization - methodology and applications. *Mathematical Programming (Series B)*, 92:453–480, 2002.

[9] R. Benayoun, J. de Montgolfier, J. Tergny, and O. Laritchev. Linear programming with multiple objective functions: Step method (stem). *Mathematical Programming*, 1:366–375, 1971.

[10] F. Benhamou and W. J. Older. Applying interval arithmetic to real, integer and Boolean constraints. *Logic Programming: The ALP Newsletter*, 6(2):13–14, 1993.

[11] D. Bertsimas and M. Sim. Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming*, 98(1-3):49–71, 2003.

[12] H. G. Beyer and B. Sendhoff. Robust optimization - a comprehensive survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:3190–3218, 2007.

[13] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2006.

[14] G. C. Calafiore and M. C. Campi. The scenario approach to robust control design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5):742–753, 2006.

[15] C. Carreras and I. Walker. Interval methods for improved robot reliability estimation, 2000.

[16] L. G. Casado, I. García, J. A. Martínez, and Ya. D. Sergeyev. New interval analysis support functions using gradient information in a global minimization algorithm. *Journal of Global Optimization*, 25(4):345–362, 2003. Kluwer Academic Publishers.

[17] G. Chabert and L. Jaulin. Computing the pessimism of inclusion functions. *Reliable computing*, 13(6):489–504, 2007.

[18] A. Charnes and W. W. Cooper. Chance-constrained programming. *Management Science*, 6(1):73–79, 1959.

[19] M. Chidambaram and R. P. Sree. A Simple Method of Tuning pid Controllers for Integration/Dead-Time Processes. *Computers and Chemical Engineering*, 27:211–215, 2003.

[20] C. A. C. Coello and T. Pulido. Multiobjective optimization using micro-genetic algorithm. In L. S. et al., editor, *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'2001)*, pages 274–282, California, 2001. Morgan Kaufmann Publishers.

[21] C. A. C. Coello and M. R. Sierra. A coevolutionary multi-objective evolutionary algorithm. In *Congress on Evolutionary Computation - CEC'2003*, pages 482–489, Canderra, Australia, December 2003. IEEE Press.

[22] G. H. Cohen and G. A. Coon. Theoretical consideration of retarded control. *Transactions of the ASME*, 75(1):827–834, 1953.

[23] A. E. Csallner, T. Csendes, and M. Cs. Markót. Multisection in interval branch-and-bound methods for global optimization i. theoretical results. *J. Global Optimization*, (16):371–392, 2000.

[24] P. Cztzak and A. Jaszkiewicz. Pareto simulated anneling: a meta-heuristic technique for multiple-objective combinatorial optimization. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 7(1):34–47, 1998.

[25] M. Dahleh, A. Tesi, and A. Vicino. An overview of extremal properties for robust control of interval plants. *Automatica*, 29(3):707–721, 1993.

[26] G. B. Dantzig. Linear programming under uncertainty. *Management Science*, 1(3-4):197–206, 1955.

[27] M. Dao. *Projection des ensembles, application à l'estimation et à la commande robuste.* PhD thesis, Université d'Angers, 2006.

[28] I. Das and J. E. Dennis. Normal-boundary intersection: a new method for generating the pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM J. Optim.*, (8):631–657, 1998.

[29] M. Daumas. Past and future formalizations of ieee 754, 854 and 754r standards, July 2002. Talk presented to the IEEE 754 committee.

[30] M. D. Davis. *Game Theory, a nontechnical introdution.* Dover Publicatons, New York, 1983.

[31] K. Deb. Multi-objective genetic algorithms: Problems difficulties and construction of test problems. *Evolutionary Computation Journal*, 7(3):205–230, 1999.

[32] K. Deb. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms.* John Wiley & Sons, 2001.

[33] K. Deb and H. Gupta. Searching for robust pareto-optimal solutions in multi-objective optimization. In *EMO*, pages 150–164, 2005.

[34] K. Deb, Agarwal S. Pratap, A., and T. Meyarivan. A fast and elist multiobjective genetic algorithms: Nsga-ii. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):182–197, April 2002.

[35] J. DeVale and P. J. Koopman Jr. Robust software - no more excuses. In *DSN '02: Proceedings of the 2002 International Conference on Dependable Systems and Networks*, pages 145–154. IEEE Computer Society, 2002.

[36] L. C. Dias and J. N. Clímaco. On computing electre's credibility indices under partial information. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 8:74–92, 1999.

[37] M. Dorigo and T. Stützle. *Ant Colony Optimization.* MIT Press, Cambridge, MA, 2004.

[38] X. Du and W. Chen. Towards a better understanding of modeling feasibility robustness in engineering design, 1999.

[39] L. El Ghaoui and G. Calafiori. Worst-case simulation of uncertain systems. In A. Tesi A. Garulli and A. Vicino, editors, *Robustness in Identification and Control.* Springer, 1999.

[40] L. El Ghaoui, F. Oustry, and H. Lebret. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM J. OPTIM.*, 9(1):33–52, 1998.

[41] R. A. Fisher. *Design of experiments.* Edinburgh: Oliver & Boyd, 1951.

[42] C. M. Fonseca and P. J. Fleming. Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization. In *Proceedings of 5th International Conference on Genetic Algorithm*, pages 416–423, California, 1993.

[43] C. M. Fonseca and P. J. Fleming. An overview of evolutionary algorithms in multiobjective optimization. In *Evolutionary Computation Journal*, volume 3, pages 1–16, 1995.

[44] Y. Gao, L. Shi, and P. Yao. Study on multi-objective genetic algorithm. In *Proceedings of 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation*, Heifei, P. R. China, June 28-July 2 2000.

[45] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning.* Addison Wesley, 1989.

[46] D. E. Goldberg and J. Richardson. Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization. In *Proceedings of First International Conference on Genetic Algorithms and Their Aplications*, pages 41–49, 1987.

[47] J. J. Grefenstette. Optimization of control parameters for genetic algorithms. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 16(1):122–128, 1986.

[48] E. R. Hansen. Interval arithmetic in matrix computations - part i. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, (2):308–320, 1965.

[49] E. R. Hansen. Global optimization using interval analysis - the one-dimensional case. *Journal of Optimization Theory and Applications*, (29):331–344, 1979.

[50] E. R. Hansen and G. W. Walster. *Global Optimization Using Interval Analysis*. Marcel Dekker, Inc, 2 edition, 2004.

[51] M. P. Hansen and A. Jaszkiewicz. Evaluating the quality of approximations to the non-dominated search. Technical report imm-rep-1998-7, Technical University of Denmark, March 1998.

[52] R. J. Hanson. Interval arithmetic as a closed aritmetic system on a computer. Technical report, Jet Propulsion Laboratory, 1968.

[53] B. Hayes. A lucid interval. *Computing Science*, 91(6):484–488, November-December 2003.

[54] T. L. Heath. *On the measurement of the circle, in the book The Work of Archimedes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1897.

[55] D. Henrion and O. Bachelier. Low-order robust controller synthesis for interval plants. *International Journal of Control*, 74(1):1–9, 2001.

[56] T. Hickey, Q. Ju, and M.H. Van Emden. Interval arithmetic: from principles to implementation. *Journal of ACM*, 48(5):1038–1068, September 2001.

[57] J. H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. The University of Michigam Press, 1975.

[58] J. Horn, N. Nafpliotis, and D. E. Goldberg. A niched pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. In *Proc. of 1st ICEC*, pages 82–87, 1994.

[59] C. C. Hsu and Yu C-Y. Design of optimal controller for interval plant from signal energy point of view via evolutionary approaches. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B*, 34(3):1609–1617, June 2004.

[60] K. Ichida and Y. Fujii. An interval arithmetic method for global optimization. *Computing*, (23):85–97, 1979.

[61] K. Ichida and Y. Fujii. Multicriterion optimization using interval analysis. *Computing*, (44):47–57, 1990.

[62] L. Jaulin. Interval constraint propagation with application to bounded-error estimation. *Automatica*, (36):1547–1552, 2000.

[63] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied Interval Analysis*. Springer, 2001.

[64] L. Jaulin and E. Walter. Guaranteed tuning, with application to robust control and motion planning. *Automatica*, 32(8):1217–1221, 1996.

[65] Y. Jin and J. Branke. Evolutionary optimization in uncertain environments-a survey. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 9:303– 317, 2005.

[66] W. M. Kahan. A more complete interval arithmetic, 1968. Lecture notes for a summer course at the University of Michigan.

[67] R. B. Kearfott. *Interval arithmetic methods for nonlinear systems and nonlinear optimization: an introduction review*, chapter Impact of Recent Computer Advances on Operations Research, pages 533–542. North-Holland, New York, NY, 1989.

[68] R. B. Kearfott and V. Kreinovich. Applications of interval computations: An introduction. pages 1–22, 1996.

[69] J. Kennedy and R. C. Eberhart. Particle swarm optimization. In *Proc. in IEEE International Conference on Neural Networks*, pages 1942–1948, 1995.

[70] V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family systems of linear differential equations. *Differential'nye Uraveniya*, 14(11):2086–2088, 1978.

[71] H. Kitano. Biological robustness. *Nature Reviews - Genetics*, 5:826–837, 2004.

[72] J. D. Knowles. *Local Search and Hybrid Evolutionary Algorithms for Pareto Optimization*. PhD thesis, Departament of Computer Science, University of Reading, Reading, UK, 2002.

[73] J. D. Knowles and D. W. Corne. Approximating the non-dominated front using pareto archived strategy. *Evolutionary Computation*, 8(2):149–172, 2000.

[74] J. Koski and R. Silvennoinen. Norm methods and partial weighting in multicriterion optimization of structures. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, (24):1101–1121, 1987.

[75] P. Kouvelis and G. Yu. *Robust Discrete Optimization and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[76] M. Laumanns, G. Rudolph, and H. P. Schwefel. A spatial predator-prey approach to multi-objective optimization: a preliminary study. In *Proceedings of theFifthConference on Parallel Problem Solving from Nature(PPSN V)*, volume 1498. Springer.

[77] A. D. S. Lordelo, E. A. Juzzo, and P. A. V. Ferreira. Analysis and design of robust controllers using interval diophantine equation. *Reliable Computing*, 12:371–388, 2006.

[78] S. K. Mahato and A. K. Bhunia. Interval-arithmetic-oriented interval computing technique for global optimization. *Applied Mathematics Research eXpress*, pages 1–19, 2006.

[79] B. Mareschal. Weight stability intervals in multicriteria decision aid. *European Journal of Operational Research*, 33:54–64, 1988.

[80] R. T. Marler and J. S. Arora. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Struct Multidisc Optim*, 26:369–395, 2004.

[81] A. Messac. Physical programming: effective optimization for computational design. *AIAA J.*, (34):149–158, 1996.

[82] A. Messac, A. Ismail-Yahaya, and C. A. Mattson. The normalized normal constraint method for generating the pareto frontier. *Struct. Multidisc. Optim.*, (25):86–98, 2003.

[83] A. Messac, C. Puemi-Sukam, and E. Melachrinoudis. Mathematical and pragmatic perspectives of physical programming. *AIAA J.*, (39):885–893, 2001.

[84] K. Miettinen. *Nonlinear Multiobjective Optimization*, volume 12 of *International Series in Operations Research and Management Science*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[85] R. E. Moore. *Dimensional Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 1966.

[86] R. E. Moore. On computing the range of a rational function of n variables over a bounded region. *Computing,*, 15:1–15, 1976.

[87] R. E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis.* SIAM, Philadelphia, PA, 1979.

[88] D. Morales and T. C. Son. Interval methods in robot navigation. *Reliable Computing*, 4(1):55–61, 1998.

[89] T. Murata and H. Ishibuchi. Moga: Multi-obejective genetic algorithms. In *Proc. of 2st IEEE ICEC*, pages 289–294, 1995.

[90] A. Neumaier. Interval interaction for zeros of systems of equations. *BIT*, (25):256–273, 1985.

[91] K. Ogata. *Engenharia de Controle Moderno.* Prentice Hall do Brasil Ltda, 1982.

[92] A. Osyczka. An approach to multicriterion optimization problems for engineering design. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, (15):309–333, 1978.

[93] A. Parkinson, C. Sorensen, and N. Pourhassan. A general approach for robust optimal design."journal of mechanical design. *Transactions of the ASME*, 115(1):75–81, 1993.

[94] L. R. Pujara and A. Roy. On computing stabilizing controllers for siso interval plants. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 5, pages 3896–3901, Arlington, VA, USA, June 2001.

[95] S. S. Rao and T. I. Freiheit. A modified game theory approach to multiobjective optimization. *J. Mech. Des.*, 113(286-291), 1991.

[96] B. Roy. A missing link in OR-DA, robustness analysis. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 23(3):141–160, 1998.

[97] G. Rudolph. Evolutionary search under partially ordered fitness sets. In *Proc. of International Symposium on Information Science Innovations in Enginnering of Natural and Artificial Intelligent Systems*, pages 818–822, 2001.

[98] G. R. Ruetsch. An interval algorithm for multi-objective optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30(1):27–37, july 2005.

[99] S. M. Rump. Interval computation with matlab. Nota de apresentação do toolbox INTLAB.

[100] Y. Sawaragi, H. Nakayama, and T. Tanino. *Theory of Multiobjective Optimization.* Academic Press, Orlando, 1985.

[101] J. D. Schaffer. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithm. In *Proc. of 1st ICCA*, pages 93–100, 1985.

[102] J. R. Schott. Fault tolerant design using single and multi-criteria genetic algorithms. Master's thesis, Department of Aeronautics and Aeronautics, Massachusetts Institute of Technology, Boston, MA, 1995.

[103] A. Sengupta and T. K. Pal. On comparing interval numbers. *European Journal of Operational Research*, 127(1):28–43, November 2000.

[104] G. M. Siouris, G. Chen, and J. Wang. Tracking an incoming ballistic missile using an extended interval kalman filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(1):232–240, 1997.

[105] S. Skelboe. Computation of rational interval functions. *BIT*, 14:87–95, 1974.

[106] S. Skelboe. True worst-case analysis of linear electrical circuits by interval arithmetic. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 26:874–879, 1979.

[107] G. L. Soares. Algoritmos genéticos: Estudo, novas técnicas e aplicações. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 1997.

[108] G. L. Soares, R. L. Adriano, C. A. Maia, L. Jaulin, and J. A. Vasconcelos. Robust multi-objective team 22 problem: a case study of uncertainties in design optimization. In *Thirteenth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation CEFC 2008*, Athens, Greece, May 2008.

[109] G. L. Soares, A. A. Boss, L. Jaulin, C. A. Maia, and J. A. Vasconcelos. An interval-based target tracking approach for range-only multistatic radar. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(6):1350–1353, 2008.

[110] G. L. Soares, R. O. Parreiras, L. Jaulin, C. A. Maia, and J. A. Vasconcelos. Interval robust multi-objective algorithm. In *World Congress of Nonlinear Analysts WCNA 2008*, Orlando, Florida, July 2008.

[111] G. L. Soares and J. A. Vasconcelos. Adaptação dinâmica de operadores em algoritmos genéticos. In *Segundo Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, pages 155–158, Ouro Preto, novembro 1996.

[112] G. L. Soares, J. A. Vasconcelos, and C. A. Maia. Algoritmo evolucionário por eleições. In *1º Seminário do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica*, pages 1–5, Belo Horizonte, Brasil, 2005.

[113] N. Srinivas and Deb K. Multiobjective function optmization using nondominated sorting genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 2(3):221–248, Fall 1995.

[114] R. E. Steuer and R. U. Choo. An interactive weighted tchebycheff procedure for multiple objective programming. *Mathematical Programming*, 26:326–344, 1983.

[115] T. Sunaga. Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis. *RAAG Memoirs*, 2:547–564, 1958.

[116] G. Taguchi. *Introduction to Quality Engineering.* American Supplier Institute, 1989.

[117] R. H. C. Takahashi, P. L. D. Peres, and P. A. V. Ferreira. Multi-objective $\mathcal{H}_2$ / $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost pid design. *IEEE Control Systems*, pages 37–47, October 1997.

[118] G. L. R. Vaccaro. *Solução de Equações Intervalares.* PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.

[119] D. V. Veldhuizen. *Multiobjective Evolutionary Algorithms: Classifications, Analysis, and New Inovations.* PhD thesis, Air Force Institute of Technology, Dayton, OH, 1999.

[120] A. Visioli. Optimal Tuning of PID Controllers for Integral and Unstable Processer. *IEEE Proc - Theory Appl.*, 148(2):180–184, 2001.

[121] G. Walster, J. D. Pryce, and E. R. Hansen. Practical, exception-free interval arithmetic on extended reals. SIAM Journal on Scientific Computing. The paper was provisionally accepted por publication; has since been significantly revised; and will be resubmitted for publication.

[122] F. M. Waltz. An engineering approach: hierarchical optimization criteria. *IEEE Transaction Autom. Control*, AC-12:179–180, 1967.

[123] Y.-G. Wang and W.-J. Cai. Advanced proporcional-integral-derivative tuning for integrating and unstable processes with gain and phase margin specifications. *American Chemical Society*, 41:2910–2914, 2002.

[124] P. L. Yu. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *J. Optim. Theory Appl.*, (14):319–377, 1974.

[125] P. L. Yu. *Multiple-Criteria Optimization: Techniques and Extensions.* Plenum Press, New York, 1985.

[126] M. Zeleny. *Multiple Criteria Decision Making.* New York: McGraw Hill, 1982.

[127] J. G. Ziegler and N. B. Nichols. Optimum setting for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, 64:759–768, 1942.

[128] S. Zionts. Multiple criteria mathematical programming: an updated overview and several approaches. *Mitra, G. (ed.) Mathematical Models for Decision Support*, pages 135–167, Berlin: Springer-Verlag 1988.

[129] E. Zitzler. *Evolutionary Algorithms or Multiobjective Optimization: Methods and Aplications.* PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zuric, Switzerland, 1999.

[130] E. Zitzler, K. Deb, and L. Thiele. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation Journal*, 8(2):125–148, 2000.

[131] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms - a comparative case study and the strength pareto approach. In *Parallel Problem Solving from Nature V (PPSN-V)*, pages 292–301, 1998.

APÊNDICE

A. EQUAÇÕES PARA OS CÁLCULOS DO TEMPO DE PICO E DO SOBRE-SINAL MÁXIMO

Considere a resposta do sistema

$$z(t) = 1 + e^{-\frac{(1+K_d)}{2}t}\left(-\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) + \frac{(-1+K_d)}{\sqrt{\alpha}}\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t)\right) \tag{A.1}$$

mas,

$$\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) = \frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) = \frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}}{2} \tag{A.2}$$

realizando as substituições e multiplicando toda equação por 2, fica,

$$z(t) = 1 + e^{-\frac{1+K_d}{2}t}\left(-e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} + \frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\left(e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}\right)\right) \tag{A.3}$$

$$z(t) = 1 + e^{-\frac{1+K_d}{2}t}\left(-e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}\left(1 + \frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right) - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}\left(1 + \frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)\right) \tag{A.4}$$

$$z(t) = 1 - \left(1 + \frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)e^{\frac{\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}t} - \left(1 + \frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)e^{\frac{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}t} \tag{A.5}$$

O tempo de pico ocorre no primeiro máximo da resposta após a referência. Logo, obtém-se t_p derivando-se (A.5) e igualando-se a expressão resultante zero. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{dz(t)}{dt} = 0 &- \left(1 + \frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(\frac{\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}\right)e^{\frac{\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}t_p} \quad \cdots \\ \cdots &- \left(1 + \frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(\frac{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}\right)e^{\frac{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}t_p}\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}0 = &-\left(\sqrt{\alpha}+1-K_d\right)\left(\sqrt{\alpha}-1-K_d\right)e^{\frac{\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}t_p} \quad \cdots \\ \cdots &-\left(\sqrt{\alpha}-1+K_d\right)\left(-\sqrt{\alpha}-1-K_d\right)e^{\frac{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}t_p}\end{aligned} \tag{A.7}$$

após rearranjo, fica,

$$\frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}t_p}}{e^{\frac{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}t_p}} = -\frac{\left(\sqrt{\alpha}-1+K_d\right)\left(-\sqrt{\alpha}-1-K_d\right)}{\left(\sqrt{\alpha}+1-K_d\right)\left(\sqrt{\alpha}-1-K_d\right)} \tag{A.8}$$

$$e^{\sqrt{\alpha}t_p} = \frac{1-\left(\sqrt{\alpha}+K_d\right)^2}{1-\left(\sqrt{\alpha}-K_d\right)^2} \tag{A.9}$$

e finalmente,

$$t_p = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left(\frac{1-\left(\sqrt{\alpha}+K_d\right)^2}{1-\left(\sqrt{\alpha}-K_d\right)^2}\right) \quad \text{e} \quad M_p = z(t_s) - 1. \tag{A.10}$$

B. EQUAÇÃO PARA O TEMPO DE SUBIDA

Considere a resposta do sistema (5.18)

$$z(t) = 1 + e^{-\frac{(1+K_d)}{2}t}\left(-\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) + \frac{(-1+K_d)}{\sqrt{\alpha}}\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t)\right) \tag{B.1}$$

Segundo a definição, no tempo final da subida a resposta atinge o valor da referência, ou seja $z(t_s) = 1$, logo

$$1 = 1 + e^{-\frac{(1+K_d)}{2}t_s}\left(-\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t_s) + \frac{(-1+K_d)}{\sqrt{\alpha}}\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t_s)\right) \tag{B.2}$$

$$0 = e^{-\frac{(1+K_d)}{2}t_s}\left(-\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t_s) + \frac{(-1+K_d)}{\sqrt{\alpha}}\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t_s)\right) \tag{B.3}$$

como $\frac{1}{2}e^{-\frac{(1+K_d)}{2}t_s} \neq 0$, então

$$0 = -\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t_s) + \frac{(-1+K_d)}{\sqrt{\alpha}}\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t_s) \tag{B.4}$$

mas,

$$\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) = \frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) = \frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}}{2} \tag{B.5}$$

realizando as substituições e multiplicando toda equação por 2, fica,

$$0 = -e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} + \frac{(-1+K_d)}{\sqrt{\alpha}}\left(e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}}\right) \tag{B.6}$$

$$0 = -e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}\left(1 - \frac{(-1+K_d)}{\sqrt{\alpha}}\right) + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}\left(-1 - \frac{(-1+K_d)}{\sqrt{\alpha}}\right) \tag{B.7}$$

multiplica-se toda equação por $\sqrt{\alpha}$, e após a organização fica

$$e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t_s}\left(\sqrt{\alpha} + 1 - K_d\right) = e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t_s}\left(-\sqrt{\alpha} + 1 - K_d\right) \tag{B.8}$$

$$e^{\sqrt{\alpha}t_s} = \frac{-\sqrt{\alpha} + 1 - K_d}{\sqrt{\alpha} + 1 - K_d} \tag{B.9}$$

e finalmente,

$$t_s = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left(\frac{-\sqrt{\alpha} + 1 - K_d}{\sqrt{\alpha} + 1 - K_d}\right) \tag{B.10}$$

C. EQUAÇÕES PARA O ISE

Considere a definição do erro integral quadrático

$$\text{ISE} = \int_0^\infty e^2(t)dt. \tag{C.1}$$

mas o sinal de erro é definido como $e(t) = r(t) - z(t)$ ou mais precisamente,

$$e(t) = 1 - z(t), \tag{C.2}$$

pois $r(t) = 1$, $t > 0$. Assim, considerando a resposta do sistema

$$z(t) = 1 + e^{-\frac{(1+K_d)}{2}t}\left(-\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) + \frac{(-1+K_d)}{\sqrt{\alpha}}\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t)\right), \tag{C.3}$$

substituindo (C.3) em (C.2), tem-se

$$e(t) = e^{-\frac{(1+K_d)}{2}t}\left(-\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) + \frac{(-1+K_d)}{\sqrt{\alpha}}\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t)\right). \tag{C.4}$$

mas,

$$\cosh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) = \frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t) = \frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}}{2} \tag{C.5}$$

realizando as substituições e multiplicando toda equação por 2, fica,

$$e(t) = -e^{-\frac{1+K_d}{2}t}\left(-e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} + \frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\left(e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}\right)\right) \tag{C.6}$$

$$e(t) = -e^{-\frac{1+K_d}{2}t}\left(-e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}\left(1 + \frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right) - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}t}\left(1 + \frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)\right) \tag{C.7}$$

$$e(t) = \left(1 + \frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)e^{\frac{\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}t} + \left(1 + \frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)e^{\frac{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}t} \tag{C.8}$$

Considere as notações $A = \left(1 + \frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)$, $B = \left(1 + \frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)$, $\lambda = \frac{\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}$ e $\mu = \frac{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}$. A equação (C.8) é reescrita como

$$e(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}. \tag{C.9}$$

Elevando o sinal de erro ao quadrado, fica

$$e^2(t) = A^2e^{2\lambda t} + 2ABe^{(\lambda+\mu)t} + B^2e^{2\mu t}. \tag{C.10}$$

Substituindo o resultado de (C.10) em (C.1), fica

$$\text{ISE} = A^2 \int_0^\infty e^{2\lambda t} dt + 2AB \int_0^\infty e^{(\lambda+\mu)t} + B^2 \int_0^\infty e^{2\mu t} dt, \tag{C.11}$$

e após a integração, tem-se

$$\text{ISE} = \frac{A^2}{2\lambda} \left[e^{2\lambda t}\right]_0^\infty + \frac{2AB}{\lambda+\mu} \left[e^{(\lambda+\mu)t}\right]_0^\infty + \frac{B^2}{2\mu} \left[e^{2\mu t}\right]_0^\infty. \tag{C.12}$$

A dedução prossegue com a análise dos termos de (C.12) quando $t \to 0$ e quando $t \to \infty$. Os expoentes dos termos contém apenas λ e μ. A variável μ é sempre negativa: a) K_p é não negativo pelo espaço em que foi definido; b) $\sqrt{\alpha'} > 1$ segundo a restrição g_3 da formulação robusta (5.22). Similarmente, a variável λ é sempre negativa pelo atendimento da restrição g_4 da formulação robusta (5.22). Assim, sendo $\lambda < 0$ e $\mu < 0$ tem-se

$$\lim_{t\to\infty} e^{2\lambda t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} e^{(\lambda+\mu)t} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} e^{2\mu t} = 0; \tag{C.13}$$

$$\lim_{t\to 0} e^{2\lambda t} = 1, \quad \lim_{t\to 0} e^{(\lambda+\mu)t} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0} e^{2\mu t} = 1. \tag{C.14}$$

Os resultados (C.13) e (C.14) em (C.12) resulta

$$\text{ISE} = \frac{A^2}{2\lambda} [0-1] + \frac{2AB}{\lambda+\mu} [0-1] + \frac{B^2}{2\mu} [0-1], \tag{C.15}$$

e portanto

$$\text{ISE} = -\frac{A^2}{2\lambda} - \frac{2AB}{\lambda+\mu} - \frac{B^2}{2\mu}. \tag{C.16}$$

Substituindo as notações tem-se

$$\text{ISE} = -\frac{\left(1+\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}{2\frac{\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}} - \frac{2\left(1+\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(1+\frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)}{\frac{\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}+\frac{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}} - \frac{\left(1+\frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}{2\frac{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}{2}}, \tag{C.17}$$

$$\text{ISE} = -\frac{\left(1+\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}{\sqrt{\alpha}-1-K_d} - \frac{2\left(1+\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(1+\frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)}{-1-K_d} - \frac{\left(1+\frac{-1+K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}, \tag{C.18}$$

$$\text{ISE} = -\frac{\left(1+\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}{\sqrt{\alpha}-1-K_d} - \frac{2\left(1+\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(1-\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)}{-1-K_d} - \frac{\left(1-\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}. \tag{C.19}$$

Finalmente,

$$\text{ISE} = -\frac{\left(1+\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}{\sqrt{\alpha}-1-K_d} - \frac{2\left(1-\left(\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\right)}{-1-K_d} - \frac{\left(1-\frac{1-K_d}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}{-\sqrt{\alpha}-1-K_d}. \tag{C.20}$$

Outras simplificações podem ser possíveis. No entanto, a equação já atende a finalidade de implementação.

NOMENCLATURA

Romanos

$\mathbf{c}([\mathbf{x}])$	Centro de caixa intervalar
$C(s)$	Função de transferência do controlador
$\mathbf{des}_t$	Desempenho da população na geração t
$\mathbf{des}'_t$	Desempenho útil da população na geração t
e_i	Contador de soluções Pareto - métrica TE
$E(s)$	Sinal de erro do sistema no domínio da freqüência
$e(t)$	Sinal de erro no sistema ou diferença entre a referência e a saída do sistema
$[\mathbf{F}]_0$	Nicho inicial que contém toda a população
$\mathbf{f}$	Vetor de funções objetivo - notação genérica e simplificada
f^i_{front}	Desempenho de um indivíduo i segundo a fronteira que ele participa
f^i_{nicho}	Desempenho de um indivíduo i segundo o nicho que ele participa
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	Vetor de funções objetivo - problema de otimização tradicional
$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$	Imagem da solução ótima ou ponto da fronteira de Pareto - problema de otimização tradicional
$\mathbf{f}(\mathbf{X})$	Imagem direta do conjunto espaço de busca, espaço dos objetivos
$\mathbf{f}(\mathbf{X}^*)$	Fronteira de Pareto, imagem do conjunto solução X^* - problema de otimização tradicional e robusta
$\mathbf{f}(\mathbf{f}, \varepsilon)$	Vetor de funções objetivo - incerteza na medição de $\mathbf{f}$
$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \xi)$	Vetor de funções objetivo com incerteza devido ao ambiente computada
$\mathbf{f}([\mathbf{x}])$	Função extensão intervalar da função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, vetor de funções intervalares, vetor funções objetivo com argumento intervalar
$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$	Vetor de funções objetivo - problema de otimização robusta
$\mathbf{f}(\mathbf{X}', \mathbf{P})$	Imagem do espaço de busca viável sujeito às incertezas do sistema
$[\mathbf{f}]$	Função inclusão para objetivos - notação genérica e simplificada
$[\mathbf{f}]^*$	Função de inclusão mínima - notação genérica e simplificada

$[\mathbf{f}]^*_{[\mathbf{x}]}$ Função de inclusão mínima para a caixa/indivíduo $[\mathbf{x}]$ considerando $[\mathbf{P}]$

$[\mathbf{f}]^*_{\mathbf{x}}$ Função de inclusão mínima para o ponto/indivíduo $\mathbf{x}$ considerando $[\mathbf{P}]$

$[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ Função de inclusão da função $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$

$[\mathbf{F}]$ Nicho corrente

$[\mathbf{f}](\mathbf{pop}_t, [\mathbf{P}])$ Função objetivo para cálculo do desempenho da população na geração t

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$ Vetor de funções de restrição - problema de otimização tradicional

$\mathbf{g}([\mathbf{x}])$ Vetor de funções de restrição - problema de otimização intervalar

$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ Vetor de funções de restrição - problema de otimização robusta

$[\mathbf{g}]$ Função de inclusão de restrições - notação genérica e simplificada

$[\mathbf{g}]([\mathbf{x}], [\mathbf{p}])$ Função de inclusão de restrições - problema de otimização robusta

$G(s)$ Função de transferência resultante

HV Hipervolume de um conjunto solução - métrica do hipervolume

HVR Hipervolume normalizado de um conjunto solução - métrica do hipervolume

$H(s)$ Função de transferência da planta

$\mathbf{K}$ Vetor de parâmetros do PID

$\mathbf{K}^+$ Representação computável de $\mathbf{Y}^+$

$\mathbf{K}^-$ Representação computável de $\mathbf{Y}^-$

K_d Ganho proporcional

K_i Ganho integral

K_p Ganho proporcional

M_p Sobre-sinal máximo

$m(t)$ Resposta do controlador

n_{bis} Número de bissecções

n_{bits} Número de bits utilizado para codificação dos indivíduos

n_{gen} Número máximo de gerações

n_{nicho} Número de integrantes de dado nicho

n_{pop} Número de indivíduos da população

n_{sp} Número de subpavimentos

p_{1-4} Polinômios de Kharitonov

$\mathbf{p}$ Parâmetro de incerteza geral - representa ϵ, ξ e ε

$\mathbf{P}$ Espaço de incertezas

$\mathbf{P}'$ Espaço de incertezas finito

$[\mathbf{p}]$ Parâmetro de incerteza

$[\mathbf{P}]$ Espaço de incerteza

p_c Probabilidade de cruzamento

p_m Probabilidade de mutação

$\mathbf{pop}_t$ População na geração t

$proj_{\mathbf{A}}(\mathbf{Z})$ Projeção do conjunto $\mathbf{Z}$ sobre o conjunto $\mathbf{A}$

$\mathbf{Q}_{[\mathbf{x}]}$ Lista FIFO com subpavimentos do espaço de busca

$\mathbf{Q}_{\mathbf{K}^+}$ Lista FIFO pontos que definem $\mathbf{K}^+$

$\mathbf{Q}_{\mathbf{K}^-}$ Lista FIFO pontos que definem $\mathbf{K}^-$

$\mathbf{Q}_{\mathbf{fxp}}$ Lista FIFO com amostras avaliadas da função grade

$\mathbf{Q}_{\mathbf{F}}$ Lista FIFO com nichos ativos

$\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}\{.\}$ Lista FIFO com índices dos indivíduos de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}\{.\}$

$\mathbf{Q}_{\mathbf{ind}}^{[\mathbf{F}]}$ Lista FIFO com índices dos indivíduos de $\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}\{1\}$

$\mathbf{Q}_{[\mathbf{F}]}^{v}$ Lista FIFO com índices dos indivíduos de são vértices de caixas que separam soluções

$\mathbf{Q}_{[\mathbf{p}]}$ Lista FIFO com subpavimentos do espaço de parâmetros

$\mathbf{Q}_{\mathbf{Y}^*}$ Lista FIFO pontos ideais para fronteira Pareto robusta

r_{bis} Rodada de bissecção

r_{bis}^{max} Número máximo de rodadas de bissecção

$R(s)$ Referência do sistema no domínio da freqüência

$r(t)$ Referência ou entrada do sistema

s Variável de Laplace

$\mathbf{S}_{[\mathbf{x}]}$ Lista LIFO com subpavimentos do espaço de busca

$\mathbf{S}_{[\mathbf{p}]}$ Lista LIFO com subpavimentos do parâmetro de incerteza

SMES Superconducting Magnetic Energy Storage System

t Período de tempo em que o sistema é observado

t_a Tempo de acomodação

$\mathbf{t}(\mathbf{x})$ Teste de inclusão real

$[\mathbf{t}]([\mathbf{x}])$ Teste de inclusão intervalar

t_p Tempo de pico

t_s Tempo de subida

$\mathbf{u}^{\max}$ Ponto ideal para maximização

$\mathbf{u}^{\min}$ Ponto ideal para minimização

$v([\mathbf{x}])$ Volume de caixa intervalar

$w([\mathbf{x}])$ Largura de caixa intervalar

$\mathbf{x}$ Parâmetro ou variável de busca, ou de projeto

$\widetilde{\mathbf{x}}$ Parâmetro de busca impreciso, por incerteza na medição, na construção e em arredondamentos.

$\mathbf{K}^{**}$ Solução robusta de projeto, selecionada na tomada de decisão

$\mathbf{x}^*$ Solução ótima ou eficiente - problema de otimização tradicional e robusta

$\mathbf{x}_0^*$ Solução ótima - exemplo

$\overline{\mathbf{x}}$ Limite superior do intervalo $[\mathbf{x}]$

$\underline{\mathbf{x}}$ Limite inferior do intervalo $[\mathbf{x}]$

$\mathbf{X}$ Espaço de busca ou das variáveis de busca

$\mathbf{X}'$ Espaço de busca viável

$\mathbf{X}^*$ Conjunto solução ou de pontos eficientes - problema de otimização tradicional e robusta

$\mathbf{X}_d^*$ Conjunto solução discreto

$\mathbf{X}_s^*$ Conjunto solução encontrado ao fim de um processo de otimização

$[\mathbf{x}]$ Intervalo de busca

$[\mathbf{x}]^i$ Indivíduo i de uma população de intervalos

$[\mathbf{x}]_1$,$[\mathbf{x}]_2$ Caixas resultantes da bissecção de $[\mathbf{x}]$

$\mathbf{Y}^*$ Fronteira de Pareto - problema de otimização tradicional e robusta

$\mathbf{Y}'$ Imagem do espaço de busca viável problema otimização tradicional e robusta

$\mathbf{Y}^+$ Porção acima da fronteira robusta

$\mathbf{Y}^-$ Porção abaixo da fronteira robusta

$[\mathbf{Y}']$ Imagem computada do espaço de busca viável em forma intervalar

$\mathbf{Y}_d^*$ Fronteira de Pareto robusta discreta, imagem do conjunto solução discreto

$\mathbf{Y}_s^*$ Fronteira de Pareto robusta ou imagem do conjunto solução quando produtos do processo de otimização

$[z]$ Função de inclusão para resposta do sistema z

$Z(s)$ Resposta do sistema no domínio da freqüência

$z(t)$ Saída do sistema

Gregos e similares

α Variável para simplificação, definição em (5.19)

α' Variável para simplificação, definição em (5.21)

ξ Parâmetro de incerteza - influência do ambiente

$\mathcal{C}$ Nome de métrica usada para comparar conjuntos não dominados

Δ Métrica do espalhamento

$\Delta\mathbf{K}^+$ Porção de $\mathbf{Y}^+$ não computável diretamente

$\Delta\mathbf{K}^-$ Porção de $\mathbf{Y}^-$ não computável diretamente

$\partial\mathbf{K}^+$ Fronteira inferior de $\mathbf{K}^+$

$\partial\mathbf{K}^-$ Fronteira superior de $\mathbf{K}^-$

ϵ Parâmetro de incerteza - tolerância, erro máximo aceitável para $\widetilde{\mathbf{x}}$

ε Parâmetro de incerteza - imprecisão na medição de $\mathbf{f}$

$\varepsilon_{[\mathbf{x}]}$ Mínima largura para $[\mathbf{x}]$

$\varepsilon_{\mathbf{x}\#}$ Mínima precisão para a função grade

ε_{TE} Precisão para a métrica TE

$\mathcal{S}$ Métrica do espaçamento

$\sigma_{v([\mathbf{F}])}$ Desvio padrão das caixas entre soluções - Técnica MB[I]

$\Upsilon_{\preceq}$ Representa o subconjunto com os menores os pontos do conjunto que aparece como argumento

$\Upsilon_{\succeq}$ Representa o subconjunto com os menores os pontos do conjunto que aparece como argumento

Expoentes

n_f Ordem, dimensão - espaço dos objetivos

n_g Ordem, dimensão - espaço das restrições

n_p Ordem, dimensão - espaço de incertezas

n_x Ordem, dimensão - espaço de busca

Operadores

$\setminus$ Complemento de conjuntos

$|\ |$ Número de elementos do conjunto apresentado entre os símbolos $|$

$\diamond$ Operador binário que representa as operações $+$, $-$, $*$ e $/$.

$\ominus$ Operador subtração para reduzir a dependência.

$\oslash$ Operador divisão para reduzir a dependência.

$\prec$ Indica que o operando da esquerda é estritamente menor que o da direita; o símbolo pode ser usado entre números reais, entre números reais e intervalos e entre intervalos

$\succ$ Indica que o operando da direita é estritamente menor que o da esquerda; o símbolo pode ser usado entre números reais, entre números reais e intervalos e entre intervalos

$\preceq$ Indica do operando da esquerda é menor que o da direita; o símbolo pode ser usado entre números reais, entre números reais e intervalos e entre intervalos

$\succeq$ Indica do operando da direita é menor que o da esquerda; o símbolo pode ser usado entre números reais, entre números reais e intervalos e entre intervalos

$\not\preceq$ Indica que o operando da esquerda não é menor que o da direita; o símbolo pode ser usado entre números reais, entre números reais e intervalos e entre intervalos

$\prec_C$ Indica que operando da esquerda é completamente melhor o da direita

$\prec_F$ Indica que operando da esquerda é fortemente melhor o da direita

$\prec_f$ Indica que operando da esquerda é fracamente melhor o da direita

Algoritmos de otimização

[I]RMOA I Interval Robust Multi-Objective Algorithm I

[I]RMOA II Interval Robust Multi-Objective Algorithm II

[I]RMOEA Interval Robust Multi-Objective Evolutionary Algorithm

CO-MOEA Coevolutionary Multi-Objective Evolutionary Algorithm

DRMOGA Divided Range Multi-Objective Genectic Algorithm

ENORA Evolutionary Algorithm of Non Dominated Sorting with Radial Slots

MμGA Multi-objective MicroGA

MOGA Multi-Objective Genetic Algorithm

NPGA Niched Pareto Genetic Algorithm

NSGA Non-Sorting Genetic Algorithm

NSGA-II Non-Sorting Genetic Algorithm II

PAES Pareto Archived Evolution Strategy

PSO Particle Swarm Optmization

SGA Simple Genetic Algorithm

SPEA Strength Pareto Evolutionary Algorithm

VEGA Vector Evaluated Genetic Algorithm

RMOGA Robust Multi-Objective Genetic Algorithm

WBGA Weight-Based Genetic Algorithm

Acrônimos

CSC Computable Sufficient Conditions

EAs Evolutionary Algorithms

EEA Election Evolutionary Algorithm

FIFO First In First Out - lista encadeada tipo fila

FON Função Fonseca e Fleming

FPS Feasible Point Searcher

GA Algoritmos Genéticos

ICP Interval Constraint Propagation

ISE Integral Square-Error

LIFO Last In First Out - lista encadeada tipo pilha

MB[I] Métrica por Bissecção Intervalar

MB[I]_{front} Valor conhecido da métrica MB[I] na fronteira

MB[I]_{max} Valor máximo computado da métrica MB[I]

MB[I]_{norm} Valor normalizado da métrica MB[I]

MIF Minimal Inclusion Function

MOEA Multi-objective Evolutionary Algorithms

NB[I] Nichos por Bissecção Intervalar

RH Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

SCH2 Função Schaffer 2

SIVIA Set Inversion Via Interval Analysis

TE Taxa de Errro

ZDT1 Função 1 da família de funções de Zitzler, Deb e Thiele

ZDT2 Função 2 da família de funções de Zitzler, Deb e Thiele

ZDT3 Função 3 da família de funções de Zitzler, Deb e Thiele