# Systèmes de coordonnées

# Introduction

- La géodésie est la science de la forme et de la dimension de la Terre et de son champ de pesanteur

- Pour se localiser sur la terre, il est nécessaire d'utiliser un système géodésique duquel découlent les coordonnées géographiques figurant sur les cartes.

# Plan

I. Géoïde et ellipsoïde

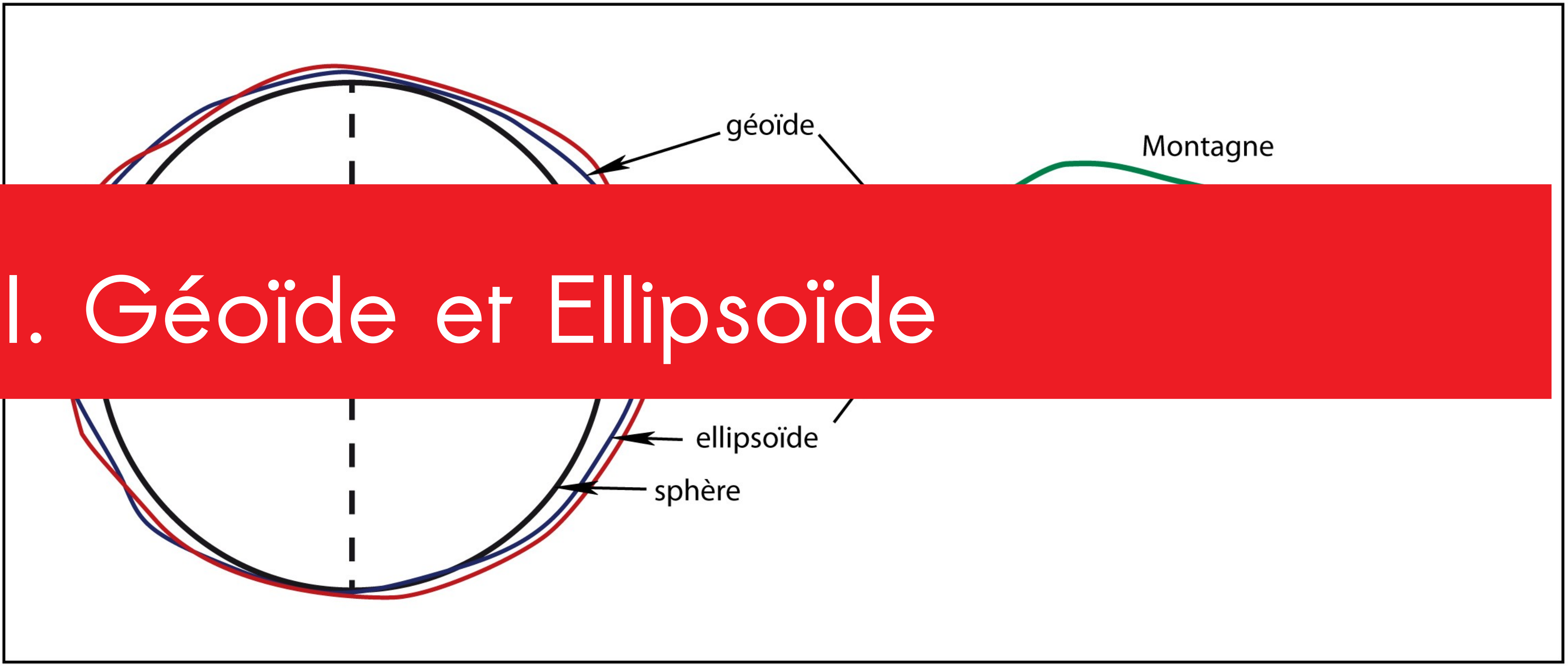
II. Coordonnées géographiques

III. Coordonnées cartésiennes géocentriques

IV. Coordonnées planes

V. Transformation de coordonnées

VI. Informations complémentaires

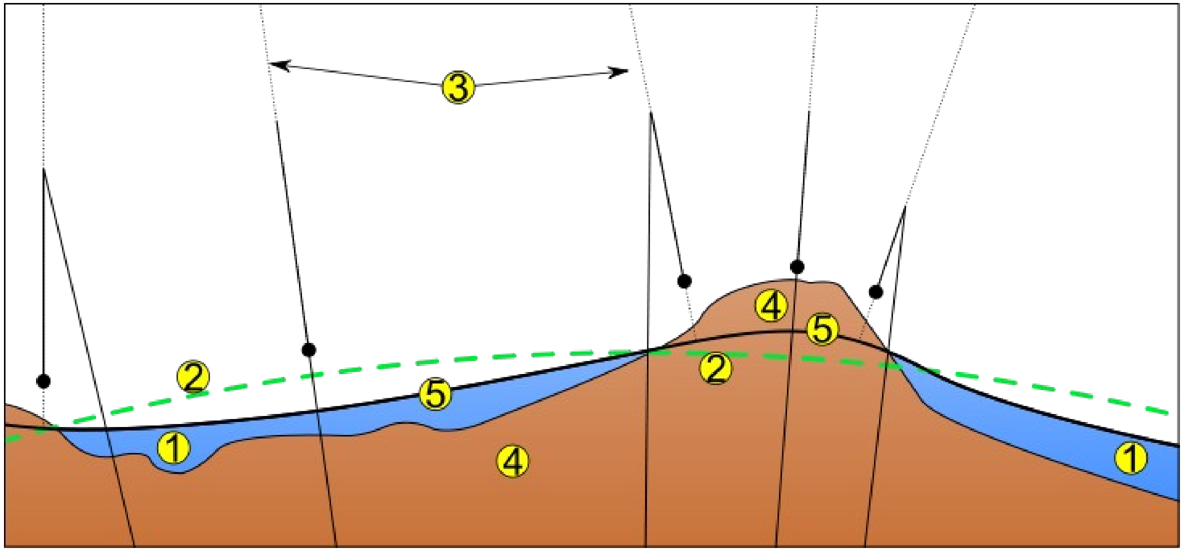



# I. Géoïde et Ellipsoïde

# I. Géoïde et Ellipsoïde

- Un géoïde est une surface équipotentielle de référence du champ de pesanteur terrestre

- Un géoïde est déterminé par mesures de gravimétrie sur la terre tout comme en mer.




1. Océan
2. Ellipsoïde
3. Déformation locale
4. Continent
5. Géoïde

# I. Géoïde et Ellipsoïde

- Le système de référence géodésique est aussi appelé *datum*.

- L'ellipsoïde de révolution est un modèle mathématique utilisé pour le calcul et que l'on définit pour qu'il soit le plus proche possible du géoïde.

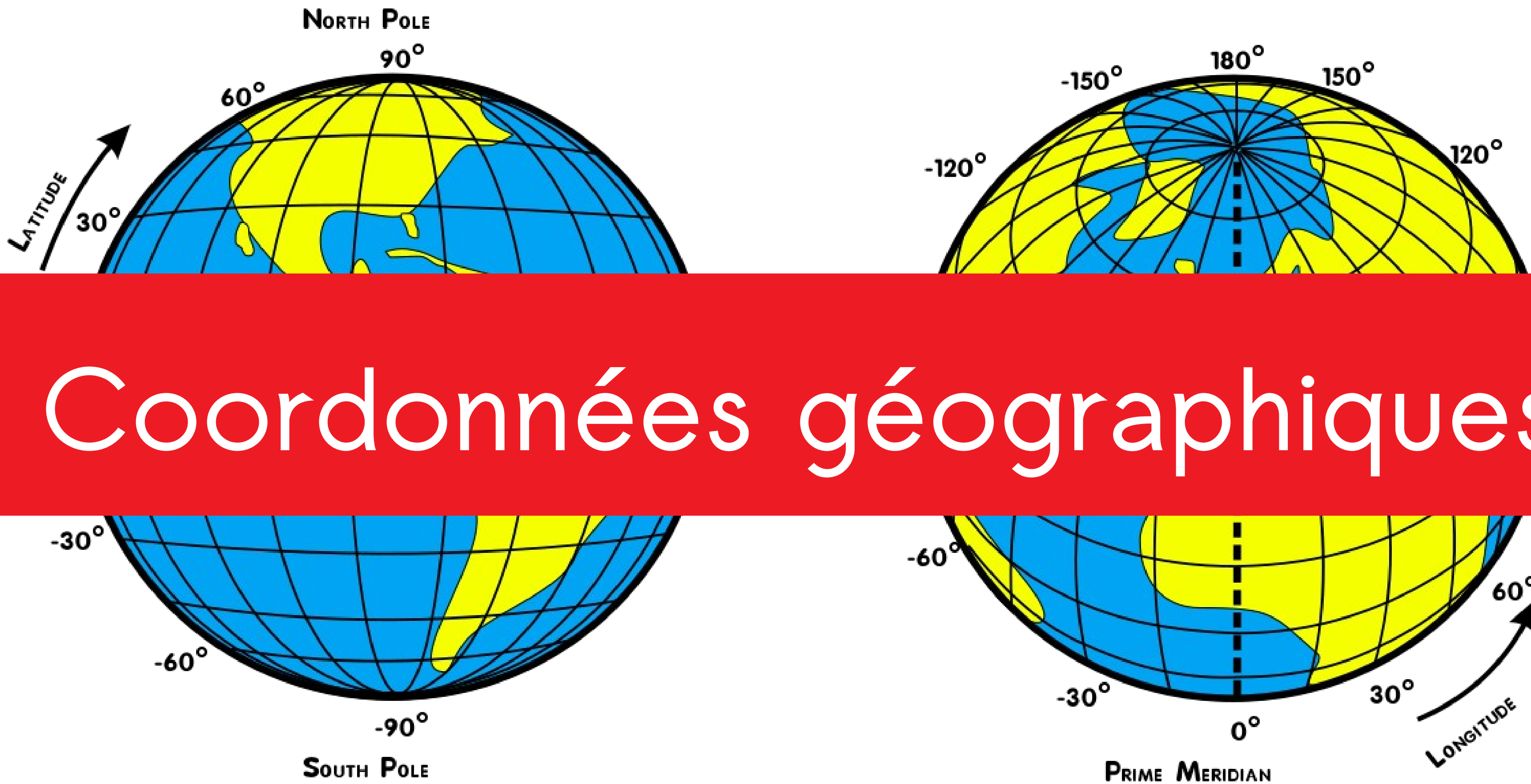
- 1 référentiel géodésique ↔ 1 ellipsoïde

# I. Géoïde et Ellipsoïde

- Un ellipsoïde est définit par son demi grand axe $a$ et l'un des paramètres parmi :

| | |
|---|---|
| Demi grand axe | $a$ |
| Demi petit axe | $b$ |
| Inverse de l'aplatissement | $\frac{1}{f}=\frac{a}{a-b}$ |
| Première excentricité | $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ |
| Carré de l'excentricité | $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ |
| Deuxième excentricité | $e'=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}$ |

# II. Coordonnées géographiques



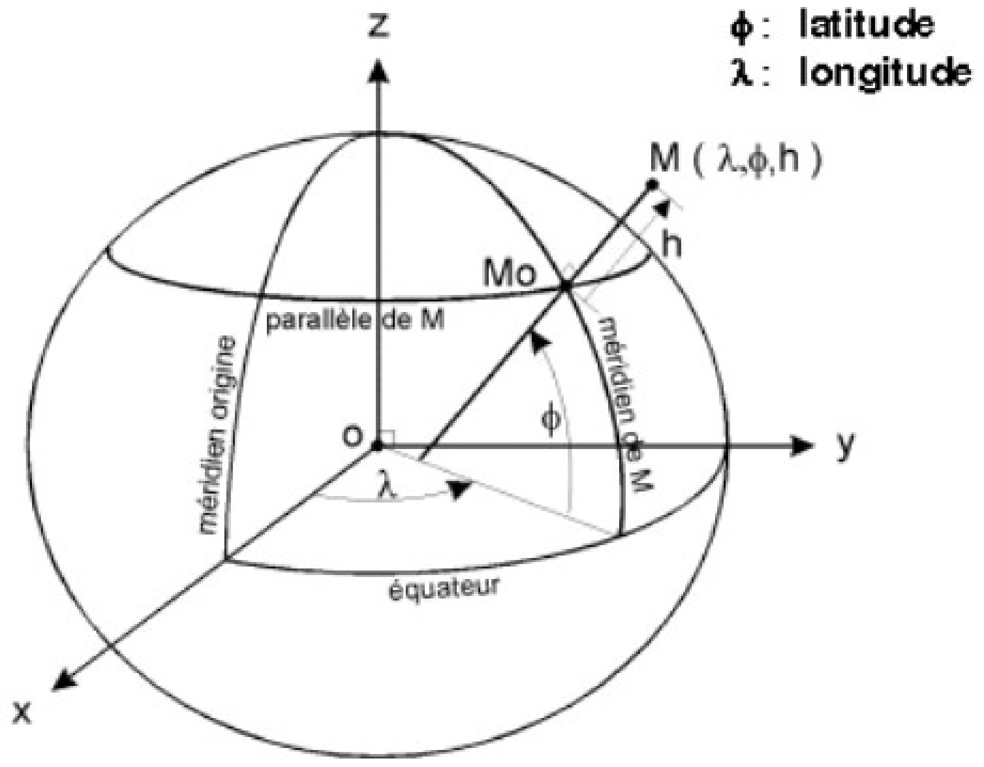
# II. Coordonnées géographiques

1) Représentation

λ: Longitude

Φ: Latitude

h : Hauteur ellipsoïdale



# II. Coordonnées géographiques

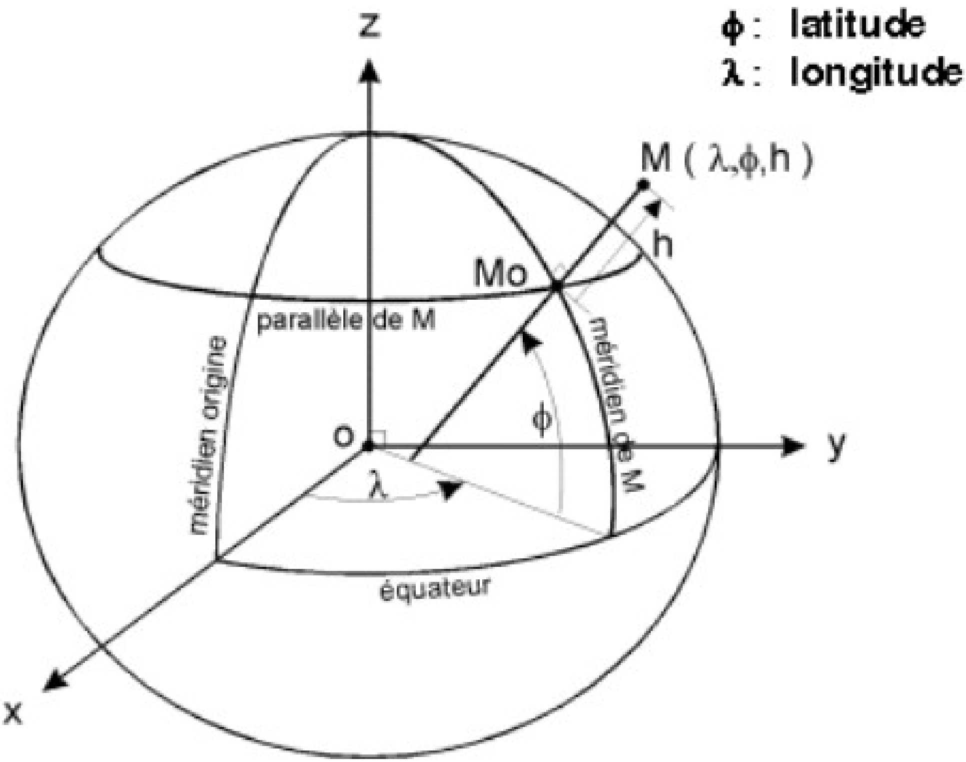
## 1) Représentation

λ: Longitude

Φ: Latitude

h : Hauteur ellipsoïdale

A ne pas confondre avec l'altitude : elle est définie dans un système de référence géodésique et peut différer de l'altitude de plusieurs dizaines de mètres.



# II. Coordonnées géographiques

## 2) Dimension - Notation

λ: Longitude

Φ: Latitude

h : Hauteur ellipsoïdale [m]

| Notation des dimensions | |
|---|---|
| degrés, minutes, secondes sexagésimaux | ° ‘ " |
| degrés, minutes décimales | ° ‘ |
| degrés décimaux | ° |
| grades (ou gon) | gr |
| radians | rd |

# II. Coordonnées géographiques

## 2) Dimension - Conversion

| Conversion des dimensions | | |
|---|---|---|
| 1° | = 60' | =3600" |
| 180° | = 200 gr | ≈ 3.141592654 rd |
| 48.61° | = 48° 36.6´ | = 48° 36´ 36" |
| 1 gr | = 0.9° | ≈ 0.01570796327 rd |

# II. Coordonnées géographiques

2) Origine

- **Longitude = Méridien**
  - Le plus souvent compté positivement vers l'Est
  - Méridien d'origine internationale : Greenwich
  - Méridien d'origine nationale : celui de Paris
  - Chaque méridien origine est défini numériquement par sa longitude par rapport au méridien international.
- **Latitude = Equateur (positif vers le Nord)**

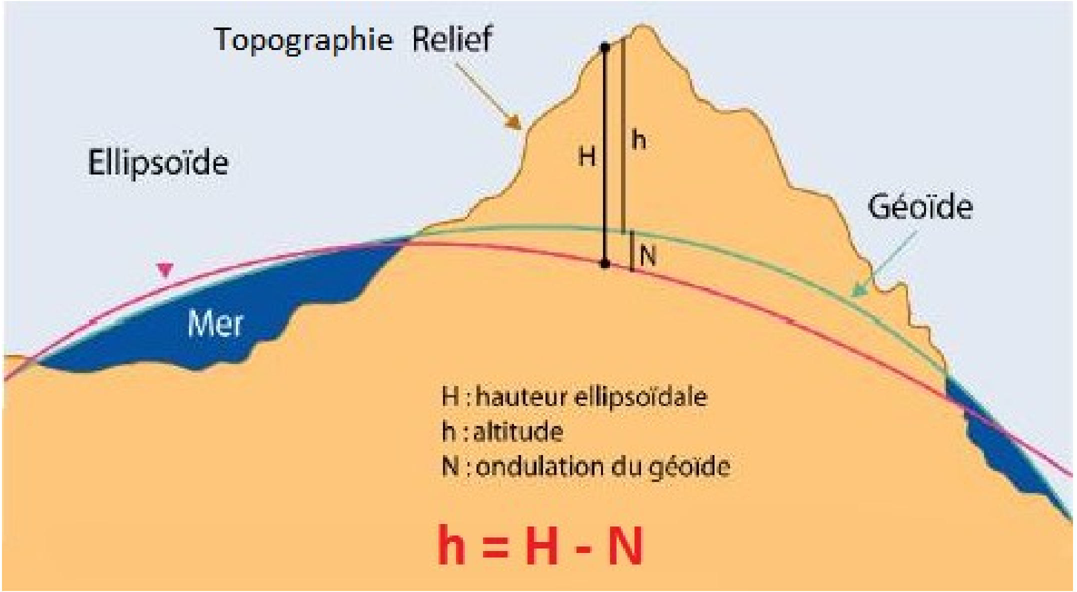
# II. Coordonnées géographiques

## 2) Origine

- Hauteur ellipsoïdale

  Elle correspond à une distance entre le point considéré et le pied de la normale à l'ellipsoïde.

  Tous les systèmes de positionnement par satellites fournissent une hauteur ellipsoïdale et non une altitude.



# II. Coordonnées géographiques

## 3) Géoïdes et modèles d'ellipsoïde en usage en France

| Système géodésique | Ellipsoïde associé | a | b | 1/f | e |
|---|---|---|---|---|---|
| NTF | Clarke 1880 IGN | 6378249,2 | 6356515,0 | 293,466021 | 0,08248325676 |
| RGF93 | IAG GRS 1980 | 6378137,0 | 6356752,314 | 298,257222 | 0,08181919106 |
| WGS84 | | | | | |

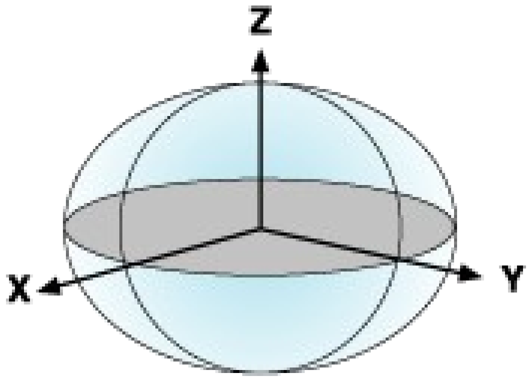

# III. Coordonnées cartésiennes géocentriques

# III. Coordonnées cartésiennes géocentriques

## 1) Définition

- Système de coordonnées géographiques dans lequel la Terre est modélisée sous la forme d'un ellipsoïde dans un système XYZ orienté à droite (cartésien 3D), mesuré à partir du centre de la Terre.

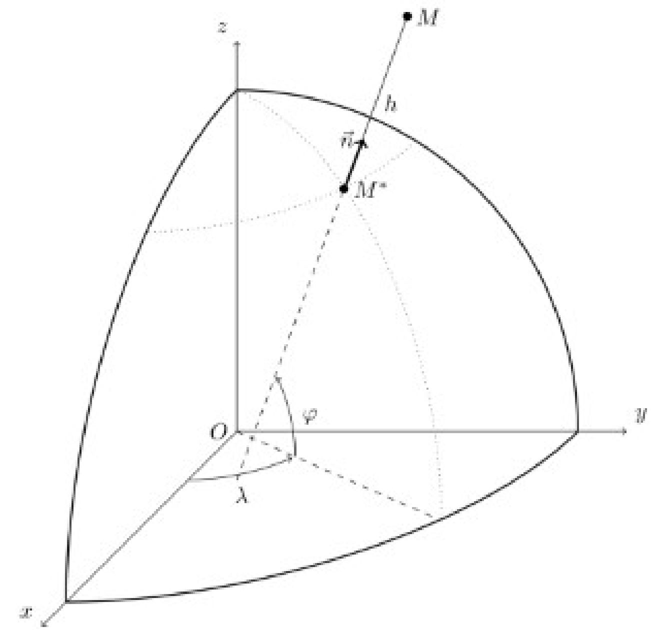
  - X : pointe vers le méridien principal
  - Y : pointe vers 90° hors du plan équatorial
  - Z : pointe dans la direction du pôle Nord.



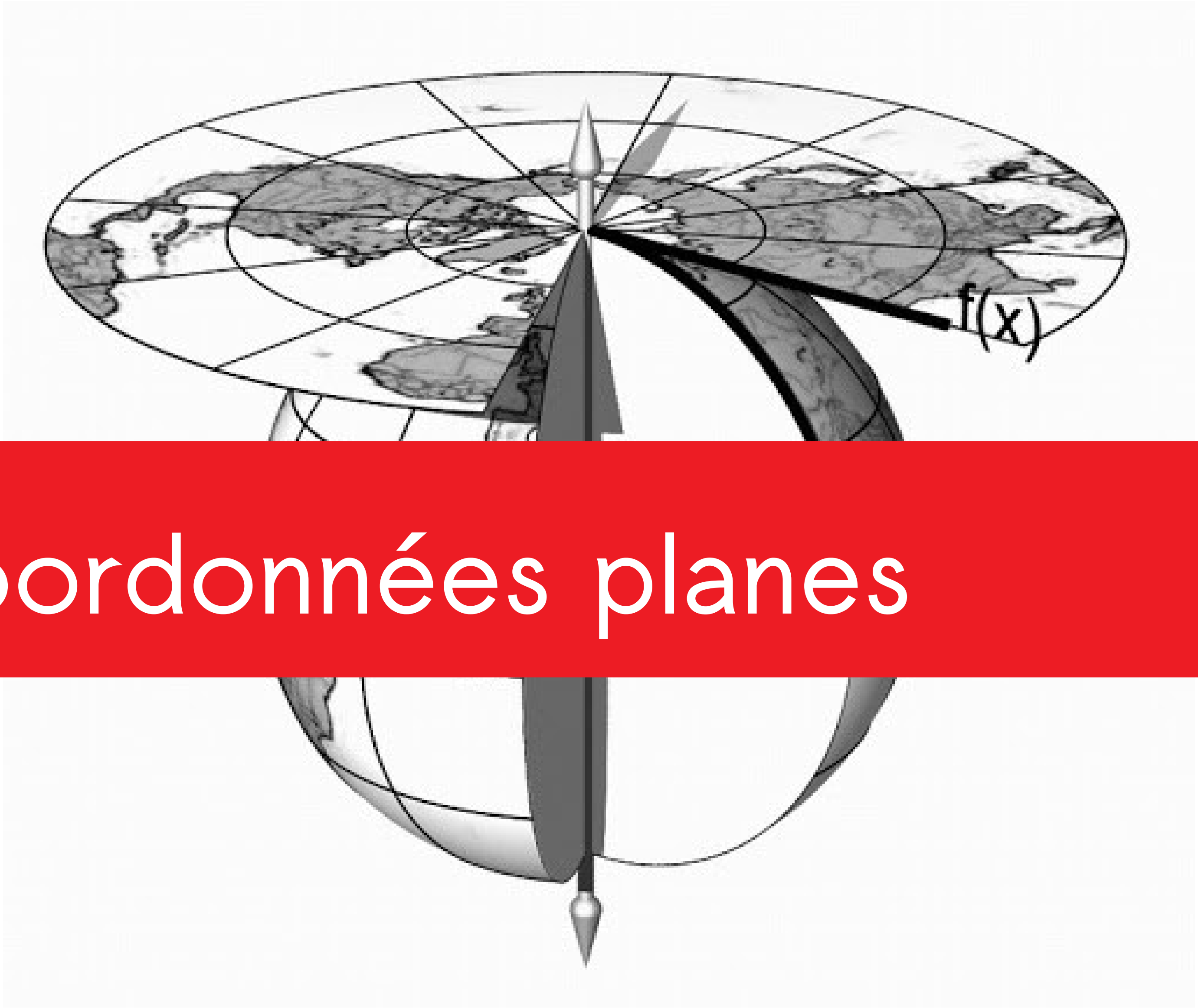
# III. Coordonnées cartésiennes géocentriques

## 2) Utilisation

- Le système de coordonnées géocentriques n'est pas un système de coordonnées planaire basé sur une projection cartographique.
- Il est utilisé en interne en tant que système transitoire, comme cadre de calcul dans plusieurs méthodes de transformation géographique.



# IV. Coordonnées planes



# IV. Coordonnées planes

## 1) Utilité

- Représenter sur une surface plane une partie d'un modèle ellipsoïdal
- Obtenir des valeurs métriques plus exploitables que l'unité angulaire
- Rendre plus facile une évaluation des distances

# IV. Coordonnées planes

## 1) Utilité

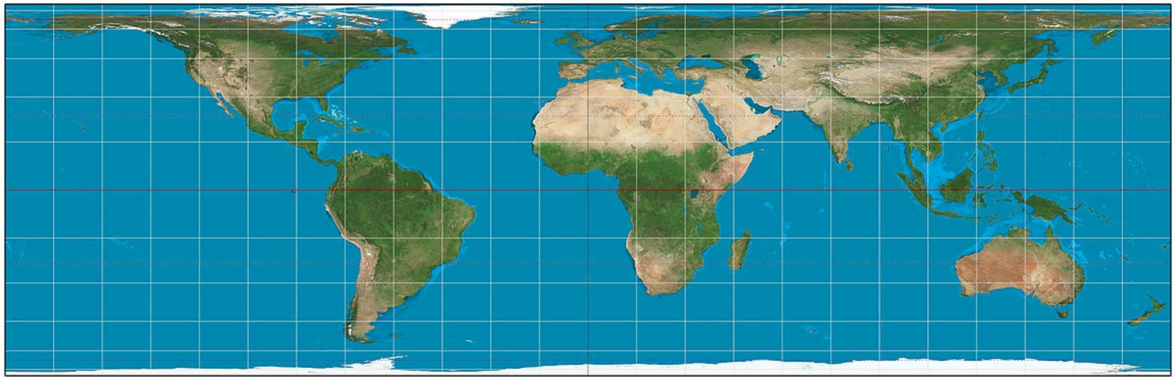
- Représenter sur une surface plane une partie d'un modèle ellipsoïdal
- Obtenir des valeurs métriques plus exploitables que l'unité angulaire
- Rendre plus facile une évaluation des distances

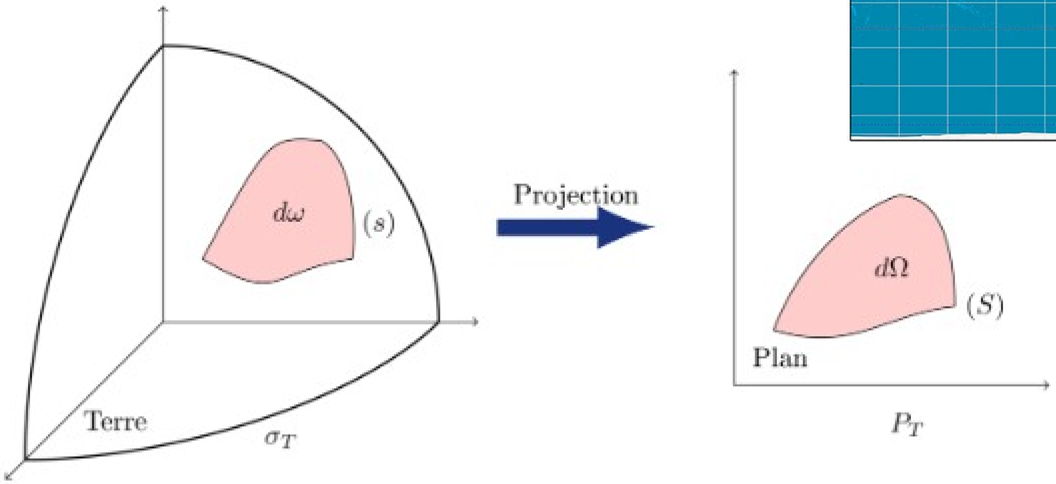
Une projection ne peut jamais se faire sans qu'il y ait de déformations !

# IV. Coordonnées planes

## 2) Choix pour la minimisation des déformations

- Projection **équivalente** : conserve les surfaces

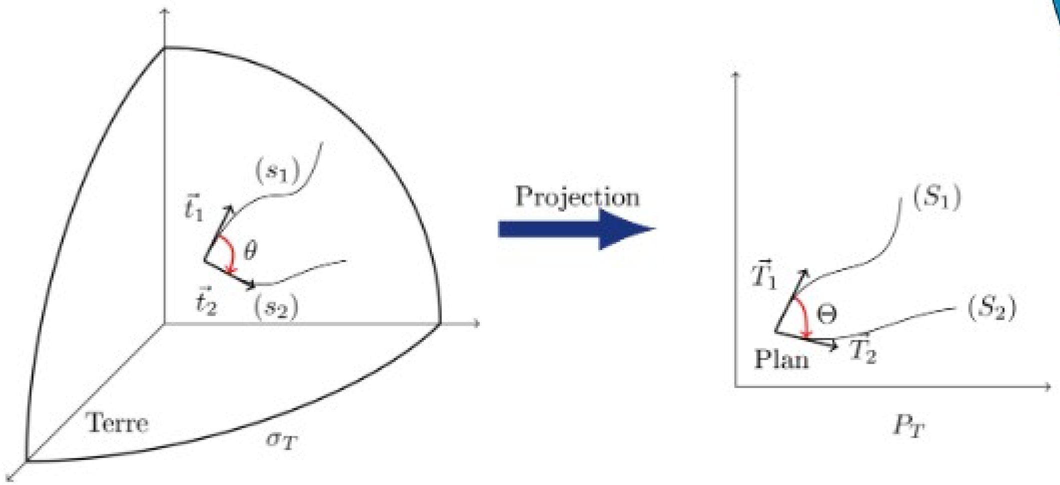




# IV. Coordonnées planes

## 2) Choix pour la minimisation des déformations

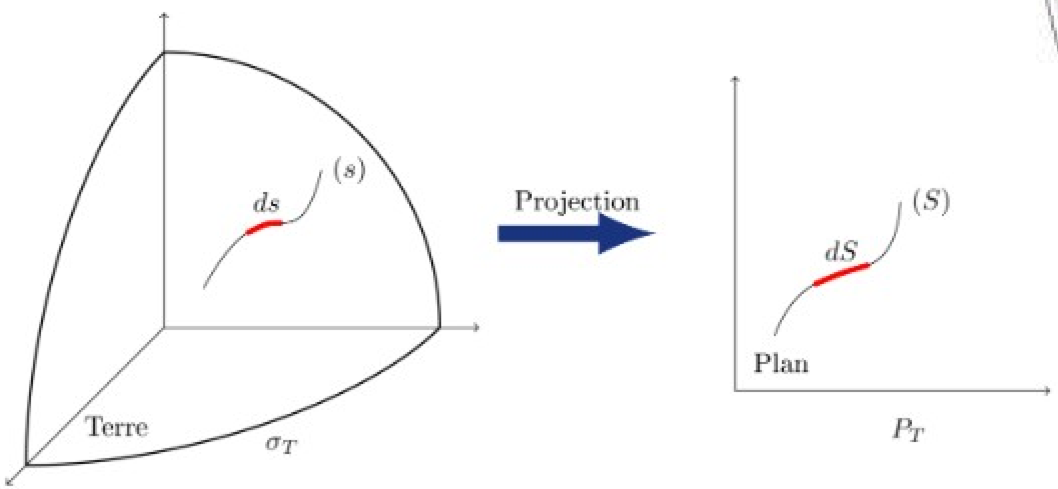
- Projection **conforme** : conserve localement les angles




# IV. Coordonnées planes

## 2) Choix pour la minimisation des déformations

- Projection **équidistante** : conserve les distances à partir d'un point donné




# IV. Coordonnées planes

## 2) Choix pour la minimisation des déformations

- Dans tous les cas, aucune projection ne peut conserver toutes les distances.

- On introduit alors les notions de **module linéaire** et d'**altération linéaire**.

$$\mu = \frac{ab}{AB}$$

$$\varepsilon = \frac{(ab - AB)}{AB}$$

$ab$ : *Longueur sur la projection*
$AB$ : *Longueur sur l'ellipsoïde*
$\mu$ : *module linéaire*
$\varepsilon$ : *altération linéraire*

- Aujourd'hui, la plupart des projections utilisées en géodésie et topographie sont **conformes**. La cartographie à petite échelle utilise souvent des projections **équivalentes**.

# V. Transformation de coordonnées

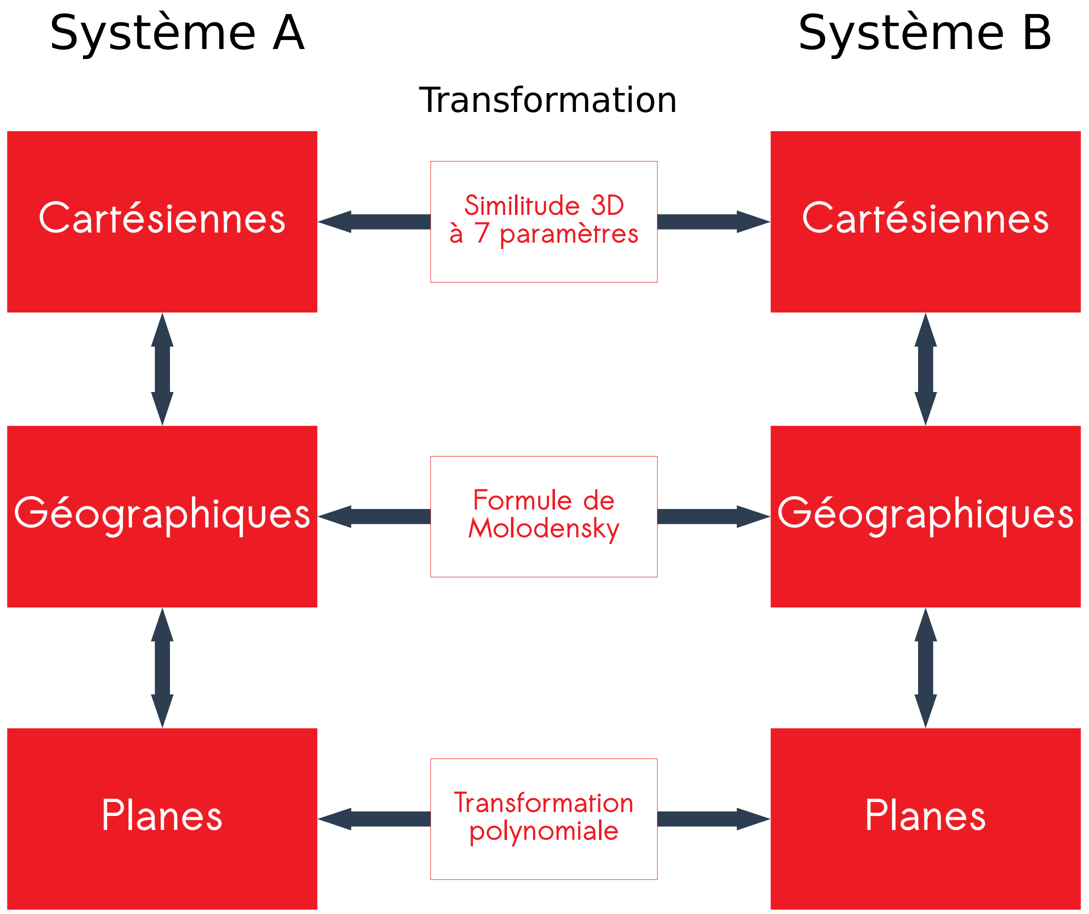
# V. Transformation de coordonnées

## 1) Changement de système

- S'effectue le plus souvent au niveau des **coordonnées cartésiennes géocentriques (XYZ)**.

# V. Transformation de coordonnées

## 1) Changement de système



# V. Transformation de coordonnées

## 2) Similitude 3D à 7 paramètres (Cartésiennes)

- Les mêmes 7 paramètres servent à transformer des coordonnées exprimées dans le système A vers le système B mais également du système B vers le système A

$$\begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{vmatrix} + \Delta \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 0 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix}$$

- Rotation en *rd* selon selon la convention de l'IERS (International Earth Rotation Systems Service) et facteur d'échelle (**Δ**) en ppm ($10^{-6}$).

# V. Transformation de coordonnées

## 2) Formule de Molodensky (Géographiques)

- Développements limités dont l'ordre influe évidemment sur la précision finale. Le passage inverse nécessite l'application de formules différentes.

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -\frac{sin\lambda_1}{(N_1 + he_1)cos\varphi_1} T_X + \frac{cos\lambda_1}{(N_1 + he_1)cos\varphi_1} T_Y +$$
$$\frac{(N_1(1-e_1^2) + he_1)tg\varphi_1 cos\lambda_1}{N_1 + he_1} rx + \frac{(N_1(1-e_1^2) + he_1)tg\varphi_1 sin\lambda_1}{N_1 + he_1} ry - rz$$

$$he_2 - he_1 = cos\varphi_1 cos\lambda_1 T_X + cos\varphi_1 sin\lambda_1 T_Y + sin\varphi_1 T_Z + (N_1(1 - e_1^2 sin^2\varphi_1) + he_1)m$$
$$-e_1^2 N_1 cos\varphi_1 sin\varphi_1 sin\lambda_1 rx + e_1^2 N_1 cos\varphi_1 sin\varphi_1 cos\lambda_1 ry - \frac{\Delta a}{w_1} + N_1(1 - f_1)sin^2\varphi_1 \Delta f$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{sin\varphi_1 cos\lambda_1}{\rho_1 + he_1} T_X - \frac{sin\varphi_1 sin\lambda_1}{\rho_1 + he_1} T_Y + \frac{cos\varphi_1}{\rho_1 + he_1} T_Z - \frac{e_1^2 N_1 cos\varphi_1 sin\varphi_1}{\rho_1 + he_1} m$$
$$-\frac{(N_1(1 - e_1^2 sin^2\varphi_1) + he_1)sin\lambda_1}{\rho_1 + he_1} rx - \frac{(N_1(1 - e_1^2 sin^2\varphi_1) + he_1)cos\lambda_1}{\rho_1 + he_1} ry$$
$$+\frac{w_1 e_1^2 sin\varphi_1 cos\varphi_1}{\rho_1 + he_1} \Delta a + \frac{\rho_1 sin2\varphi_1 (2 - e_1^2 sin^2\varphi_1)}{2(\rho_1 + he_1)(1 - f_1)} \Delta f$$

# V. Transformation de coordonnées

## 3) Transformation polynomiale (Planes)

- Ne s'applique que sur des zones restreintes

- Pour conserver une précision comparable à celle obtenue par l'emploi d'une similitude.

# V. Transformation de coordonnées

## 4) Exemple

- Un point situé dans l'est de la France, les coordonnées suivantes expriment la position au même détail (à trois mètres près) :

| Système de coordonnées | Longitude ou E | Latitude ou N |
|---|---|---|
| NTF méridien de Paris | 6 gr | 54 gr |
| NTF méridien de Greenwich | 7°44´14,0" | 48°36´00,0" |
| ED50 Greenwich | 7°44´16,4" | 48°36´03,0" |
| WGS84 Greenwich | 7°44´12,2" | 48°35´59,9" |
| NTF Lambert I | 997 960 m | 114 185 m |
| NTF Lambert II étendu | 998 137 m | 2 413 822 m |
| ED50 UTM fuseau 32 Nord | 406 946 m | 5 383 958 m |
| WGS84 UTM fuseau 32 Nord | 406 864 m | 5 383 757 m |
| RGF93 en projection Lambert-93 | 1 049 052 m | 6 843 777 m |

# VI. Informations complémentaires

# VI. Informations complémentaires

## 1) GNSS

- Les récepteurs GNSS mesurent l'élévation en se référant à un ellipsoïde.
- Ellipsoïde IAG-GRS80

Cet ellipsoïde, associé aux référentiels géodésiques **WGS84** et **RGF93**, est défini par son demi-grand axe et son aplatissement :

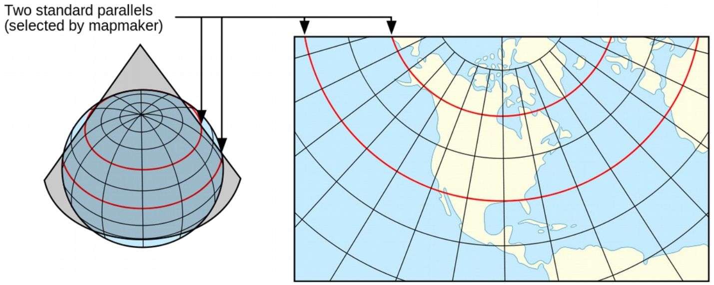
a = 6378137,0 mètres

f = 1 / 298,257222101

# VI. Informations complémentaires

## 2) Projection Lambert93

- Projection conique conforme **officielle** utilisée pour représenter la France métropolitaine, ainsi que pour les cartes couvrant toute l'Europe à des échelles inférieures ou égales au 1/500000.

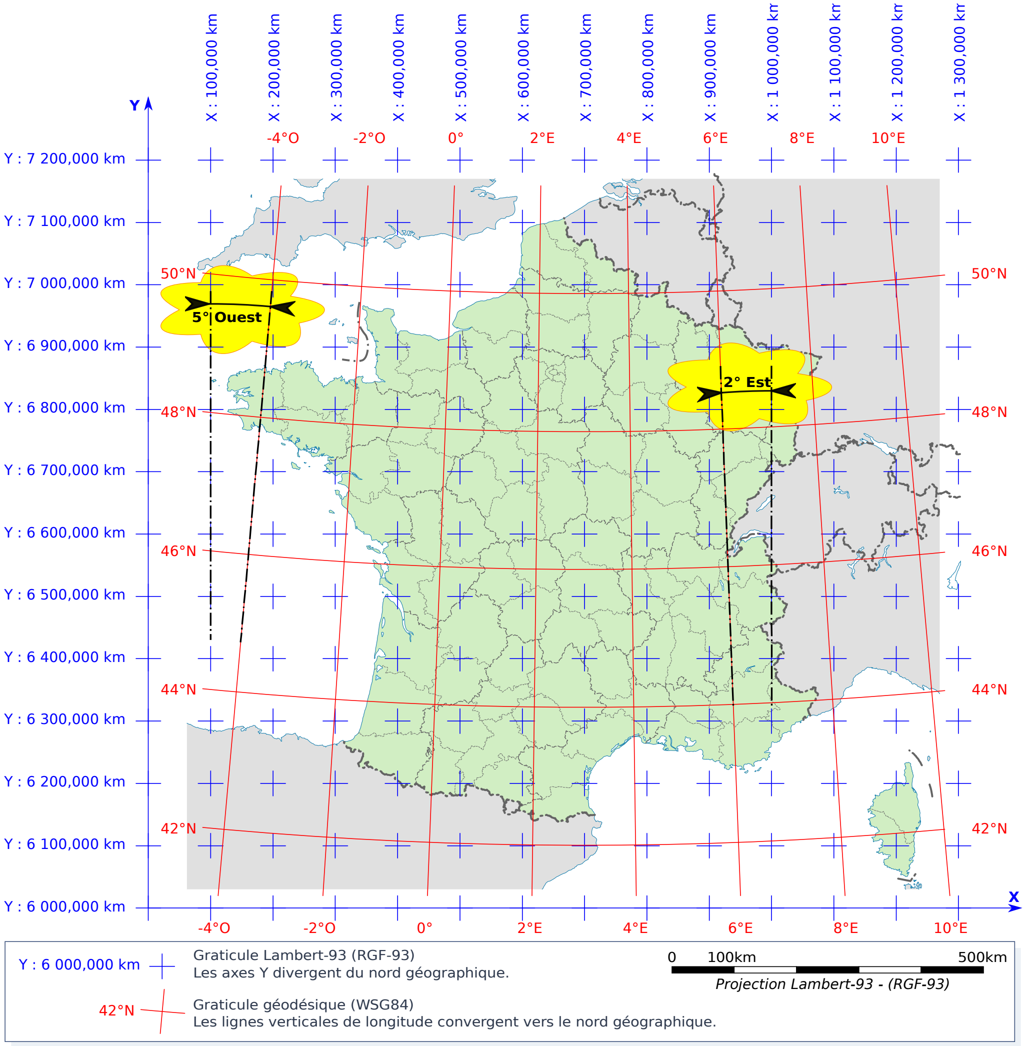



- Projection liée au système géodésique RGF93, officielle depuis 2000.

# VI. Informations complémentaires

## 2) Projection Lambert93

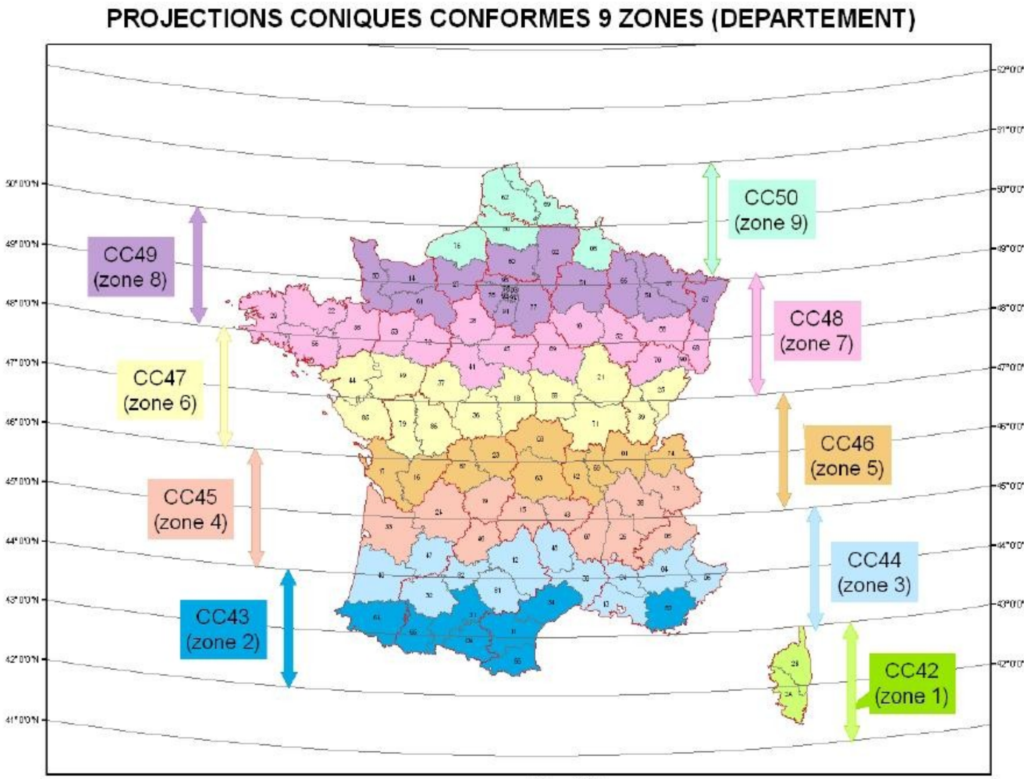
- La projection Lambert 93 est peu utilisée, en partie du fait des altérations linéaires importantes qui y sont associées.



# VI. Informations complémentaires

## 3) Projection Lambert Coniques Conformes

- Création de 9 projections coniques conformes sécantes, couvrant 9 zones du nord au sud
- Elles ont en commun avec le Lambert93 le système géodésique RGF93 et le méridien de référence 3°E (Méridien de Greenwich)



# VI. Informations complémentaires

## 4) Coordonnées géographiques RGF93 vers CC 9 zones

| ... en entrée | ... en sortie |
|---|---|
| $\phi_0$, $\phi_1$, $\phi_2$, $E_0$, $N_0$ : paramètres de la projection | X, Y : coordonnées CC 9 Zones |
| $\lambda_0$ : longitude du méridien central | |
| a : demi grand axe de l'ellipsoïde | |
| e : excentricité de l'ellipsoïde | |
| $\lambda$, $\phi$ : longitude, latitude RGF93 | |
| $L(\phi,e) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} - \frac{e}{2}\ln\frac{1+e\sin\phi}{1-e\sin\phi}$ | |
| $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi_2}}\cdot\cos(\phi_2)}{\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi_1}}\cdot\cos(\phi_1)}\right)}{L(\phi_1,e)-L(\phi_2,e)}$ | $C = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi_1}}\cdot\cos(\phi_1)}{n}\cdot\exp(n\cdot L(\phi_1,e))$ |
| $X_s = E_0$ | $Y_s = N_0 + c\cdot\exp(-n\cdot L(\phi_0,e))$ |
| $R = C\exp(-n\,L_{\phi,e})$ | $\gamma = n\,(\lambda - \lambda_0)$ |
| **$X = X_S + R\sin\gamma$** | **$Y = Y_S - R\cos\gamma$** |

# Questions ?

# Sources

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Projection_conique_conforme_de_Lambert
- https://moodle.ensta-bretagne.fr/pluginfile.php/51862/mod_resource/content/7/geodesie_fondamentale.pdf
- http://education.ign.fr/sites/all/files/geodesie_coordonnees.pdf
- https://geodesie.ign.fr/index.php?page=srt
- https://vixra.org/pdf/1511.0219v1.pdf
- https://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/pedagogiques/TransformationsCoordonneesGeodesiques.pdf