Géostatistique

Le krigeage,

Une technique d'interpolation spatiale

Alexandre Argento

24/01/2020

Sommaire

I. Introduction

- Objectif pratique:
  - Prédictions de mesures pour la cartographie.
- Lien avec le projet Gozone:
  - Interface pour l’affichage des log
  - Aide à la décision

II. Formalisme

- Formalisme général:

$$Z(s) = \mu(s) + \varepsilon(s)$$

Mesure

Point du plan (x,y)

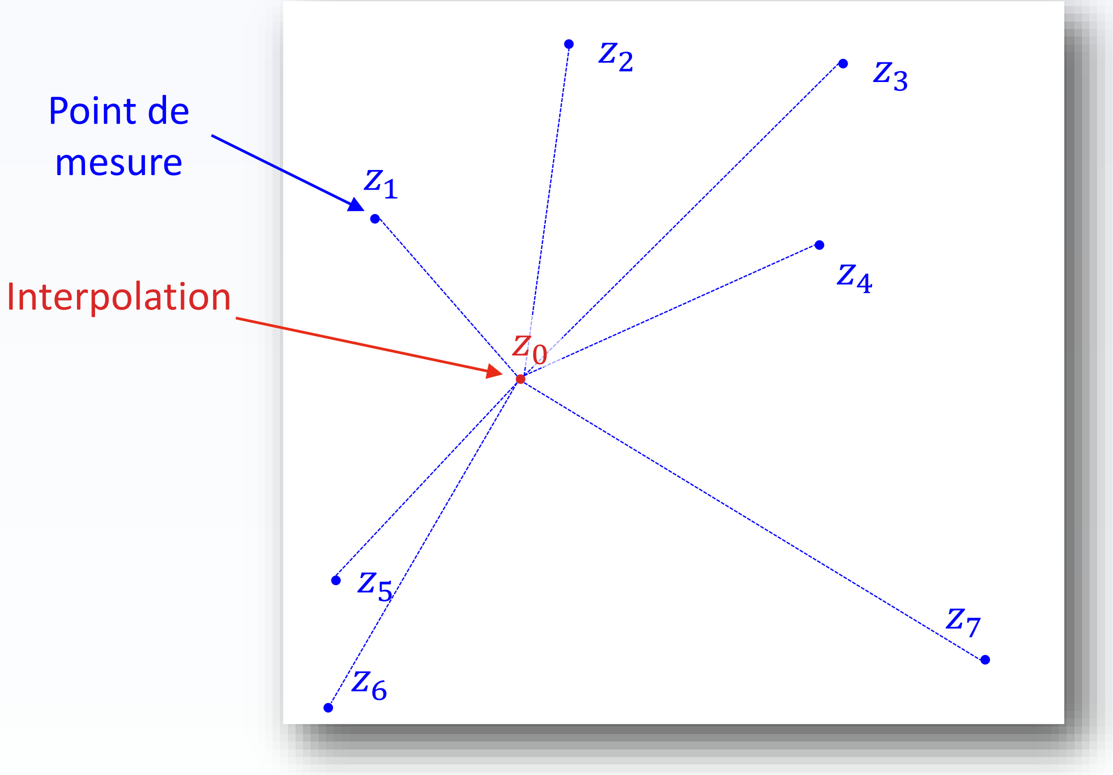
Partie déterministe

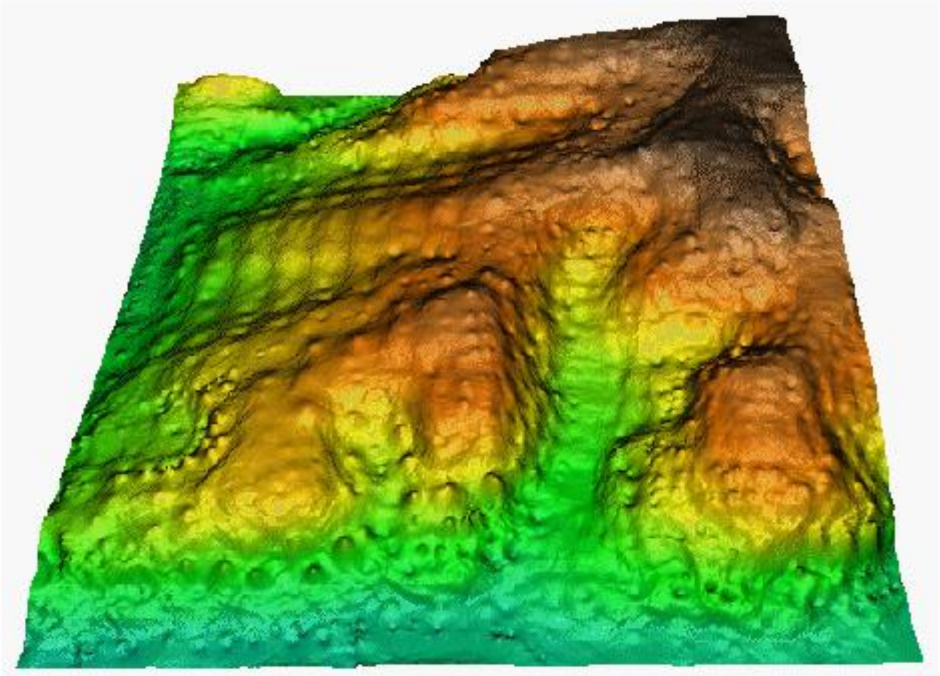
Partie aléatoire

III. Méthodes déterministes

- Méthode barycentrique:

$$\hat{z}(s_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z(s_i) \ \ avec \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ et \ \lambda_i = f(|s_i - s_0|)$$

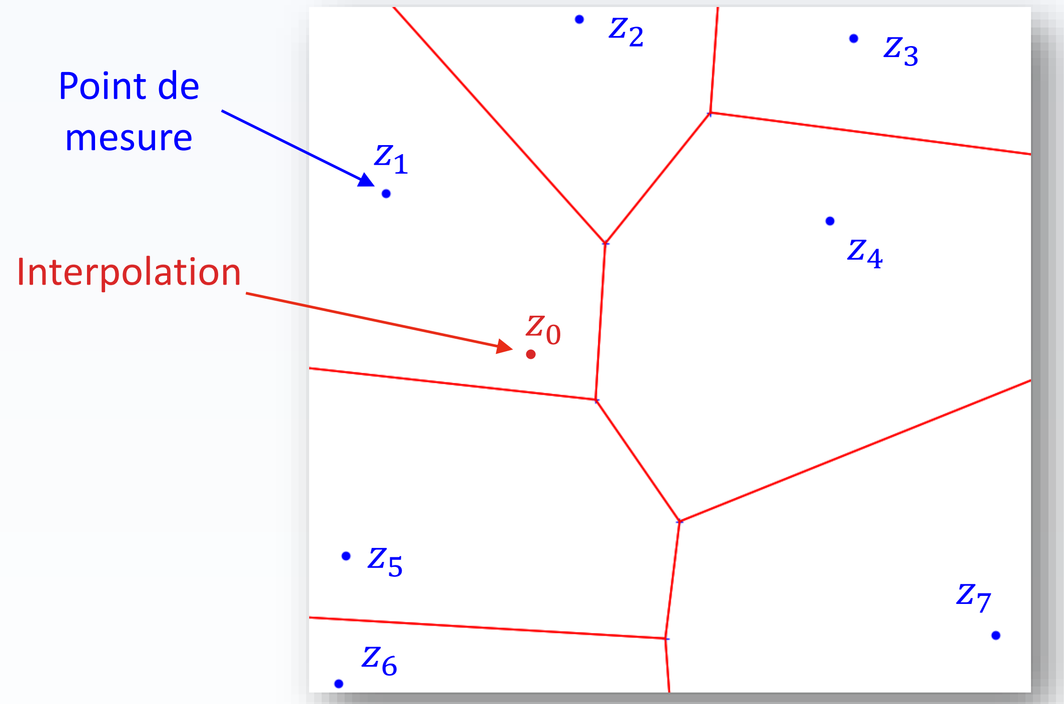


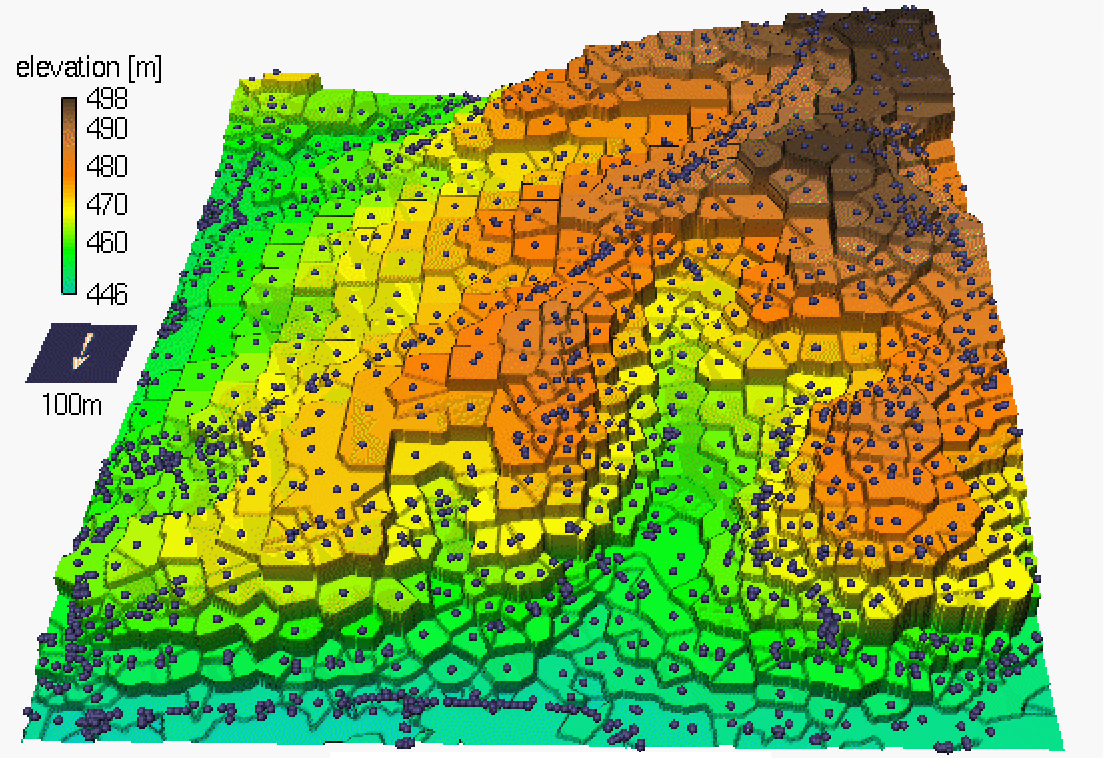


Pondération par l'inverse de la distance

III. Méthodes déterministes

- Partitionnement de l’espace:
  - Plus proche voisin (diagramme de Voronoi)

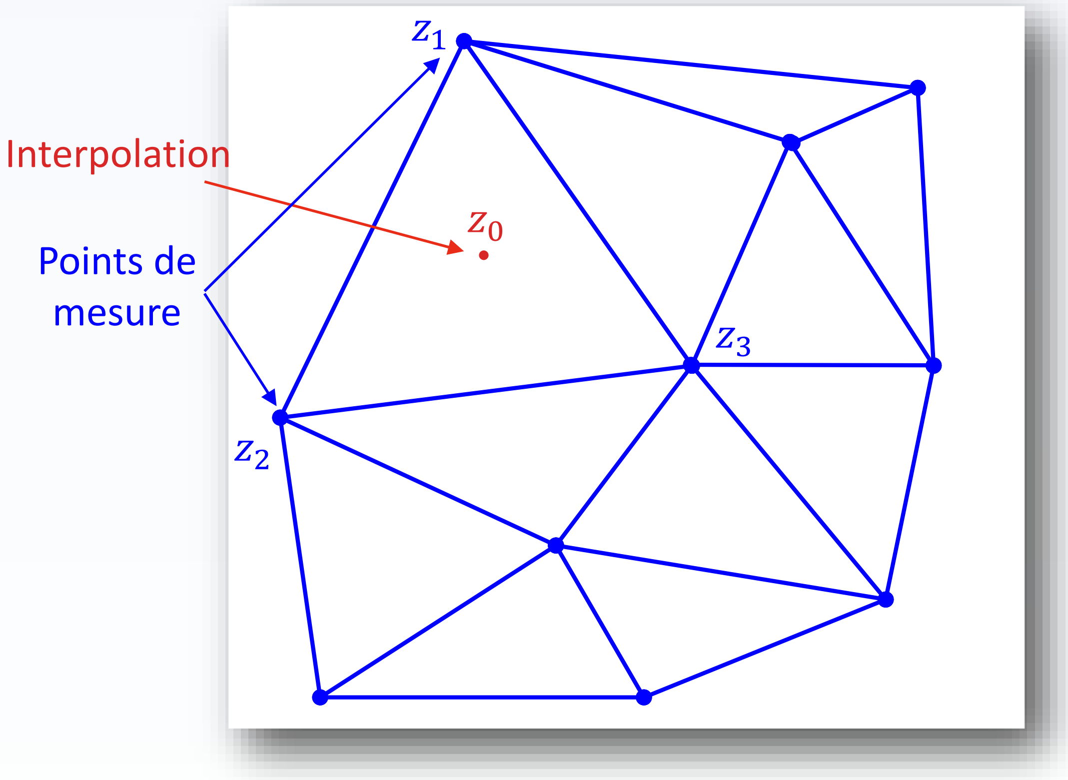


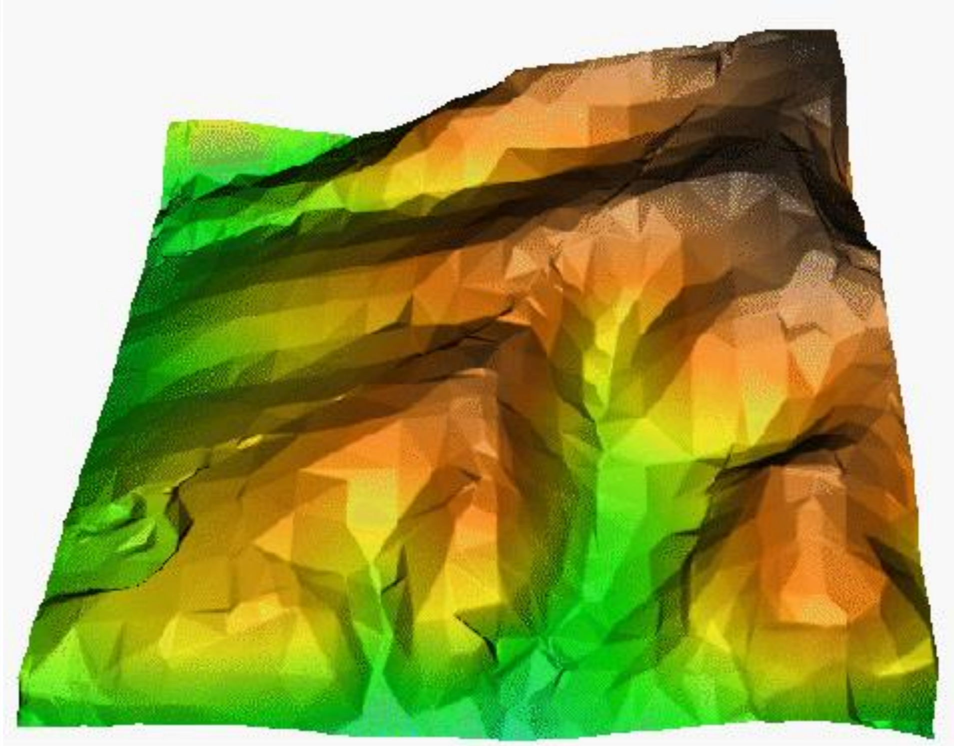


Plus proche voisin

III. Méthodes déterministes

- Partitionnement de l'espace:
  - Interpolation linéaire (triangles de Delaunay)





Triangles de Delaunay

III. Méthodes déterministes

- Splines: famille de fonctions régulières et de faible courbure

  $\hat{z}(s) = \hat{z}(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \sum_{i=1}^{n} b_i e(s, s_i)$,

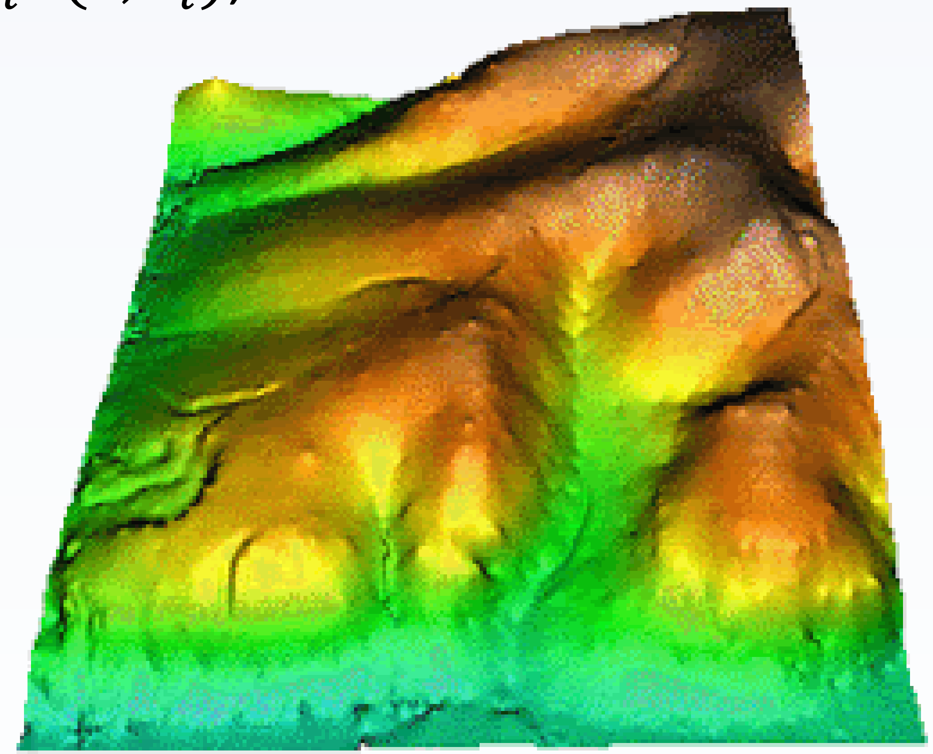
  avec $e(s, s_i) = |s - s_i|^2 \ln(|s - s_i|)$,

  telle que l'énergie de flexion:

$$\sum_{i=1}^{n} [\hat{z}(s_i) - z(s_i)]^2 + \rho \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dxdy$$

  est minimale.

  ρ : paramètre de lissage.



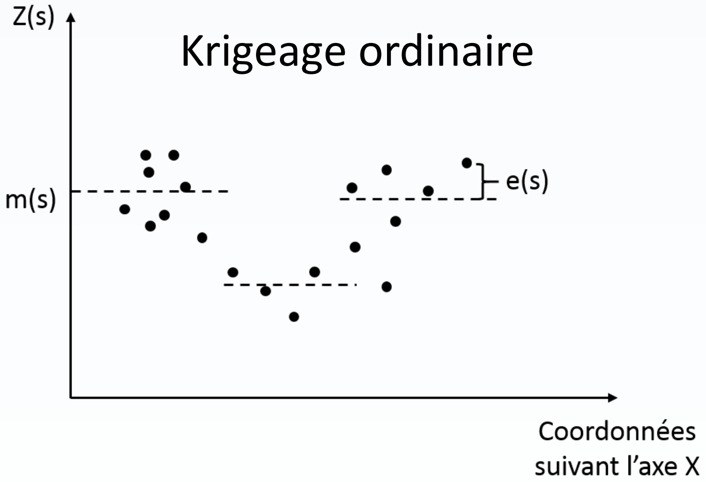
Splines

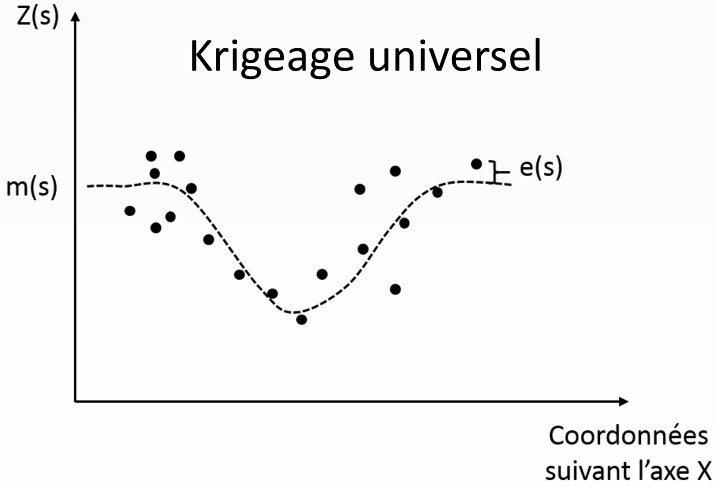
IV. Le krigeage

- Danie G. Krige (1951), puis Georges Matheron (1962)
- Prise en compte de la dépendance spatiale des données
- Hypothèses:

$$Z(s) = \mu(s) + \varepsilon(s)$$
$$\hat{z}(s_0) = a + \sum_{i \in V(s_0)} \lambda_i z(s_i)$$

- $\mu(s)$:
  - Krigeage ordinaire:
    $$\mu(s) = \mu$$
  - Krigeage universel:
    $$\mu(s) = \sum_{j=0}^{p} f_j(s)\beta_j$$





IV. Le krigeage

- $\varepsilon(s)$:
  - Stationnarité de second ordre:

$$E(\delta(s)) = 0$$
$$Cov(\delta(s), \delta(s+h)) = C(h)$$

➢Stationnarité intrinsèque:

$$E(\delta(s+h) - \delta(s)) = 0$$
$$Var\big(\delta(s+h) - \delta(s)\big) = 2\gamma(h)$$

Avec $\gamma(h) = C(0) - C(h)$

IV. Le krigeage

- Estimation:

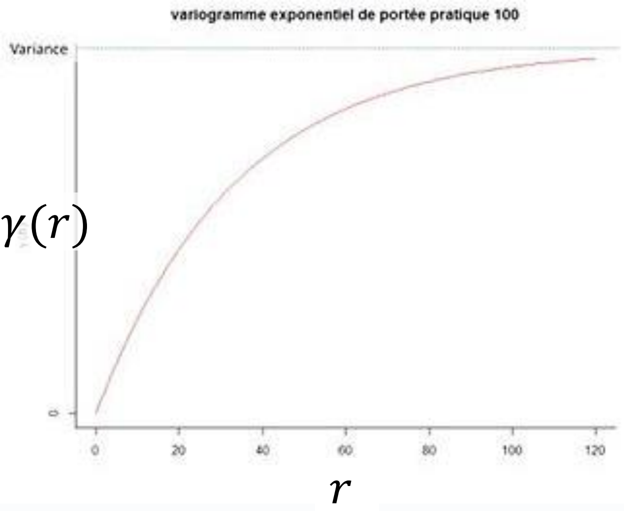
$$\gamma(h) = \frac{1}{2} Var\big(\delta(s) - \delta(s+h)\big)$$

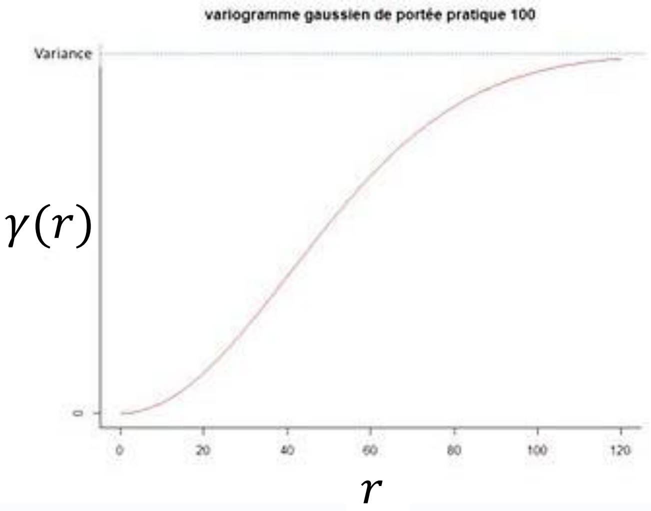
- Critères de choix:
  - Imposés: $\gamma(h) = \gamma(-h), \begin{cases} \gamma(h) = 0 \; si \; h = 0 \\ \gamma(h) > 0 \; sinon \end{cases}$
  - Distance de dépendance spatiale des données (terme palier)

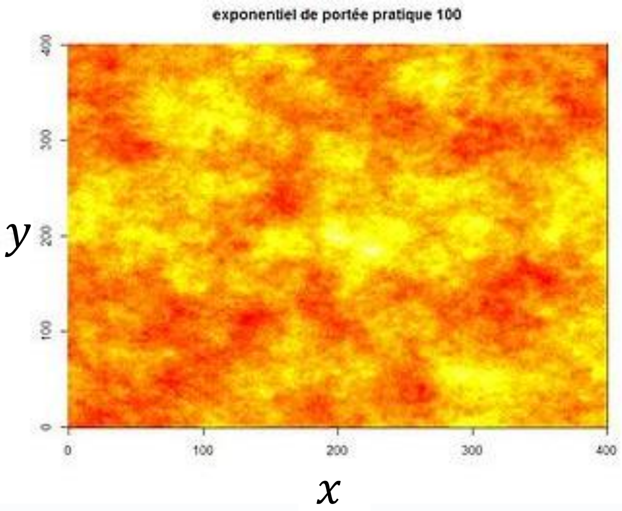
IV. Le krigeage

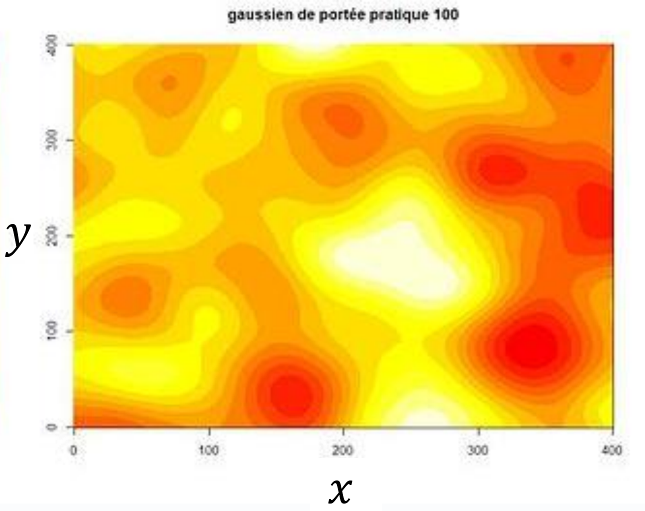
- Modèles:

Modèle	Exemple de surface correspondant





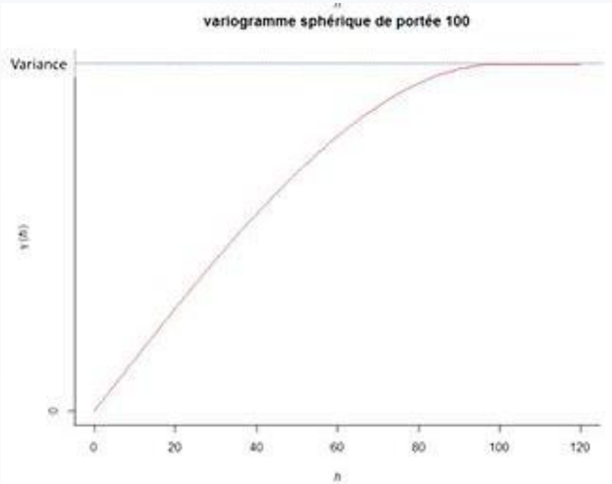


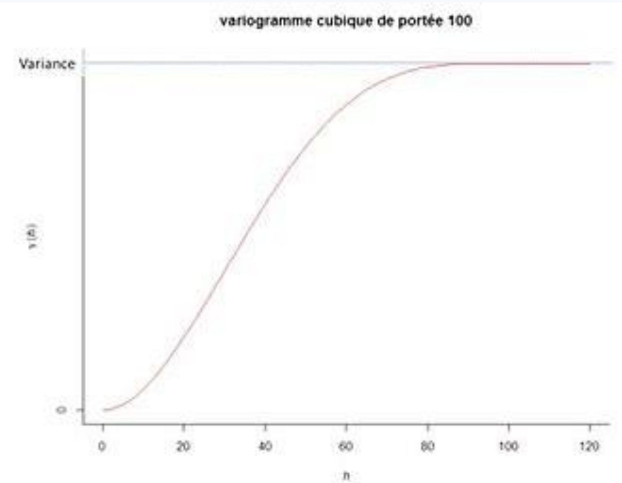


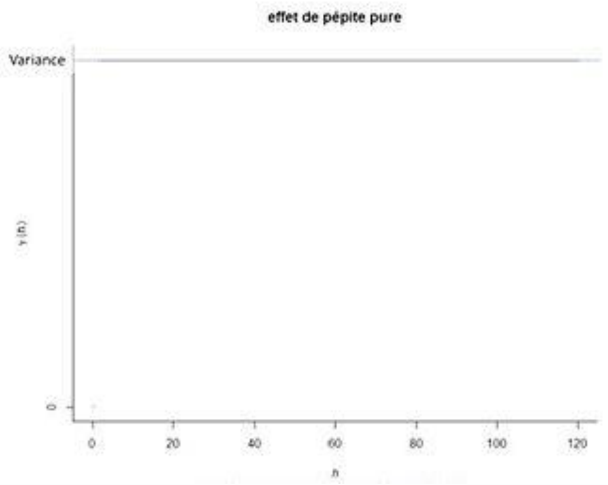
$$avec$$
$$r = \sqrt[2]{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$$

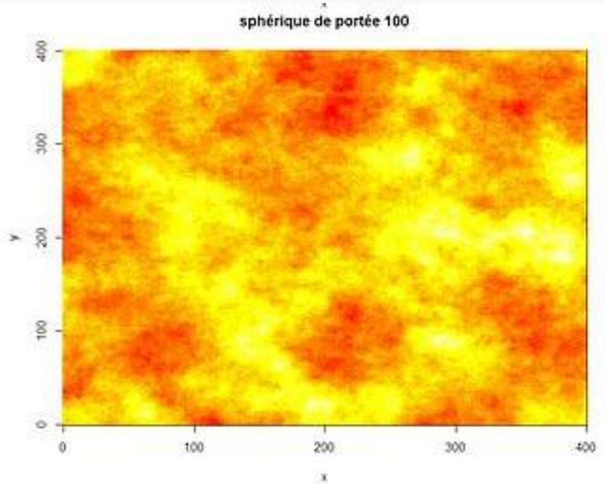
IV. Le krigeage

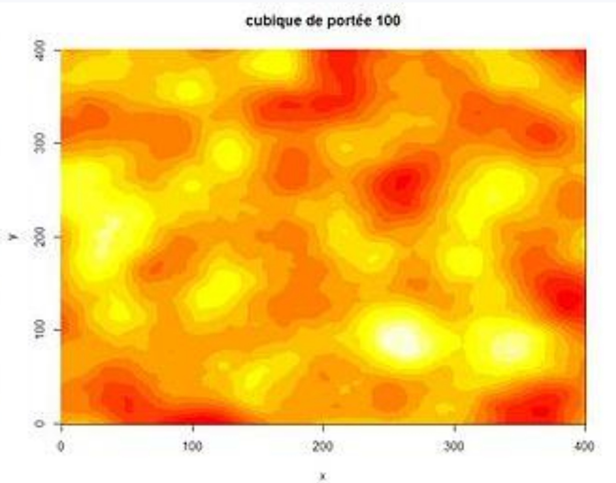
- Modèles:

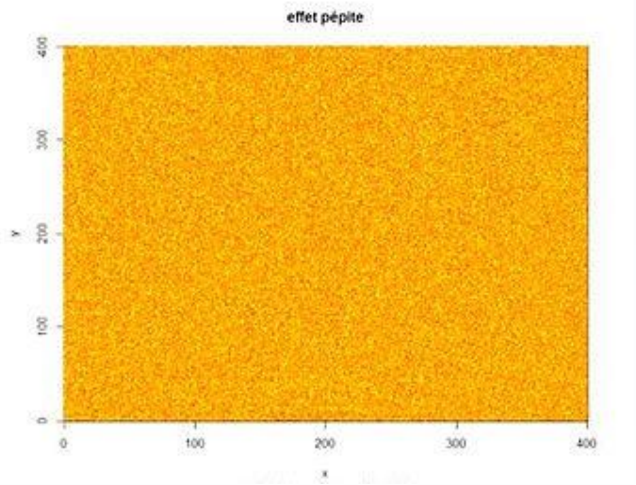












IV. Le krigeage

- Résolution des équations du krigeage:
  - Forme linéaire:

$$\hat{Z}(s_0) = a + \sum_{i \in V(s_0)} \lambda_i Z(s_i)$$

  - Autorisation:

  Existence de l'espérance et de la variance de l'erreur de prévision $\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)$.
  - Non-biais:

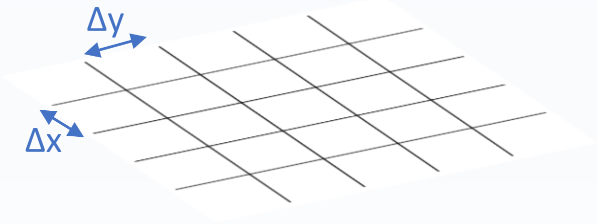
$$E\left[\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)\right] = 0$$

  - Optimalité:

  Minimisation de l'erreur de prévision: $Var\left[\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)\right]$

V. Usage pratique

- Démarche
  - ➢ Préparation des données de mesures (x, y, z)
  - ➢ Détermination des points désirés:
    - Quadrillage

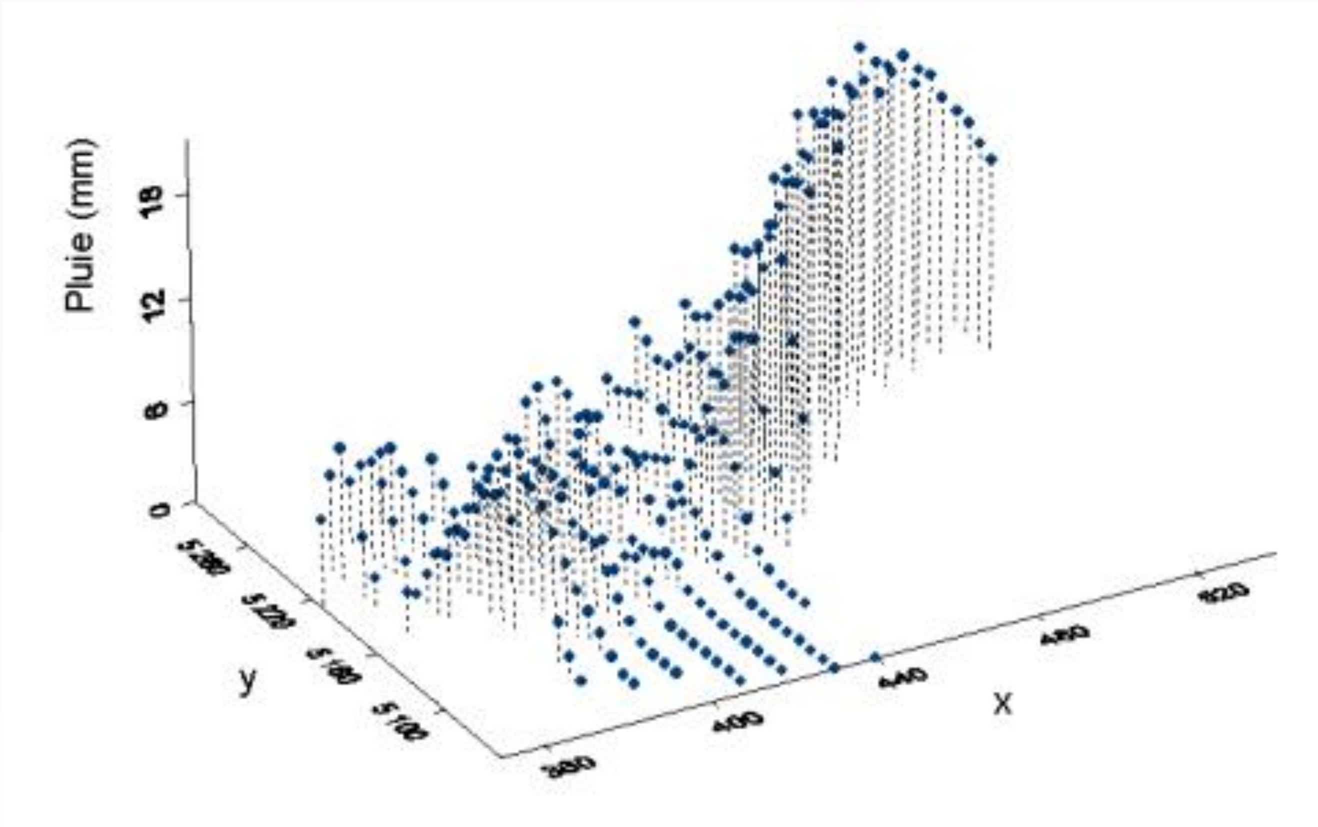


    - Nouvelle liste de points

  - ➢ Krigeage à partir des données
  - ➢ Tracé des prédictions

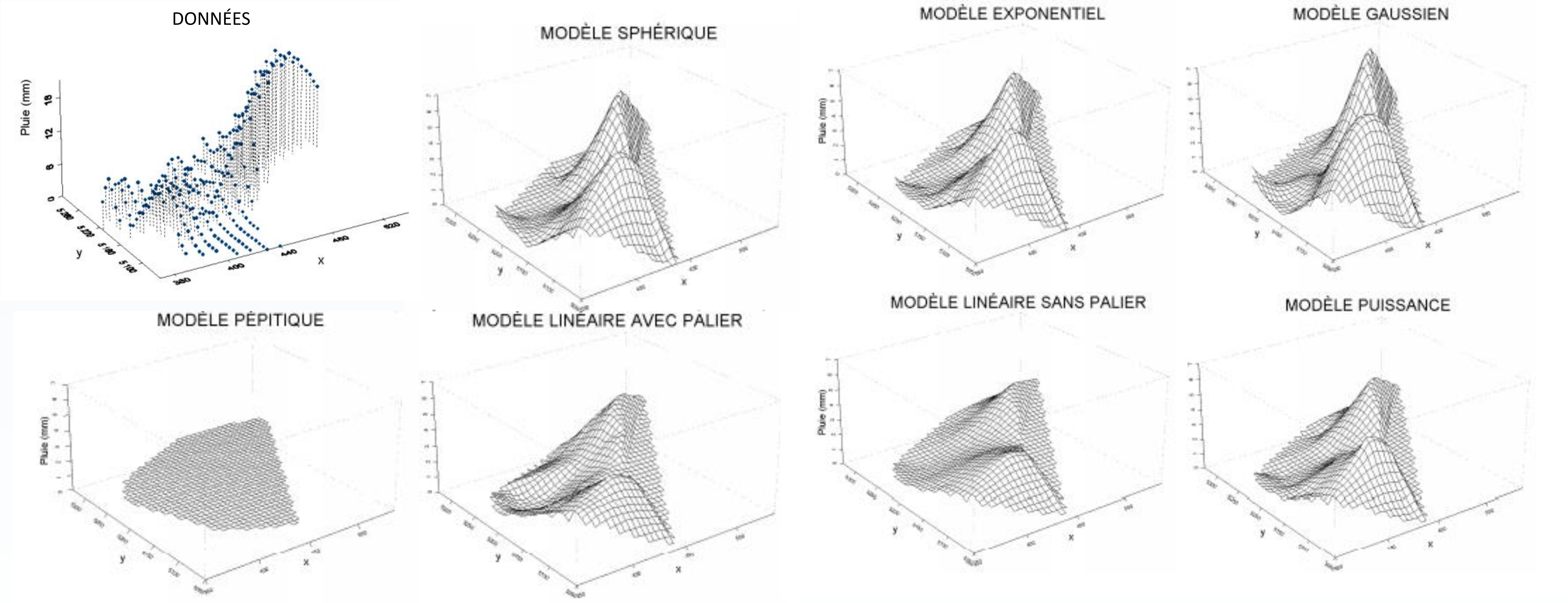
V. Usage pratique

- Exemple: Relevés de précipitations



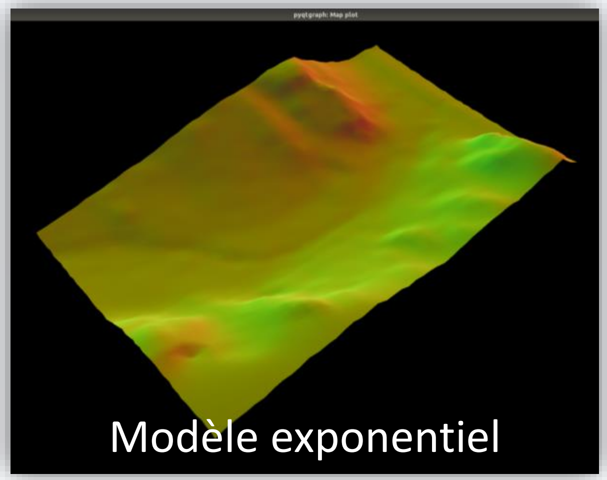
V. Usage pratique

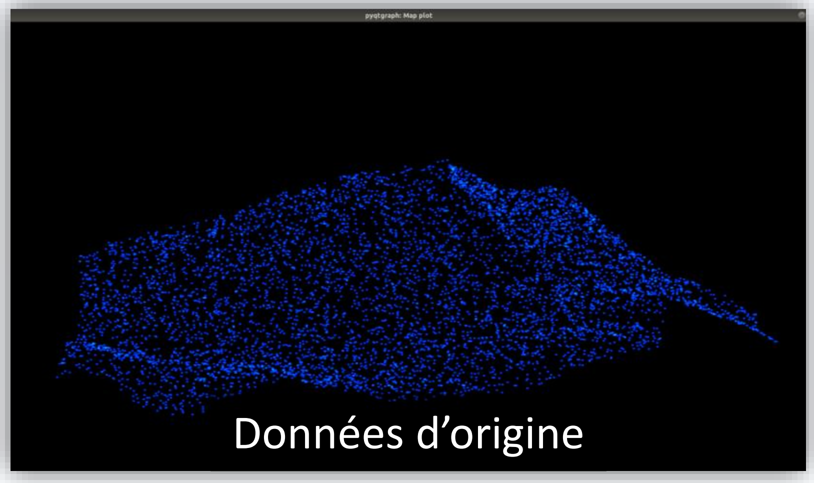
- Exemple: Relevés de précipitations

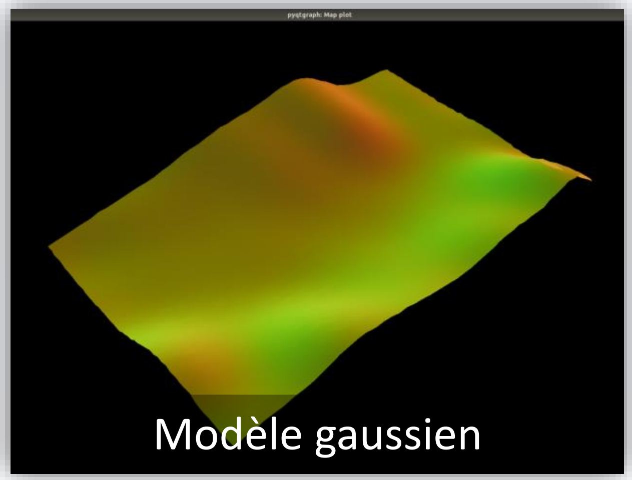


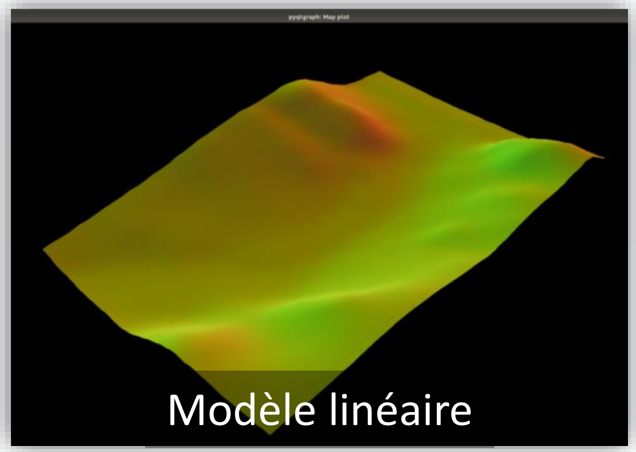
V. Usage pratique

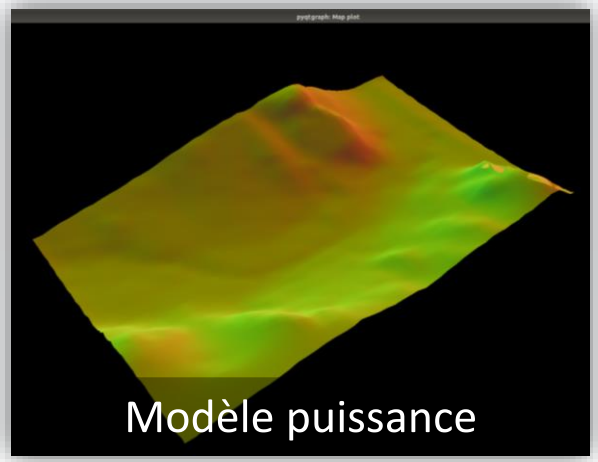
- Exemple: visualisation d’un MNT de Guerlédan

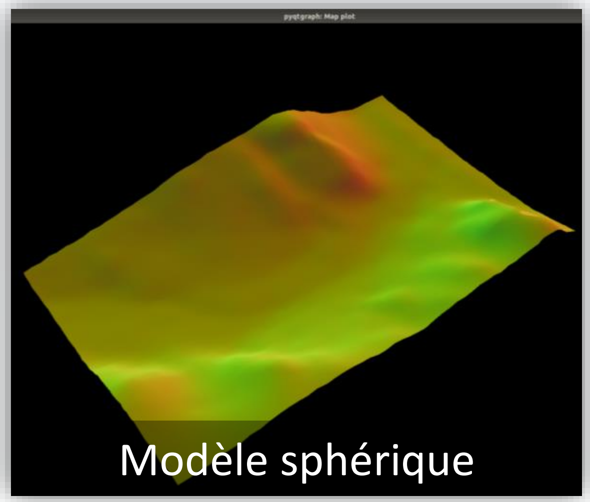

Modèle exponentiel

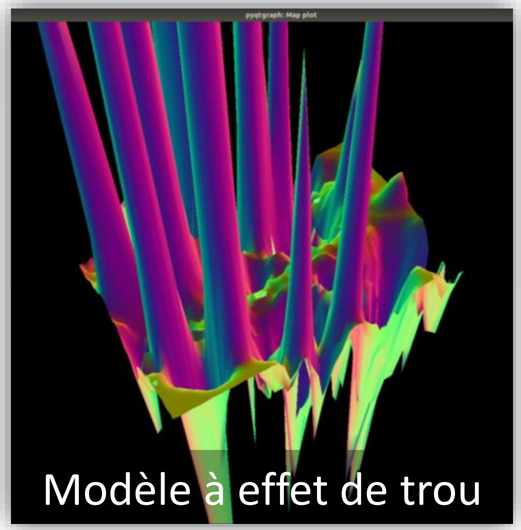

Données d’origine


Modèle gaussien


Modèle linéaire


Modèle puissance


Modèle sphérique


Modèle à effet de trou

VI - Conclusion

- Krigeage Vs Méthodes déterministes:
  - Choix d’une modélisation
  - Critère d’appréciation
  - Complexité
- Rôle de l’ingénieur