

# Tests intérieurs et applications

Luc Jaulin et Alexandre Goldsztejn

Vendredi 17 janvier 2007, 11h

# 1 Exemple introductif

L'espace de configuration ou l'espace de travail d'un robot (série, parallèle ou autre) peut généralement être défini par

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$$

*Montrer le petit exemple Robot2d*

Sur notre petit exemple,

$$\mathbb{X} = \left\{ \mathbf{x} \in \begin{pmatrix} [-\pi, \pi] \\ [-\pi, \pi] \end{pmatrix}, \exists \mathbf{y} \begin{pmatrix} [0, h] \\ [-\infty, h] \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} y_1 - \ell_1 \sin x_1 \\ y_2 - \ell_1 \sin x_1 - \ell_2 \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

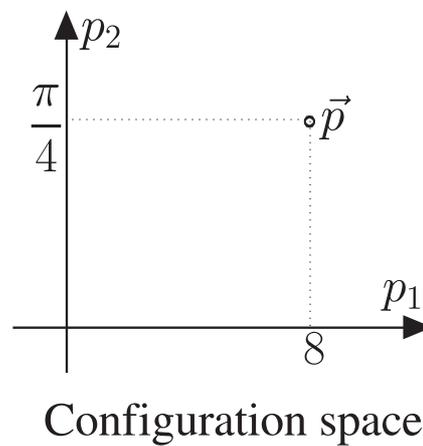
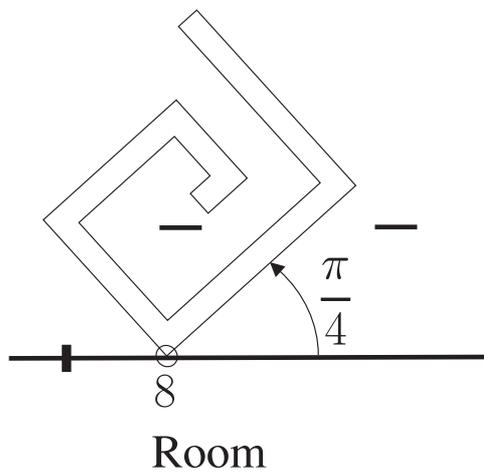
avec  $h = 2.3$ ,  $\ell_1 = 2$ ,  $\ell_2 = 1.5$ .

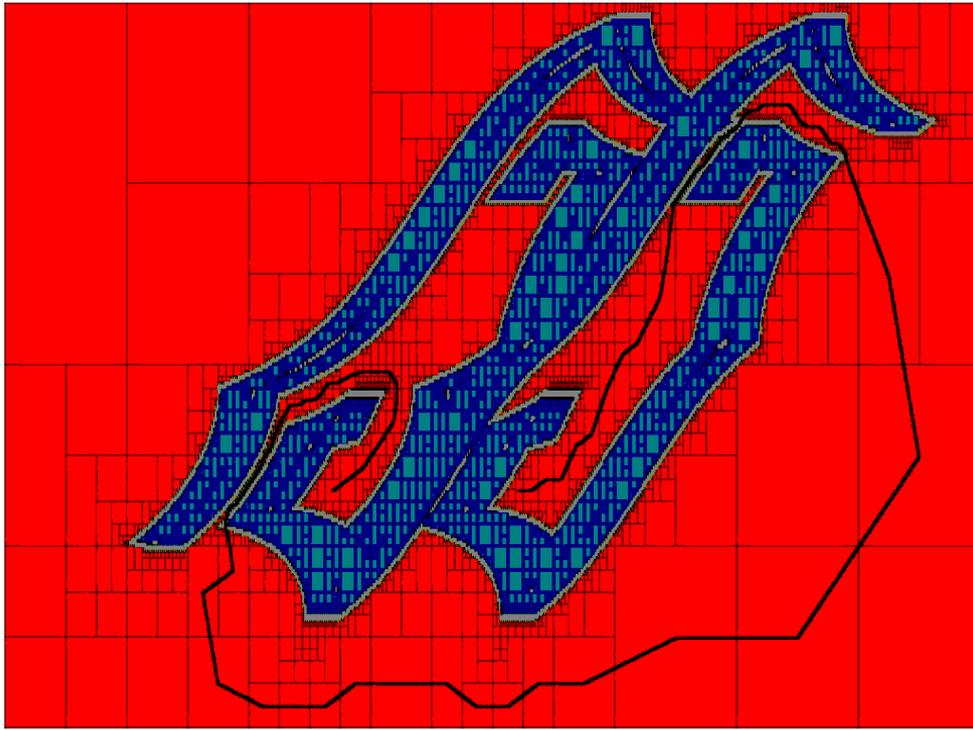
Pour notre exemple, le système étant linéaire en  $y_1, y_2$ , on peut éliminer formellement les quantificateurs, c'est-à-dire,

$$\exists \mathbf{y} \in \begin{pmatrix} [0, h] \\ [-\infty, h] \end{pmatrix}, \begin{cases} y_1 - \ell_1 \sin x_1 = 0 \\ y_2 - \ell_1 \sin x_1 - \ell_2 \sin(x_1 + x_2) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell_1 \sin x_1 \in [0, h] \\ \ell_1 \sin x_1 + \ell_2 \sin(x_1 + x_2) \leq h \end{cases}$$

et donc se ramener à des inégalités.

Pour certaines applications, comme la planification de chemin, l'approximation intérieure est indispensable.





## 2 Problème

Soit une fonction

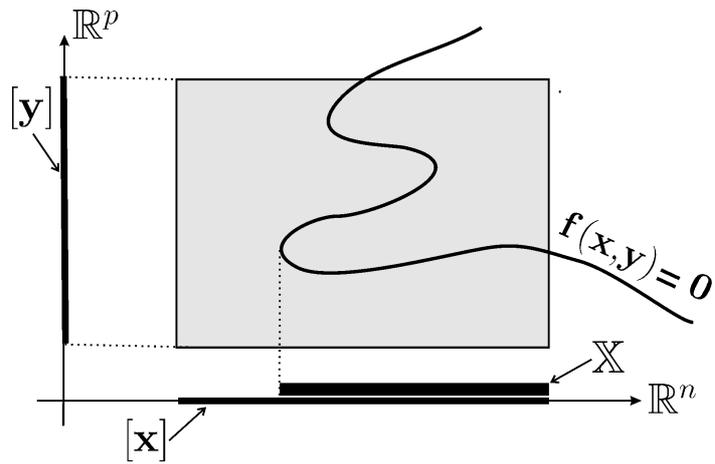
$$\mathbf{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases}$$

et deux pavés  $[\mathbf{x}] \subset \mathbb{R}^n$  et  $[\mathbf{y}] \subset \mathbb{R}^p$ . On cherche à caractériser

$$\mathbb{X} = \{ \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \},$$

*i.e.*, c'est-à-dire, à trouver deux sous-pavages  $\mathbb{X}^-$ ,  $\mathbb{X}^+$  tels que

$$\mathbb{X}^- \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{X}^+.$$



**Remarque:** Trouver  $\mathbb{X}^+$  peut être considéré comme résolu. Cela n'est pas le cas pour  $\mathbb{X}^-$ .

Pour caractériser  $\mathbb{X}$  par un algorithme de découpage, il nous faut deux tests .

$$t^{\text{in}}([\mathbf{x}]) = 1 \Rightarrow \forall x \in [\mathbf{x}], \mathbf{x} \in \mathbb{X} \text{ (test intérieur)}$$

$$t^{\text{out}}([\mathbf{x}]) = 1 \Rightarrow \forall x \in [\mathbf{x}], \mathbf{x} \notin \mathbb{X} \text{ (test extérieur)}$$

Le test  $t^{\text{out}}([\mathbf{x}])$  cherche à montrer que

$$[\mathbf{x}] \cap \mathbb{X} = \emptyset, \text{ i.e., } \forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \forall \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$$

et  $t^{\text{in}}([\mathbf{x}])$  cherche à montrer

$$[\mathbf{x}] \subset \mathbb{X} = \emptyset, \text{ i.e., } \forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

# 3 Examples

## 3.1 Calcul de l'image directe

(Commande robuste, estimation d'état, optimisation multi-objective)

Il s'agit de caractériser l'ensemble

$$\mathbb{Y} = \mathbf{f}([\mathbf{x}]),$$

où  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, n \geq p$  et  $[\mathbf{x}]$  est un pavé de  $\mathbb{R}^n$ . On a

$$\mathbb{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, \exists \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y} = \mathbf{0}\}.$$

## 3.2 Commande

Pour le système dynamique

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases}$$

L'ensemble des sorties d'équilibre s'écrit

$$\mathbb{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, \exists \mathbf{u} \in [\mathbf{u}], \exists \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

où

$$\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

### 3.3 Robotique

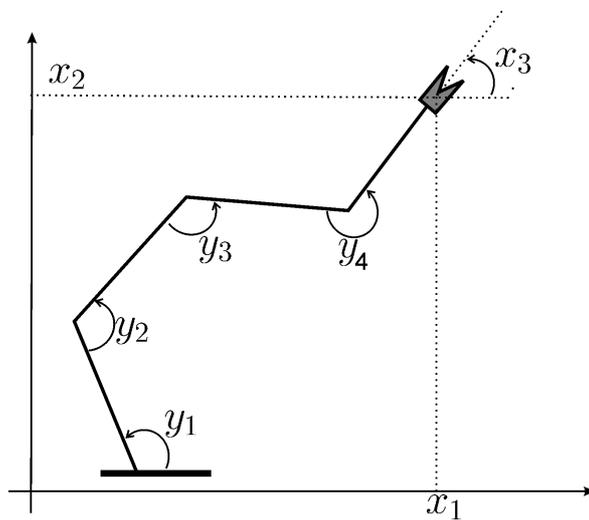
Pour un robot décrit par le modèle géométrique suivant

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

où  $\mathbf{y}$  est le vecteur des configurations et  $\mathbf{x}$  la position de l'outil.

L'espace de travail s'écrit

$$\mathbb{W} = \{ \mathbf{x} \mid \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \} .$$



## **4 Situations déjà résolues**

## 4.1 Inversion ensembliste (1)

Si l'ensemble à caractériser s'écrit

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]\} = [\mathbf{x}] \cap \mathbf{f}^{-1}[\mathbf{y}]$$

et est de volume non nul, une approximation intérieure et extérieure peut facilement être obtenue.

## 4.2 Projection d'inégalités (1)

Si

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in [\mathbf{z}]\}$$

peut aussi être facilement obtenue.

## 4.3 Inversion ensembliste (2)

Si on a l'équivalence

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbb{X} &= \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]\} \\ &= [\mathbf{x}] \cap \mathbf{h}^{-1}([\mathbf{y}]).\end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathbb{X}$  peut alors être défini par des inégalités sans quantificateurs.

Par exemple, si

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(\mathbf{x})$$

et si  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  inversible alors,

$$\exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]$$

et donc

$$\mathbb{X} = \left\{ \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}] \right\}.$$

## 4.4 Projection d'inégalités (2)

Si

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}_1 + \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) = 0,$$

avec  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  inversible et  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ , alors

$$\begin{aligned} & \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists \mathbf{y}_2 \in [\mathbf{y}_2], -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \in [\mathbf{y}_1] \end{aligned}$$

et donc  $\mathbb{X}$  est la projection d'inégalités.

## 4.5 Image directe

Si

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$$

alors

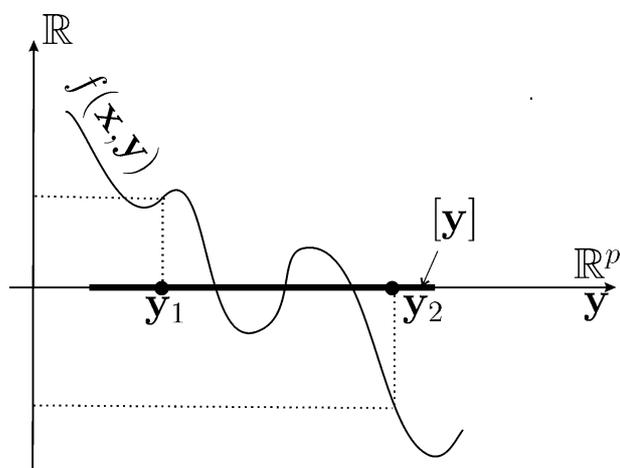
$$\begin{aligned}\mathbb{X} &= \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\} \\ &= [\mathbf{x}] \cap \mathbf{h}([\mathbf{y}]).\end{aligned}$$

Pour  $\dim(\mathbf{x}) = \dim(\mathbf{y})$  le problème a été résolu très récemment.

## 4.6 Une seule égalité

Si  $f \in \mathbb{R}$  est une fonction continue, alors,

$$\exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \mathbf{y}_1 \in [\mathbf{y}], f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \geq 0 \\ \exists \mathbf{y}_2 \in [\mathbf{y}], f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \leq 0 \end{cases},$$



## Exemple

$$\begin{aligned}\mathbb{X} &= \{(x_1, x_2), \exists y \in [-2, 2], x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1 = 0\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2), \left\{ \begin{array}{l} \exists y_1 \in [-2, 2] \quad x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 - 1 \leq 0 \\ \exists y_2 \in [-2, 2] \quad x_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 1 \geq 0 \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

*Illustration avec Proj2d*

Cette astuce ne fonctionne pas si nous avons plus d'une égalité. En effet

$$\exists \mathbf{y}, (f_1(\mathbf{y}) = 0 \wedge f_2(\mathbf{y}) = 0) \not\Leftrightarrow \begin{cases} (\exists \mathbf{y}, f_1(\mathbf{y}) = 0) \\ (\exists \mathbf{y}, f_2(\mathbf{y}) = 0) \end{cases}$$

## 5 Test intérieur ponctuel

Soit un point  $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$ , nous voulons tester si

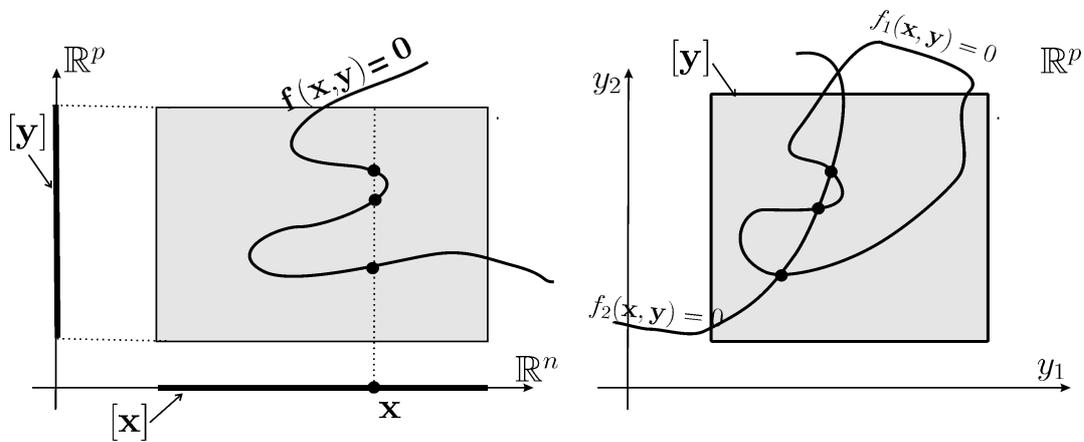
$\mathbf{x} \in \mathbb{X}$  avec  $\mathbb{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$ .

Notons que l'ensemble

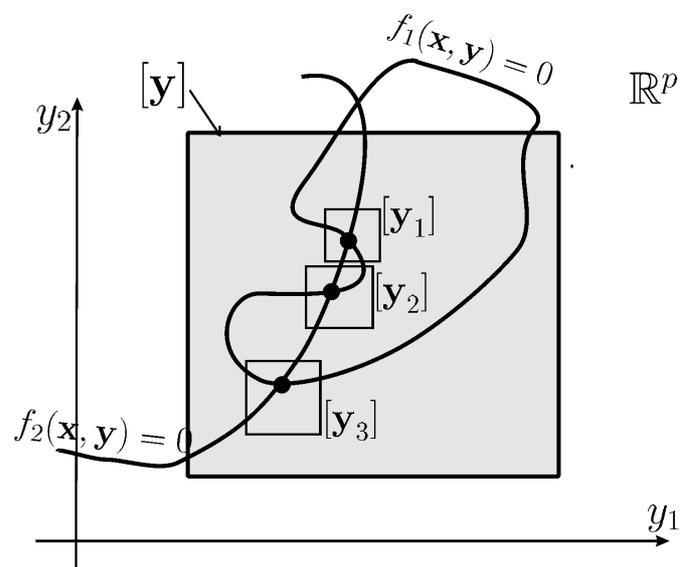
$$\{\mathbf{y} \in [\mathbf{y}], f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$$

peut contenir une infinité d'éléments.

**Step 1** : Trouver quelques quasi-solutions  $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$  pour  $f(x, y) = 0$ .



**Step 2** : Gonfler ces quasi-solutions afin d'obtenir des petits pavés  $[y_1], [y_2], [y_3], \dots$



**Step 3** : Appliquer le test de faisabilité (voir ci-dessous)  
pour chaque

$$[y] \in \{[y_1], [y_2], [y_3], \dots\}$$

**Proposition** : Soit  $\mathbf{g}(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ , une fonction différentiable et  $[\bar{\mathbf{y}}]$  un pavé de  $\mathbb{R}^m$ .

Si le CSP

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y} \in [\bar{\mathbf{y}}] \\ \mathbf{g}(\mathbf{y}) \in [\mathbf{0}, \mathbf{g}(\text{mid}([\bar{\mathbf{y}}]))] \\ a_{i,j} = \pi_{[\bar{y}_j]}(y_j) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}) \\ \text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} < m \end{array} \right.$$

est incohérent, alors

$$\exists \mathbf{y} \in [\bar{\mathbf{y}}], \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Ici, la fonction porte est définie comme suit  $\pi_{[y]}(x) = 1$  si  $y^- < x < y^+$  est  $\pi_{[y]}(x) = 0$  sinon.

**Exemple** : Si  $p = m = 1$ .  $[\bar{y}] = [-1, 1]$  et  $g(y) = y + a$ , où  $a$  est un paramètre positif. Le CSP devient

$$\begin{cases} y \in [-1, 1] \\ g(y) \in [0, a] \\ \pi_{[-1,1]}(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + a \in [0, a] \\ y \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} 0 \leq y + a \\ y \leq 0 \\ y \in \{-1, 1\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq -1 + a \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1$$

C'est-à-dire que si  $a < 1$ , notre CSP n'aura pas de solution et donc

$$\exists y \in [-1, 1], y + a = 0.$$

**Remarque 1:** Il ne faut pas confondre le domaine  $[y]$  pour  $y$  avec le pavé  $[\bar{y}]$ . Le pavé  $[\bar{y}]$  ne doit pas être contracté lors de propagation qui nous servira à montrer l'incohérence du CSP.

**Remarque 2** : La contrainte de rang peut être transformée en égalités. Par exemple,

$$\begin{aligned} & \text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} < 2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 0 \\ a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Notre contracteur utilise l'élimination de Gauss par intervalle.

**Exemple** : Prouver que

$$\exists \mathbf{y} \in [1, 3] \times [0, 6], y_1^2 + y_2^2 - 4 = 0$$

revient à prouver que le CSP suivant est incohérent

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq y_1 \leq 3 \\ 0 \leq y_2 \leq 6 \\ y_1^2 + y_2^2 - 4 \in [0, 2^2 + 3^2 - 4] \\ a_{11} = \pi_{[1,3]} \cdot (2y_1) \\ a_{12} = \pi_{[0,6]} \cdot (2y_2) \\ a_{11} = 0, a_{12} = 0 \text{ (condition de rang)} \end{array} \right.$$

**Résumé :** Pour

$$\mathbb{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$$

nous sommes capables

- de prouver qu'un pavé  $[\mathbf{x}]$  est à l'extérieur de  $\mathbb{X}$ ,
- de prouver qu'un point  $\mathbf{x}$  est à l'intérieur de  $\mathbb{X}$ .

Il nous reste à trouver une méthode pour montrer que  $[\mathbf{x}] \cap \partial\mathbb{X}$ . Un tel pavé est appelé *pavé sans frontière*.

# 6 Test de la frontière

**Théorème** : Soit  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction différentiable,  $[\mathbf{x}]$  un pavé de  $\mathbb{R}^n$  et  $[\bar{\mathbf{y}}]$  un pavé  $\mathbb{R}^p$ . Si le CSP

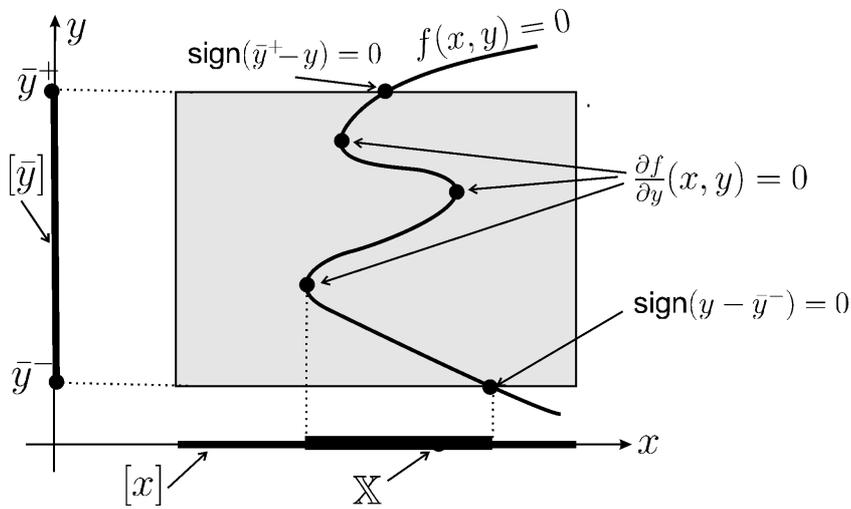
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \mathbf{y} \in [\bar{\mathbf{y}}] \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \\ a_{i,j} = \pi_{[\bar{\mathbf{y}}]}(y_j) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} < m \end{array} \right.$$

est incohérent, alors  $[\mathbf{x}] \cap \partial\mathbb{X} = \emptyset$ .

**Exemple :** Si  $n = p = m = 1$ , le théorème devient

$$\begin{cases} x \in [x], y \in [\bar{y}], f(x, y) = 0, \\ a = \pi_{[\bar{y}]}(y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ a = 0 \end{cases}$$

incohérent implique  $[\mathbf{x}] \cap \partial\mathbb{X} = \emptyset$ . Sur la figure, le CSP a 4 solutions. Il n'est donc pas vide.



**Résumé :** Pour

$$\mathbb{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}.$$

nous sommes capables

- de prouver qu'un pavé  $[\mathbf{x}]$  est à l'extérieur de  $\mathbb{X}$ ,
- qu'un point  $\mathbf{x}$  est à l'intérieur de  $\mathbb{X}$ .
- et que  $[\mathbf{x}] \cap \partial\mathbb{X} = \emptyset$

Un algorithme de bisection peut donc être développé pour la caractérisation de  $\mathbb{X}$ .

## 7 Polaire des vitesses d'un voilier

Les équations d'état d'un bateau à voile sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta - \beta V, \\ \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{v} = \frac{f_s \sin \delta_s - f_r \sin \delta_r - \alpha_f v}{m}, \\ \dot{\omega} = \frac{(\ell - r_s \cos \delta_s) f_s - r_r \cos \delta_r f_r - \alpha_\theta \omega}{J}, \\ f_s = \alpha_s (V \cos (\theta + \delta_s) - v \sin \delta_s), \\ f_r = \alpha_r v \sin \delta_r. \end{array} \right.$$

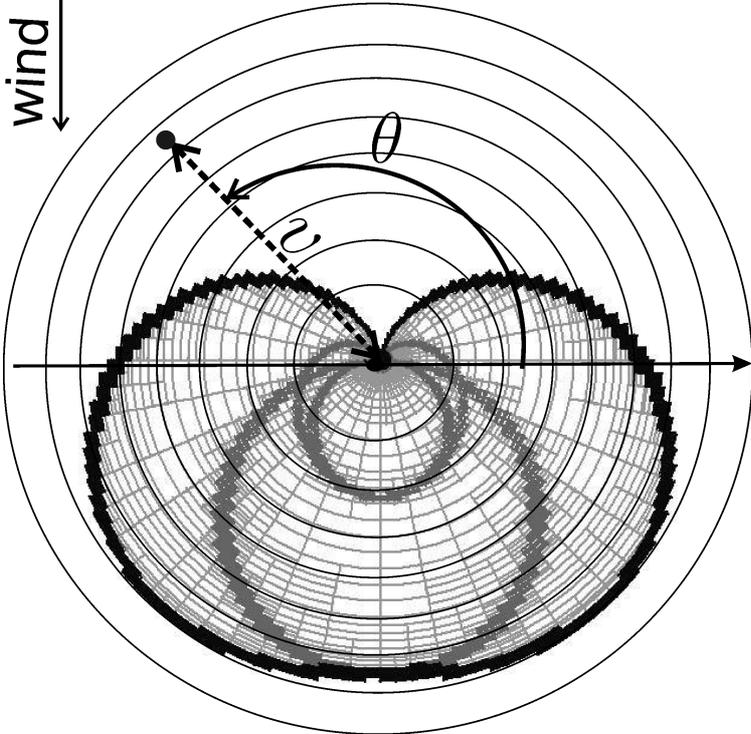
La polaire des vitesses est donc donnée par

$$\mathbb{W} = \{ (\theta, v) \mid \exists(\delta_r, \delta_s) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times 2$$

$$\begin{aligned} & (V \cos(\theta + \delta_s) - v \sin \delta_s) \sin \delta_s \\ & - \frac{\alpha_r}{\alpha_s} v \sin^2 \delta_r - \frac{\alpha_f}{\alpha_s} v \end{aligned} = 0$$

$$\begin{aligned} & (1 - \cos \delta_s) \cdot \\ & (V \cos(\theta + \delta_s) - v \sin \delta_s) \\ & - r_r \frac{\alpha_r}{\alpha_s} v \cos \delta_r \sin \delta_r \end{aligned} = 0 \quad \}$$

Pour  $V = 10, r_r = 2, \alpha_s = 500, \alpha_r = 300, \alpha_f = 60,$   
nous obtenons

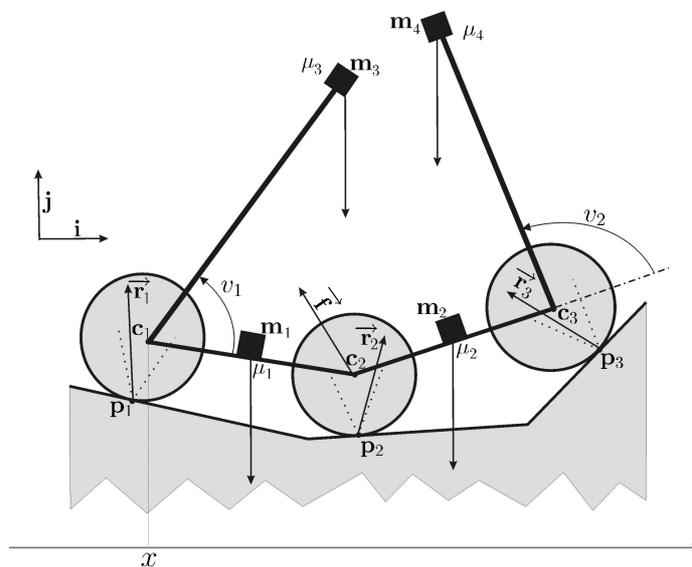


# 8 Robot grimpeur

Le robot immobile ci-dessous est en équilibre si

$$\exists \mathbf{r}, \mathbf{g}(x, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{h}(x, \mathbf{v}, \mathbf{r}) \leq \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur de dimension 6 représentant les forces de réaction sur chacune des roues.



Dans le cas de notre robot, pour l'expression  $\exists \mathbf{r}, \mathbf{g}(x, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = 0, \mathbf{h}(x, \mathbf{v}, \mathbf{r}) \leq 0$  on peut exploiter la linéarité des équations pour éliminer les quantificateurs

