Project V-Stability with IBEX, ENSI 3

Luc Jaulin

1. Projet

L'objectif de ce projet et de développer un logiciel STABIBEX pour l'étude de la stabilité des robots. Le logiciel sera fait sous QT-CREATOR. Ce projet sera évalué comme suit.

1. *Exam.* Le vendredi 15, en H1 en salle F201, à travers un examen écrit. Cet examen comportera essentiellement sur des questions théoriques autour du projet.
2. *Oral.* Le vendredi 15 en H2 à travers un oral. Tout le monde devra parler au moins 5 minutes et décrire sa partie.
3. *Rapport.* Une partie écrite sera aussi évaluée. Elle peut être soit une partie du rapport, soit le code C++ réalisé.
4. Une note collective contribuera à la note d'oral et à la note rapport.

Pour la partie théorique, vous pouvez vous influencer de l'article

`http://www.ensta-bretagne.fr/jaulin/paper_checking.pdf`

2. Logiciel Stabibex

L'objectif du logiciel est de prouver la (V, v^+)-stabilité pour un système incertain revient à démontrer que le système suivant n'a pas de solution

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}) . \mathbf{a} \geq 0 \\ \mathbf{f}^+ (\mathbf{x}) - \mathbf{a} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{a} - \mathbf{f}^- (\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \\ V(\mathbf{x}) \in [0, v^+] \end{array} \right. \tag{2.1}$$

avec $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}^- : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}^+ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Dans le logiciel STABIBEX, nous nous limiterons à $n = 2$. Les fonctions V, $\mathbf{f}^-$, $\mathbf{f}^+$ seront à saisir dans minibex et pourront être modifiées par l'utilisateur. Le logiciel STABIBEX pourra effectuer trois tâches.

Tracé de l'inclusion différentielle. Il tracera sur une grille la fonction $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}^- (\mathbf{x}), \mathbf{f}^+ (\mathbf{x})]$ avec $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{IR}^n$. Vous pourrez récupérer des fonctions rangées dans `Field.zip`.

Tracé de la fonction V. Les courbes de niveau de V seront affichées par un SIVIA. Les ensembles $V^{-1}(\mathbb{R}^-)$ et $V^{-1}([0, v^+])$ seront affichés avec des couleurs différentes.

Simulation. Une condition initiale sera tiré au hazard et une simulation sera faite. Le trajectoire sera affichée à l'écran. Vous pourrez aussi reprendre des fonctions rangées dans `Field.zip`.

Résolution. A partir des contraintes (2.1), vous fabriquez quatre contracteurs que vous combinerez. Si les contracteurs aboutissent à l'ensemble vide, la preuve de stabilité est faite. Les bissections se feront que dans l'espace des $\mathbf{x}$ et les pavés correspondants seront affichés.

3. Tests du logiciel

On prendra plusieurs exemples, dont le pendule simple que nous allons maintenant décrire. Le pendule simple s'exprime par les équations suivantes

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + \alpha_1 \\ -\sin x_1 - x_2 + \alpha_2 \end{pmatrix},$$

où x_1 correspond à l'angle du pendule (x_1 est nul quand le pendule est en équilibre stable) et x_2 est sa vitesse angulaire. Dans ces équations, les $\alpha_i \in [-0.1, 0.1]$ correspondent à des perturbations (sur les masses, les frottements, le vent, ...). L'énergie mécanique du pendule est donnée par

$$V(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x_2^2}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{-\cos x_1}_{\text{énergie potentielle}}$$

Notons que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}_2 x_2 + \dot{x}_1 \sin x_1 = (-\sin x_1 - x_2 + \alpha_2)\, x_2 + (x_2 + \alpha_1) \sin x_1 \\ &= -x_2^2 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 \sin x_1 \end{aligned}$$

Dans Stabibex, on rentrera

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1 + \bar{v} \\ \mathbf{f}^-(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} x_2 + \alpha_1^- \\ -\sin x_1 - x_2 + \alpha_2^- \end{pmatrix} \\ \mathbf{f}^+(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} x_2 + \alpha_1^+ \\ -\sin x_1 - x_2 + \alpha_2^+ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La quantité $\bar{v}$ est à régler pour que le système converge toujours vers une valeur $V(\mathbf{x})$ négative.

4. Décomposition du travail

Tous les groupes qui effectueront la programmation partiront initialement du même programme `SiviaSimple`.

Groupe Interface, s'occupe du programme principal, fait les boutons, trackbars, etc. Il insère aussi le travail des autres dans leur projet. Il lancera les 4 fonctions `DrawF`, `DrawV`, `Simu`, `Solve`.

Groupe DrawF, trace l'inclusion différentielle **F**.

Groupe Simu, effectue la simulation.

Groupe Solve, effectue la résolution.

Groupe Test, prépare quelques tests.

Groupe rapport. Rédige le rapport. Le rapport comprendra des explications théoriques, un mode d'emploi du logiciel Stabibex et le traitement de quelques exemples. Le rapport doit être écrit en Anglais. Il doit comporter au moins 10 pages et doit être écrit sous Scientific Workplace.

5. Exemple pour la théorie

The robot satisfies a state equation

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

With the controller $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, the robot becomes autonomous and satisfies an equation of the form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

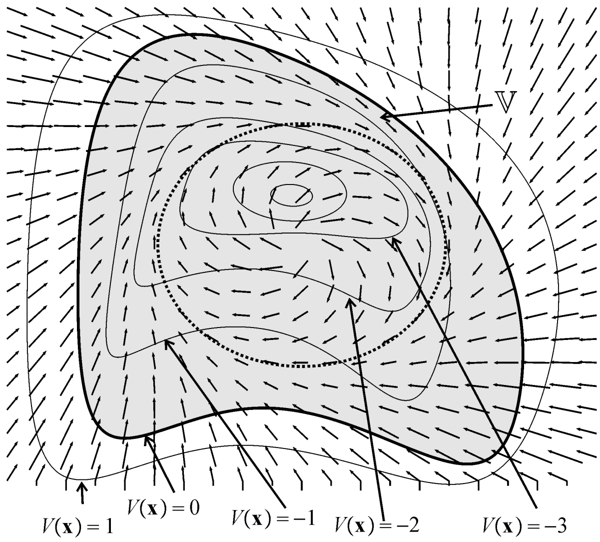

Figure 5.1: Vector field

With all uncertainties, the robot satisfies.

$$\dot{\mathbf{x}} \in \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

which is *a differential inclusion*. The system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

is Lyapunov-stable (1892) is there exists $V(\mathbf{x}) \geq 0$ such that

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}(\mathbf{x}) & < & 0 \text{ if } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ V(\mathbf{x}) & = & 0 \text{ iff } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{array}$$

Definition. Consider a differentiable function $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. The system is (V, v^+)-stable if

$$\Big(V(\mathbf{x}) \in [0, v^+] \;\; \Rightarrow \;\; \dot{V}(\mathbf{x}) < 0\Big).$$

where $v^+ > 0$. An illustration is given on Figure 5.1 in the special case where $v^+ = +\infty$

Theorem. If the system $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ is (V, v^+)-stable then

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \forall \mathbf{x}(0) \mid V(\mathbf{x}(0)) \leq v^+, \exists t \geq 0 \text{ such that } V(\mathbf{x}(t)) < 0 \\ \text{(ii)} & \text{if } V(\mathbf{x}(t)) < 0 \text{ then } \forall \tau > 0,\; V(\mathbf{x}(t+\tau)) < 0. \end{array}$$

Theorem. We have

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) . \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq 0 \\ V(\mathbf{x}) \in [0, v^+] \end{array} \right. \text{ inconsistent } \Leftrightarrow \; \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ is } V\text{-stable.}$$

Proof.

$$\begin{array}{ll} & \Big(V(\mathbf{x}) \in [0, v^+] \;\; \Rightarrow \;\; \dot{V}(\mathbf{x}) < 0\Big) \\ \Leftrightarrow & \left(V(\mathbf{x}) \in [0, v^+] \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) . \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0\right) \\ \Leftrightarrow & \forall \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) . \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0 \text{ or } V(\mathbf{x}) \notin [0, v^+] \\ \Leftrightarrow & \neg\left(\exists \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) . \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ and } V(\mathbf{x}) \in [0, v^+]\right) \end{array}$$

Theorem. We have

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}).\mathbf{a}\geq 0\\ \mathbf{a}\in\mathbf{F}(\mathbf{x})\\ V(\mathbf{x})\in[0,v^{+}]\end{array}\right.\quad\text{inconsistent}\ \Leftrightarrow\ \dot{\mathbf{x}}\in\mathbf{F}(\mathbf{x})\ \text{ is }V\text{-stable}$$

Or equivalently

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}).\mathbf{a}\geq 0\\ \mathbf{f}^{+}(\mathbf{x})-\mathbf{a}\geq\mathbf{0}\\ \mathbf{a}-\mathbf{f}^{-}(\mathbf{x})\geq 0\\ V(\mathbf{x})\in[0,v^{+}]\end{array}\right.\quad\text{inconsistent}\ \Leftrightarrow\ \dot{\mathbf{x}}\in\mathbf{F}(\mathbf{x})\ \text{ is }V\text{-stable}$$