ALGEBRE NORMEE DES INTERVALLES

Michel Goze - Nicolas GOZE - Elisabeth REMM

Bibliographie

Bibliographie

1. Nicolas Goze - Elisabeth Remm. A normed vector space of intervals. arXiv:0809.5150

2. Nicolas Goze - Elisabeth Remm. Programmation linéaire et simplexe dans les intervalles. (Preprint Mulhouse 2008)

3. Nicolas Goze - Michel Goze. L'algèbre des intervalles infiniment petits.

Un espace normé des Intervalles

Un espace normé des Intervalles

I. L'espace vectoriel $\overline{\mathbb{IR}}$

Un espace normé des Intervalles

I. L'espace vectoriel $\overline{\mathbb{IR}}$

$\mathbb{IR}$: l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Un espace normé des Intervalles

I. L'espace vectoriel $\overline{\mathbb{IR}}$

$\mathbb{IR}$: l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Addition dans $\mathbb{R}$: $x = [x^-, x^+]$, $y = [y^-, y^+] \in \mathbb{IR}$

$$x + y = [x^- + y^-, x^+ + y^+].$$

Un espace normé des Intervalles

I. L'espace vectoriel $\overline{\mathbb{IR}}$

$\mathbb{IR}$: l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Addition dans $\mathbb{R}$: $x = [x^-, x^+]$, $y = [y^-, y^+] \in \mathbb{IR}$

$$x + y = [x^- + y^-, x^+ + y^+].$$

$(\mathbb{IR},+)$: semi-groupe

Un espace normé des Intervalles

I. L'espace vectoriel $\overline{\mathbb{IR}}$

$\mathbb{IR}$: l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Addition dans $\mathbb{R}$: $x = [x^-, x^+]$, $y = [y^-, y^+] \in \mathbb{IR}$

$$x + y = [x^- + y^-, x^+ + y^+].$$

($\mathbb{IR}$,+) : semi-groupe

(+ commutative,associative,élément neutre $0 = [0, 0]$)

Problème :

Problème :

Pour cette addition, l'inverse n'est pas toujours défini.

Problème :

Pour cette addition, l'inverse n'est pas toujours défini.

But :

Problème :

Pour cette addition, l'inverse n'est pas toujours défini.

But :

Définir une soustraction correspondant à l'inverse de l'addition.

Problème :

Pour cette addition, l'inverse n'est pas toujours défini.

But :

Définir une soustraction correspondant à l'inverse de l'addition.

Construction du symétrisé du semi-groupe ($\mathbb{R}$,+).

Problème :

Pour cette addition, l'inverse n'est pas toujours défini.

But :

Définir une soustraction correspondant à l'inverse de l'addition.

Construction du symétrisé du semi-groupe ($\mathbb{R}$,+).

Relation d'équivalence:

$$(x, y) \sim (z, t) \iff x + t = y + z$$

pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

$\overline{\mathbb{R}}$: L'ensemble quotient.

Addition dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{(x,y)} + \overline{(z,t)} = \overline{(x+z,y+t)}$$

$\overline{(x,y)} = \{(z,t), x+t = y+z\}.$

$\overline{\mathbb{R}}$: L'ensemble quotient.

Addition dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{(x,y)} + \overline{(z,t)} = \overline{(x+z, y+t)}$$

$\overline{(x,y)} = \{(z,t), x+t = y+z\}$.

$(\overline{\mathbb{R}}, +)$ semi-groupe commutatif.

L'élément neutre est $\overline{0} = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$.

$\overline{\mathbb{IR}}$: L'ensemble quotient.

Addition dans $\overline{\mathbb{IR}}$:

$$\overline{(x,y)} + \overline{(z,t)} = \overline{(x+z, y+t)}$$

$\overline{(x,y)} = \{(z,t), x+t = y+z\}$.

$(\overline{\mathbb{IR}}, +)$ semi-groupe commutatif.

L'élément neutre est $\overline{0} = \{(x,x), x \in \mathbb{IR}\}$.

Proposition 0.0.1 *Tout élément* $\overline{(x,y)} \in \overline{\mathbb{IR}}$ *admet un inverse égal à* $\overline{(y,x)}$.

$\overline{\mathbb{R}}$: L'ensemble quotient.
Addition dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{(x,y)} + \overline{(z,t)} = \overline{(x+z, y+t)}$$

$\overline{(x,y)} = \{(z,t), x+t = y+z\}$.
$(\overline{\mathbb{R}}, +)$ semi-groupe commutatif.
L'élément neutre est $\overline{0} = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$.

Proposition 0.0.1 *Tout élément $\overline{(x,y)} \in \overline{\mathbb{R}}$ admet un inverse égal à $\overline{(y,x)}$.*

$$\backslash \overline{(x,y)} = \overline{(y,x)}$$

Représentation des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$

Représentation des éléments de $\overline{\mathbb{IR}}$

Soit $x = [x^-, x^+] \in \mathbb{IR}$

longueur : $l(x) = x^+ - x^-$

centre : $c(x) = \frac{x^+ + x^-}{2}$.

Représentation des éléments de $\overline{\mathbb{IR}}$

Soit $x = [x^-, x^+] \in \mathbb{IR}$

longueur : $l(x) = x^+ - x^-$

centre : $c(x) = \frac{x^+ + x^-}{2}$.

Soit $\chi = \overline{(x, y)} \in \overline{\mathbb{IR}}$. Alors:

si $l(y) < l(x), \chi = \overline{(A, 0)}$,

si $l(y) > l(x), \chi = \overline{(0, A)} = \searrow\overline{(A, 0)}$,

si $l(y) = l(x), \chi = \overline{(A, 0)} = \overline{(\alpha, 0)} = \overline{(0, -\alpha)}$.

L'espace vectoriel $\overline{\mathbb{R}}$

L'espace vectoriel $\overline{\mathbb{IR}}$

Multiplication externe :

$\alpha > 0 \in \mathbb{R}$.

L'espace vectoriel $\overline{\mathbb{R}}$

Multiplication externe :

$\alpha > 0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \alpha \cdot \overline{(A,0)} & = \overline{(\alpha A,0)} \\ \alpha \cdot \overline{(0,A)} & = \overline{(0,\alpha A)} \end{cases}$$

L'espace vectoriel $\overline{\mathbb{IR}}$

Multiplication externe :

$\alpha > 0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \alpha \cdot \overline{(A,0)} & = \overline{(\alpha A, 0)} \\ \alpha \cdot \overline{(0,A)} & = \overline{(0, \alpha A)} \end{cases}$$

$\alpha < 0 :\ \beta = -\alpha$.

$$\begin{cases} \beta \cdot \overline{(A,0)} & = \overline{(0, \beta A)} \\ \alpha \cdot \overline{(0,A)} & = \overline{(\beta A, 0)} \end{cases} \quad .$$

L'espace vectoriel $\overline{\mathbb{IR}}$

Multiplication externe :

$\alpha > 0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \alpha \cdot \overline{(A, 0)} & = \overline{(\alpha A, 0)} \\ \alpha \cdot \overline{(0, A)} & = \overline{(0, \alpha A)} \end{cases}$$

$\alpha < 0$: $\beta = -\alpha$.

$$\begin{cases} \beta \cdot \overline{(A, 0)} & = \overline{(0, \beta A)} \\ \alpha \cdot \overline{(0, A)} & = \overline{(\beta A, 0)} \end{cases} .$$

On a également

$$\left\{ \begin{array}{r} 1 \cdot \overline{(A, 0)} = \overline{(A, 0)} \\ 1 \cdot \overline{(0, A)} = \overline{(0, A)} \end{array} \right. .$$

$$\begin{cases} 1 \cdot \overline{(A,0)} = \overline{(A,0)} \\ 1 \cdot \overline{(0,A)} = \overline{(0,A)} \end{cases} .$$

$$\alpha(\searrow\chi) = \searrow(\alpha\chi)$$
$$(-\alpha)\chi = \searrow(\alpha\chi).$$

Théorème 0.0.1 *Le triplet* $(\overline{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel réel.*

$$\left\{ \begin{array}{r} 1 \cdot \overline{(A,0)} = \overline{(A,0)} \\ 1 \cdot \overline{(0,A)} \ = \overline{(0,A)} \end{array} \right. .$$

$$\begin{aligned} \alpha(\searrow \chi) &= \searrow(\alpha\chi) \\ (-\alpha)\chi &= \searrow(\alpha\chi). \end{aligned}$$

Théorème 0.0.1 *Le triplet* $(\overline{\mathbb{IR}}, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel réel.*

Bases et dimension.

$$\left\{ \begin{array}{r} 1 \cdot \overline{(A,0)} = \overline{(A,0)} \\ 1 \cdot \overline{(0,A)} \ = \overline{(0,A)} \end{array} \right. .$$

$$\begin{aligned} \alpha(\setminus \chi) &= \setminus(\alpha\chi) \\ (-\alpha)\chi &= \setminus(\alpha\chi). \end{aligned}$$

Théorème 0.0.1 *Le triplet* $(\overline{\mathrm{I\!R}}, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel réel.*

Bases et dimension.

$\{\chi_1, \chi_2\} = \text{base de } \overline{\mathrm{I\!R}}.$
$\chi_1 = \overline{([0,1],0)},\ \chi_2 = \overline{([1,1],0)}.$

$$\left\{ \begin{array}{r} 1 \cdot \overline{(A, 0)} = \overline{(A, 0)} \\ 1 \cdot \overline{(0, A)} \ = \overline{(0, A)} \end{array} \right. \quad .$$

$$\begin{aligned} \alpha(\setminus \chi) &= \setminus(\alpha\chi) \\ (-\alpha)\chi &= \setminus(\alpha\chi). \end{aligned}$$

Théorème 0.0.1 *Le triplet* $(\overline{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel réel.*

Bases et dimension.

$\{\chi_1, \chi_2\}$ = base de $\overline{\mathbb{R}}$.
$\chi_1 = \overline{([0, 1], 0)}$, $\chi_2 = \overline{([1, 1], 0)}$.

On a en effet les décompositions suivantes:

$$
\begin{aligned}
\overline{([a,b],0)} &= (b-a)\chi_1 + a\chi_2 \\
\overline{(0,[c,d])} &= (c-d)\chi_1 - c\chi_2.
\end{aligned}
$$

APPLICATION : PROGRAMMATION LINEAIRE DANS L'ENSEMBLE DES INTERVALLES

APPLICATION : PROGRAMMATION LINEAIRE DANS L'ENSEMBLE DES INTERVALLES

Programme linéaire

$$AX = B$$

$$Max(f(X)$$

.

APPLICATION : PROGRAMMATION LINEAIRE DANS L'ENSEMBLE DES INTERVALLES

Programme linéaire

$$AX = B$$

$$Max(f(X)$$

.

A=matrice réelle.

APPLICATION : PROGRAMMATION LINEAIRE DANS L'ENSEMBLE DES INTERVALLES

Programme linéaire

$$AX = B$$

$$Max(f(X))$$

.

A=matrice réelle.
$X \in \overline{\mathbb{IR}}^n$

APPLICATION : PROGRAMMATION LINEAIRE DANS L'ENSEMBLE DES INTERVALLES

Programme linéaire

$$AX = B$$

$$Max(f(X))$$

.

A=matrice réelle.
$X \in \overline{\mathbb{IR}}^n$
$B \in \overline{\mathbb{IR}}^p, B = (B_1, \cdots, B_p),\ B_i = \overline{(Y_i, 0)}$

APPLICATION : PROGRAMMATION LINEAIRE DANS L'ENSEMBLE DES INTERVALLES

Programme linéaire

$$AX = B$$

$$Max(f(X))$$

.

A=matrice réelle.
$X \in \overline{\mathbb{IR}}^n$
$B \in \overline{\mathbb{IR}}^p, B = (B_1, \cdots, B_p),\ B_i = \overline{(Y_i, 0)}$
$f : \overline{\mathbb{IR}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{IR}}$ linéaire.

APPLICATION : PROGRAMMATION LINEAIRE DANS L'ENSEMBLE DES INTERVALLES

Programme linéaire

$$AX = B$$

$$Max(f(X)$$

.

A=matrice réelle.
$X \in \overline{\mathbb{IR}}^n$
$B \in \overline{\mathbb{IR}}^p, B = (B_1, \cdots, B_p),\ B_i = \overline{(Y_i, 0)}$
$f : \overline{\mathbb{IR}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{IR}}$ linéaire.

METHODE DU SIMPLEXE

- choix de la colonne j: plus grand coefficient positif de la fonction économique.

- choix de la ligne : $i = min(\frac{l(Y_k)}{a_{kj}}, a_{kj} > 0)$.

- choix de la ligne : $i = min(\frac{l(Y_k)}{a_{kj}}, a_{kj} > 0)$.

A chaque étape, le second membre est toujours positif.

L'ESPACE DE BANACH $\overline{\mathbb{IR}}$

L'ESPACE DE BANACH $\overline{\mathbb{R}}$

but : Faire du calcul différentiel.

L'ESPACE DE BANACH $\overline{\mathbb{IR}}$

but : Faire du calcul différentiel.

$\chi \in \overline{\mathbb{IR}}$.

$$||\chi|| = l(\chi) + |c(\chi)|$$

L'ESPACE DE BANACH $\overline{\mathbb{IR}}$

but : Faire du calcul différentiel.

$\chi \in \overline{\mathbb{IR}}$.

$$||\chi|| = l(\chi) + |c(\chi)|$$

$||\chi||$ est une norme sur $\overline{\mathbb{IR}}$.

L'ESPACE DE BANACH $\overline{\mathbb{R}}$

but : Faire du calcul différentiel.

$\chi \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$||\chi|| = l(\chi) + |c(\chi)|$$

$||\chi||$ est une norme sur $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 0.0.2 *L'espace normé* $(\overline{\mathbb{R}}, ||,||)$ *est un espace de Banach.*

UN PRODUIT DANS $\overline{\mathbb{R}}$

UN PRODUIT DANS $\overline{\mathbb{IR}}$

Rappel : $X, Y \in \mathbb{IR}$.

$$X \cdot Y = [\min(x^- y^-, x^- y^+, x^+ y^-, x^+ y^+), \max(x^- y^-, x$$

UN PRODUIT DANS $\overline{\mathbb{IR}}$

Rappel : X,$Y \in \mathbb{IR}$.

$$X{\cdot}Y = [\min(x^-y^-, x^-y^+, x^+y^-, x^+y^+), \max(x^-y^-, x$$

Produit dans $\overline{\mathbb{IR}}$: cas positif

Soient $\chi = \overline{(X,0)}$ et $\chi' = \overline{(Y,0)}$.

$$\chi\chi' = \overline{(XY,0)}.$$

UN PRODUIT DANS $\overline{\mathbb{IR}}$

Rappel : $X,Y \in \mathbb{IR}$.

$$X \cdot Y = [\min(x^- y^-, x^- y^+, x^+ y^-, x^+ y^+), \max(x^- y^-, x$$

Produit dans $\overline{\mathbb{IR}}$: cas positif

Soient $\chi = \overline{(X,0)}$ et $\chi' = \overline{(Y,0)}$.

$$\chi\chi' = \overline{(XY,0)}.$$

$$||\chi\chi'|| \leq ||\chi||\ ||\chi'||.$$

CAS GENERAL :

CAS GENERAL :

Définition 0.0.1 *Soient* $\chi, \chi' \in \overline{\mathbb{R}}$. *On définit le produit commutatif* $\chi\chi'$ *par*

1) *Si* $\chi = \overline{(K,0)}$, $\chi' = \overline{(K',0)}$ *alors* $\chi\chi' = \overline{(KK',0)}$,
2) *Si* $\chi = \overline{(K,0)}$, $\chi' = \overline{(0,K')}$ *alors* $\chi\chi' = \overline{(0,KK')}$,

avec $K, K' \in \mathbb{R}$.

CAS GENERAL :

Définition 0.0.1 *Soient* $\chi, \chi' \in \overline{\mathbb{R}}$. *On définit le produit commutatif* $\chi\chi'$ *par*

1) *Si* $\chi = \overline{(K,0)}$, $\chi' = \overline{(K',0)}$ *alors* $\chi\chi' = \overline{(KK',0)}$,
2) *Si* $\chi = \overline{(K,0)}$, $\chi' = \overline{(0,K')}$ *alors* $\chi\chi' = \overline{(0,KK')}$,

avec $K, K' \in \mathbb{R}$.

Produit	χ_1	χ_2
χ_1	χ_1	χ_1
χ_2	χ_1	χ_2

.

Cette multiplication est associative, commutative et χ_2 est l'unique élement neutre.

UN PRODUIT DISTRIBUTIF

UN PRODUIT DISTRIBUTIF

Posons $\chi_1 = \overline{([0,1],0)}$, $\chi_2 = \overline{([1,1],0)}$, $\chi_3 = \overline{(0,[0,1])}$, $\chi_4 = \overline{(0,[1,1])}$.

UN PRODUIT DISTRIBUTIF

Posons $\chi_1 = \overline{([0,1],0)}$, $\chi_2 = \overline{([1,1],0)}$, $\chi_3 = \overline{(0,[0,1])}$, $\chi_4 = \overline{(0,[1,1])}$.

Tout élément $\chi \in \overline{\mathbb{IR}}$ s'écrit

$$\chi = \sum_{i=1}^{4} x_i \chi_i$$

avec $x_i \geq 0$. Cette écriture est unique modulo les relations

$$\begin{cases} \chi_1 + \chi_3 = 0 \\ \chi_2 + \chi_4 = 0 \end{cases}.$$

UN PRODUIT DISTRIBUTIF

Posons $\chi_1 = \overline{([0,1],0)}$, $\chi_2 = \overline{([1,1],0)}$, $\chi_3 = \overline{(0,[0,1])}$, $\chi_4 = \overline{(0,[1,1])}$.

Tout élément $\chi \in \overline{\mathbb{IR}}$ s'écrit

$$\chi = \sum_{i=1}^{4} x_i \chi_i$$

avec $x_i \geq 0$. Cette écriture est unique modulo les relations

$$\begin{cases} \chi_1 + \chi_3 = 0 \\ \chi_2 + \chi_4 = 0 \end{cases}.$$

On pose

$$\chi \bullet \chi' = \sum_{i,j}^{4} x_i y_j \chi_i \chi_j.$$

On pose

$$\chi \bullet \chi' = \sum_{i,j}^{4} x_i y_j \chi_i \chi_j.$$

LIEN AVEC LE PRODUIT CLASSIQUE :

On pose

$$\chi \bullet \chi' = \sum_{i,j}^{4} x_i y_j \chi_i \chi_j.$$

LIEN AVEC LE PRODUIT CLASSIQUE :

1. Symétrie :

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s[a,b] = [-b,-a] \\ s^2 = Id \end{array} \right. .$$

On pose

$$\chi \bullet \chi' = \sum_{i,j}^{4} x_i y_j \chi_i \chi_j .$$

LIEN AVEC LE PRODUIT CLASSIQUE :

1. Symétrie :

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} s[a,b] = [-b,-a] \\ s^2 = Id \end{cases} .$$

On étend s à $\overline{\mathbb{R}}$

$$s\overline{(K,0)} = \overline{(s(K),0)}$$
$$s\overline{(0,K)} = \overline{(0,s(K))}.$$

On pose

$$\chi \bullet \chi' = \sum_{i,j}^{4} x_i y_j \chi_i \chi_j.$$

LIEN AVEC LE PRODUIT CLASSIQUE :

1. Symétrie :

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} s[a,b] = [-b,-a] \\ s^2 = Id \end{cases}.$$

On étend s à $\overline{\mathbb{R}}$

$$s\overline{(K,0)} = \overline{(s(K),0)}$$
$$s\overline{(0,K)} = \overline{(0,s(K))}.$$

s est linéaire et vérifie

$$s^2 = Id.$$

s est linéaire et vérifie

$$s^2 = Id.$$

2. Lien

$\chi = \overline{(K,0)}$, $\chi' = \overline{(K',0)}$ avec $K = [a,b]$ et $K' = [c,d]$.

s est linéaire et vérifie

$$s^2 = Id.$$

2. Lien

$\chi = \overline{(K,0)}$, $\chi' = \overline{(K',0)}$ avec $K = [a,b]$ et $K' = [c,d]$.

Premier cas: $K = [a,b]$ et $K' = [c,d]$ avec $0 < a, 0 < c$.

$$\chi\chi' = \chi \bullet \chi'.$$

s est linéaire et vérifie

$$s^2 = Id.$$

2. Lien

$\chi = \overline{(K, 0)}$, $\chi' = \overline{(K', 0)}$ avec $K = [a, b]$ et $K' = [c, d]$.

Premier cas: $K = [a, b]$ et $K' = [c, d]$ avec $0 < a, 0 < c$.

$$\chi\chi' = \chi \bullet \chi'.$$

Deuxième cas: $K = [a, b]$, $K' = [c, d]$ avec $a < 0, c > 0, b > 0$.

$$\chi\chi' = \chi \bullet \chi''$$

où $\chi'' = ([d, d], 0)$.

s est linéaire et vérifie

$$s^2 = Id.$$

2. Lien
$\chi = \overline{(K,0)}$, $\chi' = \overline{(K',0)}$ avec $K = [a,b]$ et $K' = [c,d]$.

Premier cas: $K = [a,b]$ et $K' = [c,d]$ avec $0 < a, 0 < c$.

$$\chi\chi' = \chi \bullet \chi'.$$

Deuxième cas: $K = [a,b]$, $K' = [c,d]$ avec $a < 0, c > 0, b > 0$.

$$\chi\chi' = \chi \bullet \chi''$$

où $\chi'' = ([d,d],0)$.

Troisième cas : $K = [a, b]$, $K' = [c, d]$ avec $a, c < 0, b, d > 0.$

$$\chi\chi' = ([ad, bd], 0) = \chi \bullet \chi'' \text{ avec } \chi'' = [(d, d), 0]$$
$$\chi\chi' = ([ad, ac], 0) = -s(\chi' \bullet \chi'') \text{ avec } \chi'' = [0, (-a, -$$
$$\chi\chi' = ([cb, bd], 0) = \chi'' \bullet \chi' \text{ avec } \chi'' = [(b, b), 0]$$
$$\chi\chi' = ([cb, ac], 0) = -s(\chi \bullet \chi'') \text{ avec } \chi'' = [0, (-c, -c)$$

Troisième cas : $K = [a,b]$, $K' = [c,d]$ avec $a,c < 0, b,d > 0$.

$$\chi\chi' = ([ad,bd],0) = \chi \bullet \chi'' \text{ avec } \chi'' = [(d,d),0]$$
$$\chi\chi' = ([ad,ac],0) = -s(\chi' \bullet \chi'') \text{ avec } \chi'' = [0,(-a,-$$
$$\chi\chi' = ([cb,bd],0) = \chi'' \bullet \chi' \text{ avec } \chi'' = [(b,b),0]$$
$$\chi\chi' = ([cb,ac],0) = -s(\chi \bullet \chi'') \text{ avec } \chi'' = [0,(-c,-c)$$

Quatrième cas : $K = [a,b]$ et $K' = [c,d]$ $a,b < 0$ et $c > 0$.

$$\chi\chi' = -s(\chi' \bullet \chi'') \text{ avec } \chi'' = (0,[-b,-a]).$$

UN INVERSE FORMEL POUR •

Définition 0.0.2 *Soit* $\chi = \sum_{i=1}^{4} x_i\chi_i$ *avec les* $x_i \geq 0$ *un élément de* $\overline{\mathbb{R}}$ *On appelle inverse formel de* χ *tout élément* $\chi' \in \overline{\mathbb{R}}$ *vérifiant* $\chi\chi' = \chi_2$.

RESULTAT

RESULTAT

Proposition 0.0.3 *Tout élément* $\chi = \sum_{i=1}^{4} x_i \chi_i \neq \alpha\chi_1$ *admet un inverse formel* $\chi' = \sum_{i=1}^{4} y_i \chi_i$ *avec*

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-x_1^2 x_2 + x_2 x_3 (x_3 + 2x_4) - x_1(x_2^2 + x_4^2)}{(x_2^2 - x_4^2)((x_1 + x_2)^2 - (x_3 + x_4)^2)} \\ y_2 = \dfrac{x_2}{(x_2^2 - x_4^2)} \\ y_3 = \dfrac{-x_2^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_4 - x_4(-x_1^2 + x_3^2 + x_3 x_4)}{(x_2^2 - x_4^2)((x_1 + x_2)^2 - (x_3 + x_4)^2)} \\ y_4 = \dfrac{-x_4}{(x_2^2 - x_4^2)} \end{cases}$$

RESULTAT

Proposition 0.0.3 *Tout élément* $\chi = \sum_{i=1}^{4} x_i\chi_i \neq \alpha\chi_1$ *admet un inverse formel* $\chi' = \sum_{i=1}^{4} y_i\chi_i$ *avec*

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-x_1^2x_2 + x_2x_3(x_3+2x_4) - x_1(x_2^2+x_4^2)}{(x_2^2-x_4^2)((x_1+x_2)^2-(x_3+x_4)^2)} \\ y_2 = \dfrac{x_2}{(x_2^2-x_4^2)} \\ y_3 = \dfrac{-x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_4 - x_4(-x_1^2+x_3^2+x_3x_4)}{(x_2^2-x_4^2)((x_1+x_2)^2-(x_3+x_4)^2)} \\ y_4 = \dfrac{-x_4}{(x_2^2-x_4^2)} \end{cases}$$

Exemples.

Exemples.

1) Si $\chi = 2\chi_1 + \chi_2 = ([1,3],0)$, on a $\chi' = \chi_2 + \frac{2}{3}\chi_3$.

Exemples.

1) Si $\chi = 2\chi_1 + \chi_2 = ([1,3],0)$, on a $\chi' = \chi_2 + \frac{2}{3}\chi_3$.

2) Soit $\chi = 2\chi_1 + \chi_4 = ([-1,1],0)$. Alors $\chi' = \chi$.

Arithmétique des intervalles infiniment petits

Intervalles infiniment petits : $I_a(\epsilon) = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Arithmétique des intervalles infiniment petits

Intervalles infiniment petits : $I_a(\epsilon) = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

$Addition : I_a(\epsilon_1) + I_b(\epsilon_2) = I_{a+b}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$

Arithmétique des intervalles infiniment petits

Intervalles infiniment petits : $I_a(\epsilon) = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Addition : $I_a(\epsilon_1) + I_b(\epsilon_2) = I_{a+b}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$

Soustraction :

$$\overline{(I_a(\epsilon_1), I_b(\epsilon_2))} \setminus \overline{(I_c(\epsilon_3), I_d(\epsilon_4))} = \overline{(I_a(\epsilon_1) + I_d(\epsilon_4), (I_c(\epsilon_3) + I_b(\epsilon_2))}.$$

En particulier

$$\overline{(I_a(\epsilon_1), I_b(\epsilon_2))} \setminus \overline{(I_a(\epsilon_1), I_b(\epsilon_2))} = \overline{(0, 0)}.$$

Multiplication :

Outil : décomposition d'un point infiniment petit dans $\mathbb{R}^2$

$(\epsilon_1, \epsilon_2)^t = \alpha_1 V_1 + \alpha_1 \alpha_2 V_2$,
V_1, V_2 vecteurs indépendant dans $\mathbb{R}^2$.

Définition du produit
Soient $\widetilde{J}(a, \epsilon_1)$ et $\widetilde{J}(b, \epsilon_2) \epsilon \widetilde{E}$.
Premier cas : $a > 0$, $b \geq 0$.

$$\widetilde{J}_1 \circ \widetilde{J}_2 = \widetilde{J}(ab, \epsilon_1 + \epsilon_2).$$

Deuxième cas : $a > 0$, $b < 0$.

$$\begin{cases} \widetilde{J}_1 \circ \widetilde{J}_2 = \searrow \widetilde{J}(-ab, \epsilon_1 + \epsilon_2) \\ \qquad \text{si } V_1 \text{ n'est pas perpendiculaire à } \binom{a}{b} \\ \widetilde{J}_1 \circ \widetilde{J}_2 = \searrow \widetilde{J}(-ab, \alpha_1 \alpha_2) \text{ sinon} \end{cases} .$$

Troisième cas : $a < 0$ et $b < 0$. Dans ce cas

$$\widetilde{J}_1 \circ \widetilde{J}_2 = \widetilde{J}(ab, \epsilon_1 + \epsilon_2).$$

Troisième cas : $a < 0$ et $b < 0$. Dans ce cas

$$\widetilde{J}_1 \circ \widetilde{J}_2 = \widetilde{J}(ab, \epsilon_1 + \epsilon_2).$$

Ce produit est commutatif, associatif et admet pour élément neutre $\widetilde{J}(1, 0)$ et est distributif.