

Atteignabilité hybride des systèmes dynamiques continus par arithmétique d'intervalle

Nacim Meslem, Nacim Ramdani et Yves Candau

CERTES EA3481 Université Paris 12, France
LIRMM UMR CNRS 5506 Université Montpellier 2, France

GT-MEA Paris 19 Juillet 2007

Plan

- 1 Expansion continue
 - Méthodes de Taylor intervalle
 - Systèmes dynamiques coopératifs
- 2 Atteignabilité hybride
 - Encadrement hybride des Systèmes dynamique continus
- 3 Exemple illustratif
 - Cas traité
 - Comparaison (méthodes intervalles, hybridation)
 - Conclusion

Plan

- 1 Expansion continue
 - Méthodes de Taylor intervalle
 - Systèmes dynamiques coopératifs
- 2 Atteignabilité hybride
 - Encadrement hybride des Systèmes dynamique continus
- 3 Exemple illustratif
 - Cas traité
 - Comparaison (méthodes intervalles, hybridation)
 - Conclusion

Modèle à temps continu

Flux d'état

$$\mathbb{X}(t) = \{\mathbf{x}(t), t \geq t_0 \mid (\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0) \wedge (\mathbf{p} \in \mathbb{P}) \wedge (\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t))\}$$

Modèle à temps continu

Flux d'état

$$\mathbb{X}(t) = \{\mathbf{x}(t), t \geq t_0 \mid (\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0) \wedge (\mathbf{p} \in \mathbb{P}) \wedge (\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t))\}$$

Intégration numérique garantie

- 1 Verifier existence, unicité de la solution
- 2 Calcul de $[\mathbf{x}_j] \supseteq \mathbb{X}(t_j)$

Modèle à temps continu

Flux d'état

$$\mathbb{X}(t) = \{\mathbf{x}(t), t \geq t_0 \mid (\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0) \wedge (\mathbf{p} \in \mathbb{P}) \wedge (\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t))\}$$

Intégration numérique garantie

- 1 Vérifier existence, unicité de la solution
- 2 Calcul de $[\mathbf{x}_j] \supseteq \mathbb{X}(t_j)$

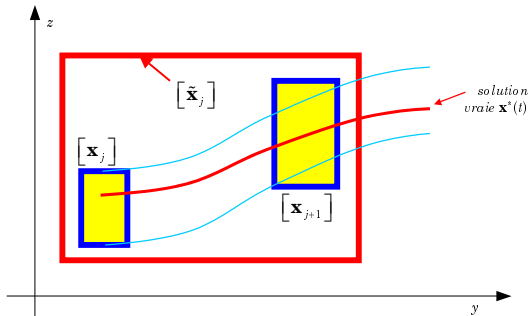
Deux approches

- Encadrement de l'erreur de troncature, méthodes à un pas
⇒ modèles de Taylor intervalles
- Théorèmes de comparaison
⇒ systèmes dynamiques monotones

Encadrement de la trajectoire

Encadrement du reste du développement en série de Taylor

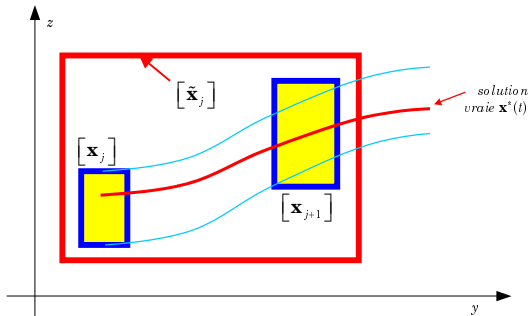
$$[\tilde{\mathbf{x}}_j] \supseteq \{\mathbf{x}(t) \mid t \in [t_j, t_{j+1}]\}$$



Encadrement de la trajectoire

Encadrement du reste du développement en série de Taylor

$$[\tilde{\mathbf{x}}_j] \supseteq \{\mathbf{x}(t) \mid t \in [t_j, t_{j+1}]\}$$



$$[\mathbf{x}_{j+1}] = [\mathbf{x}_j] + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \mathbf{f}^{[i]}([\mathbf{x}_j]) + h_j^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j])$$

Système linéaire

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & a_7 & a_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$a_1 = a_4 = [-1.1, -0.9], a_3 = -a_2 = [3.9, 4.1],$$

$$a_5 = a_8 = [-3.2, -2.8], a_6 = -a_7 = [0.8, 1.2],$$

$$b_1 = [0.6, 1.2] \text{ et } a_9 = [-2.2, -1.8], x_i = [0.8, 1.2], i = 1, \dots, n.$$

Encadrement du flux d'état

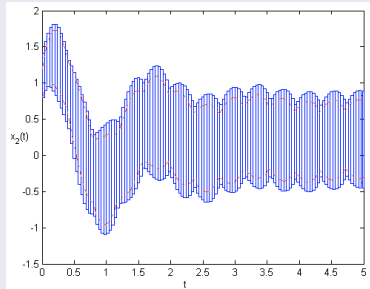
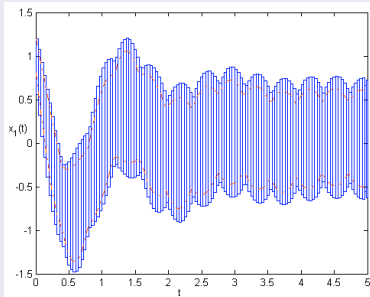


Fig.: L'évolution temporelle de $[x_1]$ et $[x_2]$

Inconvénient

→ Les méthodes de Taylor divergent au bout de quelques pas d'intégration si la taille du pavé d'état initial ou celle du pavé de paramètres est large !

Théorie des systèmes dynamiques coopératifs

(Smith, 1995)

Definition : Systèmes dynamiques monotones

$$\mathbf{x}_1(t_0) \leq \mathbf{x}_2(t_0) \leq \dots \leq \mathbf{x}_n(t_0) \Rightarrow$$

$$\forall t \geq t_0 \quad \mathbf{x}_1(t) \leq \mathbf{x}_2(t) \leq \dots \leq \mathbf{x}_n(t)$$

Definition : Système coopératif

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$\{\mathbf{f}, \mathbb{X}_0\}$ est coopératif sur \mathbb{D} si

$$\forall i \neq j, t \geq 0 \text{ et } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x_j} \geq 0$$

Si un système dynamique est coopératif alors il est monotone

Théorie des systèmes dynamiques coopératifs

Propriété

$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{x}_{1,0}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}\}$ et $\{\mathbf{f}_2, \mathbf{x}_{2,0}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}\}$ coopératifs sur \mathbb{D}

si $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad \forall t \geq t_0, \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}, [\underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}], t) \leq \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t)$

et $\mathbf{x}_{1,0} \leq \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x}_{2,0}$

alors $\forall t \geq t_0, \quad \mathbf{x}_1(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_2(t)$

\Rightarrow Une fonction d'inclusion $[\mathbf{x}(t)] = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)]$

Exemple de construction (Kieffer, 2006),(Ramdani, 2006)

Solution inférieure (Kieffer, 2006),(Ramdani, 2006)

Pour $k=1,\dots,p$ et $i=1,\dots,n$

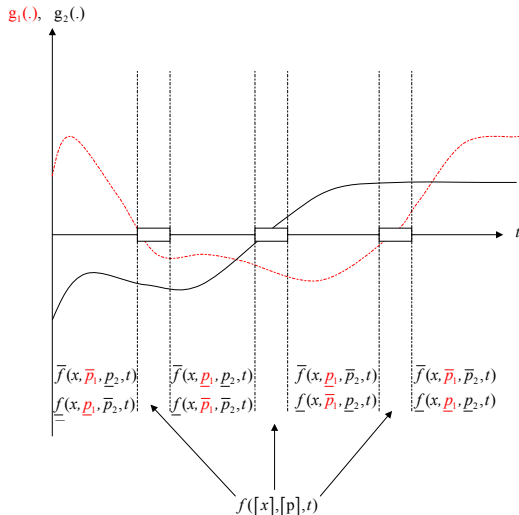
$$\text{Si } \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \leq 0 \text{ alors } p_k = \bar{p}_k \text{ sinon } p_k = \underline{p}_k$$

Peut-on généraliser cette règle de construction aux cas de systèmes coopératifs mais non monotones par rapport aux paramètres ?

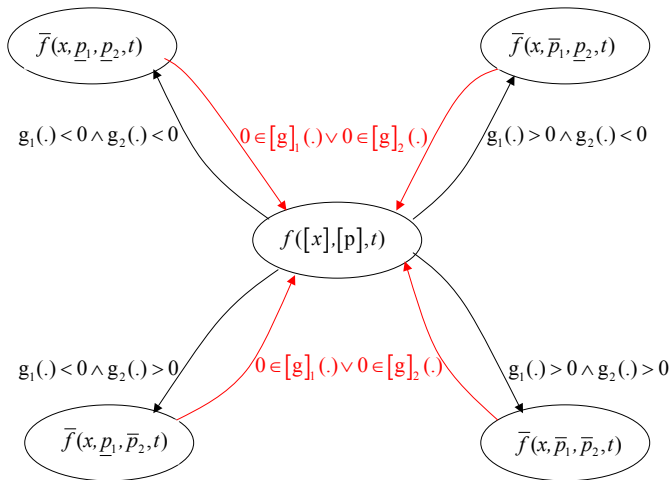
Plan

- 1 Expansion continue
 - Méthodes de Taylor intervalle
 - Systèmes dynamiques coopératifs
- 2 Atteignabilité hybride
 - Encadrement hybride des Systèmes dynamique continus
- 3 Exemple illustratif
 - Cas traité
 - Comparaison (méthodes intervalles, hybridation)
 - Conclusion

Sélection dynamique de bornes de paramètres



Automate hybride supérieur



Plan

- 1 Expansion continue
 - Méthodes de Taylor intervalle
 - Systèmes dynamiques coopératifs
- 2 Atteignabilité hybride
 - Encadrement hybride des Systèmes dynamique continus
- 3 Exemple illustratif
 - Cas traité
 - Comparaison (méthodes intervalles, hybridation)
 - Conclusion

Modèles de la diffusion thermique

Système d'équations différentielles

- Vecteur de paramètres de dimension 2 (p_1, p_2)
- Vecteur d'état \mathbf{x} de dimension 13

$$\dot{x}_i = p_1(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \quad (\text{expression 1})$$

$$\dot{x}_k = p_1(x_{k+1} - (1 + \frac{q}{p_2})x_k + \frac{q}{p_2}x_{k-1}) \quad (\text{expression 2})$$

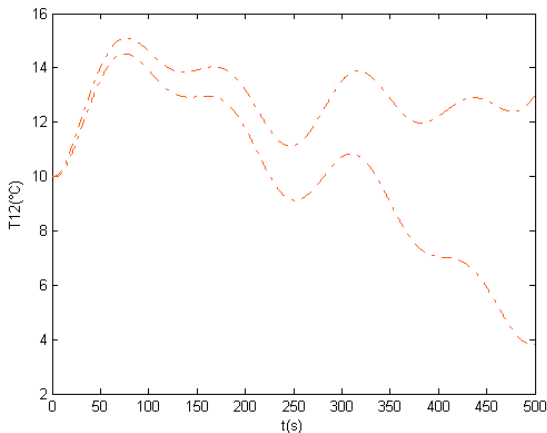
Entrée

- Entrée périodique : $u = x_m + \sum_{n=1}^{n=5} x_n \sin(2\pi 2^{n-1} f_0 t)$
- Le domaine physique de paramètres $[0.7, 1.3] \times [0.3, 0.64]$

Simulation par le biais des méthodes de Taylor intervalles

Open source VNODE Software est utilisé (Nedialkov,99)

- La solution diverge, si la taille de pavé de paramètre > 0.0025



Simulation par le biais de l'automate hybride

Précaution sur la stabilité des systèmes

$$\dot{x}_i = p_1(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$$

$$\dot{x}_k = p_1(x_{k+1} - (1 + \frac{q}{p_2})x_k + \frac{q}{p_2}x_{k-1})$$

→ Modèle supérieur (construction intuitive)

$$\dots \leq \dot{x}_i \leq \overline{p_1}x_{i+1} - 2\underline{p_1}x_i + \overline{p_1}x_{i-1}$$

$$\dots \leq \dot{x}_k \leq \overline{p_1}x_{k+1} - \underline{p_1}(1 + \frac{q}{\underline{p_2}})x_k + \overline{p_1}\frac{q}{\underline{p_2}}x_{k-1}$$

Système instable !

→ Ceci est dû à l'apparition simultanée des bornes inférieure et supérieure d'un paramètre dans la même expression

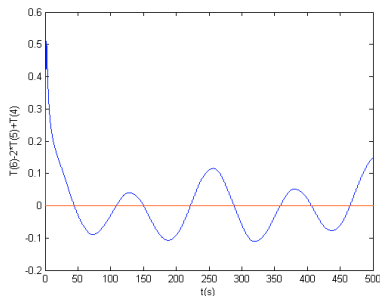
Simulation par le biais de l'automate hybride

→ Deux formes de conditions de garde

$$0 \in [\mathbf{g}_{i,p_1}] = [x_{i+1}] - [2x_i] + [x_{i-1}]$$

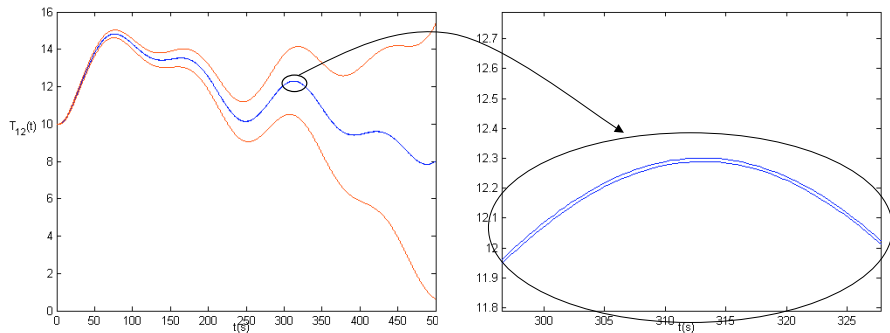
$$0 \in [\mathbf{g}_{k,p_2}] = [x_{k-1}] - [x_k]$$

→ Simulation de la première expression



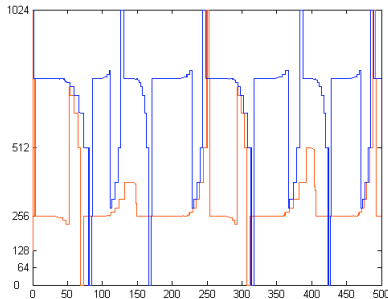
Simulation par le biais de l'automate hybride

Evolution de la température de la sortie :

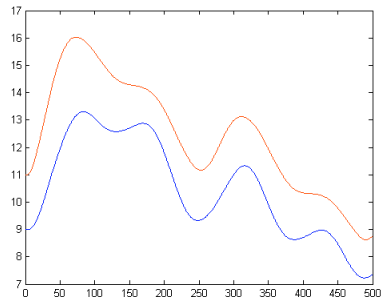


Simulation par le biais de l'automate hybride

Aspect hybride d'encadrement



Etat discret



Etat continu

Conclusion et perspectives

Conclusions

- Encadrement des systèmes coopératifs non monotones par rapport aux paramètres
- Encadrement de systèmes de grande dimension envisageable

Perspectives

- Cas des systèmes non-coopératifs
- Cas des systèmes hybrides