

N° D'ORDRE : 6482

**UNIVERSITE PARIS XI
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THÈSE

Présentée

Pour obtenir

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY**

PAR

Benoît CLEMENT

**Sujet : SYNTHÈSE MULTIOBJECTIFS ET SEQUENCÉMENT
DE GAINS : APPLICATION AU PILOTAGE D'UN
LANCEUR SPATIAL**

Soutenue le **21 Septembre 2001** devant la Commission d'examen :

M. J. BERNUSSOU

Rapporteur

M. A. BIARD

M. G. DUC

Mme. S. MAUFFREY

M. S. MONACO

Rapporteur

Mme. D. NORMAND-CYROT

Présidente du jury

Thèse effectuée au Service Automatique de Supélec – Gif sur Yvette

Remerciements

Un travail de trois années ne pourrait se concrétiser sans un ensemble d'aides souvent nécessaires mais toujours précieuses. C'est pourquoi je voudrais remercier ici tous ceux qui ont contribué au bon déroulement de mon travail aussi bien par leur encadrement, leurs compétences que par leur soutien.

Je tiens tout d'abord à remercier M. Gilles Duc pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de diriger mes recherches, pour sa grande disponibilité ainsi que pour les précieux conseils qu'il a su me donner pendant ces trois années.

Ma gratitude s'adresse également à M. Daniel Viault et M. Patrick Boucher – successivement Chefs du Service Automatique de Supélec – pour m'avoir soutenu en mettant à ma disposition les moyens nécessaires au bon déroulement de ma thèse.

En acceptant d'être les rapporteurs de mon travail, Messieurs Salvatore Monaco et Jacques Bernussou m'ont fait un grand honneur. Le temps précieux qu'ils ont consacré à me relire, l'attention et le soutien qu'ils m'ont apporté, les remarques et les interrogations judicieuses qu'ils ont formulé ont été autant d'aides qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce manuscrit. Qu'ils trouvent ici toute ma gratitude.

Je remercie encore Mme Dorothée Normant-Cyrot d'avoir accepté de présider le jury. Elle témoigne ainsi de la confiance qu'elle place dans mes travaux et m'honore par sa disponibilité.

Merci également à Mme Sophie Mauffrey – pour *EADS Lauch Vehicles* – et à M. Arnaud Biard – pour le *CNES Direction des Lanceurs* – sans qui ce travail n'aurait jamais pu voir le jour. Par leur soutien, leurs conseils et leur expertise, ils m'ont permis de mettre en œuvre un cadre de travail passionnant et réaliste.

Enfin, je ne saurais oublier tous ceux qui m'ont soutenu...

Si dans un travail de recherche, ce sont souvent les discussions qui mènent à la réflexion, que soient remerciés Vincent Fromion, Gérard Scorletti et Gilles Ferreres avec lesquels j'ai noué des échanges très bénéfiques dans l'élaboration de ma démarche. De même, je dirai ma gratitude à tous les enseignants du Service Automatique : Martial Demerle, Domonique Beauvois, Emmanuel Godoy, Didier Dumur, Houria Siguerdidjane, Elisabeth Boillot ; ainsi qu'à tous les doctorants : Slim Hbaïeb, Vincent Croulard, Vincent Tamisier, Damien Farret, Frédéric Lemauff, Farah Boudaoud.

Merci à Léon Marquet et à Josiane Dartron qui m'ont toujours été d'un grand secours dans mes mésaventures techniques et logistiques...

Et enfin que soient remerciés Stéphane Font et Nelly Labère pour leur soutien de tous les jours.

Sommaire Général

INTRODUCTION.....	1
0.1. Contexte.....	1
0.2. Analyse et synthèse	2
0.3. Choix méthodologiques.....	3
0.4. Organisation.....	5
PUBLICATIONS	9
CHAPITRE 1 NOTIONS DE BASE : REPRESENTATION, STABILITE, CONVEXITE	11
1.1. Introduction.....	13
1.2. Principes de commande	15
1.3. Stabilité	16
1.4. Boucle bien posée et stabilité interne.....	23
1.5. Analyse convexe	26
CHAPITRE 2 PARAMETRISATION DE YOULA ET STRUCTURATION DE CORRECTEUR.....	31
2.1. Contexte.....	33
2.2. Définition	35
2.3. Propriétés.....	38
2.4. Réalisation pratique.....	41
2.5. Structuration de correcteur	45
2.6. Conclusion	65
2.7. Annexe : résolution de l'équation algébrique	66
CHAPITRE 3 SYNTHESE MULTIOBJECTIFS	69
3.1. Introduction.....	71
3.2. Problème d'optimisation multiobjectifs	74

3.3. Définitions de quelques critères	77
3.4. Généralités sur la problématique de la synthèse	84
3.5. Optimisation du paramètre de Youla	86
3.6. Algorithme	93
3.7. Application à un bras flexible	94
3.8. Conclusion	109
3.9. Annexe 1 : interprétation de la norme H_2	111
3.10. Annexe 2 : tableau récapitulatif – boîte à outils	115
3.11. Annexe 3 : extension au cas continu	118
CHAPITRE 4 SEQUENCEMENT DE GAINS	121
4.1. Introduction	123
4.2. Cadre d'étude	125
4.3. Théorème de stabilité [Sha88]	130
4.4. Conditions suffisantes d'interpolation	131
4.5. Problème LMI en pratique	146
4.6. Exemple d'une bobineuse	147
4.7. Conclusion	153
CHAPITRE 5 PROBLEMATIQUE DU PILOTAGE D'UN LANCEUR.....	155
5.1. Introduction	157
5.2. Généralités	158
5.3. Equations de la mécanique	162
5.4. Modèle simplifié	172
5.5. Bilan de la modélisation	177
5.6. Cahier des charges	181
5.7. Interface du Benchmark PIROLA	184
5.8. Conclusion	187
CHAPITRE 6 PILOTAGE D'UN LANCEUR : SYNTHESE LINEAIRE STATIONNAIRE.....	189
6.1. Présentation	191
6.2. Le schéma de synthèse	193
6.3. Généralités sur les synthèses	195
6.4. Première étape : réglages sur le mode rigide	197

6.5. Deuxième étape : les modes souples.....	203
6.6. Le correcteur et sa réduction <i>a posteriori</i>	213
6.7. Conclusion	216
CHAPITRE 7 PILOTAGE D'UN LANCEUR : INTERPOLATION DE CORRECTEURS	217
7.1. Cadre d'application	219
7.2. Méthodologie.....	219
7.3. Les cinq étapes de synthèse par séquençement de gains.....	221
7.4. Les résultats.....	232
7.5. Conclusion	240
CONCLUSION.....	241
BIBLIOGRAPHIE.....	245
ANNEXE : FORMALISME LMI.....	1
A.1. Brefs rappels historiques	3
A.2. Notations et définitions	4
A.3. le problème LMI.....	5
A.4. Les LMI : un outil performant	11
A.5. Les algorithmes d'optimisation convexe	12
INDEX DES FIGURES.....	I
INDEX DE TABLEAUX.....	V

Introduction

0.1. Contexte

Depuis longtemps l'aéronautique est un champ d'application privilégié pour les méthodes de l'automatique. Le pilotage des avions, des missiles, des véhicules spatiaux, la commande des robots, la stabilisation des satellites et bien d'autres applications constituent un débouché naturel pour les méthodes avancées de l'automatique. La « littérature automatique » est très riche d'exemples de ce domaine et les collaborations industrie / recherche sont, elles aussi, très nombreuses. C'est donc dans ce cadre de transferts de connaissances entre industrie et recherche que s'inscrit notre travail : il s'agit en effet d'un partenariat entre les trois entités suivantes :

- le **Service Automatique de Supélec**,
- la **Direction des Lanceurs** du CNES,
- le **Service Pilotage Ariane 5 Plus et Lanceurs Futurs d'EADS Launch Vehicles**.

Notre travail s'inscrit également dans le cadre plus général du pôle de recherche PIROLA (Pilotage Robuste des Lanceurs) qui regroupe le CNES, EADS, l'ONERA, le LAAS-CNRS et Supélec.

Si l'on s'intéresse plus particulièrement au pilotage ou au guidage des lanceurs spatiaux, on se rend compte que ce domaine est quasi inexistant dans la littérature automatique récente à l'inverse de domaines comme les missiles. C'est pourquoi le travail présenté ici sur l'application spatiale accorde une part importante à l'obtention d'un modèle réaliste pour la synthèse et l'analyse de lois commande. Ce modèle sert de point de départ pour les études du pôle PIROLA.

Les travaux présentés dans notre Thèse reposent sur des réflexions menées sur la problématique du pilotage des lanceurs (voir chapitre 5). Ces réflexions nous ont en effet conduit à considérer des thèmes tels que la synthèse multiobjectifs et le séquençement de gains. Cependant, dans une démarche de recherche, il est important de pouvoir généraliser à des classes de systèmes physiques suffisamment grandes pour éviter l'écueil qui consisterait à mettre en place des outils trop spécifiques, et les apports méthodologiques que nous proposons doivent pouvoir s'étendre à d'autres domaines.

C'est pourquoi le problème du lanceur a été replacé dans le cadre plus général de la commande numérique de systèmes flexibles non stationnaires, de façon à aller au-delà des motivations purement industrielles qui sont à l'origine de ce travail. Afin de mettre l'accent sur cet aspect méthodologique, des exemples d'application très différents sont proposés à la fin des chapitres 4 et 5.

0.2. Analyse et synthèse

L'élaboration d'une loi de commande a pour objectif principal de conférer à un système physique des propriétés qu'il n'avait pas naturellement ou de renforcer ces propriétés si elles existaient déjà. Pour mener à bien cette mission, l'ingénieur automatique a à sa disposition des méthodologies qui permettent principalement de :

- synthétiser de manière systématique des lois de commande à partir d'un cahier des charges donné (*synthèse*) ;
- garantir le bon fonctionnement des lois de commande une fois qu'elles sont appliquées au système physique concerné (*analyse*).

Ces outils sont en général issus des collaborations entre l'industrie et la recherche, et permettent d'utiliser des formalismes mathématiques au service de l'ingénierie.

Les problèmes rencontrés dans ces deux branches d'étude ne sont pas du même ordre. En effet l'analyse est beaucoup moins gourmande en quantité de calcul que la synthèse tandis qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une connaissance très forte du système physique pour élaborer une loi de commande. Dans le cas d'applications spatiales, la notion d'analyse est fondamentale comme dans toutes les applications pour lesquelles les essais sont difficiles et/ou onéreux à

réaliser ; et le travail de synthèse doit répondre à un cahier des charges parfois très difficile à satisfaire.

Dans notre cadre de travail, nous nous sommes principalement intéressés aux méthodes de synthèse et plus exactement à la mise en place de méthodologies systématiques et reproductibles pour les systèmes répondant à des exigences similaires à celle que pose le pilotage des lanceurs.

0.3. Choix méthodologiques

Depuis que la notion de bouclage a été formalisée par Black [Bla34], les avancées de l'automatique se sont faites par des progrès techniques (progrès informatiques par exemples) ou par la résolution de problèmes mathématiques (algorithmes d'optimisation convexe des années 90). On peut alors faire apparaître des grandes périodes dans l'évolution des idées en automatique. Depuis les années 40, on a vu se développer les outils de base de l'automatique dite classique [Bla34, Nyq32, Bod40] qui ont introduit des représentations, des critères graphiques et la notion de marge de stabilité ; après la seconde guerre mondiale, avec les premiers développements des calculateurs numériques, de nouveaux problèmes ont pu être résolus pour aboutir aux commandes de type LQG [Kal64, SA77, Doy78]¹. Les années 80 ont vu se développer la notion de robustesse avec la commande H_∞ et la valeur singulière structurée μ [Zam81, DGKF89, Doy82] ; puis dans le même courant, les années 90 ont été marquées par les problèmes d'optimisation et en particulier l'introduction du formalisme LMI² : c'est en 1991 que les premières formulations en terme d'optimisation convexe sont apparues avec différentes méthodes de résolution [BB91, GBP91].

Aujourd'hui, l'optimisation sous contrainte LMI a montré son efficacité dans de nombreux domaines, elle souffre cependant des défauts de ces avantages. En effet, le formalisme LMI, grâce aux algorithmes actuels, permet de résoudre un certain nombre de problèmes avec des temps de calcul raisonnables. Or deux problèmes importants persistent :

- dès que la taille du problème d'optimisation grandit (le nombre de variables d'optimisation), les solveurs numériques peuvent se révéler

¹ On parle alors d'automatique moderne en opposition à l'automatique classique de la période précédente.

² Une annexe est consacrée à ce formalisme puisqu'il est abondamment utilisé dans ce document.

inefficaces ou demander des temps de calcul rédhibitoires. Cette difficulté existe avec les outils informatiques et algorithmiques actuels mais peut disparaître avec les progrès de ceux -ci ;

- en transformant le problème d'automatique initial en un problème d'optimisation LMI, on peut être amené à résoudre un problème plus contraint et la méthode induit donc du conservatisme ; la solution proposée (s'il y en a une) peut se révéler très « éloignée » de la solution optimale du problème initial.

Plus généralement, ces problèmes sont récurrents dans tous les problèmes d'optimisation pour la commande et il apparaissent à chaque étape de la démarche qui consiste à traiter un problème de commande par un problème d'optimisation :

1. formulation du problème de synthèse sous forme d'un problème d'optimisation : définition d'un objectif et de contraintes
2. modification du problème d'optimisation pour se ramener à une formulation convexe de dimension finie que l'on saura résoudre numériquement
3. reconstruction de la loi de commande solution du problème initial.

On remarque que chaque étape de ce processus modifie le problème initial et induit donc un écart entre la solution « trouvée » et la solution optimale théorique.

C'est pour ces différentes étapes que nous avons cherché à développer des méthodologies qui réduisent le conservatisme tout en utilisant les outils d'optimisation sous contraintes LMI.

Les apports méthodologiques de notre Thèse concerne plus particulièrement la synthèse multiobjectifs avec une formulation originale sous la forme d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI, et aussi la mise en place d'une méthode d'interpolation de correcteurs à stabilité garantie. Un effort a également été donné pour appliquer ces concepts à une application industrielle pour mettre en avant l'utilité des outils développés.

0.4. Organisation

Le corps de notre Thèse est organisé en deux parties qui traitent d'une part des aspects méthodologiques avec des exemples académiques (chapitres 1 à 4) et d'autre part de la mise en œuvre de ces concepts sur l'exemple du pilotage d'un lanceur spatial (chapitres 5 à 7). Cette dichotomie peut paraître arbitraire et sembler différencier la théorie de la pratique ; mais il s'agit d'une coupure de présentation car les outils utilisés sont évidemment pensés en rapport avec la problématique de l'application.

Voici un résumé des notions développées dans chacune de ces parties :

Chapitre 1

Il s'agit ici de définir les objectifs de synthèse et d'introduire les notions utilisées tout au long de ce document. On y trouve également une discussion sur la **stabilité** des systèmes. Ce dernier point n'introduit pas de notions nouvelles mais montre où se situent les difficultés du passage d'un système linéaire à un système non linéaire.

Chapitre 2

Le chapitre 2 est consacré à la notion de **paramétrisation de Youla** qui permet de caractériser l'ensemble des correcteurs stabilisant un système linéaire invariant par l'ensemble des transferts stables. Cette propriété très forte est exposée ici pour définir un outil intermédiaire pour le chapitre 3, mais la mise en œuvre pratique de cette paramétrisation permet aussi de structurer un correcteur dynamique sous forme d'un observateur et d'un retour d'état. Cette structuration tire son intérêt de la facilité d'implantation qu'elle confère et des interprétations physiques qu'elle facilite.

Chapitre 3

La **synthèse multiobjectifs** est ici définie et montre comment un problème de synthèse d'une loi de commande est transformé en un problème d'optimisation. L'intérêt de ce chapitre réside dans la formulation sous forme d'optimisation avec des contraintes LMI d'un problème connu pour être non convexe. La méthodologie proposée permet de réduire le conservatisme des méthodes déjà existantes.

Chapitre 4

On s'intéresse dans ce chapitre aux techniques de **séquençement de gains** qui sont nécessaires lorsque les systèmes étudiés évoluent dans le temps et que leur modélisation est elle aussi variable dans le temps (on parle alors de systèmes variants¹). Il apparaît alors naturel d'utiliser des correcteurs qui eux aussi varient dans le temps. Ces techniques suivent toutes, plus ou moins, les mêmes grandes lignes. Il s'agit pour nous de proposer une méthode qui généralise l'interpolation linéaire utilisée dans la pratique, tout en offrant des garanties de stabilité.

La suite de la thèse est consacrée au problème pratique de la mise en œuvre d'une telle méthodologie à un système complexe, en l'occurrence un lanceur spatial.

Chapitre 5

Afin de pouvoir développer des méthodes d'automatique, la première étape consiste en la **définition d'un modèle** et d'un cahier des charges. Il s'agit donc de définir un cadre d'application à partir des équations de la physique et du savoir faire du CNES et d'EADS-LV. Cette modélisation a abouti à la définition d'un benchmark pour le pôle de recherche PIROLA en collaboration avec l'ONERA.

Chapitre 6

La **synthèse multiobjectifs** présentée au chapitre 3 est appliquée en un point de vol particulier en intégrant à la synthèse les objectifs les uns après les autres. Les différentes étapes de la synthèse mettent en avant l'influence des différentes contraintes sur les performances globales du pilotage. On utilise ici les spécificités structurelles du modèle et du cahier des charges pour traduire les objectifs de synthèse sous forme de contraintes d'optimisation.

Chapitre 7

En réitérant la méthode du chapitre 6 en différents points de vol et en utilisant la **méthode d'interpolation** à stabilité garantie du chapitre 4, on met en place une loi de commande non stationnaire valable sur toute la phase de vol atmosphérique. On montre ici comment les différents concepts de synthèse,

¹ Les termes « variant » et « invariant » sont utilisés ici (et dans la suite de ce document) comme des adjectifs car ils sont directement traduits de l'anglais et ne recouvrent pas exactement le même sens qu'en français usuel.

structuration et interpolation permettent de trouver une solution simple à un problème a priori complexe.

Ces derniers éléments permettent de tirer les conclusions et les perspectives de recherche concernant ce type de problème.

Publications

Les travaux présentés ici ont été accompagnés de différentes communications scientifiques, dont voici un récapitulatif.

B. Clement, G. Duc, Synthèse Multicritère par retour de sortie : formulation par LMI, *Journées Doctorales d'Automatique*, Nancy, pp. 127-131, septembre 1999.

B. Clement, Utilisation de la paramétrisation de Youla pour la commande, *réunion du groupe de travail Commande Robuste Multivariable*, Lyon, mars 2000.

B. Clement, S. Hbaïeb, G. Duc, S. Font, Paramétrisation de Youla : application à la commande robuste par optimisation convexe, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, numéro spécial *Commande Robuste Multivariable*, février 2001.

B. Clement, G. Duc, Multiobjective Control via Youla parameterization and LMI optimisation: application to a flexible arm, *IFAC Symposium on Robust Control and Design*, Prague, juin 2000.

B. Clement, G. Duc, A Multi-Objective Control Algorithm: application to a launcher with bending modes, *8th IEEE Mediterranean Conference on Control on Automation*, Rio-Patras, juillet 2000.

B. Clement, G. Duc, *Synthèse multicritère utilisant la paramétrisation de Youla et l'optimisation convexe*, chapitre de livre, Editions Hermes, Paris, 2001, à paraître.

B. Clement, Synthèse d'un pilotage automatique pour un lanceur, *Journée des thèses EADS-LV*, Les Mureaux, avril 2001.

B. Clement, Synthèse d'un pilote séquencé pour le pilotage d'un lanceur, *Journées Jeunes Chercheurs du CNES (JC²)*, Toulouse, juin 2001.

B. Clement, G. Duc, S. Mauffrey, A. Biard, Gain Scheduling for an aerospace launcher with bending modes, *15th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Bologne, septembre 2001.

B. Clement, G. Duc, Condition suffisante de stabilité pour l'interpolation linéaire de correcteurs, *Journées Doctorales d'Automatique*, Toulouse, septembre 2001.

B. Clement, G. Duc, An interpolation method for gain-scheduling, *40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, decembre 2001.

B. Clement, G. Duc, Multiobjective control of a flexible arm using Youla parameterization and LMI optimisation, soumis à *l'European Journal of Control*.

B. Clement, G. Duc, An interpolation method for gain-scheduling, soumis à *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.

Chapitre 1

Notions de base : représentation, stabilité, convexité

1.1. Introduction	13
1.2. Principes de commande.....	15
1.3. Stabilité.....	16
1.4. Boucle bien posée et stabilité interne	23
1.5. Analyse convexe.....	26

1.1. Introduction

Ce chapitre préliminaire permet de rappeler les principes de base de la commande des systèmes pour introduire les notations utilisées et la notion d'interconnexion des systèmes.

Dans un second temps, on abordera la notion de stabilité et sa caractérisation pour un système non linéaire. Cette mise au point permet de mieux comprendre les difficultés de la mise en œuvre des techniques de séquençement de gains qui sont abordées aux chapitres 4 et 7.

La dernière partie de ce petit chapitre est consacrée au rappel des propriétés séduisantes de la convexité et aux écueils à éviter pour rendre convexe un problème d'optimisation.

1.1.1. Représentation des systèmes

Un grand nombre de systèmes peuvent se représenter sous forme d'équations différentielles ordinaires¹. Même s'il s'agit d'une modélisation approchée, elle est souvent suffisante pour synthétiser une loi de commande. La classe des systèmes que nous étudions ici se limite donc à ceux qui peuvent être décrits par des EDO.

Les systèmes étudiés sont issus d'équations différentielles, puis discrétisés² ; il s'agit donc de définir les notions de base pour les systèmes dynamiques discrets. La problématique de la commande des systèmes échantillonnés est un problème difficile qui nécessite encore le développement d'outils méthodologiques, en particulier pour les systèmes non linéaires [MN01]. Dans ce contexte, on distingue deux approches : on fait une synthèse continue et on implémente la discrétisation du correcteur (approche indirecte), ou bien on réalise une synthèse directement en discret sur le modèle échantillonné. Dans ce dernier cas, la difficulté est de connaître le comportement du système entre chaque instant d'échantillonnage ; en effet une approche purement discrète ne garantit les résultats qu'à ces instants.

¹ On trouve dans la littérature la notation EDO (équation différentielle ordinaire) en opposition à EDP (équation aux dérivées partielles).

² On parle de systèmes échantillonnés.

Mais les problèmes ne se réduisent pas à ce point, en effet, même si on se limite au cas linéaire, il est bien connu que les zéros obtenus par échantillonnage d'un système continu sont des fonctions compliquées de la période d'échantillonnage. De plus ces zéros peuvent être instables alors que ceux du système continu sont stables. Une discussion sur ce sujet est disponible dans [AHS84]. Ainsi des méthodes fondées sur la compensation des zéros peuvent s'avérer inopérantes selon la période d'échantillonnage choisie. Il est important de noter que dans un système échantillonné, ce sont ces zéros qui fixent les limites des performances possibles pour la commande.

Ces problèmes relèvent d'une problématique difficile [MN93, MN01] que nous n'avons pas abordée pour nous consacrer aux méthodes de synthèse proprement dites. On considèrera dans la suite que les systèmes étudiés sont correctement échantillonnés et que le comportement du système entre les instants d'échantillonnage ne pose pas de problème.

La forme la plus générale d'un système discret (échantillonné ou pas) est la suivante :

$$h(x(k+1), x(k), u(k), k) = 0 \quad (\text{Eq. 1.1.1})$$

Or il est difficile d'étudier un tel système si la fonction h n'est pas précisée quant à sa forme et ses propriétés. C'est pourquoi la famille des systèmes¹ est encore réduite aux relations du type :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad (\text{Eq. 1.1.2})$$

Là encore, la forme considérée est très générale, et il est nécessaire de faire des hypothèses sur la fonction f . Notre étude se limite ici aux systèmes linéaires qui peuvent être représentés par une représentation d'état de la forme suivante :

$$P \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B_1(k)w_1(k) + B_2(k)w_2(k) + B_u(k)u(k) \\ z_1(k) = C_1(k)x(k) + D_{11}(k)w_1(k) + D_{12}(k)w_2(k) + D_{1u}(k)u(k) \\ z_2(k) = C_2(k)x(k) + D_{21}(k)w_1(k) + D_{22}(k)w_2(k) + D_{2u}(k)u(k) \\ y(k) = C_y(k)x(k) + D_{y1}(k)w_1(k) + D_{y2}(k)w_2(k) + D_{yu}(k)u(k) \end{cases} \quad (\text{Eq. 1.1.3})$$

¹ Aussi appelé classe de systèmes.

avec $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbf{R}^{n \times n_i}$, $C_j \in \mathbf{R}^{p_j \times n}$, $D_{ji} \in \mathbf{R}^{p_j \times n_i}$.

Les signaux z_i et y sont les sorties du systèmes et w_i et u sont les entrées ; dans tous les cas il s'agit de vecteurs. On distingue de plus les sorties z_i et la mesure y qui est la seule à avoir une réalité physique. De même le signal u est appelé commande tandis que les signaux w_i sont des perturbations. Pour un problème de commande, y est l'entrée du correcteur et u sa sortie.

Dans le cas où les matrices A , B , C et D ne dépendent pas du temps (k) on dit que le système P est stationnaire¹.

Par souci de simplification dans le cas stationnaire, on notera ce système de manière matricielle et on confondra le système et sa représentation d'état :

$$P = \left(\begin{array}{c|ccc} A & B_1 & B_2 & B_u \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} & D_{1u} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & D_{2u} \\ C_y & D_{y1} & D_{y2} & D_{yu} \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 1.1.4})$$

D'autre part le transfert entre l'entrée w_i et la sortie z_j peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$P_{i \rightarrow j}(z) = C_j(zI - A)^{-1}B_j + D_{ji} \quad (\text{Eq. 1.1.5})$$

1.2. Principes de commande

Le problème de synthèse d'une loi de commande stabilisante par retour de sortie dynamique, notée K , sur le couple entrée-sortie (u, y) est illustré par la Figure 1.1. Le correcteur K est noté de la même manière que le système P :

$$K = \left(\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 1.2.1})$$

¹ On trouve aussi la dénomination invariant, directement issue de l'anglais et reprise par le sigle LTI qui signifie Linear Time invariant.

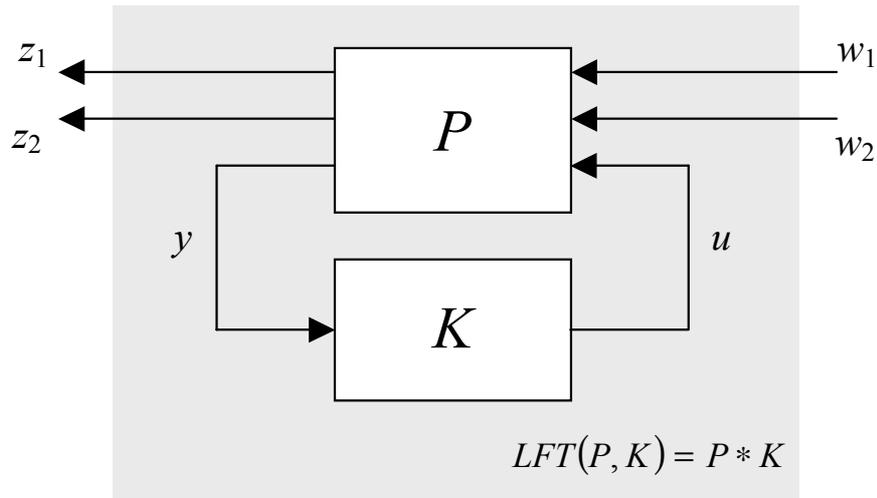


Figure 1.1. Boucle de correction

On notera $P * K$ le système bouclé de la Figure 1.1. Par ailleurs les transferts en boucle fermée entre une entrée w_i et une sortie z_i , notés T_i , sont appelés des Transformées Fractionnaires Linéaires¹. Nous les noterons :

$$T_i(z) = LFT \left(\left(\begin{array}{c|cc} A & B_i & B_u \\ \hline C_i & D_{ii} & D_{iu} \\ \hline C_y & D_{yi} & D_{yu} \end{array} \right), K \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{i,cl} \\ \hline C_{i,cl} & D_{i,cl} \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 1.2.2})$$

Dans le cadre non stationnaire, on note également A_{cl} , B_{cl} , C_{cl} et D_{cl} les matrices de la représentation d'état du système bouclé.

La synthèse d'un correcteur a pour but de stabiliser le système P et de lui conférer certaines performances. La notion de stabilité utilisée ici est la stabilité au sens de Lyapunov.

1.3. Stabilité

La notion de stabilité est fondamentale en Automatique : c'est la première propriété à garantir pour un système commandé. Ainsi, les définitions de ce paragraphe regroupent quelques notions mathématiques qui seront récurrentes tout au long de ce chapitre.

¹ En anglais Linear Fractional Transformation

Définition : fonction Lipschitz

On dit que la fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{G}$ (où \mathbf{E} et \mathbf{G} sont des espaces normés) est une fonction L -Lipschitz si il existe un réel positif $L > 0$ tel que

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{E}^2, \text{ on a } \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad (\text{Eq. 1.3.1})$$

Remarques :

- Si f est Lipschitz en x , alors f est continue en x ;
- Si f est continue et de dérivée bornée, c'est-à-dire :

$$\forall x / \|x\| = 1, \|Df(x)\| \leq l \text{ avec } Df = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \quad (\text{Eq. 1.3.2})$$

alors f est Lipschitz.

D'après la théorie des équations différentielles ordinaires, si f est localement bornée et localement Lipschitz en x , l'équation différentielle $\dot{x} = f(x, t)$ ou l'équation récurrente $x(k+1) = f(x(k), k)$ déduite d'une équation différentielle par discrétisation admet une solution unique sur tout intervalle de temps (tant que x reste au voisinage du point d'équilibre)¹.

Sans perdre de généralité, le point d'équilibre en jeu est $x = 0$. Il s'agit donc dans ce paragraphe d'étudier la stabilité des trajectoires solutions de l'équation dynamique (1.1.2) au voisinage de l'origine.

On cherche alors la solution $x : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^n$ de l'équation (1.1.2) qui satisfait la condition initiale suivante :

$$x(k_0) = x_0 \text{ avec } (k_0, x_0) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}^n \quad (\text{Eq. 1.3.3})$$

¹ La condition Lipschitz est nécessaire dans le cas continu, mais on peut étendre ce résultat aux fonctions continues dans le cas discret.

1.3.1. Equations dynamiques

Le système défini par (1.1.2) est dit stationnaire ou invariant si f ne dépend pas explicitement du temps et non stationnaire sinon. Dans toute la suite on supposera que la fonction f est continue par morceaux selon la variable temporelle.

On définit \mathbf{B}_h comme la boule fermée de \mathbf{R}^n de rayon h centrée en 0. Cette notion topologique permet de préciser le domaine de validité des propriétés que l'on utilise, en effet celles-ci peuvent être :

- locale : $\forall x_0 \in \mathbf{B}_h$
- globale : $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$
- pour tout voisinage : $\forall x_0 \in \mathbf{B}_h$ avec h quelconque ($h < \infty$)
- uniforme : $\forall k \geq 0$

Par défaut les propriétés seront locales.

1.3.2. Définitions de stabilité

Du point de vue intuitif, $x = 0$ est un point d'équilibre si la trajectoire de $x(k)$ solution de l'équation dynamique (1.1.2) revient au voisinage de 0 pour une condition initiale proche de 0.

Définition : stabilité au sens de Lyapunov

$x = 0$ est un point d'équilibre stable de (1.1.2) si :

$$\forall k_0 \geq 0 \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \\ \exists \delta_{\varepsilon, k_0} \text{ tel que } \|x_0\| < \delta \Rightarrow \forall k \geq k_0 \ \|x(k)\| < \varepsilon \quad (\text{Eq. 1.3.4})$$

Définition : stabilité uniforme

La stabilité précédente est dite uniforme si δ ne dépend pas de k_0 .

Remarques

- cette dernière notion traduit que le point d'équilibre ne devient pas progressivement « moins stable » avec le temps.

- cette définition est pauvre : elle ne suppose rien quant aux trajectoires

Définition : *stabilité asymptotique*

$x = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable si :

- $x = 0$ est un point d'équilibre stable
- $x = 0$ est attractif :

$$\forall k_0 \geq 0, \exists \delta_{k_0} > 0 \text{ tel que } \|x_0\| < \delta_{k_0} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k)\| = 0 \quad (\text{Eq. 1.3.5})$$

Définition : *stabilité asymptotique uniforme*

$x = 0$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable si :

- $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément stable ;
- $x = 0$ est uniformément attractif :
- $\exists \delta > 0$ tel que $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k)\| = 0$

Remarque :

Dans le cas de la stabilité asymptotique uniforme globale, cette dernière propriété se réduit à l'expression de la limite de la trajectoire :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k)\| = 0 \quad (\text{Eq. 1.3.6})$$

Dans les définitions précédentes, n'apparaît aucune notion de rapidité de convergence, pour cela on fait appel à la stabilité exponentielle qui garantit que l'écart de la trajectoire au point d'équilibre a une trajectoire qui converge vers 0 plus vite qu'une trajectoire exponentielle.

Définition : *stabilité exponentielle*

$x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable si :

- $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable ;

- il existe deux réels positifs m et l tels que pour toute condition initiale x_0 , k_0 , la trajectoire vérifie la relation suivante :

$$\|x(k)\| \leq m e^{-l(k-k_0)} \|x_0\| \text{ pour tout } k > k_0 \quad (\text{Eq. 1.3.7})$$

Remarques :

- On dit que cette stabilité est uniforme si m et l sont indépendants de k_0 .
- On parle de stabilité locale si la trajectoire est limitée à un voisinage de 0 et de stabilité globale sinon.
- Pour un système linéaire, les stabilités locale et globale sont équivalentes.
- Si les dynamiques ne sont pas des fonctions explicites du temps, alors la stabilité est uniforme.
- Pour un système linéaire invariant, la stabilité asymptotique et la stabilité exponentielle sont équivalentes, ce qui est faux en général.

1.3.3. Théorie de la stabilité de Lyapunov

Quelques concepts et résultats fondamentaux de la théorie de la stabilité de Lyapunov sont présentés pour se faire une idée précise de la question. Un développement complet incluant l'ensemble des démonstrations de cette théorie est disponible dans [Vid78].

L'intérêt de la « *seconde méthode de Lyapunov* »¹ vient de sa capacité à déterminer la nature de la stabilité d'un point d'équilibre sans être obligé d'intégrer les équations différentielles qui régissent le système étudié. Cette méthode est une généralisation de l'idée commune comme quoi une mesure d'énergie associée à un système décroît lorsque celui-ci tend vers un point d'équilibre. A titre de remarque on notera que la stabilité au sens de Lyapunov a été introduite avant tout pour étudier la stabilité des systèmes mécaniques où la notion de commande n'existe pas ; elle peut aussi être interprétée comme la garantie de stabilité du système vis-à-vis d'entrées impulsionnelles [Wil70]. Il est donc indispensable d'établir des liens entre cette notion issue de la

¹ On l'appelle aussi la méthode indirecte de Lyapunov.

mécanique et la vision entrée / sortie des systèmes ; pour une discussion enrichissante à ce sujet on pourra se reporter à [Wil70].

Nous allons donc définir un certain nombre de concepts qui permettront d'aboutir à une formulation simple de la caractérisation de la stabilité.

Définition : fonction de classe K

Une fonction $\alpha : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ est dite de classe K si elle est :

- continue,
- strictement croissante,
- et telle que $\alpha(0) = 0$.

Définition : fonction définie positive

Soit une fonction $V : \mathbf{N} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$, V est une fonction localement définie positive si il existe un réel $h > 0$ et une fonction α de classe K tels que :

$$V(k, 0) = 0 \text{ et } V(k, x) \geq \alpha(\|x\|) \text{ pour tout } x \in \mathbf{B}_h \text{ et } k \geq 0$$

Dans le cas global, $x \in \mathbf{R}^n$ et il y a une condition supplémentaire :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha(s) = \infty \quad (\text{Eq. 1.3.8})$$

Dans ces définitions il n'est pas question de décroissance de la fonction d'énergie ; c'est pourquoi il est nécessaire d'introduire cette notion.

Définition : fonction K -bornée

La fonction V est dite K -bornée si il existe un réel $h > 0$ et une fonction β de classe K telle que

$$V(k, x) \leq \beta(\|x\|) \text{ pour tout } x \in \mathbf{B}_h \text{ et } k \geq 0$$

Voici quelques exemples de fonctions :

$V(k, x)$	définie positive	K-bornée
$\ x\ ^2$	Global	oui
$x^T Px$ avec $P > 0$	Global	oui
$(k+1)\ x\ ^2$	Global	non
$e^{-k}\ x\ ^2$	non	oui
$\sin^2(\ x\ ^2)$	local	oui

Tableau 1-I. Exemples de fonctions de stabilité

De manière générale, le théorème de stabilité suivant affirme que s'il existe une fonction définie positive et décroissante le long des trajectoires solutions de l'équation dynamique, alors on peut conclure quant à la stabilité du point d'équilibre.

Théorème : étude de la stabilité [Vid78]

Soit $V(k, x)$ une fonction continue et $\Delta V(k, x)$ la grandeur définie par :

$$\Delta V(k, x) = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)), \quad (\text{Eq. 1.3.9})$$

alors on peut déduire les résultats du Tableau 1-II.

Remarque :

Ce théorème donne des conditions suffisantes pour la stabilité du système (1.1.2) mais il est remarquable que sa réciproque est aussi vraie. En effet si un système est stable, il existe une fonction de Lyapunov V . L'utilité de ce théorème et de sa réciproque est limitée par le fait qu'il n'existe pas de méthode systématique pour construire ces fameuses fonctions de Lyapunov V .

condition sur $V(k, x)$	condition sur $-\Delta V(k, x)$	conclusion
localement définie positive	localement positive	stable au sens de Lyapunov
localement définie positive, K -bornée	localement positive	uniformément stable
localement définie positive	localement définie positive	asymptotiquement stable
localement définie positive, K -bornée	localement définie positive	uniformément asymptotiquement stable
définie positive, K -bornée	définie positive	globalement uniformément asymptotiquement stable

Tableau 1-II Etude de la stabilité

1.4. Boucle bien posée et stabilité interne

La stabilité entrée-sortie utilisée avec le formalisme des fonctions de transfert n'est pas équivalente à la stabilité au sens de Lyapunov de part la présence possible de dynamiques non commandables ou non observables. On peut néanmoins relier la stabilité de la représentation d'état et la stabilité par matrice de transfert en considérant une matrice de transfert augmentée. Cette analyse a été formalisée par Desoer et Chan dans [DC75] puis largement utilisée dans la littérature.

On introduit deux entrées fictives v_1 et v_2 comme l'indique la Figure 1.2, que l'on peut interpréter comme des bruits d'actionneurs et de capteurs.

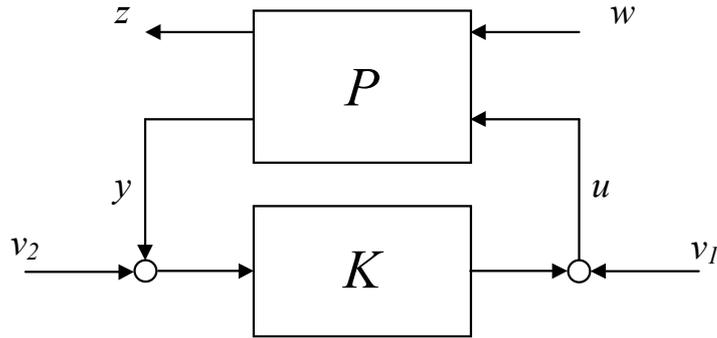


Figure 1.2 Interconnexion de P et K

On peut alors définir les notions de boucle fermée bien posée et de stabilité interne en partitionnant la matrice de transfert de P sous la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 1.4.1})$$

La matrice de transfert augmentée de la boucle fermée formée par interconnexion de P et K est :

$$\begin{pmatrix} z \\ u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} & P_{12}(I - KP_{22})^{-1} & P_{12}(I - KP_{22})^{-1}K \\ K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} & (I - KP_{22})^{-1} & (I - P_{22}K)^{-1}K \\ (I - P_{22}K)^{-1}P_{21} & (I - P_{22}K)^{-1}P_{22} & (I - P_{22}K)^{-1}P_{22}K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 1.4.2})$$

On lit directement que cette matrice existe si et seulement si les transferts $(I - P_{22}K)$ et $(I - KP_{22})$ sont inversibles. En remarquant que :

$$(I - P_{22}K)^{-1} = I + P_{22}(I - KP_{22})^{-1}K \quad (\text{Eq. 1.4.3})$$

il suffit qu'un seul des transferts existe. Cette condition traduit la notion d'interconnexion bien posée.

Cette notion exprime le fait que le modèle mathématique possède un minimum de vraisemblance physique, c'est-à-dire que les signaux doivent être uniques pour une entrée donnée et ne dépendre à l'instant présent que du signal d'entrée pour les instants présents et passés (causalité).

Pour définir mathématiquement cette notion de façon plus générale (et sans être limité au cas des systèmes linéaires), il est nécessaire d'introduire l'opérateur de troncature et les espaces étendus.

Pour un signal w et un scalaire $T > 0$, on note $P_T(w)$ la troncature causale pour l'instant T définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \quad P_T(w)(t) &= w(t) \\ \forall t > T, \quad P_T(w)(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 1.4.4})$$

Et on introduit les espaces étendus :

$$l_{pe}(\mathbf{Z}, \mathbf{R}^n) = \left\{ w : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^n / \forall T > 0, P_T(w) \in L_p(\mathbf{N}, \mathbf{R}^n) \right\} \quad (\text{Eq. 1.4.5})$$

avec

$$l_p(\mathbf{Z}, \mathbf{R}^n) = \left\{ u : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^n / \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|u(k)\|^p \right) < \infty \right\}$$

Cet espace étendu permet d'englober des signaux de durée infinie (bruit blanc, échelon) alors que ceux-ci n'appartiennent pas à $l_p(\mathbf{Z}, \mathbf{R}^n)$ mais sont utilisés dans la réalité.

Définition 1.1 Interconnexion bien posée

Le système interconnecté de la Figure 1.2 est dit bien posé si, pour toutes entrées w , v_1 et v_2 appartenant à des espaces étendus de type (1.4.5), tous les signaux z , u et y existent, sont uniques et appartiennent à des espaces étendus de type (1.4.5).

Lorsque l'on manipule des systèmes et que l'on étudie les propriétés des interconnexions, il est nécessaire que celles-ci soient bien posées, ainsi il sera sous entendu pour l'ensemble des interconnexions considérées qu'elles sont bien posées.

On peut alors définir la notion de stabilité interne d'une interconnexion de systèmes.

Définition. *Stabilité interne*

Un correcteur K stabilise le système P si l'interconnexion est bien posée et si les 9 termes de la matrice de transfert (1.4.2) sont stables.

Si de plus P est stabilisable et détectable, on montre (voir [DC75]) que l'on peut réduire le transfert précédent à :

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I - KP_{22})^{-1} & (I - KP_{22})^{-1}K \\ (I - P_{22}K)^{-1}P_{22} & (I - P_{22}K)^{-1}P_{22}K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 1.4.6})$$

Sous ces hypothèses, le correcteur K stabilise le système P si et seulement si les quatre termes de cette matrice de transfert sont définis et stables.

1.5. Analyse convexe

La notion de convexité tient dans ce manuscrit une place importante étant données les orientations choisies. En effet les problèmes de synthèse dont il est question sont formulés en termes d'optimisation, convexe si possible. La convexité d'un problème d'optimisation à un double avantage :

- les temps de calcul pour trouver une solution sont raisonnables¹ ;
- il n'existe pas de minimum local de la fonction coût à optimiser ; le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

Cette approche allie donc vitesse et efficacité... Ce qui semble évidemment très séduisant. Il faut cependant faire attention aux idées reçues : si un problème n'est pas convexe au départ, le transformer en une formulation convexe peut parfois entraîner des conséquences non désirables.

Si la transformation non convexe / convexe se fait par des équivalences, c'est le meilleur des cas et les seuls problèmes qui peuvent en découler proviennent d'un mauvais conditionnement numérique qui empêcherait une résolution algorithmique simple.

Pour mieux comprendre ce problème, on discerne deux méthodes pour transformer le problème initial :

- Le champ de variation des variables d'optimisation est réduit ; c'est-à-dire que la recherche se fait sur un ensemble plus petit que le domaine de définition initial.

¹ Evidemment tout cela est relatif. Reasonnable est à interpréter en comparaison avec les algorithmes d'optimisation non linéaire.

- Les contraintes sont modifiées afin de les rendre convexes mais elles deviennent alors plus contraignantes.

La solution ainsi obtenue par optimisation convexe est optimale au sens du nouveau problème mais pas nécessairement au sens du problème initial. Il est donc fort possible qu'elle ne soit pas optimale pour le problème posé ! Cette mise en garde est fondamentale pour l'interprétation des résultats obtenus en synthèse par des méthodes d'optimisation.

On trouvera ici quelques définitions qui permettent de comprendre la notion de convexité dont il sera question dans la formulation des problèmes de synthèse et de séquençement de gains des chapitres 3 et 4.

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici les définitions dans chacun des cas.

Définition Ensemble convexe

Soit un ensemble $C \subset \mathbf{R}^n$, C est convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0 \ 1] \subset \mathbf{R}, \forall (x_1, x_2) \in C^2, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C \quad (\text{Eq. 1.5.1})$$

Définition Fonction convexe

Soit une fonction $f : C \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ avec C un ensemble convexe, alors f est convexe si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in [0 \ 1] \subset \mathbf{R}, \\ \forall (x_1, x_2) \in C^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 1.5.2})$$

Un problème d'optimisation convexe s'énonce donc comme suit :

$$\min_{x \in C} (f(x)) \quad (\text{Eq. 1.5.3})$$

où C est un ensemble convexe et f une fonction convexe.

Ce qui justifie l'intérêt d'un problème d'optimisation convexe, c'est qu'il existe des algorithmes performants [BEFB94] permettant d'atteindre une solution numérique de 'bonne qualité'.

Remarque :

- On dit qu'une fonction f est quasi convexe lorsque

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in [0 \ 1] \subset \mathbf{R} , \\ \forall (x_1, x_2) \in C^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \sup(f(x_1), f(x_2)) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 1.5.4})$$

- On peut alors utiliser les algorithmes d'optimisation convexe moyennant quelques précautions.

Une formulation particulière retiendra notre attention, il s'agit de l'optimisation sous contraintes définies par des inégalités matricielles linéaires (LMI¹). On montre qu'un grand nombre de problèmes convexes peuvent s'exprimer sous formes de contraintes de ce type. On trouvera à la fin de ce document une annexe rappelant les principaux résultats de ce formalisme.

Notion de conservatisme et de calculabilité

Dans la résolution algorithmique des problèmes d'optimisation, se pose la question de pouvoir obtenir un résultat numérique dans un temps convenable. Un problème est dit résolvable en un temps polynomial lorsque le temps de calcul CPU que son algorithme de résolution met en jeu est une fonction polynomiale de la taille du problème. La taille du problème est une notion difficile à définir, on pourra retenir qu'il s'agit d'une fonction croissante du nombre de variables mises en jeu ; de plus, pour un problème informatique, on tiendra compte de l'espace mémoire utilisé par celles-ci.

D'autre part, une condition est dite conservatrice lorsqu'elle est trop contraignante ou pessimiste par rapport au problème réel considéré. Le cas se présente lorsqu'on transforme un problème initial en un problème que l'on sait résoudre. Le dilemme entre complexité et calculabilité est récurrent dans la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes. Lorsque ces contraintes sont très pointues, elle sauront parfaitement traduire le cahier des charges d'un ingénieur mais le temps de calcul risque de ne plus être admissible. Et à l'inverse une solution facilement calculable met en jeu des exigences physiques élémentaires ou des hypothèses trop fortes, et ces

¹ Sigle anglais pour Linear Matrix Inequality. Un développement sur ces techniques est donné en Annexe à la fin de notre thèse.

conditions n'intéresseront pas l'ingénieur automaticien. Il est donc primordial de toujours garder en tête que tout problème sera résolu en établissant un compromis entre ces deux notions.

Chapitre 2

Paramétrisation de Youla

et Structuration de correcteur

2.1. Contexte.....	33
2.2. Définition	35
2.3. Propriétés	38
2.4. Réalisation pratique	41
2.5. Structuration de correcteur	45
2.6. Conclusion	65
2.7. Annexe : résolution de l'équation algébrique.....	66

2.1. Contexte

La paramétrisation de Youla est connue pour être l'outil fondamental pour représenter l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné par l'ensemble des systèmes stables (Figure 2.1). La question qui se pose alors est de savoir quelles sont les relations entre ces deux ensembles et comment peut-on utiliser ces relations.

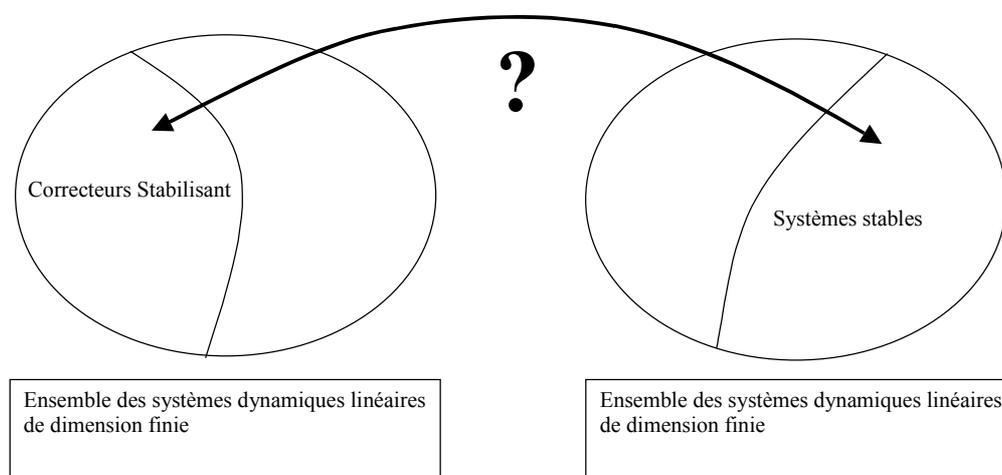


Figure 2.1 Principe de paramétrisation

Le but de ce chapitre est donc de comprendre pourquoi un tel outil possède des propriétés très intéressantes pour l'automatique et surtout comment il est possible d'obtenir cette paramétrisation de manière simple et efficace.

On considère donc un système linéaire invariant¹ P et on cherche à définir simplement l'ensemble des systèmes linéaires invariant qui font que l'interconnexion $P * K$ de la Figure 2.2 reste bien posée et stable au sens de la stabilité interne définie au chapitre 1. Cet ensemble est noté \mathbf{K} et s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{K} = \{K / P * K \text{ stable}\} \quad (\text{Eq. 2.1.1})$$

¹ Dans ce chapitre on ne fera pas la différence entre le cas discret et le cas continu, les concepts exposés sont parfaitement identiques.

Cet ensemble n'est pas simple à déterminer de manière analytique et c'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser une paramétrisation. Cependant on ne trouve qu'assez peu d'utilisation pratique de cet outil dans la littérature car les propriétés qui découlent peuvent paraître déroutantes.

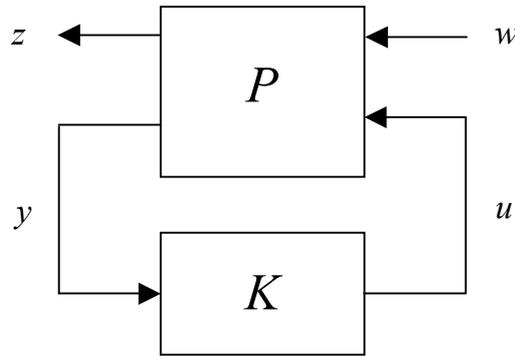


Figure 2.2 Interconnexion $P * K$

2.1.1. Historique

L'idée générale de paramétrisation de l'ensemble des correcteurs stabilisant un système linéaire est née de la constatation suivante : pour un système P stable, l'interconnexion de la Figure 2.3 reste stable pour tout système Q stable.

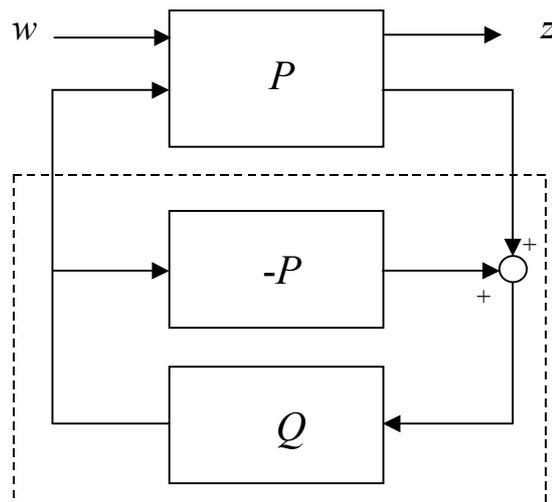


Figure 2.3. Principe de la paramétrisation de Youla

Cette paramétrisation est en fait déjà utilisée dans les années 50 en commande optimale [RF58] mais les implications fondamentales qui nous intéressent n'avaient pas encore été relevées. Ce n'est que dans les années 70 que ces travaux ont été repris par Kucera [Kuc74] dans le cas discret et par Youla et co-auteurs [YJB76] pour le filtrage de Wiener-Hopf, c'est le nom de Youla que l'histoire a retenu. On peut aussi remarquer que les premières utilisations ont été faites dans le cadre de la synthèse H_2 dans les années 50 alors que Zames [Zam81] a repris cette paramétrisation pour la commande H_∞ .

La forme générale de la paramétrisation a été finalement énoncée par Desoer et co-auteurs [DLMF80], en utilisant les représentations fractionnaires co-premières [Vid85]. Des interprétations avec une représentation d'état ont été mises en place en 1984 par Doyle [Doy84].

Des utilisations actuelles de cette paramétrisation existent dans [And98, CHDF01, NS99, Nie99].

La définition de la paramétrisation de Youla correspond au théorème suivant dont on trouve une démonstration dans [Mac89].

2.2. Définition

Il s'agit de paramétrer de manière complète la famille des correcteurs stabilisant pour un système donné. Nous présenterons dans un premier temps les concepts en utilisant le formalisme des fonctions de transfert et factorisations co-premières [Vid85] (pour son aspect historique et sa facilité de présentation), puis nous verrons l'intérêt de la formulation dans l'espace d'état dans certains cas particuliers. On fera l'hypothèse que P est stabilisable par u et détectable par y .

Théorème et définition 2.1 ([Mac89])

Soit $P_{yu} = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ des factorisations premières à gauche et à droite de P_{yu} , où M, N, \tilde{M} et \tilde{N} sont des matrices de transfert stables.

Soit de même les factorisations premières d'un correcteur K_0 stabilisant P :

$$K_0 = U_0V_0^{-1} = \tilde{V}_0^{-1}\tilde{U}_0 \quad (\text{Eq. 2.2.1})$$

qui de plus vérifient :

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & U_0 \\ N & V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.2.2})$$

Pour tout système stable Q de dimensions adéquates, on définit :

$$U = U_0 + MQ \quad (\text{Eq. 2.2.3})$$

$$V = V_0 + NQ \quad (\text{Eq. 2.2.4})$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + Q\tilde{M} \quad (\text{Eq. 2.2.5})$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_0 + Q\tilde{N} \quad (\text{Eq. 2.2.6})$$

Sous ces hypothèses, on vérifie l'égalité $UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$ et le correcteur $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$ est stabilisant pour P .

De plus pour tout correcteur stabilisant il existe des factorisations premières du type (2.2.3 à 2.2.6).

Remarques :

- Il important de noter que la factorisation du correcteur initial K_0 (2.2.1) avec la condition supplémentaire (2.2.2) existe toujours. Ce résultat est démontré dans [Vid85].
- La condition (2.2.2) peut être interprétée comme une condition de stabilité de la boucle fermée par le correcteur initial (voir [Vid85] p106 n°30). En effet, en utilisant les notations précédentes, les trois propositions suivantes sont équivalentes :
 - K_0 stabilise P
 - Il existe une factorisation co-première à gauche de K_0 telle que

$$\tilde{V}_0 M - \tilde{U}_0 N = I \quad (\text{Eq. 2.2.7})$$

- Il existe une factorisation co-première à droite de K_0 telle que

$$\tilde{M}V_0 - \tilde{N}U_0 = I \quad (\text{Eq. 2.2.8})$$

Ce théorème nous donne le résultat fondamental qu'une fois connu un correcteur stabilisant quelconque, on est capable de générer la famille de tous les correcteurs stabilisants.

Corollaire 2.1

Tout correcteur K stabilisant P peut être représenté sous la forme LFT de la Figure 2.4, où le système J admet la représentation suivante, d'ordre au plus $n + n_0$:

$$J = \begin{pmatrix} K_0 & \tilde{V}_0^{-1} \\ V_0^{-1} & -V_0^{-1}N \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.2.9})$$

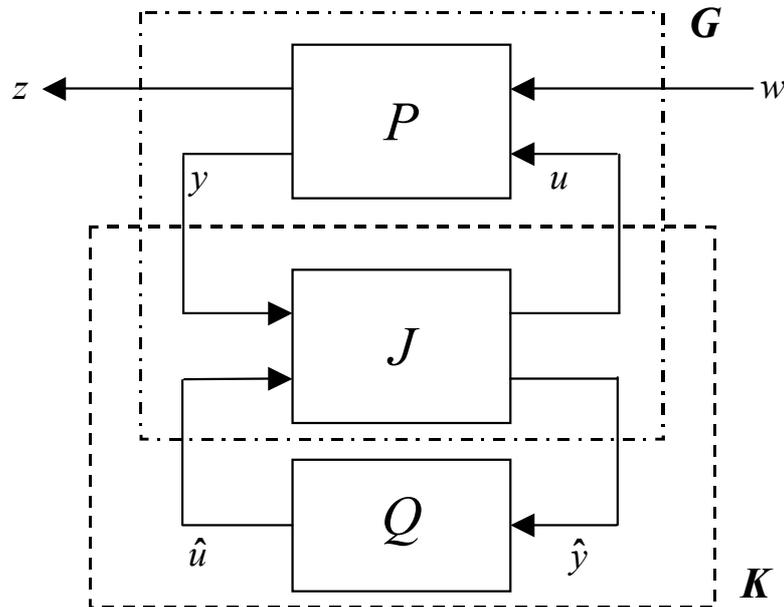


Figure 2.4. Forme générale de la paramétrisation de Youla

2.3. Propriétés

On supposera dans ce paragraphe et dans toute la suite du chapitre que les interconnexions sont bien posées (voir chapitre 1).

Les propriétés de la paramétrisation de Youla présentées ici correspondent aux propriétés utilisées usuellement dans la littérature [Mac89, BB91, Sch95, HHB98]. On remarquera tout de même que le formalisme par transfert est largement plus utilisé que les représentations d'état. On peut justifier cette remarque par la facilité de présentation et d'interprétation que procure la représentation par transferts.

Propriété 1

Par définition, il existe une bijection entre l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné et l'ensemble des systèmes stables.

Propriété 2

On note les différents transferts par les égalités :

$$P * K = P * J * Q = G * Q \text{ et } G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.3.1})$$

Alors

$$G_{22} = 0 \quad (\text{Eq. 2.3.2})$$

Preuve :

La démonstration se fait en identifiant les différents termes des transferts en boucle fermée.

On a en effet le relation suivante :

$$P * K = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (\text{Eq. 2.3.3})$$

D'après le théorème-définition de la paramétrisation de Youla, le correcteur K_0 stabilisant P admet une factorisation co-première $K_0 = U_0V_0^{-1} = \tilde{V}_0^{-1}\tilde{U}_0$ qui vérifie de plus la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & U_0 \\ N & V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.3.4})$$

Alors il existe un système stable Q tel que

$$K(I - P_{22}K)^{-1} = \underbrace{(U_0 + MQ)(V_0 + NQ)^{-1}}_K \left(I - \underbrace{\tilde{M}^{-1}\tilde{N}}_{P_{22}}(U_0 + MQ)(V_0 + NQ)^{-1} \right)^{-1} \quad (\text{Eq. 2.3.5})$$

Cette relation peut directement se réécrire sous une nouvelle forme qui permet de simplifier quelques termes :

$$K(I - P_{22}K)^{-1} = (U_0 + MQ) \left(\underbrace{\tilde{M}V_0 - \tilde{N}U_0}_I + \underbrace{(\tilde{M}N - \tilde{N}M)}_0 Q \right)^{-1} \tilde{M} \quad (\text{Eq. 2.3.6})$$

Ceci est possible car :

- $\tilde{M}N - \tilde{N}M = 0$ par définition de la factorisation première,
- $\tilde{M}V_0 - \tilde{N}U_0 = I$ par définition de K_0 .

On obtient donc l'égalité suivante :

$$P * K = P_{11} + P_{12}(U_0 + MQ)\tilde{M}P_{21} \quad (\text{Eq. 2.3.7})$$

soit encore :

$$P * K = (P_{11} + P_{12}U_0\tilde{M}P_{21}) + P_{12}MQ\tilde{M}P_{21} \quad (\text{Eq. 2.3.8})$$

On peut donc identifier cette relation à une autre expression du transfert en boucle fermée :

$$G * Q = G_{11} + G_{12}Q(I - G_{22}Q)^{-1}G_{21} \quad (\text{Eq. 2.3.9})$$

Ces relations sont valables pour tout transfert Q stable ; on en déduit donc qu'il est nécessaire d'avoir la propriété requise :

$$G_{22} = 0 \quad (\text{Eq. 2.3.10})$$

■

Cette propriété fondamentale exprime que le système G formé par l'interconnexion de P et J (Figure 2.4) a un transfert rigoureusement nul « vu » du couple entrées / sorties (\hat{u}, \hat{y}) .

Propriété 3 : interprétation dans l'espace d'état

Soit une représentation d'état du système G défini sur la Figure 2.4 :

$$G = \left(\begin{array}{c|cc} A_G & B_G & B_{\hat{u}} \\ \hline C_G & D_G & D_{Gu} \\ \hline C_{\hat{y}} & D_{\hat{y}G} & D_{\hat{y}\hat{u}} \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 2.3.11})$$

alors puisque $G_{22} = 0$, la propriété suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} C_{\hat{y}}(zI - A_G)^{-1} B_{\hat{u}} = 0 \\ D_{\hat{y}\hat{u}} = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.3.12})$$

Cette propriété exprime le fait que les sous-espaces non-commandable et non observable de G sont supplémentaires dans l'espace d'état. Ainsi, elle permet d'obtenir une représentation d'état qui soit simultanément sous forme commandable et observable. Le changement de base correspondant permet d'obtenir le partitionnement suivant avec une matrice d'état sous forme triangulaire par blocs :

$$G = \left(\begin{array}{cc|cc|c} A_1 & A_3 & B_{1,1} & B_{2,1} & B_{\hat{u}} \\ 0 & A_2 & B_{1,2} & B_{2,2} & 0 \\ \hline C_{1,1} & C_{1,2} & D_{11} & D_{12} & D_{1\hat{u}} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & D_{21} & D_{22} & D_{2\hat{u}} \\ \hline 0 & C_{\hat{y}} & D_{\hat{y}1} & D_{\hat{y}2} & 0 \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 2.3.13})$$

Remarque : Les matrices D_{ij} de G sont les mêmes que celles du système initial P pour deux raisons :

- la structure particulière du transfert direct de J ne génère aucune transmission directe de w vers z .
- le changement de base trigonalisant n'affecte pas non plus ces transmissions directes.

Propriété 4 : convexité

L'aspect le plus important pour la suite des travaux, c'est indiscutablement la convexité qui découle des deux propriétés suivantes :

- l'ensemble des fonctions de transfert stables est convexe ;
- le transfert de la boucle fermée est linéaire en Q :

$$G * Q = G_{11} + G_{12}QG_{21} \quad (\text{Eq. 2.3.14})$$

Cette propriété justifie que l'on utilise la paramétrisation de Youla pour transformer un problème de synthèse de correcteur en un problème de synthèse convexe. Nous verrons dans le chapitre consacré à la synthèse comment cette « transformation » peut se faire et quels en sont les avantages et les limites.

2.4. Réalisation pratique

Pour profiter de manière pratique des propriétés qui viennent d'être énoncées, nous allons présenter une méthodologie qui permet d'obtenir une représentation des systèmes G , J et Q tels qu'ils sont définis sur la Figure 2.4. Il est important de ne pas oublier qu'il n'y a pas unicité de la paramétrisation de Youla et que les cas proposés ici ont pour critère de choix la « simplicité ».

2.4.1. Cas général

Dans le cas d'un système P qui est stable, la Figure 2.3 peut être reprise avec la forme de la Figure 2.5.

Le système J de la Figure 2.4 apparaît graphiquement comme « l'intersection » des blocs G et K .

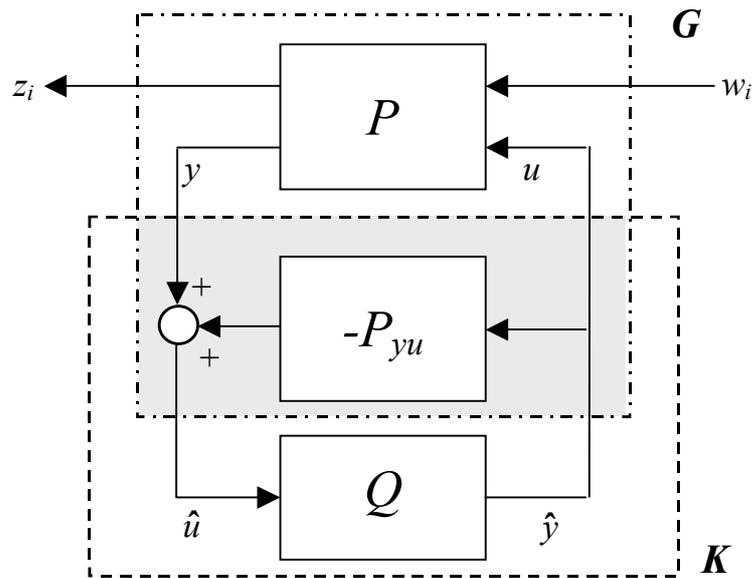


Figure 2.5 Paramétrisation de Youla pour un système stable

Il est clair sur cet exemple que si P n'est pas stable, la stabilité interne n'est plus assurée. Dans ce cas une stabilisation par un premier correcteur K_0 tel que $P * K_0$ soit stable de manière interne suffit à se ramener au cas précédent : $P * K_0$ remplace formellement P comme le montre la Figure 2.6.

Cette approche n'est pas satisfaisante dès que l'on s'intéresse à l'ordre des transferts mis en jeu. En effet si on suppose que P est d'ordre n , et K_0 d'ordre n_0 , le système d'interconnexion J est d'ordre $n + 2n_0$. Par contre d'après le corollaire 2.1, la représentation suivante de J convient :

$$J = \begin{pmatrix} K_0 & \tilde{V}_0^{-1} \\ V_0^{-1} & -V_0^{-1}N \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.4.1})$$

et l'ordre du système J est au plus $n + n_0$.

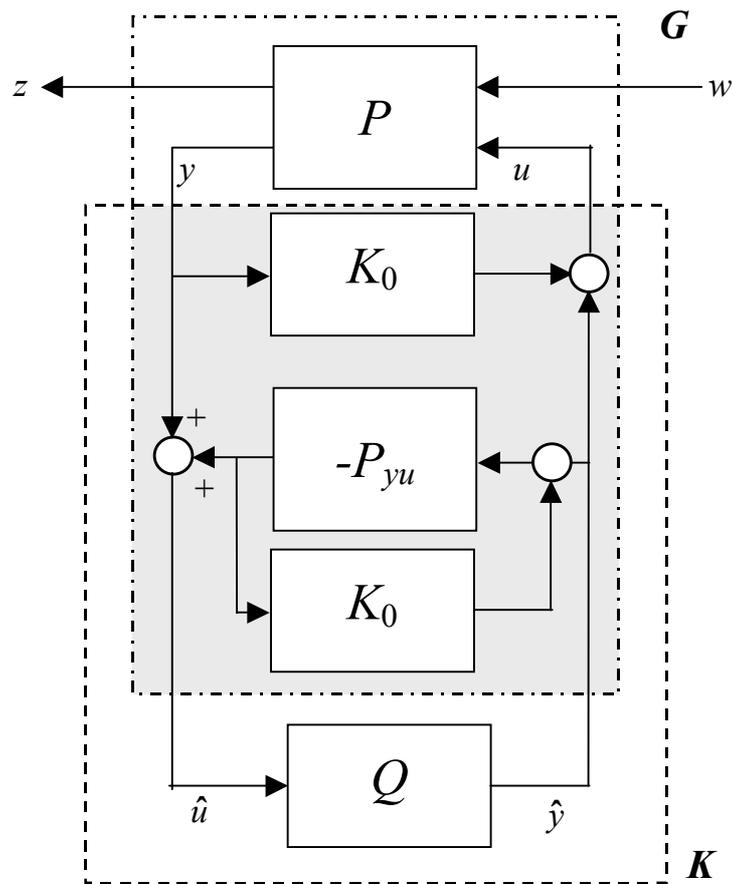


Figure 2.6 Paramétrisation de Youla d'un système instable

2.4.2. Cas minimal

En fait l'ordre minimal que l'on peut espérer obtenir pour le système d'interconnexion J est n , y compris pour un système instable en boucle ouverte.

En effet, il est démontré dans [Mac89] que l'ensemble des paramétrisations possibles (c'est-à-dire l'ensemble des systèmes d'interconnexion J candidats) est généré par l'ensemble des correcteurs à base d'observateur issus des représentations d'état de P , y compris les représentations non-minimales. Or nous allons voir que si la structure de K_0 est celle d'un observateur et d'un retour d'état, alors l'ordre de J est égal à l'ordre de l'observateur ; on démontre ainsi que l'ordre minimal de J est l'ordre du système P à stabiliser. De plus, le calcul¹ montre qu'une représentation d'état simple existe pour J .

¹ Ce calcul a été présenté pour la première fois par Doyle dans la note technique [Doy84].

Soit P_{yu} le système « vu » par le couple entrée / sortie (u, y) qui admet le représentation d'état suivante :

$$P_{yu} = \left(\begin{array}{c|c} A & B_u \\ \hline C_y & D_{yu} \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 2.4.2})$$

Alors on peut écrire une représentation d'état du système d'interconnexion J sous la forme suivante :

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} A - B_u K_c - K_f C_y & K_f & B_u & \\ \hline -K_c & 0 & I_{n_u} & \\ -C_y & I_{n_y} & 0 & \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 2.4.3})$$

où K_c et K_f sont respectivement les gains d'un retour d'état stabilisant et d'un observateur stable (Figure 2.7).

Le théorème qui suit formalise ce résultat et représente la motivation principale pour la structuration de correcteur. En effet, il garantit que cette entreprise a au moins une solution.

Théorème 2.2 : structure observateur / retour d'état

Tout correcteur K_0 peut s'écrire sous la forme de l'interconnexion d'un correcteur de type observateur – retour d'état et d'un paramètre de Youla (système stable).

Nous avons donc une démarche constructive pour obtenir la paramétrisation de Youla dans différents cas. Cependant seule la dernière retiendra notre attention car elle permet de donner au système initial quelques propriétés préliminaires qui s'avèreront intéressantes.

La question qui se pose maintenant est de savoir comment peut-on à partir d'un correcteur quelconque obtenir une paramétrisation de Youla sous la forme minimale, c'est-à-dire observateur / retour d'état ; c'est ce que nous appellerons la structuration de correcteur.

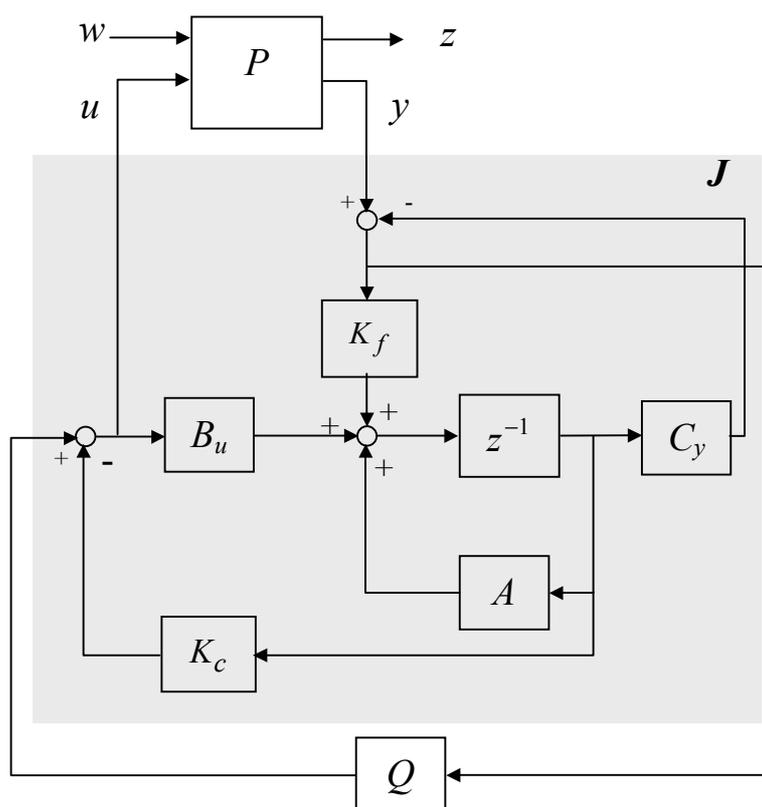


Figure 2.7 Paramétrisation de Youla d'un correcteur par retour d'état estimé

2.5. Structuration de correcteur

L'intérêt de cette structuration est double : il permet d'obtenir une forme de paramétrisation de Youla simple, mais la raison historique de cette structuration réside dans les avantages industriels de tels correcteurs. En effet les correcteurs de type observateur – retour d'état ont l'avantage de pouvoir être implantés de manière simple dans un contexte industriel avec des contraintes d'embarquabilité. De plus, de tels correcteurs ont des interprétations modales simples. Ce sont donc ces raisons qui ont motivé les travaux qui visent à trouver une structure équivalente observateur / retour d'état pour un correcteur quelconque. Les travaux de Schumacher [Sch80] montrent qu'en général, tout correcteur peut être mis sous la forme retour d'état estimé ; Bender et Fowell [Ben85, FB85] ont quant à eux formulé une méthode simple de transformation pour un correcteur d'ordre égal à celui du système de synthèse ; les derniers travaux sur le sujet sont ceux d'Alazard et Apkarian [AA99].

Dans notre cas, l'équivalence entre les structures est motivée par la réduction de l'ordre du système d'interconnexion J et l'extraction naturelle d'un paramètre de Youla, point clé de notre méthode.

Nous allons voir dans ce paragraphe que quelques difficultés techniques subsistent lorsqu'il s'agit de résoudre les problèmes numériques et surtout les difficultés induites par la non unicité des solutions.

2.5.1. Généralités

Soit un correcteur K d'ordre k stabilisant le système P d'ordre n et défini par les équations d'état suivantes :

$$K = \left(\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 2.5.1})$$

On cherche à mettre le correcteur K sous la forme $\hat{K} = LFT(J, Q)$ (Figure 2.8.b), qui est équivalente à la structure de la Figure 2.8 (a) lorsque J est décrit par les relations du paragraphe précédent (illustrées par la Figure 2.7) et Q par la représentation suivante :

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} A_Q & B_Q \\ \hline C_Q & D_Q \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 2.5.2})$$

Dans le cas général d'un paramètre de Youla dynamique, la représentation d'état correspondant à la structure de la Figure 2.8 (b) s'écrit :

$$\hat{K} = \left(\begin{array}{cc|c} A - B_u K_c - K_f C_y - B_u D_Q C_y & B_u C_Q & K_f + B_u D_Q \\ -B_Q C_y & A_Q & B_Q \\ \hline -K_c - D_Q C_y & C_Q & D_Q \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 2.5.3})$$

le vecteur d'état étant :

$$X = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ x_Q \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.4})$$

La question est donc de trouver les matrices de gain K_c , K_f et une représentation d'état de Q telles que les représentations d'état de K et \hat{K} soient équivalentes.

Cherchons pour cela un changement de base T tel que :

$$x_K = T \begin{pmatrix} \hat{x} \\ x_Q \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.5})$$

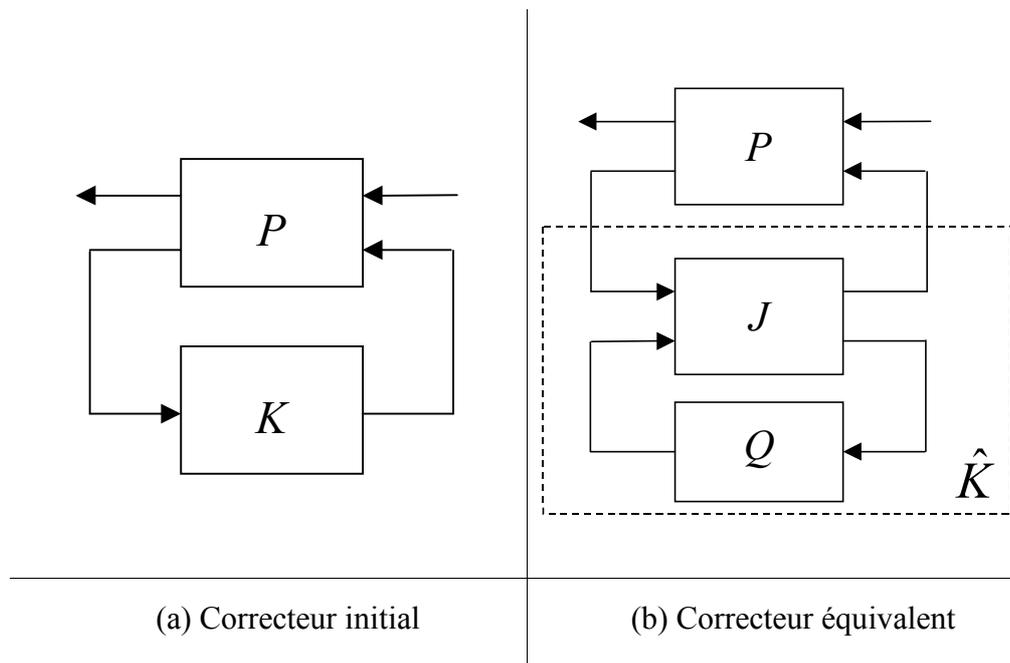


Figure 2.8. Equivalence avec un correcteur de type observateur / retour d'état utilisant la paramétrisation de Youla

L'équivalence est obtenue quand les égalités matricielles suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} T^{-1}A_K T = \begin{pmatrix} A - B_u K_c - K_f C_y - B_u D_Q C_y & B_u C_Q \\ -B_Q C_y & A_Q \end{pmatrix} \\ T^{-1}B_K = \begin{pmatrix} K_f + B_u D_Q \\ B_Q \end{pmatrix} \\ C_K T = \begin{pmatrix} -K_c - D_Q C_y & C_Q \end{pmatrix} \\ D_K = D_Q \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.6})$$

On distingue alors trois cas distincts qui ne se traitent pas de la même manière :

- l'ordre du correcteur est égal à celui de P ,
- l'ordre du correcteur est strictement supérieur à celui de P ,
- l'ordre du correcteur est strictement inférieur à celui de P .

2.5.2. Cas d'ordre plein

Lorsque le correcteur initial est d'ordre égal à celui de P , alors le système Q se réduit à la matrice de gain statique $Q = D_Q$. Les égalités matricielles précédentes (Eq. 2.5.6) deviennent :

$$\begin{cases} T^{-1}A_K T = A - B_u K_c - K_f C_y - B_u Q C_y \\ T^{-1}B_K = K_f + B_u Q \\ C_K T = -K_c - Q C_y \\ D_K = Q \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.7})$$

La détermination de Q est immédiate et celle de la paire (K_c, K_f) est subordonnée à T . Les substitutions de Q , K_c et K_f dans la première équation conduisent à une équation de Riccati généralisée d'inconnue T :

$$A_K T - T(A + B_u D_K C_y) - T B_u C_K T + B_K C_y = 0 \quad (\text{Eq. 2.5.8})$$

On remarquera que malgré les substitutions on garde un raisonnement par équivalence (à partir de T et Q , on est capable de reconstruire la paire (K_c, K_f)). En effet le système est équivalent à :

$$\begin{cases} A_K T - T(A + B_u D_K C_y) - T B_u C_K T + B_K C_y = 0 \\ K_f = T^{-1}B_K - B_u Q \\ K_c = -C_K T - Q C_y \\ Q = D_K \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.9})$$

Il suffit donc de résoudre l'équation de Riccati généralisée pour répondre au problème.

2.5.3. Résolution de l'équation de Riccati généralisée

Il est assez peu commun de résoudre ce genre d'équation mais la méthode est la même que pour les équations symétriques que l'on obtient en commande LQ : la méthode des espaces invariant. Le livre de référence pour la résolution de ces équation est [BLW91].

2.5.3.1. Cas général

Soit l'équation généralisée en X suivante :

$$-XA - XBX + C + DX = 0 \quad (\text{Eq. 2.5.10})$$

où les matrices X , A , B , C et D sont de tailles respectives $m \times n$, $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ et $m \times m$. Et on définit l'Hamiltonien H de l'équation par :

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)} \quad (\text{Eq. 2.5.11})$$

Le théorème suivant donne les conditions d'existence d'une solution et surtout la forme de la solution.

Théorème 2.3 : solutions de l'équation de Riccati [BLW91]

L'équation (Eq. 2.5.10) a une solution $X \in \mathbf{C}^{m \times n}$ si et seulement si il existe un ensemble de n vecteurs propres $\{v_1 \dots v_n\}$ de l'Hamiltonien H tels que

$$v_i = \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (\text{Eq. 2.5.12})$$

où $y_i \in \mathbf{C}^n$ et $\{y_1 \dots y_n\}$ forme une base de \mathbf{C}^n .

De plus en utilisant les notations suivantes :

$$Y = (y_1 \quad \dots \quad y_n) \in \mathbf{C}^{n \times n} \text{ et } Z = (z_1 \quad \dots \quad z_n) \in \mathbf{C}^{m \times n} \quad (\text{Eq. 2.5.13})$$

toute solution est de la forme $X = ZY^{-1}$ pour un ensemble de vecteurs propres donné.

Le théorème 2.3 montre que pour un choix de valeurs propres donné, la solution X est unique.

A titre de remarque, on peut étudier plus particulièrement le cas où toutes les valeurs propres choisies sont de multiplicité 1. Dans ce cas, pour un choix de n valeurs propres de H (choix de n parmi $n + m$) le nombre de solutions est combinatoire.

En effet, pour un choix donné de valeurs propres, le passage d'un jeu de vecteurs propres à un autre se fait par une combinaison linéaire de transformations de type permutation et multiplication scalaire ; et ces transformations sont « annulées » par la forme même de la solution générale.

A titre d'exemple, on peut considérer le problème suivant. Soit P une telle transformation, alors comme la permutation se fait de manière identique sur Y et Z , on peut écrire :

$$P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.14})$$

On peut donc écrire ce changement avec les relations suivantes :

$$Y' = Yp \text{ et } Z' = Zp \quad (\text{Eq. 2.5.15})$$

Et la solution de l'équation reste inchangée comme le montre cette série d'égalité :

$$X' = Z' Y'^{-1} = Z p p^{-1} Y = Z Y^{-1} = X \quad (\text{Eq. 2.5.16})$$

Par contre si la multiplicité des valeurs propres est supérieure à 1, le choix d'une base donnée pour un espace invariant n'est plus unique à une direction près. Ceci se traduit sur la matrice P par l'existence d'une transformation du type :

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.17})$$

La solution X qui en découle est évidemment différente. On verra dans la suite les difficultés qui apparaissent dans ce cas.

2.5.3.2. Application à notre problème

Dans le problème qui nous intéresse, la définition l'Hamiltonien H de l'équation (2.5.9) devient :

$$H = \begin{pmatrix} A + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.18})$$

L'équation (2.5.9) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$(-T \quad I_n) H \begin{pmatrix} I_n \\ T \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{Eq. 2.5.19})$$

Soient $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ une matrice formée à partir de n valeurs propres de H , et $U = (u_1 \cdots u_n)$ la matrice des vecteurs propres associés :

$$HU = U\Lambda \quad (\text{Eq. 2.5.20})$$

En partitionnant U de la manière suivante :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.21})$$

le théorème 2.3 permet d'affirmer que $T = U_2 U_1^{-1}$ est solution du problème. De plus les n valeurs propres affectées à la matrice $A - B_u K_c$ (qui correspondent à la dynamique de retour d'état) sont les valeurs propres retenues dans Λ . En effet, cette propriété s'explique par le calcul ; d'une part on peut écrire :

$$A - B_u K_c = A + B_u (C_K T + D_K C_y) \text{ d'après la relation (2.5.9)}$$

$$\text{et } (A + B_u D_K C_y) U_1 + B_u C_K U_2 = U_1 \Lambda \text{ d'après la relation (2.5.20)}$$

On en déduit donc :

$$A + B_u C_K T + B_u D_K C_y = U_1 \Lambda U_1^{-1} = A - B_u K_c \quad (\text{Eq. 2.5.22})$$

Par voie de conséquence, les n valeurs propres non retenues dans Λ sont les valeurs propres de la matrice $A - K_f C_y$ qui correspond à la dynamique de reconstruction de l'état.

Cette méthode de résolution des équations de Riccati impose de choisir une partition des valeurs propres pour les espaces invariants (l'un lié à l'estimation, l'autre lié à la commande). Afin de réduire ce choix, on peut tenir compte de ces quelques remarques d'ordre général [AA99] :

- les espaces invariants seront choisis auto-conjugués afin d'obtenir des matrices de gain réelles c'est-à-dire que l'on ne doit pas séparer les paires de pôles complexes conjugués ;
- les valeurs propres non commandables de (A, B_u) doivent être retenues dans la matrice Λ puisqu'elles ne sont pas modifiées par le retour d'état ; sinon la matrice U_1 est singulière ;
- les valeurs propres non observables de (A, C_y) doivent être écartées de la matrice Λ puisqu'elles ne sont pas modifiées par le gain de l'observateur ; sinon la matrice U_2 est singulière ;
- les n valeurs propres retenues sont en général *les plus proches* de celles du système en boucle ouverte pour que les dynamiques du retour d'état soient dominantes.

Le dernier critère de choix devra être la cohérence numérique qui résulte de la structuration du correcteur ; on remarque en effet que dans certains cas, les résultats sont sensibles aux choix qui sont faits même si du point de vue entrée / sortie l'équivalence est garantie.

2.5.4. Correcteur d'ordre supérieur à celui du système

Dans le cas où $n_K > n$, en repartant des équations (2.5.6), l'équation de Riccati à résoudre peut s'écrire comme dans le cas d'ordre plein sous la forme

$$\begin{pmatrix} -T & I_{n_K} \end{pmatrix} H' \begin{pmatrix} I_{n_K} \\ T \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{Eq. 2.5.23})$$

avec la matrice T de dimension $n_K \times n_K$ et la matrice H' augmentée

$$H' = \begin{pmatrix} A + B_u D_K C_y & 0 & B_u C_K \\ 0 & A_Q & 0 \\ B_K & 0 & A_K \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.24})$$

En effet, la première équation (2.5.7) devient :

$$\begin{aligned} T^{-1} A_K T &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_f + B_u D_Q \\ B_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_y & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} B_u \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K_c - D_Q C_y & C_Q \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} B_u \\ 0 \end{pmatrix} D_Q \begin{pmatrix} C_y & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_Q \end{pmatrix} - T^{-1} B_K \begin{pmatrix} C_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_u \\ 0 \end{pmatrix} C_K T + \begin{pmatrix} B_u \\ 0 \end{pmatrix} D_K \begin{pmatrix} C_y & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit l'équation de Riccati généralisée en T :

$$A_K T = T \begin{pmatrix} A + B_u D_K C_y & 0 \\ 0 & A_Q \end{pmatrix} - B_K \begin{pmatrix} C_y & 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} B_u \\ 0 \end{pmatrix} C_K T \quad (\text{Eq. 2.5.25})$$

On retrouve donc la structure de l'Hamiltonien augmenté et on a de plus :

$$T \in R^{n_K \times n_K}, \quad H' \in R^{(n+n_Q+n_K) \times (n+n_Q+n_K)} \quad \text{avec } n+n_Q = n_K$$

La structure particulière de l'équation (2.5.25) conduit à deux équations de Riccati indépendantes. En effet en utilisant la méthode des espaces invariants (cf. paragraphe précédent), on choisit n_K valeurs propres de H' parmi $2n_K$, d'où $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_{n_K})$ la matrice des valeurs propres et \tilde{U} la matrice des vecteurs propres associés. En partitionnant la matrice \tilde{U} de la manière suivante :

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.26})$$

on se ramène au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} H \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_2 \end{pmatrix} \Lambda \\ A_Q U_{12} = U_{12} \Lambda \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.27})$$

où la matrice H est celle définie au paragraphe 2.5.3.2. La première équation est donc celle qui correspond au cas du système d'ordre plein, alors que le second terme du système concerne les dynamiques du paramètre de Youla. La résolution se fait donc exactement de la même manière que dans le cas d'ordre plein à la précision près que la relation suivante doit être vérifiée :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_2 \end{pmatrix} = n + n_Q = n_K \quad (\text{Eq. 2.5.28})$$

Les précautions de choix des valeurs propres restent identiques et la solution qui en découle s'écrit :

$$T = U_2 \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_2 \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{Eq. 2.5.29})$$

Le choix combinatoire est augmenté par rapport au cas précédent et il n'existe pas de règle qui garantisse un meilleur comportement selon ces choix.

Le raisonnement que nous venons de mener procède par conditions nécessaires, pour conclure à l'équivalence des correcteurs, il faut montrer que le cheminement inverse est aussi possible. C'est-à-dire qu'à partir du correcteur K et de la matrice T , on peut reconstruire les matrices K_c , K_f et le système Q . On utilise alors le système de départ (2.5.6) et on procède élément par élément.

On commence par :

$$D_Q = D_K \quad (\text{Eq. 2.5.30})$$

On peut alors déterminer K_c et C_Q par la relation :

$$\begin{pmatrix} -K_c - D_K C_y & C_Q \end{pmatrix} = C_K T \quad (\text{Eq. 2.5.31})$$

De même K_f et B_Q se déduisent de :

$$\begin{pmatrix} K_f + B_u D_K \\ B_Q \end{pmatrix} = T^{-1} B_K \quad (\text{Eq. 2.5.32})$$

La dernière équation permet enfin de déterminer la matrice A_Q . En effet :

$$T^{-1} A_K T = \begin{pmatrix} A - B_u K_c - K_f C_y - B_u D_Q & B_u C_Q \\ -B_Q C_y & A_Q \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.33})$$

On en déduit l'expression de A_Q :

$$A_Q = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_K} \end{pmatrix} T^{-1} A_K T \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_K} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.34})$$

Nous avons bien reconstruit l'ensemble des paramètres nécessaires à la mise en place du correcteur sous la forme observateur / retour d'état augmenté par le paramètre de Youla.

2.5.5. Correcteur d'ordre réduit

Dans le cas où le correcteur initial est d'ordre réduit par rapport au modèle de synthèse, il n'est plus possible d'utiliser un observateur d'ordre plein du même type que celui du paragraphe 2.5.2. C'est pourquoi on s'intéresse ici aux observateurs d'ordres réduits. Le but de ce paragraphe est de généraliser la démarche précédente pour les observateurs de Luenberger et dans le cas où c'est possible, à des observateurs d'ordre plus réduit encore.

Remarque :

il n'est plus question ici de la paramétrisation de Youla ; en effet la matrice J serait d'ordre réduit, ce qui est incompatible avec le paragraphe 2.4.2.

2.5.5.1. Observateur de Luenberger

Dans le cas d'un observateur d'ordre réduit, on ne reconstruit qu'une partie z de l'état défini par une matrice de projection T :

$$z = Tx \quad T \in R^{n_K \times n} \quad (\text{Eq. 2.5.35})$$

Un observateur de z est défini par la relation suivante :

$$\delta\hat{z} = F\hat{z} + Gy + TB_u u \quad \text{où } \delta x = \begin{cases} \dot{x} & \text{en continu} \\ x_{k+1} & \text{en discret} \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.36})$$

$$\text{avec } \begin{cases} TA - FT = GC_y \\ F \text{ stable} \end{cases} \quad \text{et } F \in R^{n_K \times n_K} \quad (\text{Eq. 2.5.37})$$

Le première relation assure la convergence de \hat{z} vers z , alors que le second point assure la stabilité de l'observateur.

Remarque :

Soit $\varepsilon = z - \hat{z}$, alors $\delta\varepsilon = F\varepsilon$

On peut alors construire un correcteur de type observateur / retour d'état de la forme suivante :

$$\text{Observation :} \quad \delta\hat{z} = F\hat{z} + Gy + TB_u u \quad (\text{Eq. 2.5.38})$$

$$\text{Reconstruction :} \quad \hat{x} = H_1 \hat{z} + H_2 y \quad (\text{Eq. 2.5.39})$$

$$\text{Retour d'état :} \quad u = -K_c \hat{x} + Q(y - C_y \hat{x}) \quad (\text{Eq. 2.5.40})$$

Avec les contraintes :

$$TA - FT = GC_y \quad \text{et} \quad H_1 T + H_2 C_y = I_n \quad (\text{Eq. 2.5.41})$$

C'est donc à cette structure que nous allons identifier le correcteur que l'on cherche à structurer. Afin de déterminer le correcteur à base d'observateur, il faut donc déterminer les matrices F , G , T , H_1 , H_2 , K_c et Q et garantir l'équivalence des deux correcteurs.

Remarque : le terme $Q(y - C_y \hat{x})$ a été ajouté à l'équation de retour d'état pour calquer la structure précédente.

2.5.5.2. Identification des correcteurs

La matrice T représente la projection de l'état complet dans un espace d'état réduit dans une base particulière (si il n'y avait pas réduction d'ordre il s'agirait simplement d'un changement de base). Ainsi, on choisit la base de l'espace réduit telle que :

$$x_K = \hat{z} = T\hat{x} \quad (\text{Eq. 2.5.42})$$

Il s'agit maintenant de trouver comment identifier chacun des termes.

Calcul du changement de base T

En éliminant les termes u et \hat{x} de l'équation d'évolution, on obtient :

$$\begin{cases} \delta \hat{z} = (F + TB_u (-K_c - QC_y) H_1) \hat{z} + (G + TB_u (Q - K_c H_2 - QC_y H_2)) y \\ u = (-K_c - QC_y) H_1 \hat{z} + (Q - K_c H_2 - QC_y H_2) y \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.43})$$

L'équation de mesure permet d'en déduire les égalités suivantes :

$$C_K = (-K_c - QC_y) H_1 \quad (\text{Eq. 2.5.44})$$

$$D_K = Q - K_c H_2 - QC_y H_2 \quad (\text{Eq. 2.5.45})$$

On en déduit ainsi une représentation d'état du correcteur :

$$\begin{cases} \delta \hat{z} = (F + TB_u C_K) \hat{z} + (G + TB_u D_K) y \\ u = C_K \hat{z} + D_K y \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.46})$$

Les équations manquantes sont donc :

$$\begin{cases} A_K = F + TB_u C_K \\ B_K = G + TB_u D_K \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.47})$$

Ces dernières relations montrent qu'une fois évaluée T , on déduit immédiatement les matrices F et G .

La condition de convergence asymptotique de l'observateur $TA - FT = GC_y$ se transforme en l'équation de Riccati généralisée :

$$TA - (A_K - TB_u C_K)T = (B_K - TB_u D_K)C_y \quad (\text{Eq. 2.5.48})$$

On retrouve donc une fois de plus l'équation du cas d'ordre plein (voir paragraphe 2.5.2) mais avec une matrice T rectangulaire. Cette équation s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} -T & I_{n_K} \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} I_n \\ T \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{Eq. 2.5.49})$$

$$\text{avec } H = \begin{pmatrix} A + B_u D_K C_y & B C_K \\ B_K C_y & A_K \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.50})$$

la matrice H étant également la matrice d'évolution de la boucle fermée.

La résolution de l'équation (2.5.48) donne T , et on en déduit F et G . Les inconnues qui restent sont H_1 , H_2 , K_c et Q .

Calcul de K_c

En utilisant les trois équations suivantes,

$$\begin{cases} C_K = -(K_c + Q C_y) H_1 \\ D_K = -(K_c + Q C_y) H_2 + Q \\ H_1 T + H_2 C_y = I_n \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.51})$$

le calcul de $C_K T + D_K C_y$ conduit à l'expression de K_c :

$$K_c = -C_K T - D_K C_y \quad (\text{Eq. 2.5.52})$$

Calcul de H_1 , H_2 et Q

La détermination de H_1 et H_2 se fait par la résolution de l'équation

$$(H_1 \ H_2) \begin{pmatrix} T \\ C_y \end{pmatrix} = I_n \quad (\text{Eq. 2.5.53})$$

avec $H_1 \in \mathbf{R}^{n \times n_K}$ et $H_2 \in \mathbf{R}^{n \times n_y}$

On distinguera trois cas de figure pour la résolution de cette équation linéaire :

- $n_K + n_y = n$ est le seul cas où la concaténation de T et C_y peut être inversible.
- $n - n_y < n_K < n$
- $n_K < n - n_y$

Le premier cas reste le plus intéressant car il permet d'obtenir un observateur de type réduit classique.

2.5.5.2.1 Cas particulier où $n_K + n_y = n$

Dans le cas d'un problème bien posé, la matrice $\begin{pmatrix} T \\ C_y \end{pmatrix}$ est inversible.

En effet, T représente la partie reconstruite de manière dynamique, alors que C_y représente la partie de l'état reconstruite algébriquement. Si cette matrice n'est pas inversible, c'est qu'il y a redondance de l'information et donc cette hypothèse peut être écartée.

On obtient donc une solution algébrique au problème :

$$(H_1 \ H_2) = \begin{pmatrix} T \\ C_y \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{Eq. 2.5.54})$$

Pour calculer alors le dernier paramètre, on utilise la propriété de commutativité de l'inverse qui se traduit par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} T \\ C_y \end{pmatrix} (H_1 \ H_2) = \begin{pmatrix} TH_1 & TH_2 \\ C_y H_1 & C_y H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_K} & 0 \\ 0 & I_{n_y} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.55})$$

Par identification bloc par bloc, on en déduit que $C_y H_1 = 0$ et $C_y H_2 = I_{n_y}$. On peut alors en déduire les égalités suivantes en C_K :

$$C_K = -K_c H_1 - \underbrace{Q C_y H_1}_0$$

$$C_K = -K_c H_1 \quad (\text{Eq. 2.5.56})$$

et en D_K :

$$D_K = -K_c H_2 - \underbrace{Q C_y H_2 + Q}_0$$

$$D_K = -K_c H_2 \quad (\text{Eq. 2.5.57})$$

On remarque que le paramètre Q peut être quelconque. On ne se trouve donc plus dans le cadre de la paramétrisation de Youla comme annoncé en introduction¹ puisque ce paramètre ne peut évidemment pas engendrer l'ensemble des correcteurs qui stabilisent le système P initial.

Remarque :

La propriété fondamentale de la paramétrisation de Youla $G_{22} = 0$ formulée au paragraphe 2.3 est une condition nécessaire mais pas suffisante.

La forme finale du correcteur structuré sous forme observateur réduit et retour d'état correspond à la représentation sous forme condensée suivante :

$$\begin{aligned} \delta \hat{z} &= (F - TBK_c H_1) \hat{z} + (G - TBH_2) y \\ \hat{x} &= H_1 \hat{z} + H_2 y \end{aligned}$$

$$u = -K_c \hat{x} \quad (\text{Eq. 2.5.58})$$

¹ Du point de vue intuitif, on peut interpréter ceci comme le fait que les contraintes supplémentaires de structure réduisent le nombre de degrés de liberté et ne permettent donc plus d'avoir une paramétrisation de Youla.

La forme classique est donnée au paragraphe 2.5.5.1.

La matrice T intervient toujours (contrairement au cas d'ordre plein) car elle représente la partition des variables d'état qui sont reconstruites algébriquement et celles qui le sont dynamiquement.

2.5.5.2.2 Etude du cas $n - n_y < n_K < n$

Si on reconsidère le système linéaire à résoudre, il comporte $n(n_K + n_y)$ inconnues qui sont les coefficients de H_1 et H_2 , et n^2 équations :

$$H_1 T + H_2 C_y = I_n \quad (\text{Eq. 2.5.59})$$

Et comme dans le cas précédent si les sous-systèmes de n^2 équations n'ont pas de solution c'est que le problème de reconstruction de l'état est mal posé. Nous nous limiterons donc au cas favorable.

Une solution possible est d'utiliser la pseudo-inverse :

$$\begin{aligned} H_1 &= (T^T T + C_y^T C_y)^{-1} T^T \\ H_2 &= (T^T T + C_y^T C_y)^{-1} C_y^T \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.5.60})$$

Et pour terminer, la solution est validée si le système linéaire en Q a une solution :

$$\begin{aligned} C_K + K_c H_1 &= Q C_y H_1 & (1) \\ D_K + K_c H_2 &= Q (-C_y H_2 + I_{n_y}) & (2) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.5.61})$$

Or les deux équations sont liées par la combinaison linéaire suivante :

$$(1) \times T + (2) \times C_y = 0 \quad (\text{Eq. 2.5.62})$$

Il y a $n_u \times n_y$ inconnues qui sont les coefficients de Q , il suffit donc de résoudre $n_u \times n_y$ équations indépendantes et vérifier la cohérence dans les autres équations.

On remarque qu'il n'y a pas de solution générique au problème, ni de méthode générale de résolution. On peut simplement poser le problème non linéaire général en substituant K_c . Le système devient donc :

$$\begin{aligned} C_K(I_n - TH_1) &= (D_K - Q)C_y H_1 \\ (D_K - Q)(I_{n_y} - C_y H_2) &= C_K T H_2 \\ H_2 T + H_2 C_y &= I_n \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.5.63})$$

avec pour inconnues H_1 , H_2 et Q .

Il est difficile dans le cas général de conclure à une structure fixe ; la solution pour contourner cette difficulté est soit d'opérer une réduction d'ordre qui permette de se ramener à un observateur d'ordre réduit classique soit au contraire de rajouter des dynamiques (en général rapides) pour se ramener au cas d'un observateur d'ordre plein.

2.5.5.2.3 Etude du cas $n_K < n - n_y$

Dans le cas où $n_K < n - n_y$, le principe de séparation qui a permis de justifier l'approche par observateur n'est plus valide, on ne peut donc plus appliquer les mêmes arguments que précédemment.

Une solution consiste en la création d'un correcteur augmenté K_{aug} qui permet de se ramener au cas précédent :

$$K_{aug} = \left(\begin{array}{cc|c} A_K & 0 & B_K \\ 0 & A_2 & B_2 \quad \updownarrow n - (n_K + n_y) \\ \hline C_K & C_2 & D_K \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 2.5.64})$$

Le problème est donc ramené au choix des trois matrices A_2 , B_2 et C_2 . Pour ce faire, on peut énoncer un certain nombre de conditions nécessaires mais il n'existe pas de condition suffisante.

Nous ne donnerons ici que quelques pistes d'investigation pour comprendre où se situent les difficultés.

En se ramenant au cas précédent, on doit résoudre l'équation de Riccati généralisée suivante :

$$\begin{pmatrix} A_K & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} T - T (A + B_u D_K C_y) - T B (C_K C_2) T + \begin{pmatrix} B_K \\ B_2 \end{pmatrix} C_y = 0 \quad (\text{Eq. 2.5.65})$$

$$\text{avec } T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

La réécriture non matricielle aboutit à deux équations en T_1 et T_2 :

$$\begin{cases} A_K T_1 - T_1 (A + B_u D_K C_y) - T_1 B_u C_K T_1 - T_1 B_u C_2 T_2 + B_K C_y = 0 \\ A_2 T_2 - T_2 (A + B_u D_K C_y) - T_2 B_u C_K T_1 + B_2 C_y - T_2 B_u C_2 T_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.66})$$

Une condition simple qui permet de découpler les équations est de choisir $C_2 = 0$; et on obtient ainsi :

$$\begin{cases} A_K T_1 - T_1 (A + B_u D_K C_y) - T_1 B_u C_K T_1 + B_K C_y = 0 \\ A_2 T_2 - T_2 (A + B_u D_K C_y + B C_K T_1) + B_2 C_y = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.5.67})$$

La première équation est une équation de Riccati généralisée en T_1 du même type que précédemment, qui peut se résoudre par la méthode des espaces invariants (voir à ce sujet le paragraphe 2.5.3). Et la seconde équation est alors linéaire en T_2 et c'est sur cette équation qu'interviennent les paramètres A_2 et B_2 .

Pour guider le choix de ces paramètres, voyons comment se détermine le correcteur structuré.

En reprenant les notations de l'observateur de Luenberger (voir paragraphe 2.5.5.1), on obtient :

$$F = \begin{pmatrix} A_K - T_1 B_u C_K & 0 \\ -T_2 B_u C_K & A_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.68})$$

$$G = \begin{pmatrix} B_K - T_1 B_u D_K \\ B_2 - T_2 B_u D_K \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5.69})$$

$$K_c = -C_K T_1 - D_K C_y \quad (\text{Eq. 2.5.70})$$

$$(H_{11} \quad H_{12}) \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + H_2 C_y = I_n \quad (\text{Eq. 2.5.71})$$

$$\text{ou bien } \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_2 \\ \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ n_K & n-n_K-n_y & n_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ C_y \end{pmatrix} = I_n \quad (\text{Eq. 2.5.72})$$

Il suffit donc que la dernière équation aie une solution et pour cela, une condition suffisante est que la matrice créée par la concaténation de T et C_y soit inversible.

La matrice $\begin{pmatrix} T_1^T & C_y^T \end{pmatrix}^T$ est généralement de rang plein lorsque le problème est bien posé (voir paragraphe 2.5.5.2) mais il s'agit de trouver T_2 telle que :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ C_y \end{pmatrix} = n \quad (\text{Eq. 2.5.73})$$

Remarque :

- Cette matrice est carrée par construction.
- On montre en annexe (paragraphe 2.7) comment garantir que T_2 soit de rang plein et à quelle condition cela est possible, mais on ne peut pas garantir le rang de la matrice qui apparaît dans la relation (2.5.73).
- Il est donc bien difficile de structurer un correcteur d'ordre inférieur à celui du système à commander mais dans certains cas favorables, nous avons montré la marche à suivre pour aboutir à un résultat.

2.6. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre quelques outils utiles pour la synthèse et l'analyse de correcteurs dans le cadre de l'automatique linéaire. La paramétrisation de Youla ou paramétrisation de l'ensemble des correcteurs stabilisant représente un outil fondamental car il permet de conférer un certain nombre de propriétés au nouveau système considéré et en particulier de rendre la boucle fermée linéaire en le paramètre de synthèse (propriété 4) ; et c'est justement l'objet du chapitre suivant d'utiliser ces propriétés.

Cependant du fait de la multiplicité des représentations possibles, il est difficile de systématiser la façon de l'obtenir ; c'est pourquoi il nous a semblé important de présenter une méthode de mise en œuvre qui permettent de s'affranchir de cette difficulté de choix (le critère choisi étant la minimalité de l'ordre).

Le second point important abordé ici, la structuration de correcteur, est issu du théorème 2.2 qui affirme que tout correcteur K_0 peut s'écrire sous la forme de l'interconnexion d'un correcteur de type observateur – retour d'état et d'un paramètre de Youla. En effet de tels correcteurs ont l'avantage d'avoir des interprétations modales plus simples que des correcteurs dynamiques classiques, on verra aussi leur intérêt lors de procédures d'interpolation au chapitre 4. Cette structuration des correcteurs est relativement systématique lorsque leurs ordres sont grands en faisant appel aux observateurs classiques mais la généralisation à des ordres réduits avec des observateurs de Luenberger est beaucoup plus délicate et procède donc par conditions nécessaires. On remarquera dans l'approche classique des correcteurs d'ordre plein qu'il est nécessaire d'opérer un choix combinatoire (voir paragraphe 2.5.2) sans règle bien précise lors de la résolution de l'équation de Riccati généralisée. Cette difficulté ne peut être levée que par des considérations intuitives ou numériques car du point de vue formel l'équivalence est absolue ; ce problème est plus particulièrement étudié dans l'application de la structuration au pilotage du lanceur en vue d'une interpolation. Il est en effet nécessaire de garantir une continuité dans la répartition des valeurs propres dans la structure ; les détails sont donnés au chapitre 7.

2.7. Annexe : résolution de l'équation algébrique

On montre ici comment garantir que la matrice T_2 ne soit pas singulière en proposant une solution particulière du problème pour les choix de A_2 et B_2 .

Afin de trouver une solution T_2 non singulière, il faut résoudre l'équation linéaire matricielle suivante :

$$A_2 T_2 - T_2 (A + B_u D_K C_y + B_u C_K T_1) + B_2 C_y = 0 \quad (\text{Eq. 2.7.1})$$

Les conditions de résolution sont les suivantes [BS72, Gan66] :

- Les valeurs propres de A_2 et de $(A + B_u D_K C_y + B_u C_K T_1)$ doivent être distinctes pour que la solution T_2 soit unique.
- La matrice $B_2 C_y$ doit être de rang plein pour que la solution ne soit pas singulière.

Les degrés de liberté pour garantir une solution non singulière sont :

- la matrice A_2 introduite pour augmenter le système ;
- la matrice B_2 qui assure la non dégénérescence des solutions.

On suppose de plus que la matrice C_y est de rang plein, c'est-à-dire que les sorties du système sont linéairement indépendantes :

$$\text{rang}(C_y) = n_y \quad (\text{Eq. 2.7.2})$$

On recherche donc les solutions non singulières de (2.7.1), sachant de plus que l'équation (2.7.1) a une solution T_2 de rang plein si le produit $B_2 C_y$ est de rang plein.

Or étant données les dimensions mises en jeu, il est nécessaire d'avoir :

$$n - n_K - n_y \leq n_y \quad (\text{Eq. 2.7.3})$$

En effet, $B_2 \in R^{(n-n_K-n_y) \times n_y}$, $C_y \in R^{n_y \times n}$ et le rang du produit de deux matrices est inférieur ou égal au minimum des deux rangs.

Il est donc nécessaire d'avoir : $n_K \geq n - 2n_y$

A une permutation près, on peut supposer :

$$C_y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ p & n-p \end{pmatrix} \updownarrow n_y \quad p = n - n_K - n_y \quad (\text{Eq. 2.7.4})$$

avec C_1 de rang p .

On peut alors choisir pour la matrice B_2 :

$$B_2 = C_1^T (C_y C_y^T)^{-1} \quad (\text{Eq. 2.7.5})$$

Il en découle que $B_2 C_y$ est de rang plein, c'est-à-dire de rang p :

$$B_2 C_y = C_1^T (C_y C_y^T)^{-1} C_y \quad (\text{Eq. 2.7.6})$$

La résolution du système en T_2 est alors possible. Et là encore, il est nécessaire de faire un choix pour A_2 qui doit être stable. Posons par exemple :

$$A_2 = \lambda I_p \text{ avec } |\lambda| < 1 \text{ (cas discret) ou } \text{Re}(\lambda) < 0 \text{ (cas continu)} \quad (\text{Eq. 2.7.7})$$

L'équation (Eq. 2.7.1) est de la forme :

$$\lambda \mathcal{I}_p \begin{pmatrix} T_{21} & T_{22} \\ \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ p & n-p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{21} & T_{22} \\ X_{11} & X_{12} \updownarrow p \\ X_{21} & X_{22} \\ \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ p & n-p \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ p & n-p \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{Eq. 2.7.8})$$

Il suffit alors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda T_{21} - T_{21} X_{11} - T_{22} X_{21} + B_2 C_1 = 0 \\ \lambda T_{22} - T_{21} X_{12} - T_{22} X_{22} + B_2 C_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 2.7.9})$$

qui peut aussi s'écrire

$$(T_{21} \quad T_{22}) \begin{pmatrix} \lambda_p - X_{11} & -X_{12} \\ -X_{21} & \lambda_p - X_{22} \end{pmatrix} = -B_2 (C_1 \quad C_2) \quad (\text{Eq. 2.7.10})$$

Il est clair qu'il existe au moins une valeur de λ vérifiant les conditions (2.7.3) telle que cette équation admette une solution unique :

$$T_2 = -B_2 C \begin{pmatrix} \lambda_p - X_{11} & -X_{12} \\ -X_{21} & \lambda_p - X_{22} \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{Eq. 2.7.11})$$

Et cette matrice T_2 est bien de rang p .

Chapitre 3

Synthèse Multiobjectifs

3.1. Introduction	71
3.2. Problème d'optimisation multiobjectifs.....	74
3.3. Définitions de quelques critères.....	77
3.4. Généralités sur la problématique de la synthèse.....	84
3.5. Optimisation du paramètre de Youla.....	86
3.6. Algorithme.....	93
3.7. Application à un bras flexible.....	94
3.8. Conclusion.....	109
3.9. Annexe 1 : interprétation de la norme H_2.....	111
3.10. Annexe 2 : tableau récapitulatif – boîte à outils.....	115
3.11. Annexe 3 : extension au cas continu.....	118

3.1. Introduction

En 1991, l'intérêt des méthodes multicritères a été montré par Boyd et Barrat [BB91] : elles permettent de traiter des problèmes à objectifs contradictoires particulièrement intéressants car ils reflètent les compromis propres à la mise en œuvre d'une loi de commande. Cette vision de la synthèse en terme d'optimisation nécessite de revisiter une approche de l'optimalité qui a été définie par Pareto il y a plus d'un siècle [Par96], et qui se traduit intuitivement par la Figure 3.1 dans le cas de deux objectifs : elle peut s'énoncer simplement en remarquant que toute amélioration de l'un des objectifs se fait au détriment de l'autre et que la solution optimale est un compromis entre les deux. Pour plus de détails, on se reportera au paragraphe 3.2 dédié à cette approche.

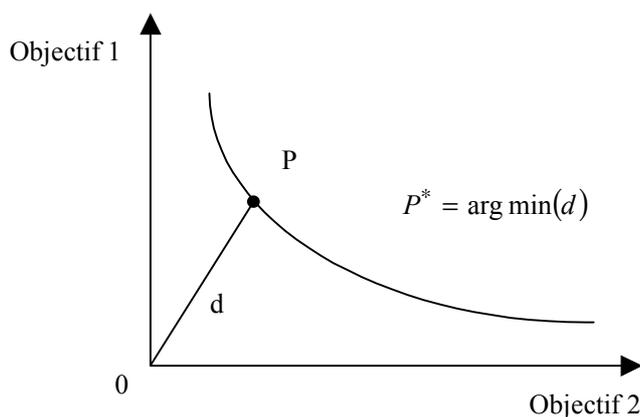


Figure 3.1. Illustration de l'optimalité au sens de Pareto

Les principes fondamentaux de la synthèse multiobjectifs exposés dans [BB91, Dor91] conduisent à la résolution de problèmes d'optimisation de dimension infinie que l'on ne sait pas aujourd'hui résoudre numériquement. Cependant, de nombreuses solutions approchées ont été proposées ; on peut les classer selon trois grands axes. Le premier consiste à utiliser des heuristiques afin de résoudre les problèmes d'optimisation ou bien à considérer des cas particuliers comme la commande LQG [BH89, KR91a], le placement de pôles [CG96], le retour d'état [BEFB94, BSU93, FG94], ou l'application à des systèmes à structures particulières (par exemple monovariante) [KR91b, KKR93, Szn94, RS98, SDV97]. Le second axe regroupe quant à lui des approches plus générales (qui utilisent notamment une correction par retour de sorties) ;

cependant elles introduisent un grand conservatisme¹ lié en particulier à l'utilisation d'une fonction de Lyapunov commune à tous les problèmes [EF96a, EF96b, Fol97, MOS98, Sch95, SGC97]. Enfin, d'autres approches, les plus récentes, constituent une troisième voie visant à réduire le conservatisme tout en restant exploitables numériquement [HHB98, Sch99, CD99, CD00a]. On notera également que le problème mixte H_2/H_∞ tient une place particulièrement importante dans les cas étudiés. C'est dans la dernière voie que s'inscrit la méthode de synthèse présentée ici, méthode reposant sur la paramétrisation de Youla [Kuc74, YJB76]. En effet les propriétés fondamentales de cette paramétrisation permettent de transformer le problème initial en un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI (Inégalités Matricielles Affines). Ce formalisme est particulièrement adapté à la synthèse multicritère car il permet de juxtaposer les critères sans perdre la convexité ; de surcroît il existe de nombreuses formulations de critères de synthèse en terme d'inégalités matricielles [Fol97, SGC97, GPB91]. On trouve également des articles récapitulatifs [CSZ98, VJ97, SNT85].

Cependant une limite importante est inhérente à ce formalisme : la calculabilité est limitée par l'augmentation de la complexité due à la réduction du conservatisme. Notons que ce dilemme complexité / calculabilité est récurrent dans la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes. En effet lorsque les contraintes sont très pointues, elle savent parfaitement traduire le cahier des charges d'un ingénieur mais le temps de calcul risque de ne plus être admissible. Et à l'inverse une solution facilement calculable met en jeu des exigences physiques élémentaires ou des hypothèses trop fortes (conservatives), et ces conditions n'intéresseront pas l'ingénieur automatique. Il est donc primordial de toujours garder en tête que tout problème sera résolu en établissant un compromis entre ces deux notions.

Il est tout de même fondamental de noter que si les méthodes actuelles induisent un fort degré de conservatisme, ce n'est pas seulement à cause des problèmes de complexité mais par construction même. En effet, le principe du multiobjectifs est de satisfaire simultanément plusieurs critères, et les raisonnements qui aboutissent à des solutions numériquement acceptables sont fondés sur des conditions suffisantes. Ainsi les manipulations matricielles à bases de lemmes techniques comme le lemme d'élimination [BEFB94] ou de changements de variables [SGC97] conduisent soit à des impasses soit à des

¹ Une propriété est dite conservative si elle est valable de façon exacte sur un ensemble contenant strictement l'ensemble étudié. Il s'agit d'un anglicisme difficile à traduire en français, c'est pourquoi il sera employé tout au long de ce document.

solutions très conservatives. L'idée fondamentale pour éviter ces écueils est de conserver le couplage qui existe entre les critères¹ et ce sans en créer de nouveaux qui sont à l'origine du conservatisme. C'est ce point qui a motivé l'utilisation d'une fonction de Lyapunov unique, et donc induit du conservatisme par le passé, mais c'est aussi ce point que la paramétrisation de Youla permet de satisfaire en limitant le conservatisme.

Les propriétés de la paramétrisation de Youla ont été exposées au chapitre 2, nous allons donc dans cette partie nous attacher à tirer partie de ces propriétés pour mettre en œuvre une méthodologie de synthèse multiobjectifs. Nous commencerons par rappeler la problématique de l'optimisation multiobjectifs (paragraphe 3.2) et définir les critères considérés (paragraphe 3.3). Puis nous verrons comment le problème de synthèse se traduit en un problème d'optimisation NP-difficile² (paragraphe 3.4) qui peut, sous certaines hypothèses, dégénérer en termes de LMI (paragraphe 3.5). L'algorithme de synthèse qui s'en déduit est présenté au paragraphe 3.6, puis mis en œuvre sur un exemple benchmark déjà longuement étudié dans la littérature [LCR93, LDL96]. Cet exemple sera traité de deux manières différentes, afin de mettre en évidence la flexibilité de l'approche proposée (paragraphe 3.7).

On trouvera en outre, à la fin de ce chapitre, trois annexes :

- l'annexe 1 présente une interprétation de la norme H_2 en termes énergétiques et montre l'équivalence possible entre la synthèse H_2 et la synthèse LQG ;
- l'annexe 2 se présente comme une boîte à outils pour transformer les objectifs en contraintes LMI ;
- l'annexe 3 fait l'analogie de la méthode proposée dans le cas continu.

¹ Cette notion de couplage entre les critères apparaîtra plus clairement dans le corps du chapitre.

² Il s'agit de la traduction du terme anglais NP-hard où NP signifie Non Polynomial. Cette terminologie signifie que la résolution du problème d'optimisation ne peut pas se faire en un temps qui serait une fonction polynomiale du nombre de paramètres d'optimisation. Autrement dit, dès que le problème devient grand, le temps de calcul augmente de façon prohibitive et le problème devient impossible à résoudre.

3.2. Problème d'optimisation multiobjectifs

Le problème d'optimisation multiobjectifs souffre d'un manque de définition et reste souvent inexpliqué. Ce paragraphe est ici pour rappeler quelques idées générales et poser une nomenclature claire pour le reste du manuscrit.

Lorsque l'on veut traiter un problème dont les objectifs sont contradictoires, il est nécessaire de se contenter d'un compromis entre ces différents objectifs. Par exemple, une problème de base dans la commande d'un système oscillant est le compromis à faire entre rapidité et l'amortissement.

De façon plus formelle, on dira que l'on sait optimiser un critère scalaire mais que l'on ne sait plus rien faire dès que l'on sort de ce cadre. En effet si on considère le problème d'optimisation sans contrainte suivant :

$$\min_x (J(x) / J(x) \in E) \quad (\text{Eq. 3.2.1})$$

Alors ce problème n'a de sens que si l'ensemble E est muni d'une relation d'ordre total. A contrario, la relation suivante :

$$\min \left(\begin{array}{l} J_1(x) \\ J_2(x) \end{array} / J_1(x) \in E, J_2(x) \in E \right) \quad (\text{Eq. 3.2.2})$$

n'a pas de sens. Le problème d'optimisation pratique se ramène donc toujours à un critère scalaire.

Par contre, si on considère le problème d'optimisation multi-contraintes, la problématique n'est plus la même. Soit le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\min_x (J(x) \in E / x \in C) \quad (\text{Eq. 3.2.3})$$

L'ensemble C peut représenter plusieurs contraintes (éventuellement contradictoires) ou plus exactement l'intersection de plusieurs contraintes, on parle aussi d'optimisation multi-critères.

Dans la pratique les objectifs et les critères sont souvent liés et on se ramène à un problème « mono-objectif, multi-contraintes » en utilisant des relations

simples entre les objectifs et en utilisant les contraintes associées. On ne fait plus la distinction alors entre les problèmes d'optimisation multi-objectifs ou multi-contraintes. Quelques exemples pour la commande sont présentés dans [CHDF01]. On peut illustrer ceci sur le problème de commande H_2 / H_∞ . On considère le système P rebouclé avec le correcteur K et on cherche à minimiser les normes H_∞ et H_2 de la boucle fermée en garantissant la stabilité ; le problème multiobjectif serait alors le suivant :

$$\min_K \left(\|P * K\|_2, \|P * K\|_\infty \right) \quad (\text{Eq. 3.2.4})$$

Mais comme nous venons de le voir, il n'a pas de sens mathématique, il est donc nécessaire de le transformer en un problème similaire qui est « mono-objectif, multi-contraintes » et qui réalise un compromis entre les deux objectifs visés :

$$\min_K \left(\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 \mid \begin{array}{l} \|P * K\|_\infty < \gamma_1 \\ \|P * K\|_2 < \gamma_2 \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 3.2.5})$$

où λ_1 et λ_2 sont fixés.

La notion d'optimalité au sens de Pareto reprend ce résultat intuitivement évident d'un point de vue plus général et permet d'en déduire des courbes de compromis qui traduisent l'ensemble de faisabilité d'un problème d'optimisation multi-objectifs comme le montre la Figure 3.2.

D'autre part la lecture de ces courbes de compromis¹ permet d'en déduire un certain nombre de propriétés concernant les couplages éventuels qui existent entre les objectifs. En effet, en considérant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= \min(J_1(x) \mid x \in C) \\ \hat{J}_2 &= \min(J_2(x) \mid x \in C) \\ \hat{J}_\lambda &= \min(\lambda J_1(x) + (1 - \lambda) J_2(x) \mid x \in C) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.2.6})$$

¹ « trade-off curve » est le nom anglais le plus utilisé dans la littérature sur le sujet.

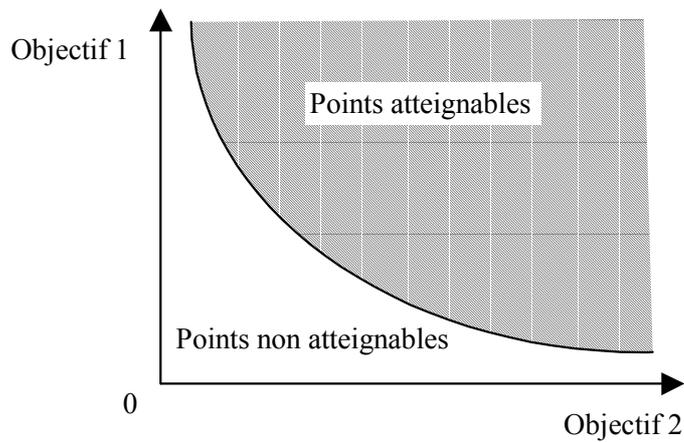


Figure 3.2 Ensemble des points faisables

On peut distinguer 3 cas de figure facilement identifiables dans le cas d'objectifs contradictoires :

1. Les critères sont complètement indépendants (ce qui représente le cas idéal puisqu'il est possible d'optimiser chacun des critères indépendamment)
2. Les critères sont faiblement couplés et le compromis est proche des différents optimaux (Figure 3.3 a.).
3. Les critères sont fortement couplés et le compromis à faire est d'autant plus important que le couplage est grand (Figure 3.3 b.).

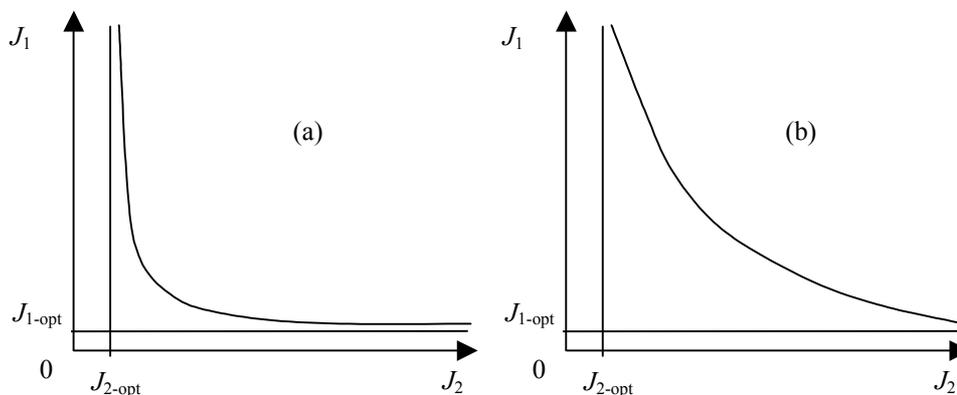


Figure 3.3 a. Objectifs faiblement couplés – b. Objectifs fortement couplés

3.3. Définitions de quelques critères

Dans une démarche de synthèse de correcteur telle qu'elle est décrite au chapitre 1, on cherche à obtenir sur chaque transfert T_i de la boucle fermée une propriété qui se traduira par une contrainte sous forme d'inégalité matricielle. On formule ainsi le cahier des charges de la synthèse sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalités matricielles. Nous allons donc nous attacher à établir des liens entre un cahier des charges et des notions de type H_∞ , H_2 ou α -stabilité, que l'on sait quant à elles exprimer sous forme matricielle. Dans le cas général, la formulation à laquelle on aboutit ne correspond pas à un problème convexe. En effet, les inégalités obtenues ne sont pas linéaires en les paramètres inconnus, il ne s'agit donc pas de LMI. Les paragraphes suivant s'attacheront à rendre linéaires ces inégalités. Notons que si nous nous limitons aux trois critères cités ci-dessus, d'autres peuvent être considérés [Fol97, SGC97, Chi96].

3.3.1. Norme H_∞

La norme H_∞ des systèmes a été au centre de nombreuses études au cours des années 90 [ZDG96, Fra87, et références incluses] ; elle a en effet permis de donner un formalisme unifié pour l'analyse et la synthèse fréquentielle [DF99]. Elle permet de prendre en compte des objectifs de suivi de référence, de stabilité, de « roll-off », de marges de stabilité et de modelage des différents transferts. Il s'agit d'une norme induite par la norme euclidienne des signaux comme le montre la définition suivante.

Définition 3.1 Norme H_∞

On appelle norme H_∞ du transfert T_1 entre w_1 et z_1 le réel positif défini par :

$$\|T_1\|_\infty = \sup_{w_1 \in L_2, w_1 \neq 0} \left(\frac{\|z_1\|_2}{\|w_1\|_2} \right) \quad (\text{Eq. 3.3.1})$$

Il existe une caractérisation par inégalité matricielle de la borne supérieure de cette norme comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.1 [BEFB94]. *Caractérisation matricielle de la norme H_∞*

Un système discret (A, B, C, D) est stable et admet une norme H_∞ inférieure à un niveau γ si et seulement si :

$$\exists X_1 = X_1^T > 0 / \begin{pmatrix} -X_1^{-1} & A & B & 0 \\ A^T & -X_1 & 0 & C^T \\ B^T & 0 & -\gamma I & D^T \\ 0 & C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{Eq. 3.3.2})$$

3.3.2. Norme H_2

La norme H_2 d'un système est définie à partir d'une caractérisation entrée/sortie pour les signaux aléatoires. Elle permet d'intégrer un critère énergétique sur l'ensemble de la bande de fréquence. La norme H_2 est par exemple un bon outil pour évaluer l'aptitude du système à filtrer les bruits engendrés par les capteurs, générés par les actionneurs ou bien encore issus de perturbations extérieures d'énergie connue.

Définition 3.2 *Norme H_2*

On appelle norme H_2 du transfert T_2 entre w_2 et z_2 le réel positif défini par :

$$\|T_2\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \text{trace} \left(T_2(e^{2\pi j\nu})^* T_2(e^{2\pi j\nu}) \right) d\nu} \quad (\text{Eq. 3.3.3})$$

Le calcul algébrique de la norme H_2 utilise les grammiens d'observabilité et de commandabilité du système [Mac89]. On montre que pour un système qui a pour représentation d'état les matrices (A, B, C, D) :

$$\begin{aligned} \|D + C(zI - A)^{-1}B\|_2 &= \sqrt{\text{trace}(D^T D + B^T L_o B)} \\ &= \sqrt{\text{trace}(DD^T + CL_c C^T)} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.3.4})$$

où L_c et L_o sont respectivement les grammiens de commandabilité et d'observabilité, solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{cases} AL_c A^T - L_c + BB^T = 0 \\ A^T L_o A - L_o + C^T C = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 3.3.5})$$

De plus il existe une caractérisation par inégalités matricielles de la borne supérieure de cette norme comme le montre le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Caractérisation matricielle de la norme H_2 [Fol97]*

Un système discret (A, B, C, D) est stable et admet une norme H_2 inférieure à un niveau γ si et seulement si :

$$\exists X_2 = X_2^T > 0 / \begin{cases} A^T X_2 A - X_2 + C^T C < 0 \\ \text{trace}(D^T D + B^T X_2 B) < \gamma^2 \end{cases} \quad (\text{Eq. 3.3.6})$$

L'utilisation conjointe du lemme de Schur et de manipulations matricielles conduit à une caractérisation sous forme d'inégalités matricielles. Le système est stable et admet une norme H_2 inférieure à un niveau γ si et seulement si il existe deux matrices symétriques définies positives $X_2 = X_2^T > 0$ et $Y = Y^T > 0$ telles que :

$$\begin{pmatrix} -X_2^{-1} & A & 0 \\ A^T & -X_2 & C^T \\ 0 & C & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{Eq. 3.3.7})$$

$$\begin{pmatrix} -X_2^{-1} & B & 0 \\ B^T & -Y & D^T \\ 0 & D & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{Eq. 3.3.8})$$

$$\text{trace}(Y) < \gamma^2 \quad (\text{Eq. 3.3.9})$$

L'intérêt de la norme H_2 réside dans son interprétation énergétique et dans l'équivalence que l'on peut trouver entre la synthèse H_2 et la synthèse LQG : l'annexe 1 du paragraphe 3.9 est consacrée à ces problèmes.

3.3.3. Propriété d' α -stabilité

L' α -stabilité est une propriété des systèmes qui permet de garantir la rapidité de convergence vers un point d'équilibre. Ce critère peut aussi être vu comme une contrainte de placement de pôles dans un disque de rayon α .

Définition 3.3 α -stabilité

L'état x d'un système est dit α -stable ($\alpha \in]0;1[$) si et seulement si pour une entrée nulle et pour toute condition initiale $x(0)$, la relation suivante est vérifiée :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\alpha^{-k} \|x(k)\| \right) = 0 \quad (\text{Eq. 3.3.10})$$

De manière équivalente on peut dire que le module des valeurs propres de la matrice d'évolution est inférieur à α .

Il existe une caractérisation matricielle de cette propriété :

Théorème 3.3 Caractérisation matricielle de l' α -stabilité

Un système (A, B, C, D) est α -stable si et seulement si :

$$\exists X_3 = X_3^T > 0 / \begin{pmatrix} \alpha^2 X_3 & A^T \\ A & X_3^{-1} \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{Eq. 3.3.11})$$

Démonstration

En appliquant le lemme de Schur, la relation (3.3.11) est équivalente à la relation suivante :

$$\begin{cases} X_3 > 0 \\ \alpha^2 X_3 - A^T X_3 A > 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 3.3.12})$$

$$\text{où bien encore } \begin{cases} X_3 > 0 \\ X_3 - \left(\frac{1}{\alpha} A \right)^T X_3 \left(\frac{1}{\alpha} A \right) > 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 3.3.13})$$

Cette relation montre que la fonction suivante :

$$V(k) = x(k)^T X_3 x(k) \quad (\text{Eq. 3.3.14})$$

est une fonction de Lyapunov pour le système dynamique :

$$x(k+1) = \frac{1}{\alpha} Ax(k) \quad (\text{Eq. 3.3.15})$$

Les valeurs propres de la matrice $\frac{1}{\alpha} A$ sont donc à l'intérieur du disque unité.

Et par conséquent les valeurs propres de la matrice A sont à l'intérieur du cercle de rayon α .

Il est important de noter qu'il s'agit une notion très contraignante, en effet il n'est pas possible de l'imposer sur un sous-ensemble des valeurs propres du système.

3.3.4. *Modification par congruence*

Nous venons de présenter les caractérisations classiques des normes H_2 et H_∞ en temps discret, cependant on remarque que cette représentation est non linéaire en les variables. Dans le cas de l'analyse, une application du lemme de Schur suffit à lever les non linéarités. Lors de la synthèse cette méthode conduit à des termes d'ordre 2, qu'il est plus facile par la suite d'*éliminer* que des termes d'ordre 3 ou des inverses.

Ainsi nous allons adopter un formalisme différent, qui peut sembler moins élégant au sens de la minimalité en symbole mais ne faisant intervenir que des termes bilinéaires que l'on s'attachera ensuite à faire *disparaître* pour mener à bien la synthèse d'une loi de commande.

Le lemme suivant rappelle une propriété des matrices définies positives :

Lemme. Positivité et congruence

Soient deux matrices $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ et $C \in \mathbf{C}^{n \times m}$, si $A > 0$ alors $C^* A C \geq 0$

De plus $C^* A C > 0$ si et seulement si $\text{rang}(C) = m$ (C est de rang plein)

Utilisons ce résultat avec les matrices Π_1 , Π_2 et Π_3 suivantes pour les caractérisations respectives des normes H_2 , H_∞ et de l' α -stabilité :

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 3.3.16})$$

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} X_2 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 3.3.17})$$

$$\Pi_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 3.3.18})$$

Remarque :

Les matrices Π_1 , Π_2 et Π_3 sont de rang plein car définies positives.

La modification par congruence en multipliant à gauche et à droite les inégalités matricielles (3.3.2) par Π_1 et Π_1^T , (3.3.7), (3.3.8) par Π_2 et Π_2^T , et (3.3.11) par Π_3 et Π_3^T se traduit immédiatement par le théorème suivant :

Théorème 3.4 Problème multicritère

En utilisant les notations suivantes qui se reportent à la Figure 3.4, les transferts de $w_i \rightarrow z_i$ notés T_i ont pour représentation d'état :

$$T_i = \left(\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{i,cl} \\ \hline C_{i,cl} & D_{i,cl} \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 3.3.19})$$

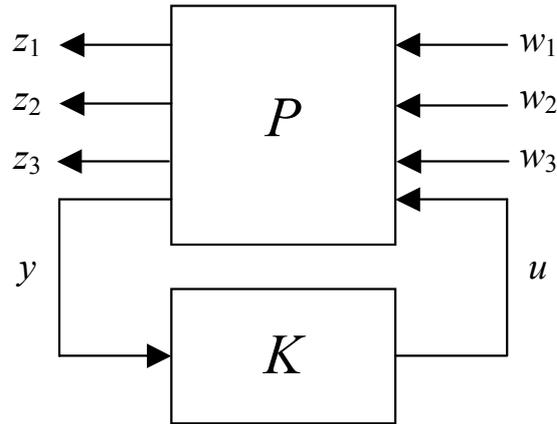


Figure 3.4 Boucle de correction

Alors le système $LFT(P, K)$ vérifie les trois propriétés suivantes :

$$\|T_1\|_\infty < \gamma_1 \quad (\text{Eq. 3.3.20})$$

$$\|T_2\|_2 < \gamma_2 \quad (\text{Eq. 3.3.21})$$

$$LFT(P, K) \text{ } \alpha\text{-stable} \quad (\text{Eq. 3.3.22})$$

si et seulement si il existe quatre matrices symétriques définies positives X_1 , X_2 , X_3 et Y telles que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\begin{pmatrix} -X_1 & X_1 A_{cl} & X_1 B_{1,cl} & 0 \\ A_{cl}^T X_1 & -X_1 & 0 & C_{1,cl}^T \\ B_{1,cl}^T X_1 & 0 & -\gamma_1 I & D_{1,cl}^T \\ 0 & C_{1,cl} & D_{1,cl} & -\gamma_1 I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{Eq. 3.3.23})$$

$$\begin{pmatrix} -X_2 & X_2 A_{cl} & 0 \\ A_{cl}^T X_2 & -X_2 & C_{2,cl}^T \\ 0 & C_{2,cl} & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{Eq. 3.3.24})$$

$$\begin{pmatrix} -X_2 & X_2 B_{2,cl} & 0 \\ B_{2,cl}^T X_2 & -Y & D_{2,cl}^T \\ 0 & D_{2,cl} & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{Eq. 3.3.25})$$

$$\text{trace}(Y) < \gamma_2^2 \quad (\text{Eq. 3.3.26})$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 X_3 & A_{cl}^T X_3 \\ X_3 A_{cl} & X_3 \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{Eq. 3.3.27})$$

3.4. Généralités sur la problématique de la synthèse

Le problème est alors de trouver une solution à ce problème ; si on s'intéresse à l'analyse d'un système, les inégalités précédentes sont linéaires en les variables inconnues, il s'agit donc simplement d'un problème de faisabilité LMI, et celui-ci ne pose pas de problème particulier. En revanche dès qu'il s'agit de la synthèse d'un correcteur les matrices de la représentation d'état dépendent du correcteur qui fait partie des variables d'optimisation du problème :

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{i,cl} \\ \hline C_{i,cl} & D_{i,cl} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} A + B_u D_K C_y & B_u C_K & B_i + B_u D_K D_{yi} \\ B_K C_y & A_K & B_K D_{yi} \\ \hline C_i + D_{iu} D_K C_y & D_{iu} C_K & D_{ii} + D_{iu} D_K D_{yi} \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 3.4.1})$$

Les inégalités du problème multiobjectifs ne sont donc plus linéaires et il n'existe pas aujourd'hui de méthodes pour résoudre ce genre de problème. Il est donc nécessaire de le transformer tout en conservant ses caractéristiques. Deux approches sont alors envisageables :

- On cherche à satisfaire des propriétés plus générales que celles qui sont demandées et on se ramène à un énoncé que l'on sait résoudre numériquement. On parle alors de solution conservative.
- On limite la recherche de solution à un sous-ensemble des solutions possibles. On parle alors de solution sous-optimale.

On trouve dans la littérature la première approche essentiellement sous la forme d'une réduction des degrés de liberté. En effet, en imposant dans les

inégalités que pour tous les critères la fonction de Lyapunov considérée soit identique ($\forall i X_i = X$), on impose une contrainte de stabilité plus forte que celle qui est nécessaire alors que la recherche du correcteur se fait dans un ensemble non limité. Cette approche est largement développée dans [Chi96, EF96a, EF96b, Fo197, MOS98, SGC97]¹.

Dans cette approche, la démarche peut se résumer par les points suivants :

- On impose une fonction de Lyapunov unique X pour l'ensemble des objectifs de synthèse².
- Un changement de variable bijectif permet de rendre les inégalités matricielles linéaires en les nouvelles variables ; il utilise la fonction de Lyapunov et les matrices de la représentation d'état du correcteur (c'est principalement cette étape qui varie selon les approches considérées).
- Le problème, mis sous forme LMI, peut alors être résolu de manière numérique.
- La reconstruction du correcteur peut alors se faire en utilisant le changement de variable inverse.

Les deux points délicats et dont il est difficile de mesurer les effets sont le choix d'une matrice X unique et le changement de variable qui doit être numériquement bien posé pour pouvoir être inversible.

La seconde approche qui consiste à chercher une solution sous-optimale est souvent utilisée en tenant compte de propriétés structurelles du système étudié et réduit nécessairement le champ d'application de telles méthodes³. Cependant, nous allons voir comment il est possible de s'inscrire dans cette approche tout en gardant un caractère général quant aux systèmes considérés. Le caractère sous optimal vient du fait que le correcteur est recherché dans un sous-espace des correcteurs candidats.

¹ La thèse [Fo197] présente un ensemble de critères exposés de manière unifiée pour la synthèse et l'analyse, on y trouve aussi des exemples d'applications concrètes. L'article [MOS98] présente une approche similaire avec un formalisme synthétique ; la méthode présentée est très proche de ce qu'on peut trouver dans [SGC97]. En effet, on trouve dans cet article des résultats identiques présentés sous forme de catalogue de critères comme dans la thèse [Chi96].

² Il est affirmé dans [SGC97] que le conservatisme induit n'est pas problématique. Il est cependant important de remarquer que les axes de recherche sur le sujet sont justement tournés vers ce problème de conservatisme qui est la limitation majeure de cette approche.

³ Voir l'introduction du chapitre pour situer les différentes approches.

3.5. Optimisation du paramètre de Youla

Ce paragraphe est consacré à l'exploitation des propriétés de la paramétrisation de Youla. En effet, celle-ci va permettre d'exprimer un problème de synthèse multicritère par retour statique de sortie sous forme de problème d'optimisation convexe. On rappelle sur la Figure 3.5 (issue du chapitre 2) les différents systèmes mis en jeux et les notations introduites au chapitre 2.

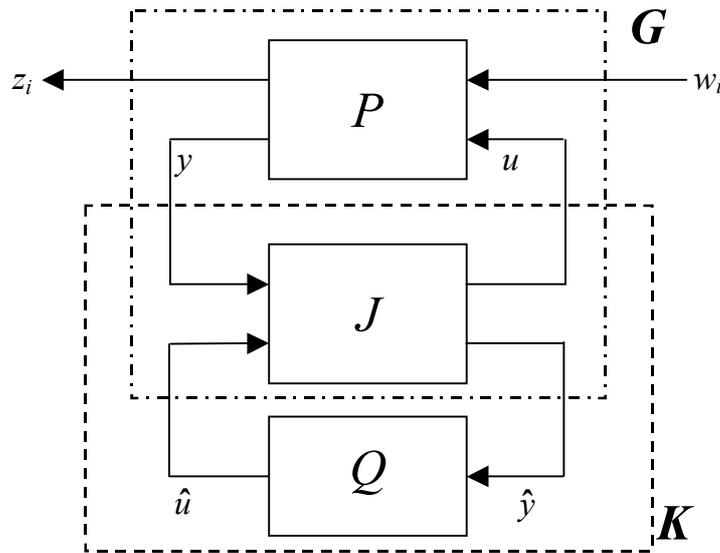


Figure 3.5. Forme générale de la paramétrisation de Youla

3.5.1. Linéarisation des inégalités matricielles

Soit le système G de la Figure 3.5, asymptotiquement stable, et Q un retour statique de sortie :

$$G = \left(\begin{array}{c|c} A_G & B_G \\ \hline C_G & D_G \end{array} \right) \text{ et } Q \in R^{n_u \times n_y} \quad (\text{Eq. 3.5.1})$$

Nous allons montrer qu'il existe une formulation LMI au problème de commande H_2/H_∞ . Ce résultat est obtenu par changement de variables et manipulations matricielles.

Considérons les caractérisations matricielles des normes H_2 et H_∞ du système bouclé :

$$G_{cl} = \text{LFT}(G, Q) = \left(\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 3.5.2})$$

où Q est un retour statique de sortie ; compte tenu de la propriété 3 de la paramétrisation de Youla présentée au chapitre 2, la représentation d'état du système bouclé a la forme suivante :

$$G_{cl} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_3 + B_{\hat{u}}QC_{\hat{y}} & B_{1,1} + B_{\hat{u}}QD_{\hat{y}1} & B_{2,1} + B_{\hat{u}}QD_{\hat{y}2} \\ 0 & A_2 & B_{1,2} & B_{2,2} \\ \hline C_{1,1} & C_{1,2} + D_{1\hat{u}}QC_{\hat{y}} & D_{11} + D_{1\hat{u}}QD_{\hat{y}1} & D_{12} + D_{1\hat{u}}QD_{\hat{y}2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} + D_{2\hat{u}}QC_{\hat{y}} & D_{21} + D_{2\hat{u}}QD_{\hat{y}1} & D_{22} + D_{2\hat{u}}QD_{\hat{y}2} \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 3.5.3})$$

Les caractérisations par inégalités matricielles des normes H_∞ et H_2 exposées au paragraphe 3.3.4 et appliquées à G_{cl} ne sont pas linéaires en les variables (les fonctions de Lyapunov et le gain Q). Par exemple le terme $X_1 A_{G_{cl}}$ fait intervenir un terme où intervient dans le même produit X_1 et Q . Il est donc nécessaire de modifier le problème pour le transformer en un problème d'optimisation convexe.

Soit X_i la fonction de Lyapunov associée au critère i (H_∞ ou H_2). On la partitionne dans les mêmes proportions que la matrice d'état de G :

$$X_i = \begin{pmatrix} W_i & Z_i \\ Z_i^T & Y_i \end{pmatrix} \text{ selon } A_G = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 3.5.4})$$

et on définit le changement de variable bijectif suivant :

$$L \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ \left(\begin{array}{cc} W_i & Z_i \\ Z_i^T & Y_i \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc} R_i & S_i \\ S_i^T & T_i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} W_i^{-1} & -W_i^{-1}Z_i \\ -Z_i^T W_i^{-1} & Y_i - Z_i^T W_i^{-1}Z_i \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (\text{Eq. 3.5.5})$$

ainsi que la matrice M_i :

$$M_i = \begin{pmatrix} R_i & 0 \\ S_i^T & I \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 3.5.6})$$

En appliquant au système bouclé G_{cl} les caractérisations matricielles des critères décrites au paragraphe 3.3 et en utilisant les propriétés de congruence, on obtient des formulations LMI.

Problème H_∞

En utilisant la congruence par la matrice $\Pi_1 = \text{diag}(M_1 \ M_1 \ I \ I)$, on obtient à partir de (3.3.23) :

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} -R_1 & 0 & A_1 R_1 & A_1 S_1 - S_1 A_2 + A_3 + B_{\hat{u}} Q C_{\hat{y}} & 0 \\ 0 & -T_1 & 0 & T_1 A_2 & 0 \\ \hline * & * & -R_1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & -T_1 & 0 \\ \hline * & * & * & * & -\gamma_1 I \\ * & * & * & * & * \\ \hline & & & & -\gamma_1 I \end{array} \right) < 0 \quad (\text{Eq. 3.5.7})$$

Problème H_2

En utilisant la congruence par les matrices $\Pi_{21} = \text{diag}(M_2 \ M_2 \ I)$ et $\Pi_{22} = \text{diag}(M_2 \ I \ I)$, on obtient à partir de (3.3.24), (3.3.25) et (3.3.26) :

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} -R_2 & 0 & A_1 R_2 & A_1 S_2 - S_2 A_2 + A_3 + B_{\hat{u}} Q C_{\hat{y}} & 0 \\ 0 & -T_2 & 0 & T_2 A_2 & 0 \\ \hline * & * & -R_2 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & -T_2 & 0 \\ \hline * & * & * & * & -I \end{array} \right) < 0 \quad (\text{Eq. 3.5.8})$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} -R_2 & 0 & B_{2,1} + B_{\hat{u}} Q D_{\hat{y}2} - S_2 B_{2,2} & 0 \\ 0 & -T_2 & T_2 B_{2,2} & 0 \\ \hline * & * & -Y & D_{22}^T + D_{\hat{y}2}^T Q^T D_{2\hat{u}}^T \\ * & * & * & -I \end{array} \right) < 0 \quad (\text{Eq. 3.5.9})$$

$$\text{trace}(Y) < \gamma_2^2 \quad (\text{Eq. 3.5.10})$$

Ces différentes inégalités sont effectivement linéaires en les paramètres R_1, S_1, T_1, Q et γ_1 pour le problème H_∞ et R_2, S_2, T_2, Y, Q et γ_2^2 pour le problème H_2 . Les deux problèmes sont couplés par le retour statique de sortie Q et utilisent des fonctions de Lyapunov indépendantes. Nous avons ainsi montré l'existence d'une formulation LMI au problème de commande H_2 / H_∞ et explicité les LMI correspondantes.

Remarque :

Il est important de noter que si l'on souhaite intégrer une contrainte d' α -stabilité il est nécessaire de s'assurer qu'elle est déjà vérifiée par G avant de calculer Q . En effet, de part la propriété fondamentale de la paramétrisation de Youla, les pôles de G ne sont pas modifiés par l'interconnexion de Q .

3.5.2. Vers une solution optimale

La solution sous-optimale ainsi trouvée avec un paramètre de Youla statique peut être considérablement améliorée en utilisant un paramètre dynamique. De plus l'ensemble des correcteurs stabilisant pouvant être généré par l'ensemble des paramètres de Youla, on peut espérer se « rapprocher » de la solution optimale.

3.5.2.1. Problème

Si l'on souhaite introduire un retour dynamique de sortie pour augmenter le nombre de degrés de liberté pour l'optimisation et donc réduire le conservatisme de la méthode, on choisit comme paramètre de Youla un système dynamique de représentation d'état :

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} A_Q & B_Q \\ \hline C_Q & D_Q \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 3.5.11})$$

Dans ce cas, on se ramènera au cas précédent d'un retour statique de sortie en fixant la paire $(A_Q \ B_Q)$ – ou la paire $(A_Q \ C_Q)$. Ce choix se justifie en remarquant que les dynamiques de Q apparaissent directement dans les dynamiques de la boucle fermée. Par ailleurs la représentation d'état de la boucle fermée en incluant les dynamiques de Q répond bien à la structure nécessaire à la méthode exposée. En intégrant les dynamiques de Q dans le système G on obtient le système augmenté suivant :

$$\tilde{G} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} A_1 & A_3 & 0_{r \times q} & B_{1,1} & B_{2,1} & B_{\hat{u}} \\ 0_{(n-r) \times r} & A_2 & 0 & B_{1,2} & B_{2,2} & 0_{(n-r) \times n_u} \\ 0_{q \times r} & B_Q C_{\hat{y}} & A_Q & B_Q D_{\hat{y}1} & B_Q D_{\hat{y}2} & 0_{q \times n_u} \\ \hline C_{1,1} & C_{1,2} & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{1\hat{u}} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{2\hat{u}} \\ \hline 0_{q \times r} & 0_{q \times (n-r)} & I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0_{n_y \times r} & C_{\hat{y}} & 0_{n_y \times q} & D_{\hat{y}1} & D_{\hat{y}2} & 0 \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 3.5.12})$$

et le paramètre Q de la Figure 3.5 est formellement remplacé par la matrice $(C_Q \ D_Q)$.

3.5.2.2. Choix de dynamiques pour Q

L'ensemble des résultats précédents peuvent alors être modifiés pour la synthèse d'un paramètre de Youla dynamique. En effet, on considère une famille libre de systèmes stables $\{Q_i\}_{i=0 \dots n_Q}$ avec :

$$Q = \sum_{i=0}^{n_Q} q_i Q_i \quad (\text{Eq. 3.5.13})$$

Alors les résultats restent valables pour le système augmenté obtenu en remplaçant G par \tilde{G} et Q par \tilde{Q} définis par la Figure 3.6.

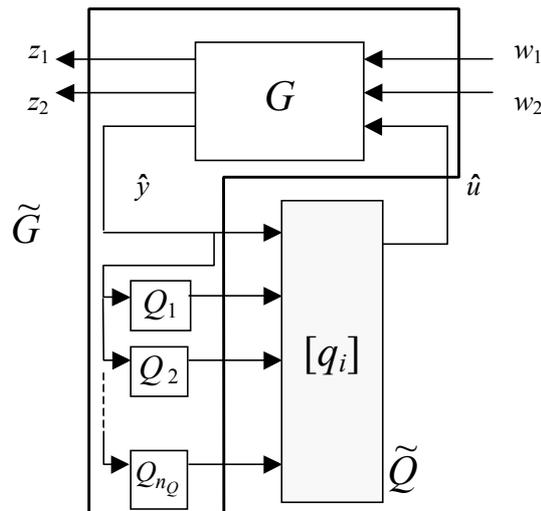


Figure 3.6 Structure avec un Q dynamique

Du point de vue pratique, il est nécessaire de fixer la paire $(A_Q \ B_Q)$, autrement dit il faut que l'information contenue dans $(C_Q \ D_Q)$ soit suffisante pour caractériser le système Q tout entier. Une formulation qui répond bien à cette demande est de considérer Q comme un filtre à réponse impulsionnelle finie (filtre FIR) :

$$Q_i(z) = z^{-i} \text{ pour } i = 0 \dots n_Q \quad (\text{Eq. 3.5.14})$$

La représentation d'état de Q est alors la suivante :

$$Q = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & I_{(n_Q-1) \times n_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_y} & \\ \hline q_{n_Q} & q_{n_Q-1} & \dots & q_1 \\ & & & q_0 \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 3.5.15})$$

ce qui correspond à introduire n_Q retards sur chaque sortie (Figure 3.7).

La sortie $\hat{y}[k]$ est remplacée par $\tilde{y}[k]$, avec :

$$\tilde{y}[k] = \begin{pmatrix} \hat{y}[k] \\ \vdots \\ \hat{y}[k-r] \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 3.5.16})$$

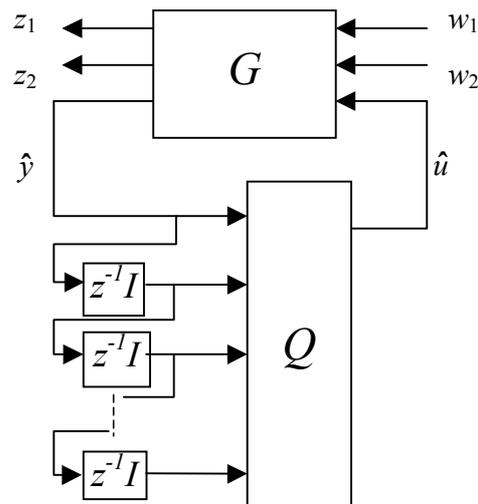


Figure 3.7 Système augmenté par une batterie de retards

Cette méthode a l'avantage important d'être très simple à implémenter. La difficulté réside dans le choix des dynamiques du paramètre Q ; ce problème reste encore ouvert.

3.5.2.3. Choix d'une base de systèmes stables

Plus généralement, l'ensemble des systèmes stables est de dimension infinie et il n'existe pas à l'heure actuelle de méthode d'optimisation pour ce type de problèmes. Ainsi il est nécessaire de tronquer l'espace des systèmes stables et la solution obtenue ne sera qu'un minimum global dans cet espace tronqué. Toute la difficulté des méthodes exposées réside donc dans le choix de cette base qui devra répondre aux deux exigences suivantes :

- générer un ensemble de systèmes le plus grand possible,
- être d'une complexité réduite pour des raisons numériques.

Le compromis entre ces exigences contradictoires ne pourra être envisagé qu'avec une connaissance approfondie du problème de commande considéré.

Sans rentrer dans les détails de conditionnement numérique des différentes bases de systèmes stables, on peut citer les travaux de [HFBF01, Sch95, Dar99, NN97, NG97, SBS99].

Le problème posé n'est pas simple et soulève le *paradoxe de l'information a priori* bien connu dans le domaine de l'identification des systèmes. En effet pour garantir que la solution optimale est un élément de l'ensemble généré par la famille $\{Q_i\}_{i=0\dots n_Q}$, il faut avoir une connaissance a priori du résultat recherché ! Cette connaissance va de paire avec la connaissance du système que l'on cherche à commander.

Du point de vue pratique, on pourra inclure dans cette famille :

- les dynamiques du correcteur initial
- les dynamiques de la boucle ouverte
- les dynamiques de la boucle fermée
- une série de retards et avances de phase
- un FIR

Il faut cependant garder en tête qu'un problème d'optimisation sera ensuite numériquement résolu et que la taille de celui-ci dépend du nombre de dynamiques introduites par la famille $\{Q_i\}_{i=0\dots n_Q}$.

3.6. Algorithme

L'utilisation des concepts développés dans les paragraphes précédents aboutit à une méthode systématique de synthèse de loi de commande satisfaisant simultanément un ensemble de critères.

La méthode se décompose en 4 étapes :

- (i) **Synthèse initiale** : synthétiser un correcteur initial en utilisant les algorithmes classiques tels que les méthodes LQG, optimisation H_2 ou H_∞ ou bien encore d'autres algorithmes de synthèse multicritère malgré le conservatisme induit.
- (ii) **Paramétrisation observateur / retour d'état** : il s'agit de mettre en œuvre la structuration de correcteur exposée au chapitre 2 afin d'obtenir une paramétrisation de Youla et les systèmes d'interconnexion G et J (définis sur la Figure 3.5).
- (iii) **Optimisation convexe** : choisir l'ordre du paramètre de Youla Q et résoudre le problème d'optimisation sous contraintes LMI décrit au paragraphe 3.5.
- (iv) **Reconstruction du correcteur** : le correcteur final est obtenu par interconnexion des systèmes J et Q :

$$K = J * Q \quad (\text{Eq. 3.6.1})$$

Cette méthodologie reste suffisamment générale pour ne pas restreindre la classe des systèmes pour lesquels on peut la mettre en œuvre. En effet la seule contrainte forte réside dans la formulation matricielle des contraintes lors de l'étape (iii). D'autre part la flexibilité induite par la séparation des contraintes permet de réaliser des synthèses très différentes comme le montre l'exemple du paragraphe 3.7.

Remarque

D'un point de vue pratique, on peut supposer que la qualité des résultats dépende du correcteur initial. La première étape de la synthèse peut donc faire appel à une synthèse conservative utilisant une fonction de Lyapunov unique [SGC97] ou une synthèse monocritère garantissant déjà un des objectifs de synthèse [CD99].

Par ailleurs, la contrainte d' α -stabilité doit être prise en compte lors de l'étape de synthèse initiale (i) conformément à la remarque faite au paragraphe 3.5.1.

3.7. Application à un bras flexible

Dans ce paragraphe, nous proposons une évaluation de cet algorithme en considérant un benchmark choisi dans les années 90 par le Groupe de Recherche *Automatique* du CNRS [LDL96]. Le problème est traité par deux approches différentes, qui mettent en évidence les diverses possibilités de la méthode.

3.7.1. Le système étudié

Le système est un bras flexible, d'une longueur de un mètre, constitué de deux lames d'aluminium reliées entre elles par dix pontons régulièrement espacés. Ce bras est fixé par une de ses extrémités à un axe vertical. L'axe peut être mis en rotation par un moteur à courant continu, qui fait décrire au bras un mouvement circulaire dans le plan horizontal (Figure 3.8). L'extrémité libre du bras peut recevoir une charge dont la masse varie de 0 à 75 g, et la position de cette extrémité est mesurée par un capteur à infrarouge. Ce système a donc pour entrée la commande u de l'asservissement analogique de la position du moteur, et pour sortie y la position de l'extrémité libre du bras, mesurée par le capteur.

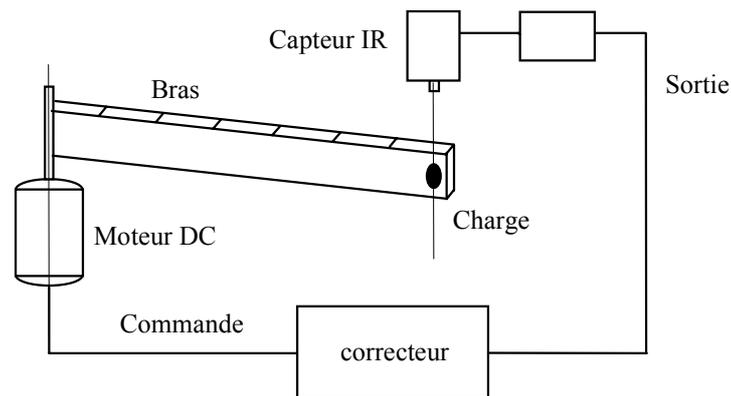


Figure 3.8 Bras flexible

La modélisation tient compte des trois premiers modes de résonance qui sont très peu amortis. La fréquence de Shannon a donc été choisie entre le 3^{ième} et le 4^{ième} mode. La période d'échantillonnage est $T_e = 70$ ms. Trois modèles d'ordre 6, correspondant à des charges de 0 g, 25g et 75g, ont été identifiés [LDL96]. Ils correspondent à la fonction de transfert :

$$H(z^{-1}) = \frac{b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5} + b_6 z^{-6}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5} + a_6 z^{-6}} \quad (\text{Eq. 3.7.1})$$

Les coefficients et les réponses fréquentielles des trois modèles sont donnés dans le Tableau 3-I et la Figure 3.9 respectivement.

L'objectif de ce benchmark est de commander les trois configurations de ce bras souple avec un correcteur unique.

Coefficients	Charge 0 g	Charge 25 g	Charge 75 g
a ₁	-1,95254	-2,12025	-2,30990
a ₂	1,38492	1,50938	1,73794
a ₃	-0,57667	-0,41965	-0,46104
a ₄	0,81758	0,67078	-0,72261
a ₅	-1,33320	-1,28873	-1,33301
a ₆	0,76063	0,71391	0,68082
b ₂	0,04235	0,03682	0,03531
b ₃	-0,04359	0,00961	-0,01520
b ₄	-0,16986	-0,10102	-0,12648
b ₅	0,42575	0,28427	0,27310
b ₆	-0,19068	-0,12933	-0,13373

Tableau 3-I Paramètres des 3 modèles

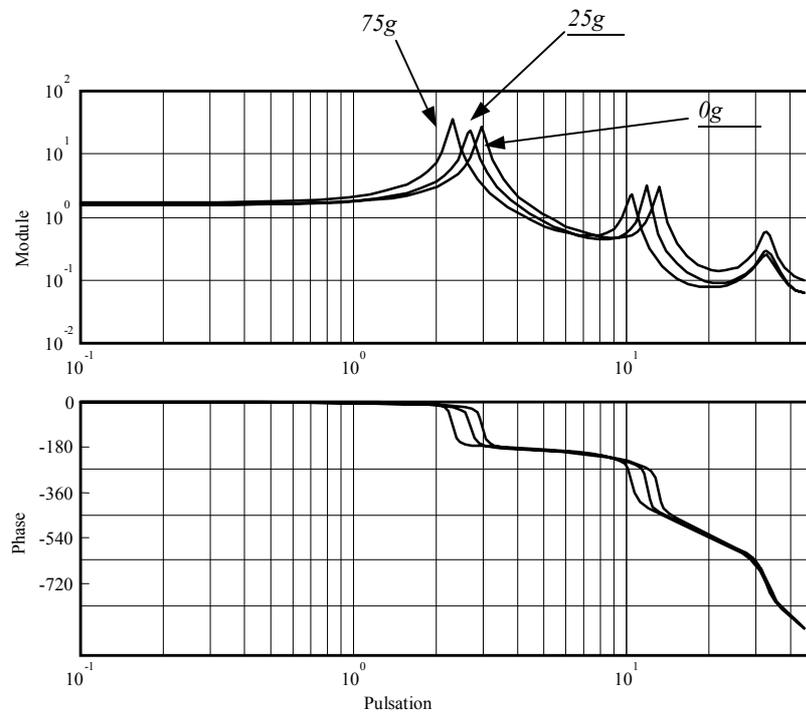


Figure 3.9 Représentation de Bode des 3 modèles de bras souple

3.7.2. *Spécifications*

Les études faites au Laboratoire d'Automatique de Grenoble ont montré qu'il était nécessaire de calibrer la fonction de sensibilité perturbation-sortie (3.7.2) essentiellement pour des raisons de robustesse par rapport aux variations des paramètres :

$$S = (I - KH)^{-1} \quad (\text{Eq. 3.7.2})$$

De même, la fonction de sensibilité perturbation-commande (3.7.3) doit être calibrée pour des raisons de sollicitation de l'actionneur et de robustesse vis-à-vis des dynamiques hautes fréquences :

$$K S = K(I - KH)^{-1} \quad (\text{Eq. 3.7.3})$$

Le régulateur doit être calculé de façon à tenir les spécifications suivantes pour les trois charges :

- 1) Maximum de la fonction de sensibilité perturbation-sortie :

$$|S| \leq 6 \text{ dB (soit une marge de module supérieure à 0,5)}$$

- 2) Maximum de la fonction de sensibilité perturbation-commande

$$|KS| \leq 15 \text{ dB pour les fréquences comprises entre 0 et } 0,4f_s \text{ (où } f_s \text{ est la fréquence de Shannon)}$$

$$|KS| \leq 10 \text{ dB pour les fréquences comprises entre } 0,4f_s \text{ et } 0,5f_s$$

- 3) Marge de retard $\Delta\tau \geq T_e = 70 \text{ ms}$
- 4) Erreur statique nulle
- 5) Face à un échelon de consigne :
 - temps de montée à 90% de la valeur finale inférieur à 1,8 s
 - temps d'établissement à 2% inférieur à 4,8 s

- 6) Face à un échelon de perturbation appliqué en sortie :
- temps de rejet de la perturbation inférieur à 2,8 s
 - intégrale du module de l'écart à la consigne normalisé par l'amplitude de la perturbation inférieure à 1,5 s. En notant ε l'erreur et D l'amplitude de la perturbation, cette grandeur est donnée par la relation suivante :

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\varepsilon(k)|}{D} T_e \quad (\text{Eq. 3.7.4})$$

Afin de résoudre ce problème de commande avec la méthodologie présentée dans ce chapitre, deux approches différentes sont mises en œuvre. La première utilise un critère d' α -stabilité tandis que la seconde utilise une modélisation particulière pour les modes souples. Ces deux approches sont ici exposées pour montrer la flexibilité de l'algorithme de synthèse utilisé.

3.7.3. Synthèse multicritère : α -stabilité

Dans cette première approche, la robustesse vis-à-vis de la charge est recherchée en imposant une contrainte d' α -stabilité : outre qu'elle permet d'assurer une certaine rapidité à la boucle fermée, elle évite surtout les compensations pôle-zéro entre le correcteur et le modèle de synthèse, dont on sait qu'elles posent des problèmes de robustesse sur les structures flexibles. Le correcteur est calculé en utilisant le modèle à vide. Les résultats obtenus sur les trois modèles sont donnés dans le paragraphe suivant.

La Figure 3.10 donne le schéma de synthèse qui a été choisi : le suivi de consigne est assuré par l'ajout explicite d'un intégrateur numérique dans la boucle. Le correcteur, qui à 3 entrées, réalise donc une correction à 2 degrés de liberté avec action intégrale. Des pondérations constantes $W_1 = 0,5$ et $W_2 = 0,2$ sont utilisées pour traduire les spécifications sur S et KS en objectifs H_∞ : ceux-ci sont respectés si les transferts de w_1 vers z_1 et de w_1 vers z_2 ont une norme H_∞ inférieure à 1. Le choix de ces valeurs est directement issu des spécifications sur S et KS :

$$\frac{1}{W_1} \approx 6 \text{ dB} \text{ et } \frac{1}{W_2} \approx 14 \text{ dB} \quad (\text{Eq. 3.7.5})$$

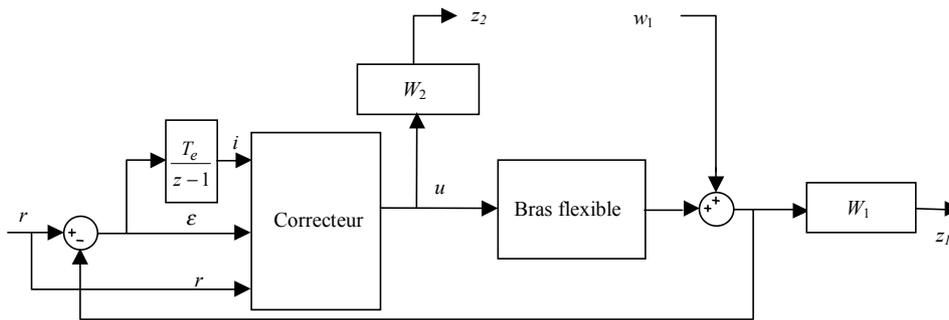


Figure 3.10 Schéma de synthèse (première approche)

Comme indiqué dans l'algorithme du paragraphe 3.6, la synthèse consiste en deux étapes successives basées sur l'optimisation LMI.

La synthèse initiale est faite à partir d'une méthode multicritère n'utilisant qu'une seule fonction de Lyapunov. Les critères sont l' α -stabilité (la valeur $\alpha = 0,875$ a été choisie pour contraindre les pôles dominants de la boucle) et la performance H_∞ sur KS :

$$\min \left(\gamma / \|T_{w_1 \rightarrow z_2}\|_\infty < \gamma \text{ et } \alpha - \text{stabilité} \right) \quad (\text{Eq. 3.7.6})$$

L'algorithme utilisé est déduit de [SGC97] avec quelques manipulations matricielles pour obtenir une formulation en temps discret. Il fournit un correcteur initial d'ordre 7.

La seconde étape (passage à une forme observateur / retour d'état) est réalisée en affectant à la dynamique de commande les valeurs propres les plus lentes.

La troisième étape (optimisation du paramètre de Youla) est une synthèse multicritère où les objectifs sur S , KS et le suivi de référence sont introduits sous la forme de deux contraintes H_∞ :

$$\min \left(\gamma_1 + \gamma_2 / \left\| \begin{pmatrix} W_1 S \\ W_2 KS \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} T_{w_1 \rightarrow z_1} \\ T_{w_1 \rightarrow z_2} \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma_1 \text{ et } \|T_{r \rightarrow \varepsilon}\|_\infty < \gamma_2 \right) \quad (\text{Eq. 3.7.7})$$

L'avantage de cette formulation (par rapport à une synthèse H_∞ traditionnelle) est de supprimer toute contrainte artificielle sur les transferts croisés de r vers z_1 et z_2 , et de w_1 vers ε .

Afin d'obtenir des résultats probants, un paramètre de Youla sous forme de filtre FIR d'ordre 4 a été utilisé. L'ordre du correcteur finalement obtenu est 11.

3.7.4. Résultats de la première approche

Les résultats temporels obtenus sont résumés dans le Tableau 3-II tandis que les performances fréquentielles sont présentées dans le Tableau 3-III. Ils sont très satisfaisants si l'on se réfère aux objectifs et aux résultats obtenus par d'autres méthodes [LDL96]. L'indice de performance défini dans [LDL96] est de 97%.

Le diagramme de Bode du correcteur (Figure 3.11) et le diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte (Figure 3.12) montre qu'il n'y a pas eu de compensation pole / zéro lors de la synthèse. La Figure 3.13 montre que les spécifications sur les fonctions de sensibilité S et KS sont globalement respectées pour les trois modèles. Enfin, les réponses à des échelons de consigne et de perturbation (Figure 3.14 et Figure 3.15) remplissent les objectifs de manière satisfaisante.

	Echelon de consigne			Perturbation	
	$t_{10\%}(s)$	$t_{2\%}(s)$	Dépassement (%)	$t_{10\%}(s)$	$\int \varepsilon dt (s)$
Objectifs	1,8	4,8	10	2,8	1,5
0 g	1,68	2,54	0	2,21	1,03
25 g	1,47	3,26	0	2,29	1,08
75 g	1,28	4,80	11	2,44	1,08

Tableau 3-II Résultats temporels

	Domaine fréquentiel		
	S	$K S$	$\Delta\tau$ (ms)
Objectifs	2	6 / 3	70
0 g	2,1	4,32 / 3,8	56,0
25 g	1,8	5,25 / 3,13	74,5
75 g	2,3	6,29 / 3,00	293

Tableau 3-III Résultats fréquentiels

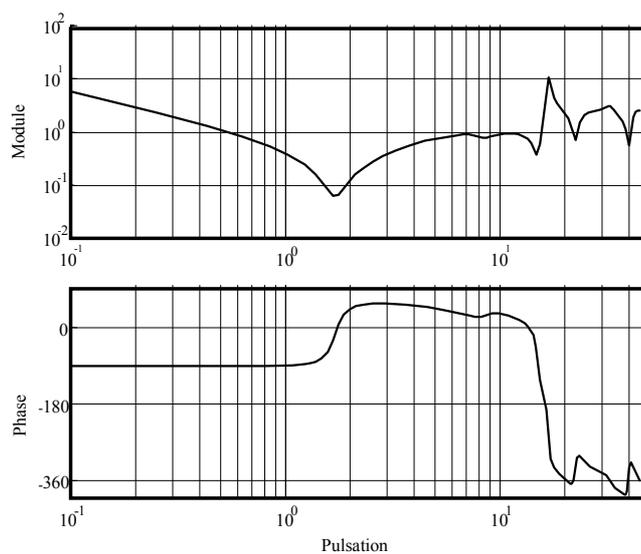


Figure 3.11 Diagramme de Bode du correcteur

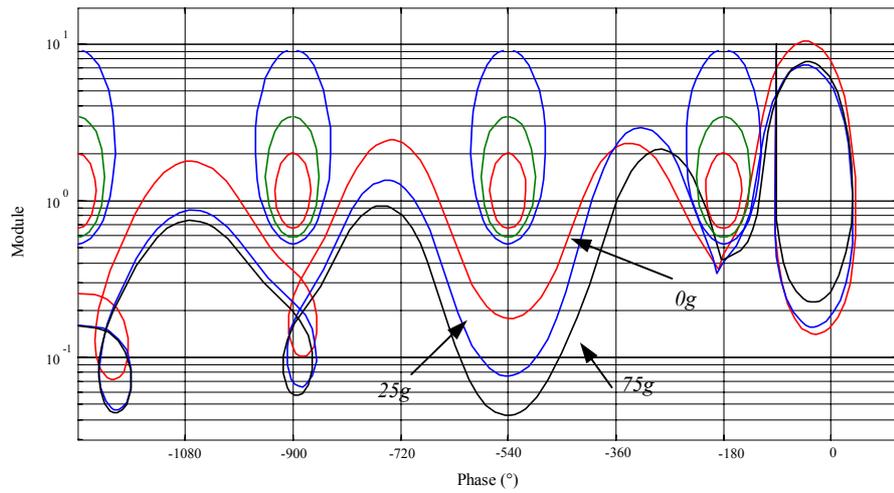


Figure 3.12. Diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte corrigée (contours à 1 dB, 3 dB et 6 dB)

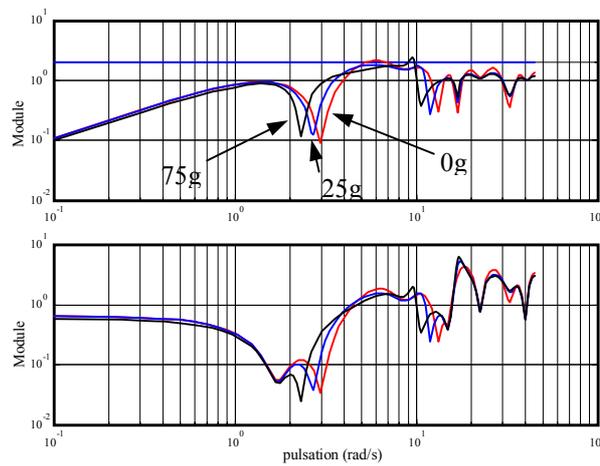


Figure 3.13 Fonctions de sensibilité S et KS

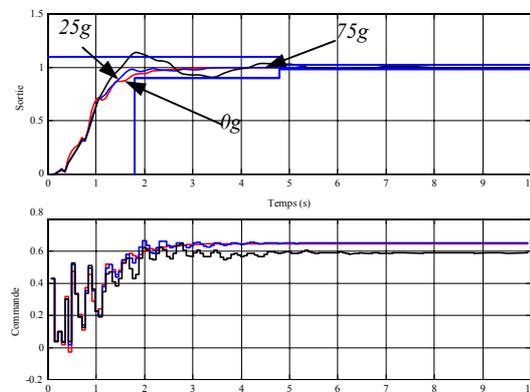


Figure 3.14 Réponses à un échelon de consigne

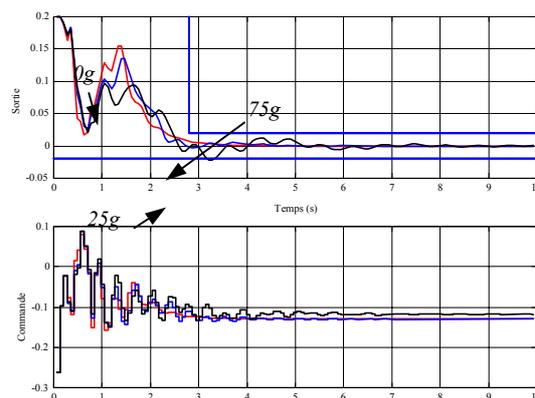


Figure 3.15. Réponses à un échelon de perturbation

3.7.5. Algorithme de synthèse : deuxième approche

Dans ce paragraphe, la robustesse est recherchée en introduisant des incertitudes sur chacun des modes. Le suivi de consigne est assuré de façon classique en synthèse H_∞ , par une pondération sur l'erreur d'asservissement. Le correcteur est calculé en utilisant le modèle à vide. Les résultats obtenus sur les trois modèles sont donnés dans le paragraphe suivant.

Les incertitudes sont modélisées en utilisant la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert :

$$H(z) = \sum_{i=1}^3 K_i \frac{z + a_i}{z^2 + \alpha_i z + \beta_i} \quad (\text{Eq. 3.7.8})$$

Chaque élément simple, qui correspond à un mode, est noté M_i . On modélise alors les incertitudes sur chaque mode par un scalaire complexe δ_i (Figure 3.16) qui traduit simultanément des incertitudes sur le gain, la pulsation propre et l'amortissement du mode.

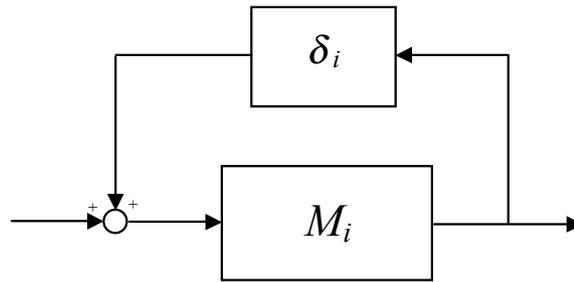


Figure 3.16 Incertitude sur le mode M_i

Le système global est la somme des trois modes souples, la matrice d'incertitude résultante s'écrit donc $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

La Figure 3.17 donne le schéma de synthèse avec un correcteur à deux degrés de liberté qui a été choisi : elle contient les mêmes pondérations constantes $W_1 = 0,5$ et $W_2 = 0,2$ pour les objectifs H_∞ sur S et KS , et une pondération W_{1bis} du premier ordre pour assurer le suivi de consigne :

$$W_{1bis}(z) = \frac{0,535z - 0,465}{z - 0,999} \quad (\text{Eq. 3.7.9})$$

Les signaux z_4 et w_2 correspondent aux entrées et sorties de la matrice d'incertitude Δ . D'après le théorème du petit gain, la robustesse aux incertitudes est d'autant meilleure que $\|T_{w_2 \rightarrow z_4}\|_\infty$ est petite.

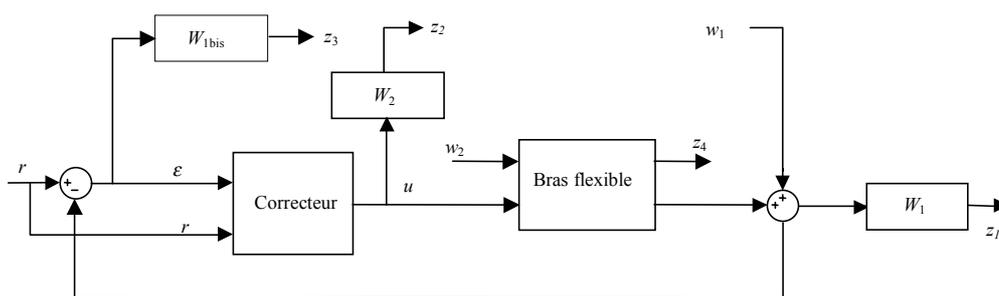


Figure 3.17 Schéma de synthèse (deuxième approche)

Les trois étapes de la synthèse s'effectuent successivement comme suit :

La synthèse initiale est faite à partir d'une méthode multicritère n'utilisant qu'une seule fonction de Lyapunov. Les critères sont la performance H_∞ sur S et KS et la robustesse de la stabilité par rapport aux variations de modèles :

$$\min \left(\gamma_1 / \left\| \begin{pmatrix} W_1 S \\ W_2 KS \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} T_{w_1 \rightarrow z_1} \\ T_{w_1 \rightarrow z_2} \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma_1 \text{ et } \|T_{w_2 \rightarrow z_4}\|_\infty < \gamma_2 \right) \text{ (Eq. 3.7.10)}$$

Le choix de $\gamma_2 = 1$ permet d'assurer un niveau de robustesse suffisant et notamment d'éviter les éventuelles compensations pôle zéro. L'algorithme fournit un correcteur initial d'ordre 7.

La seconde étape est réalisée là-aussi en affectant à la dynamique de commande les valeurs propres les plus lentes (la dynamique de la pondération W_{1bis} est elle aussi affectée à la commande en raison de son caractère non observable par les mesures).

La troisième étape est une synthèse multicritère où les objectifs sur S , KS et le suivi de référence (transfert entre r et ε , noté S_{bis}) sont introduits sous la forme de deux contraintes H_∞ :

$$\min \left(\gamma_1 + \gamma_2 / \left\{ \begin{array}{l} \left\| \begin{pmatrix} W_1 S \\ W_2 KS \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} T_{w_1 \rightarrow z_1} \\ T_{w_1 \rightarrow z_2} \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma_1 \\ \|W_{1bis} S_{bis}\|_\infty = \|T_{r \rightarrow z_3}\|_\infty < \gamma_2 \end{array} \right. \right) \text{ (Eq. 3.7.11)}$$

Afin d'obtenir des résultats probants, un paramètre de Youla sous forme de filtre FIR d'ordre 4 a été utilisé. L'ordre final du correcteur obtenu est 12.

3.7.6. Résultats de la deuxième approche

Les résultats obtenus sont résumés dans le Tableau 3-IV pour les performances temporelles et dans le Tableau 3-V pour les performances fréquentielles. Ils sont là aussi très satisfaisants. L'indice de performance est de 98%.

Le diagramme de Bode du correcteur (Figure 3.18) et le diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte (Figure 3.19) montre qu'il n'y a pas eu de compensation pôle/zéro. La Figure 3.20 montre que les spécifications sur les fonctions de sensibilité S et KS sont respectées pour les trois modèles, tandis

que la Figure 3.21 montre la réponse en suivi de trajectoire avec le gabarit $1/W_{1bis}$ utilisé. Enfin, les réponses à des échelons de consigne et de perturbation (Figure 3.22 et Figure 3.23) remplissent les objectifs de manière satisfaisante (même si le temps de montée est légèrement supérieur à la spécification).

	Echelon de consigne			Perturbation	
	$t_{10\%}(s)$	$t_{2\%}(s)$	Dépassement (%)	$t_{10\%}(s)$	$\int \varepsilon dt (s)$
Objectifs	1,8	4,8	10	2,8	1,5
0 g	2	4,1	5	1,9	1,10
25 g	2,1	4,1	9	2,15	1,11
75 g	2,3	4,8	11	2,42	1,15

Tableau 3-IV Résultats temporels

	Domaine fréquentiel		
	S	KS	$\Delta\tau (ms)$
Objectifs	2	6 / 3	70
0 g	2	2,25 / 2,53	458
25 g	1,8	2,25 / 2,39	367
75 g	2,3	2,25 / 2,39	405

Tableau 3-V Résultats fréquentiels

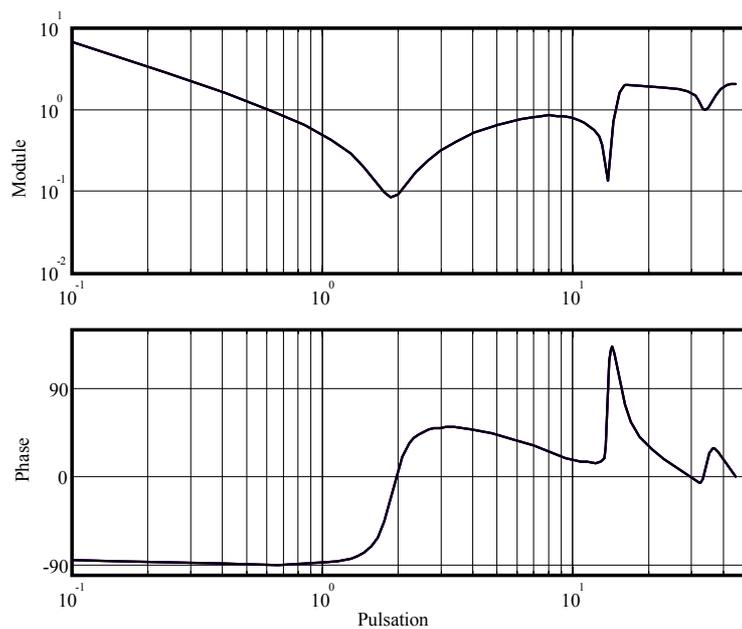


Figure 3.18 Diagramme de Bode du correcteur

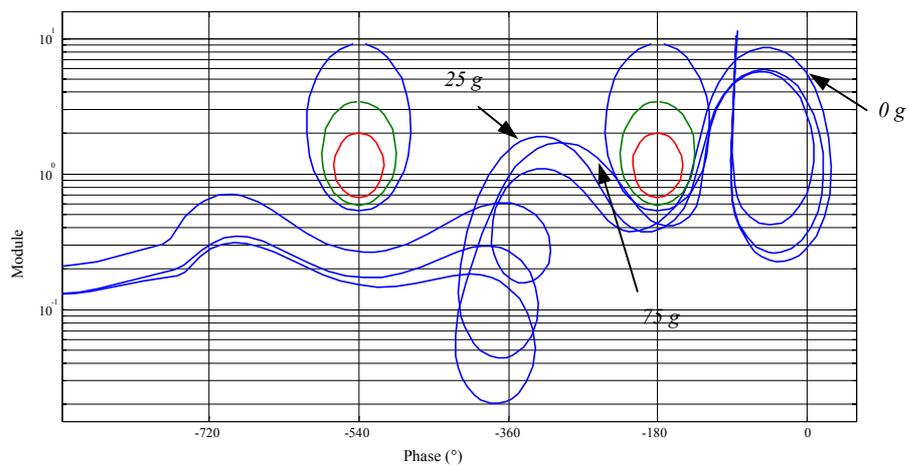


Figure 3.19 Diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée pour les 3 modèles (contours à 1 dB, 3 dB et 6 dB)

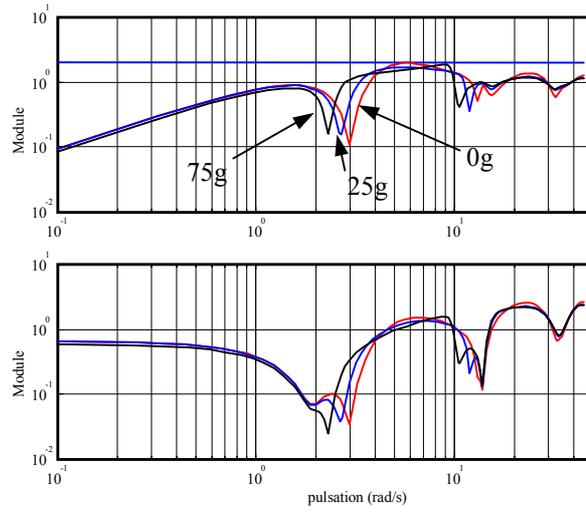


Figure 3.20 Fonctions de sensibilité S et KS

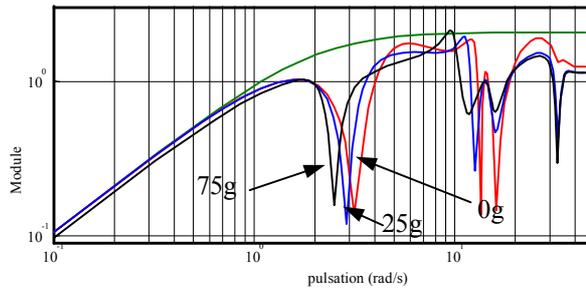


Figure 3.21 Fonction de suivi de trajectoire S_{bis}

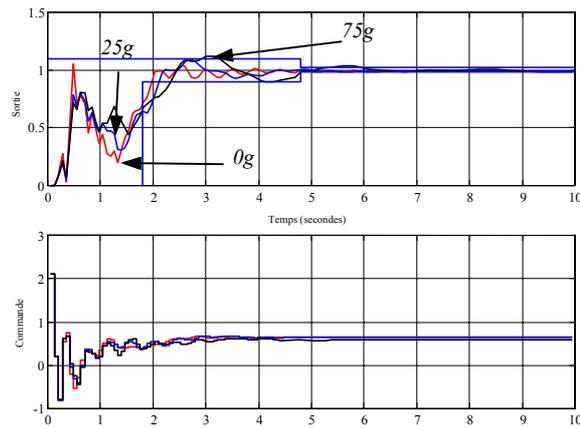


Figure 3.22 Réponse à un échelon de consigne

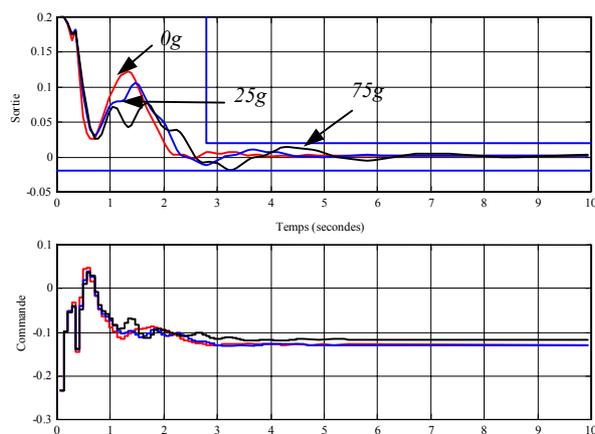


Figure 3.23 Réponse à un échelon de perturbation

3.7.7. Comparaison des méthodes

Dans les deux synthèses proposées, la complexité du correcteur n'est pas prise en compte explicitement mais elles aboutissent à des résultats similaires à ceux présentés dans [LDL96]. L'ordre du correcteur peut être réduit avec les méthodes classiques de la littérature.

Quant aux résultats obtenus, ils sont très satisfaisants au vu des spécifications et des résultats déjà publiés [LDL96] : l'indice de performance est supérieur à 97% dans les deux cas. La seconde méthode qui utilise un modèle d'incertitude donne de meilleurs résultats fréquentiels, alors que la méthode utilisant l' α -stabilité est plus performante pour l'amortissement des réponses temporelles.

3.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche méthodologique systématique pour résoudre le problème de synthèse multicritère. Les critères pris en compte sont de type H_∞ , H_2 , ou α -stabilité, mais cette liste ne doit pas être considérée comme exhaustive et d'autres objectifs tels que ceux décrits dans [Fol97, SGC97] peuvent aisément être traités ; de manière générale on peut considérer tous les critères pour lesquels il existe une formulation par inégalités matricielles. L'utilisation de la paramétrisation de Youla permet de transformer le problème de synthèse en un problème d'optimisation sous contraintes LMI, tandis que la formulation d'un correcteur initial sous forme observateur/retour d'état permet de limiter l'ordre du correcteur final. Le

principal avantage de cette approche est de pouvoir combiner différents critères de manière séparée pour s'affranchir des éventuels couplages non désirés. C'est pourquoi des synthèses H_∞ / H_∞ ont trouvée leur place dans ce formalisme.

Afin de tester les performances de l'algorithme de synthèse proposé, celui-ci a été appliqué à un "benchmark" de la littérature et s'avère aboutir à des résultats concluant en comparaison avec ceux publiés dans [LDL96]. Pour montrer le caractère modulable de la méthode, deux approches ont été utilisées pour prendre en compte les objectifs de robustesse, d'une part une contrainte de type α -stabilité et d'autre part l'utilisation d'incertitudes paramétriques. Notons que nous n'avons pas cherché à minimiser l'ordre du correcteur, ce point ne faisant pas partie du cahier des charges. Il est probable, d'après sa réponse fréquentielle, qu'on pourrait le réduire sans dégradation notable des résultats.

Différents points pourraient faire l'objet d'investigations supplémentaires à la suite de ces résultats. On peut notamment s'interroger sur le choix de la dynamique du paramètre de Youla Q . Nous nous sommes limités à des filtres FIR, mais on pourrait par exemple décomposer Q sur une base de fractions rationnelles ou autre chose encore¹.

Il est cependant important d'être conscient que la taille du problème d'optimisation devient rapidement grande et qu'il faut donc limiter le caractère « multiobjectifs » pour lever des difficultés et non pas comme la réponse universelle au problème de synthèse d'une loi de commande.

Il est donc raisonnablement possible de coupler cette approche avec les autres approches de la synthèse convexe car elle appartiennent à la même problématique qui consiste à transformer le problème de synthèse en un problème d'optimisation convexe.

¹ On pourra s'intéresser aux travaux dans le domaine de l'identification en ce qui concerne les bases de filtres. Cependant, il est difficile aujourd'hui de multiplier les bases de systèmes car la taille du problème croît considérablement dès que l'on cherche des procédures automatiques. D'autre part on peut se reporter aux récents travaux de l'Onera sur le sujet [Dar99] et le travail actuel entrepris à Supélec par S. Hbaïeb.

3.9. Annexe 1 : interprétation de la norme H_2

3.9.1. Interprétation énergétique

En effet la norme H_2 d'un système représente l'énergie de la sortie en réponse à un bruit blanc unitaire.

Soit le système de la Figure 3.24 dont on cherche la norme H_2 :



Figure 3.24 Système à régler

Le signal w est un bruit blanc unitaire :

$$E\{w(k)w(\kappa)^T\} = I \delta(k - \kappa) \quad (\text{Eq. 3.9.1})$$

de sorte que sa densité spectrale de puissance (DSP) est $\Phi_{ww}(z) = I$.

On sait que la DSP du signal de sortie y s'écrit alors :

$$\Phi_{yy}(e^{2\pi j\nu}) = G(e^{-2\pi j\nu}) \Phi_{ww}(z) G(e^{2\pi j\nu})^T = G(e^{-2\pi j\nu}) G(e^{2\pi j\nu})^T \quad (\text{Eq. 3.9.2})$$

De plus on peut écrire la relation suivante en utilisant la fonction d'autocorrélation en 0 :

$$\begin{aligned} E\{y(k)y(k)^T\} &= \phi_{yy}(0) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^1 \Phi_{yy}(e^{2\pi j\nu}) d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 G(e^{-2\pi j\nu}) G(e^{2\pi j\nu})^T d\nu \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.9.3})$$

La puissance instantanée du signal de sortie peut s'écrire et se transformer selon les équations suivantes :

$$\begin{aligned} E\{y(k)^T y(k)\} &= \text{trace}\left(E\{y(k)y(k)^T\}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \text{trace}\left(G(e^{-2\pi j\nu})G(e^{2\pi j\nu})^T\right) d\nu \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.9.4})$$

Compte tenu des propriétés de la trace : $\text{trace}(A^T B) = \text{trace}(AB^T)$ et $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$, on en déduit :

$$E\{y(k)y(k)^T\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \text{trace}\left(G(e^{2\pi j\nu})^T G(e^{-2\pi j\nu})\right) d\nu \quad (\text{Eq. 3.9.5})$$

Soit :

$$E\{y(k)y(k)^T\} = \|G\|_2^2 \quad (\text{Eq. 3.9.6})$$

Le carré de la norme H_2 est donc la puissance instantanée du signal de sortie obtenu en appliquant en entrée un bruit blanc de covariance identité.

3.9.2. Relation entre la synthèse H_2 et la synthèse LQG

Il est possible d'interpréter la commande H_2 comme une généralisation de la commande linéaire quadratique et donc d'en utiliser le savoir faire existant.

Soit le système suivant :

$$\begin{aligned} \delta x &= Ax + Bu + G_1 p_1 \\ y &= Cx + G_2 p_2 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.9.7})$$

avec p_1 et p_2 des perturbations. Les signaux choisis pour caractériser le bon fonctionnement de la commande sont :

$$\begin{aligned} e_1 &= H_1 x \\ e_2 &= H_2 u \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.9.8})$$

On se pose alors le problème de trouver le correcteur K qui stabilise la boucle fermée et minimise la norme H_2 du transfert de p vers e comme le montre la Figure 3.25.

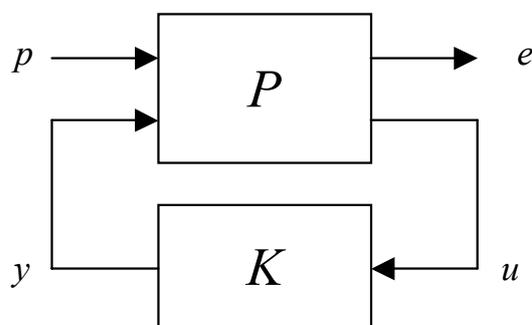


Figure 3.25. Synthèse H_2

Or on sait que l'énergie instantanée de la sortie correspond à la norme H_2 du système bouclé pour une entrée en bruit blanc unitaire :

$$\|P * K\|_2^2 = E\{e^T e\} \text{ pour } p \text{ bruit blanc et } E\{pp^T\} = I \quad (\text{Eq. 3.9.9})$$

En utilisant les spécifications (3.3.16), la norme H_2 peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \|P * K\|_2^2 &= E\left\{ \begin{pmatrix} x^T H_1^T & u^T H_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 x \\ H_2 u \end{pmatrix} \right\} \\ &= E\{x^T H_1^T H_1 x + u^T H_2^T H_2 u\} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.9.10})$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} Q &= H_1^T H_1 \\ R &= H_2^T H_2 \\ V &= G_1 G_1^T \\ W &= G_2 G_2^T \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.9.11})$$

Le problème d'optimisation H_2 utilise le critère défini par :

$$\|P * K\|_2^2 = E\{x^T Qx + u^T Ru\} \quad (\text{Eq. 3.9.12})$$

Cette grandeur est constante, il est donc possible d'en faire une somme temporelle :

$$\|P * K\|_2^2 = E\{x^T Qx + u^T Ru\} = \lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x^T Qx + u^T Ru\right\} \quad (\text{Eq. 3.9.13})$$

On retrouve le cadre de la commande LQG dans lequel on considère le système suivant :

$$\begin{aligned} \delta x &= Ax + Bu + v \\ y &= Cx + w \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.9.14})$$

où v et w sont des bruits blancs de variances V et W .

La solution consiste à optimiser le critère :

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x^T Qx + u^T Ru\right\} \quad (\text{Eq. 3.9.15})$$

Il existe donc un lien direct entre la commande H_2 et la commande LQG, c'est pourquoi on retrouve dans la littérature un grand nombre d'approches s'intéressant à la synthèse mixte H_2 / H_∞ .

3.10. Annexe 2 : tableau récapitulatif – boîte à outils

De manière générale, de nombreux critères qui existent sous forme d'inégalités matricielles peuvent se réécrire avec un formalisme LMI. On montre ici par des tableaux récapitulatifs comment les traiter, d'abord avec une fonction de Lyapunov unique puis avec la méthode qui vient d'être présentée.

Les tableaux suivant permettent, à partir des inégalités matricielles initiales, d'indiquer comment remplacer chaque terme pour obtenir la formulation LMI à résoudre.

3.10.1. Fonction de Lyapunov unique

La méthode présentée ici est directement adaptée des résultats en temps continu de [SGC97]. Il s'agit d'utiliser une fonction de Lyapunov unique pour l'ensemble des critères considérés et de transformer les inégalités matricielles selon le Tableau 3-VI. On obtient alors un système LMI dont les variables de décision sont :

$$(R \ S \ \hat{A} \ \hat{B} \ \hat{C} \ \hat{D}) \quad (\text{Eq. 3.10.1})$$

Une représentation d'état du correcteur peut alors être donnée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} D_K &= \hat{D} \\ C_K &= N^{-1}(\hat{C} - \hat{D}C_y R)M^{-T} \\ B_K &= N^{-1}(\hat{B} - SB_u \hat{D}) \\ A_K &= N^{-1}(\hat{A} - S(A - B_u \hat{D}C_y)R - SB_u \hat{C} - \hat{B}C_y R)M^{-T} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.10.2})$$

dans lesquelles les matrices N et M sont telles que :

$$MN^T = I - RS \quad (\text{Eq. 3.10.3})$$

Terme dans la caractérisation de la propriété en boucle fermée	Terme équivalent pour construire la LMI
X^{-1}	$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix}$
X	$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix}$
A_{cl}	$\begin{pmatrix} AR + B_u \hat{C} & A + B_u \hat{D}C_y \\ \hat{A} & SA + \hat{B}C_y \end{pmatrix}$
B_{cl}	$\begin{pmatrix} B + B_u \hat{D}D_y \\ SB + \hat{B}D_y \end{pmatrix}$
C_{cl}	$(CR + D_u \hat{C} \quad C + D_u \hat{D}C_y)$
D_{cl}	$D + D_u \hat{D}D_y$

Tableau 3-VI Boîte à outils pour synthèse avec fonction de Lyapunov unique (temps discret)

3.10.2. Paramétrisation de Youla

Dans le cas de la méthode qui fait l'objet de ce chapitre, on peut résumer les transformations dans le tableau suivant :

Terme dans la caractérisation de la propriété en boucle fermée	Terme équivalent pour construire la LMI
X	$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$
XA_{cl}	$\begin{pmatrix} A_1R & A_1S - SA_2 + A_3 + B_uQC_y \\ 0 & TA_2 \end{pmatrix}$
XB_{cl}	$\begin{pmatrix} B_1 + B_uQD_y - SB_2 \\ TB_2 \end{pmatrix}$
C_{cl}	$(C_1R \quad C_2 + D_uQC_y + C_1S)$
D_{cl}	$D + D_uQD_y$

Tableau 3-VII Boîte à outils pour synthèse avec fonctions de Lyapunov différentes (temps discret)

3.11. Annexe 3 : extension au cas continu

Le cas continu est homologue au cas discret et l'ensemble des résultats peuvent être retranscrits.

3.11.1. Fonction de Lyapunov unique

La méthode présentée ici est directement celle de [SGC97].

Terme dans la caractérisation de la propriété en boucle fermée	Terme équivalent pour construire la LMI
XA_{cl}	$\begin{pmatrix} AR + B_u \hat{C} & A + B_u \hat{D}C_y \\ \hat{A} & SA + \hat{B}C_y \end{pmatrix}$
XB_{cl}	$\begin{pmatrix} B + B_u \hat{D}D_y \\ SB + \hat{B}D_y \end{pmatrix}$
C_{cl}	$(CR + D_u \hat{C} \quad C + D_u \hat{D}C_y)$
D_{cl}	$D + D_u \hat{D}D_y$

Tableau 3-VIII Boîte à outils pour synthèse avec fonction de Lyapunov unique (temps continu)

3.11.2. Paramétrisation de Youla

Dans le cas de la méthode qui fait l'objet de ce chapitre, on peut résumer les transformations dans le tableau suivant :

Terme dans la caractérisation de la propriété en boucle fermée	Terme équivalent pour construire la LMI
XA_{cl}	$\begin{pmatrix} A_1R & A_1S - SA_2 + A_3 + B_uQC_y \\ 0 & TA_2 \end{pmatrix}$
XB_{cl}	$\begin{pmatrix} B_1 + B_uQD_y - SB_2 \\ TB_2 \end{pmatrix}$
C_{cl}	$(C_1R \quad C_2 + D_uQC_y + C_1S)$
D_{cl}	$D + D_uQD_y$

Tableau 3-IX Boîte à outils pour synthèse avec fonctions de Lyapunov différentes (temps continu)

Chapitre 4

Séquencement de gains

4.1. Introduction	123
4.2. Cadre d'étude.....	125
4.3. Théorème de stabilité [Sha88]	130
4.4. Conditions suffisantes d'interpolation	131
4.5. Problème LMI en pratique	146
4.6. Exemple d'une bobineuse.....	147
4.7. Conclusion	153

4.1. Introduction

L'appellation « séquençement de gains », plus connue sous son nom anglais « gain scheduling », regroupe un grand nombre de problèmes de l'automatique. Pour caricaturer,

« Machines that walk, swim, or fly are gain scheduled » [SR00].

Cette problématique est apparue dans la recherche au début des années 90 [Rug91, SA90] mais existait déjà largement dans la pratique ; elle était considérée comme une partie de la famille des commandes adaptatives [SB89, AW95]. Il apparaît assez naturel que pour des processus qui varient dans le temps (on dit aussi variants¹) on utilise des correcteurs qui eux aussi varient dans le temps, comme le suggère la Figure 4.1. Cette notion reste très vague et il est donc nécessaire d'établir une classification des problèmes selon leurs particularités afin d'aboutir à des résultats qui seront exploitables du point de vue pratique. En effet, notre travail se situe à mi-chemin entre la théorie et la pratique, il est donc important que les résultats théoriques qui en résultent soient associés à une méthodologie pratique qui puisse être mise en œuvre de manière industrielle.

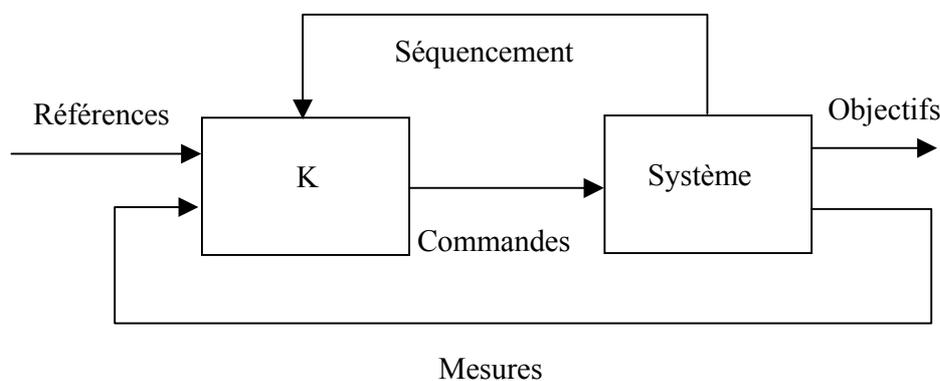


Figure 4.1 Principe du séquençement de gains

¹ Les termes « variant » et « invariant » sont utilisés ici (et dans la suite de ce document) comme des adjectifs car ils sont directement traduits de l'anglais et ne recouvrent pas exactement le même sens qu'en français usuel.

L'exemple du pilotage d'un lanceur spatial s'inscrit typiquement dans cette problématique ; il s'agit en effet d'un système dynamique dont les caractéristiques évoluent dans le temps au fur et à mesure qu'il progresse le long de sa trajectoire. Cependant les méthodes proposées dans ce cadre peuvent être étendues à une large gamme de problèmes non linéaires comme cela est expliqué dans [Sco97]. Restreindre l'étude aux systèmes dont les paramètres varient dans le temps ne restreint par pour autant le champ d'application du séquençement de gains.

D'un certain point de vue, l'utilisation des gains variables peut s'interpréter comme une généralisation des méthodes linéaires pour une certaine classe de problèmes non linéaires. Deux arguments tentent à consolider cette intuition :

- la théorie de Lyapunov [Lya92] assure qu'au voisinage d'un point d'équilibre, le système non linéaire et sa linéarisation ont le même comportement¹.
- Pour un système dont les paramètres varient « suffisamment lentement » alors la stabilité des modèles linéaires garantit la stabilité du modèle non linéaire [Des69].

C'est d'ailleurs à partir de ces résultats qualitatifs que s'est développée l'utilisation des gains variables dans la pratique industrielle, et en particulier dans le domaine aéronautique, et ce n'est que plus tard que les théoriciens se sont penchés sur la question [Rug91].

On peut décrire le déroulement typique de la synthèse de correcteurs séquencés par les six étapes suivantes :

1. Choix des variables qui traduisent le séquençement à suivre
2. Choix d'un ensemble de points de la trajectoire du système².
3. Linéarisation du système autour de chacun de ces points.
4. Synthèse d'un correcteur linéaire en chacun de ces points
5. Le correcteur final est donné par interpolation de l'ensemble des correcteurs synthétisés.
6. On effectue la validation du correcteur par simulation.

¹ Cette affirmation est vraie sous l'hypothèse qu'il n'y ait pas de valeur propre associée à la linéarisation stationnaire à partie réelle nulle (dans le cas continu) ou de module unitaire (dans le cas discret).

² On considère souvent le principe « plus il y a de points, mieux c'est » et la limitation se fait par rapport aux moyens de calcul.

On discerne alors immédiatement les points critiques : les deux premières étapes ne relèvent pas de procédures systématiques et de plus rien ne garantit la stabilité du système bouclé si on s'éloigne des points de synthèse. Cependant, la mise en œuvre des méthodes de gains variables a donné dans la pratique des résultats très satisfaisants et a donc motivé un grand nombre de travaux : la littérature sur ce sujet commence à être conséquente [SR00]. Mais, les méthodes pratiques sont souvent intrinsèquement liées à des applications spécifiques et sont donc peu reproductibles. Nous proposons donc ici de nous placer à mi-chemin entre des résultats très généraux et la possibilité d'une mise en œuvre facile dans un cadre industriel.

Afin de mieux comprendre la problématique des gains séquencés, on commencera par un rappel sur l'évolution des idées et des outils dans ce domaine avant d'aborder les aspects techniques, dans un cadre d'étude spécifique à la problématique du suivi de trajectoire.

4.2. Cadre d'étude

4.2.1. Généralités

Le séquençement de gain a attiré particulièrement l'attention dans les années 90 avec l'utilisation des représentations fractionnaires (LFT)¹ introduites dans [DPZ91, PZPB91, LZD96]. On trouve ainsi dans [Pac94] une condition suffisante utilisant les représentations LFT et le formalisme LMI pour la synthèse en exploitant une dépendance rationnelle en les paramètres. Ce travail concerne les systèmes à temps discret alors que la version continue est décrite dans [AG95, AB95]. Le problème de la prise en compte de paramètres réels est traité dans [BPPB93, PBPB93, BP93, AGB94, AGB95]. Il s'agit alors de résoudre un problème LMI dont la taille croît exponentiellement avec le nombre de paramètres. Dans l'état actuel des méthodes de résolution numérique, ce genre de problème devient très vite impossible à résoudre. Par la suite des améliorations de ces résultats ont été proposées dans [Hel95a, Hel95b] ; il s'agit d'une formulation proche de la μ -analyse dans un cadre algébrique bien particulier. Plus récemment de nouvelles conditions suffisantes ont été proposées dans [Sco97, SE98], elles permettent de réduire de manière

¹ LFT signifie « Linear Fractional Transformation » ce qui une fois traduit de l'anglais donne transformation linéaire fractionnaire.

importante la taille des problèmes. De plus l'approche proposée permet de généraliser la méthode à une grande classe de problèmes non linéaires.

On notera pour terminer l'utilisation de modèles polytopiques dans [Sch96, Cour99] ; Ces approches aboutissent à des formulations LMI intéressantes dans le cadre de l'analyse mais les problèmes sont trop compliqués numériquement dans le cadre de la synthèse [CBG99].

D'autre part, l'étude des relations entre les linéarisés tangents sur lesquels le travail est effectué et le système non linéaire est fondamental pour la compréhension des difficultés intrinsèques au séquençement des gains. Même si le problème reste ouvert, il est largement étudié dans [Sha88, Fro95, FMN96, Sha95, SA90, Sco96] dans différents formalismes et on trouve aussi quelques articles de « survey » qui récapitulent les avancées dans le domaine [SR00, LL00].

Quoiqu'il en soit, la résolution des problèmes est d'autant plus difficile qu'elle est accompagnée d'une autre étape critique : l'interpolation. En effet, la mise en œuvre des méthodes utilise la plupart du temps des interpolations linéaires, soit sur les gains, les pôles et les zéros [NRR93], soit sur les gains du correcteur sous forme observateur / retour d'état [HG93]. Bien que ces approches aboutissent à de bons résultats, en théorie rien ne garantit que la boucle non linéaire soit stable. Dans le cas particulier des correcteurs dits LPV [AG95, AA98, CBG99, CBB00], l'interpolation est implicite puisque le correcteur est séquençé directement par les paramètres variant mesurés et la stabilité est alors garantie. Cependant le degré de conservatisme induit par ces méthodes de « self-scheduling » est tel qu'il est possible de ne pas aboutir à une solution.

En ce qui concerne les applications pratiques de méthodes de gains variables, on pourra se référer à [DE98, Bia96, Hir99, HDB98].

C'est donc dans ce cadre qui s'est dessiné dans les années 90 que s'inscrit notre travail.

La première étape consiste à définir les spécificités du pilotage d'un lanceur le long de sa trajectoire pour restreindre la classe des systèmes étudiés et aboutir à des résultats facilement exploitables. Il s'agit donc de considérer l'ensemble des systèmes linéaires qui suivent une trajectoire connue à l'avance et dont les coefficients sont paramétrés en fonction du temps :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k)\end{aligned}\tag{Eq. 4.2.1}$$

Remarques :

- La synthèse de correcteurs pour les systèmes en temps discret a été abordée avec le formalisme LFT mais reste peu applicable. En effet la mise sous forme standard des incertitudes pour un système échantillonné est difficile si on souhaite conserver la physique du problème. Cependant une approche originale est proposée dans [Imb01] pour obtenir une forme dite M- Δ discrète équivalente.
- Relativement peu de choses existent pour les interpolations discrètes [BDRK00, DBKR00]. Il existe bien des résultats de passage d'un correcteur LPV continu à un correcteur LPV discret [Apk97] mais il semble a priori plus judicieux de travailler directement en temps discret lorsque cela est possible.
- La restriction au cas linéaire variant n'est pas problématique [Fro95 p. 99] ; le cas général peut s'y ramener.

4.2.2. *Le problème du séquençement*

Le problème fondamental dans la synthèse d'une loi de commande séquencée, c'est le comportement du système entre les points de séquençement. En effet, les synthèses sont réalisées sur les linéarisés tangents du système non linéaire, on connaît donc le comportement au voisinage des points d'équilibre¹, mais rien n'est garanti a priori pour le système bouclé non stationnaire lorsqu'on quitte ce voisinage. De manière intuitive, lorsque le système et le correcteur varient peu, il n'y a pas de raison a priori pour que l'interpolation se passe mal c'est-à-dire que la stabilité ne soit pas assurée². Par contre du point de vue théorique les choses sont plus complexes. Les difficultés du séquençement de gain résident particulièrement dans deux domaines : le comportement du système non linéaire entre les points pour lesquels des synthèses linéaires ont été faites et la méthode d'interpolation choisie. Il est donc important d'étudier la relation entre la stabilité des systèmes linéarisés tangents et la stabilité du système non linéaire ; et cela n'est pas un problème simple : il existe des

¹ C'est en effet une justification a priori des méthodes de gains variables.

² C'est aussi une des motivations principales de cette approche [Des69].

systèmes non linéaires stables dont les linéarisés tangents sont instables [SL72] et réciproquement [Sha88].

Cependant, la propriété d'avoir pour un système l'ensemble des linéarisés tangents stables est simple à caractériser de manière systématique. Ainsi, la démarche couramment utilisée est d'étudier les relations qui existent entre les linéarisés tangents et le système non stationnaire ; cette approche est largement étudiée dans les travaux de V. Fromion¹ [Fro95, FMN96, FS01]. Dans le cas particulier d'un système LTV², il s'agit donc d'étudier les relations qui existent entre la stabilité du système non stationnaire :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k)\end{aligned}\tag{Eq. 4.2.2}$$

et celle du système linéaire stationnaire dit à paramètres « gelés » :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(\pi)x(k) + B(\pi)u(k) \\ y(k) &= C(\pi)x(k) + D(\pi)u(k)\end{aligned}\tag{Eq. 4.2.3}$$

où π est fixé arbitrairement.

La méthodologie que nous avons adoptée ici est celle qui va dans le sens de l'intuition : puisqu'il est possible de caractériser simplement la stabilité des systèmes gelés, il ne reste plus qu'à trouver les conditions nécessaires et/ou suffisantes qui garantissent la stabilité du système non stationnaire.

Dans la procédure générale de séquençement de gains, la synthèse a de plus été faite sur un certain nombre de points distincts les uns des autres, il faut donc définir une procédure qui permettent de passer de l'un à l'autre, en d'autres termes définir une méthode d'interpolation.

L'objectif d'une interpolation est de passer d'un point à un autre en suivant un chemin défini. La Figure 4.2 résume le rôle d'une fonction d'interpolation : il s'agit de générer une famille de trajectoires admissibles par une fonction dite d'interpolation.

¹ Je tiens à le remercier particulièrement pour les discussions fructueuses que nous avons eues à propos des méthodes à gains variables.

² « Linear Time varying », c'est à dire un système linéaire non stationnaire dont les paramètres sont des fonctions du temps.

En général l'ensemble des trajectoires admissibles ne peut pas être paramétré de manière simple, alors on se limite à un sous-ensemble qui doit répondre aux critères de bon sens :

- bonne couverture du domaine
- simplicité
- inclure l'interpolation linéaire

Ce dernier point est important car la méthode la plus simple qui est souvent utilisée dans la pratique est l'interpolation linéaire, il est donc important de se ramener à celle-ci lorsque c'est possible.

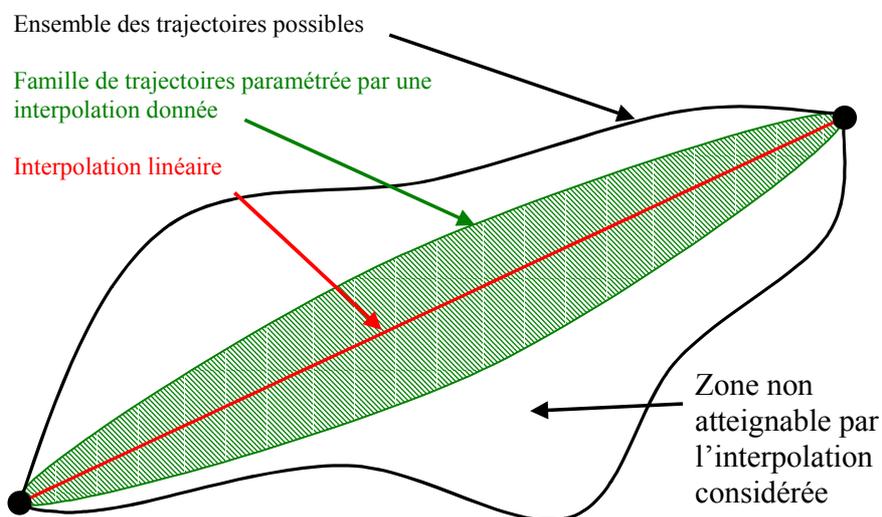


Figure 4.2 Principe de l'interpolation

L'ensemble de ces remarques permet de mieux cerner les problèmes et les enjeux des méthodes de gains séquencés : devant l'ampleur de la question, il est nécessaire de raisonner par conditions suffisantes pour que les résultats obtenus soient applicables. Les choix qui sont faits ici sont de deux types :

1. la classe des systèmes considérés est limitée aux systèmes LTV discret du type de l'équation (4.2.1)
2. la fonction d'interpolation choisie est arbitraire et ne couvre pas l'ensemble des trajectoires paramétriques possibles. Elle est néanmoins plus générale que l'interpolation linéaire.

La suite de ce chapitre est donc logiquement consacrée à la mise en place d'une méthode d'interpolation qui garantisse la stabilité du système non stationnaire. Ce chapitre est organisé en quatre parties. Nous rappellerons dans un premier temps des résultats permettant de garantir la stabilité exponentielle. Et en utilisant les propriétés énoncées, nous pourrions aboutir à des conditions suffisantes sous forme de contraintes LMI pour l'interpolation de correcteurs de type observateur / retour d'état (d'abord du point de vue théorique, puis du point de vue pratique) ; et nous terminerons par un exemple d'illustration.

4.3. Théorème de stabilité [Sha88]

Une part importante est donnée à la stabilité exponentielle car elle permet d'introduire la notion de rapidité de convergence indispensable pour obtenir des ordres de grandeur dans une application pratique. Ainsi le résultat suivant est fondamental pour relier la théorie de Lyapunov et la stabilité exponentielle.

Dans ce qui suit, on traite en parallèle deux cas appelés respectivement linéaire et quadratique. La différence entre les deux cas apparaît dans les inégalités qui interviennent dans la suite, où les normes sont au carré (cas quadratique) ou non (cas linéaire).

Théorème 4.1 Stabilité d'un point d'équilibre

Soit le système régi par l'équation de récurrence $x(k+1) = f(x(k), k)$, avec $x(k) \in \mathbf{R}^n$.

On suppose que f est C^1 et L -Lipschitz c'est-à-dire

$$\exists L / \|f(x, k) - f(x', k)\| \leq L \|x - x'\| \quad (\text{Eq. 4.3.1})$$

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le point d'équilibre 0 du système est globalement exponentiellement stable
- (ii) il existe une fonction $V : \mathbf{R}^n \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^+$ et 4 réels positifs $\underline{\eta}$, $\bar{\eta}$, ε , λ tels que, pour toute valeur de k :

<u>Cas linéaire</u>	<u>Cas quadratique</u>
$V(0, k) = 0$	$V(0, k) = 0$
$\underline{\eta} \ x\ \leq V(x, k) \leq \bar{\eta} \ x\ $	$\underline{\eta} \ x\ ^2 \leq V(x, k) \leq \bar{\eta} \ x\ ^2$
$(\Delta V(k))_{x_0, k_0} \leq -\varepsilon \ x(k)_{x_0, k_0}\ $	$(\Delta V(k))_{x_0, k_0} \leq -\varepsilon \ x(k)_{x_0, k_0}\ ^2$
$\ V(x_1, k) - V(x_2, k)\ \leq \lambda \ x_1 - x_2\ $	

où $x(k)_{x_0, k_0}$ et $(\Delta V(k))_{x_0, k_0}$ désignent respectivement l'état $x(k)$ et la différence $V(x(k+1), k+1) - V(x(k), k)$ correspondant à la trajectoire initialisée par $x(k_0) = x_0$.

Remarques :

- La preuve du cas linéaire se trouve dans [Sha88 pp. 29-33], alors que celle du cas quadratique apparaît bien plus tôt dans [Kra63, Hah67]. Cette dernière permet en plus d'exhiber explicitement des fonctions $V(x, k)$.
- La fonction V dite de Lyapunov peut être interprétée comme une estimation de la norme $\|\cdot\|_2$ le long de la trajectoire (et donc de l'énergie).
- Lorsqu'on utilise une fonction de Lyapunov quadratique (par exemple $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$ avec $P = P^T > 0$), on parle de stabilité quadratique.

4.4. Conditions suffisantes d'interpolation

Dans un premier temps seule l'interpolation de correcteurs de type retour d'état sera envisagée. Cette approche permet de réduire le problème à l'interpolation de gains. Le but avoué de cette interpolation est qu'elle soit la plus simple possible c'est-à-dire qu'elle puisse dégénérer en interpolation linéaire dans les cas triviaux.

4.4.1. Famille de correcteurs de type retour d'état stabilisant

Afin de faciliter la compréhension du problème, nous présenterons les idées de manière progressive. Un premier résultat issu de [SR98] (généralisé et

démontré ici dans le cas discret) permet de générer une famille de correcteurs stabilisants pour un système LTI¹ fixé.

Lemme 4.1 *Famille de retours d'état*

Soit le système LTI suivant

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (\text{Eq. 4.4.1})$$

et deux gains de retour d'état K_1 et K_2 tels que $A + BK_1$ et $A + BK_2$ soient Schur-Cohn²

Alors il existe deux matrices X_1 et X_2 symétriques définies positives telles que

$$\begin{aligned} \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^+, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \\ K = (\lambda_1 K_1 X_1 + \lambda_2 K_2 X_2) (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4.4.2})$$

est un retour d'état stabilisant.

Généralisation : pour une famille finie de correcteurs de type retour d'état notés K_i on peut généraliser ce résultat de la manière suivante :

$$K = \left(\sum_i \lambda_i K_i X_i \right) \left(\sum_i \lambda_i X_i \right)^{-1} \quad (\text{Eq. 4.4.3})$$

Preuve

Pour $i = 1$ et 2 , on définit les fonctions de Lyapunov suivantes :

$$V_i(x, k) = V_i(x) = x^T X_i^{-1} x \quad (\text{Eq. 4.4.4})$$

¹ LTI pour Linear Time Invariant, c'est-à-dire linéaire et invariant dans le temps (ou stationnaire)

² Une matrice Schur-Cohn est une matrice dont les valeurs propres sont toutes de modules strictement inférieur à 1. C'est l'analogue discret d'une matrice de Hurwitz dans le cas continu.

On notera l'aspect non classique du à la présence de l'inverse, On prend donc X_1^{-1} comme fonction de Lyapunov pour $(A + BK_1)$ et X_2^{-1} pour $(A + BK_2)$.

Alors l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$(A + BK_i)^T X_i^{-1} (A + BK_i) - X_i^{-1} < 0 \quad (\text{Eq. 4.4.5})$$

L'application du lemme de Schur transforme cette inégalité en l'inégalité suivante :

$$\begin{pmatrix} -X_i^{-1} & X_i^{-1}(A + BK_i) \\ (A + BK_i)^T X_i^{-1} & -X_i^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{Eq. 4.4.6})$$

De plus on peut modifier cette inégalité par congruence sans perdre l'équivalence :

$$\begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & X_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -X_i^{-1} & X_i^{-1}(A + BK_i) \\ (A + BK_i)^T X_i^{-1} & -X_i^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & X_i \end{pmatrix}^T < 0 \quad (\text{Eq. 4.4.7})$$

et donc :

$$\begin{pmatrix} -X_i & (A + BK_i)X_i \\ X_i(A + BK_i)^T & -X_i \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{Eq. 4.4.8})$$

On définit alors les grandeurs suivantes :

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \text{ et } K = (\lambda_1 K_1 X_1 + \lambda_2 K_2 X_2) X^{-1} \quad (\text{Eq. 4.4.9})$$

On a bien $X > 0$ et en écrivant la combinaison linéaire des inégalités matricielles (4.4.8), on obtient :

$$\begin{pmatrix} -X & (A + BK)X \\ X(A + BK)^T & -X \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{Eq. 4.4.10})$$

La vérification est immédiate pour les termes diagonaux et les deux termes anti-diagonaux sont obtenus en écrivant :

$$\begin{aligned}\lambda_1(A + BK_1)X_1 + \lambda_2(A + BK_2)X_2 &= A(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2) + B(\lambda_1K_1X_1 + \lambda_2K_2X_2) \\ &= AX + BKX\end{aligned}\quad (\text{Eq. 4.4.11})$$

On a donc bien par application du lemme de Schur sur l'inégalité (4.4.9) :

$$-X - X(A + BK)^T(-X)^{-1}(A + BK)X < 0 \quad (\text{Eq. 4.4.12})$$

d'où l'on déduit l'inégalité :

$$A_{cl}^T X^{-1} A_{cl} - X^{-1} < 0 \quad (\text{Eq. 4.4.13})$$

où $A_{cl} = A + BK$ est la matrice d'évolution du système bouclé.

Cette dernière inégalité (4.4.13) signifie que K est un retour d'état stabilisant pour le système LTI considéré.

Fin de démonstration

Remarques

- On peut noter que si les deux fonctions de Lyapunov sont identiques, on se ramène à une combinaison linéaire des gains de retour d'état. Il suffit de choisir $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = 1 - \lambda$ et on obtient :

$$X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_1 = X_1 \quad (\text{Eq. 4.4.14})$$

et donc

$$K = (\lambda K_1 X + (1 - \lambda)K_2 X)X^{-1} = \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2 \quad (\text{Eq. 4.4.15})$$

- On remarque que cette famille est redondante ; en effet pour le couple αX_1 et αX_2 , on retrouve le même correcteur que pour le couple X_1 et X_2 . Cette redondance pourrait être problématique dans un cadre d'optimisation classique mais elle est propre à la théorie de Lyapunov. On peut aisément y remédier de manière numérique comme c'est déjà le cas dans les

algorithmes existants avec un critère de minimisation de la trace des matrices.

4.4.2. *Hypothèse de recouvrement*

Il s'agit d'une hypothèse nécessaire pour permettre l'interpolation de correcteurs : elle exprime simplement que pour tout point du domaine paramétrique, il existe au moins un correcteur stabilisant.

Hypothèse nécessaire

Soit $P(\theta)$ un système paramétré par θ et une famille finie de correcteurs K_i telle que :

- Pour tout i , K_i stabilise $P(\theta_i)$
- K_i stabilise $P(\theta)$ pour $\theta \in \Theta_i$ ensemble ouvert
- pour tout θ du domaine de fonctionnement $\theta \in \bigcup_i \Theta_i$

Intuitivement dans le cas de deux correcteurs, la condition de recouvrement est vérifiée si il existe un intervalle de temps qui n'est pas réduit à un point pendant lequel les deux correcteurs sont stabilisants.

4.4.3. *Interpolation de deux correcteurs par retour d'état*

Par souci de simplicité, les développements de ce paragraphe considèrent principalement le cas de deux correcteurs mais la généralisation à un nombre plus élevé est immédiate, elle sera abordée en fin de paragraphe.

Hypothèses

Soit le système variant (LTV) suivant

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (\text{Eq. 4.4.16})$$

Soient deux gains de retour d'état K_1 et K_2 tels que $A(k_1) + B(k_1)K_1$ et $A(k_2) + B(k_2)K_2$ soient Schur-Cohn.

On suppose que les zones de stabilité (pour k gelé) ne sont pas disjointes conformément à l'hypothèse de recouvrement du paragraphe 4.4.2 et on définit

les points a , b , c et d selon le schéma de la Figure 4.3 : $A(k_1) + B(k_1)K_1$ est Schur-Cohn pour tout k tel que $a \leq k \leq c$ et $A(k_2) + B(k_2)K_2$ l'est pour tout k tel que $b \leq k \leq d$. L'objet de ce paragraphe est de proposer une procédure d'interpolation sur l'intervalle discret $[b \ c]$.

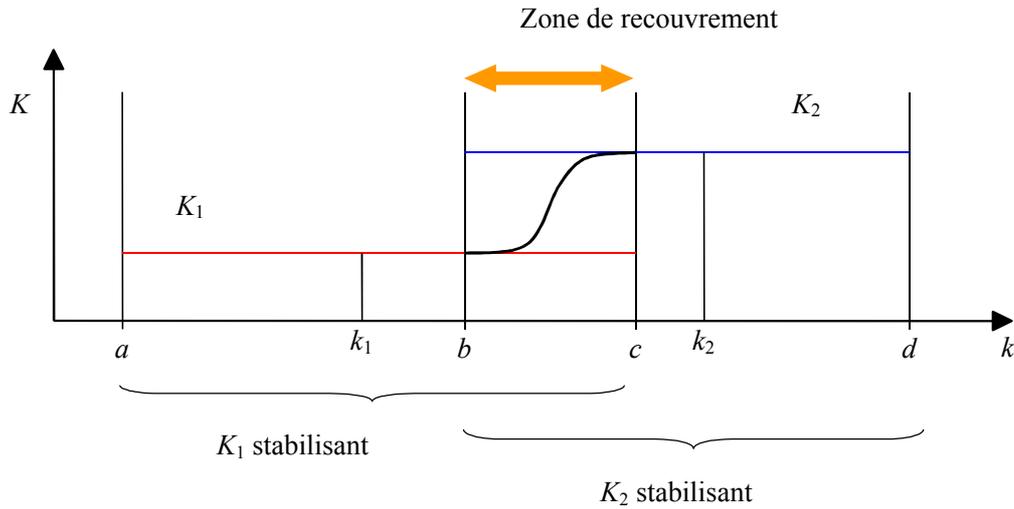


Figure 4.3 Evolution du correcteur dans le temps

On remarquera que l'interpolation proposée se limite à l'intervalle de temps où les deux correcteurs considérés sont stabilisants.

Théorème 4.2 Interpolation de retours d'états

Si il existe deux matrices X_1 et X_2 symétriques définies positives et un réel strictement positif γ tels que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall k = a, \dots, c, \quad \begin{pmatrix} -X_1 & (A(k) + B(k)K_1)X_1 \\ X_1(A(k) + B(k)K_1)^T & -X_1 \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 4.4.17})$$

$$\forall k = b, \dots, d, \quad \begin{pmatrix} -X_2 & (A(k) + B(k)K_2)X_2 \\ X_2(A(k) + B(k)K_2)^T & -X_2 \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 4.4.18})$$

$$X_1 - X_2 < (c - b)\gamma I \quad (\text{Eq. 4.4.19})$$

On peut définir le gain variable :

$$K(k) = \begin{cases} K_1 & \text{si } a \leq k \leq b \\ \left(\frac{c-k}{c-b} K_1 X_1 + \frac{k-b}{c-b} K_2 X_2 \right) \left(\frac{c-k}{c-b} X_1 + \frac{k-b}{c-b} X_2 \right)^{-1} & b \leq k \leq c \\ K_2 & c \leq k \leq d \end{cases} \quad (\text{Eq. 4.4.20})$$

Alors le retour d'état non stationnaire $K(k)$ défini ci-dessus est exponentiellement stabilisant.

Remarques :

- Une fonction de Lyapunov non stationnaire associée est la suivante :

$$V(x, k) = x(k)^T X(k)^{-1} x(k)$$

avec $X(k) = \begin{cases} X_1 & a \leq k \leq b \\ \frac{c-k}{c-b} X_1 + \frac{k-b}{c-b} X_2 & b \leq k \leq c \\ X_2 & c \leq k \leq d \end{cases} \quad (\text{Eq. 4.4.21})$

- La condition (4.5.19) est originale car elle ne fait pas intervenir de norme.
- Comme pour le lemme 4.1, si $X_1 = X_2$ on obtient une interpolation linéaire sur l'intervalle $[b \ c]$.

Démonstration

Le système bouclé par le gain variable est défini par l'équation suivante :

$$x(k+1) = A_{cl}(k)x(k) = (A(k) + B(k)K(k))x(k) \quad (\text{Eq. 4.4.22})$$

Nous allons montrer que le système (4.4.22) est globalement quadratiquement stable.

D'après le paragraphe 4.4.1 (preuve du lemme 4.1), l'inégalité suivante est vérifiée à tout instant k

$$\begin{pmatrix} -X(k) & (A(k) + B(k)K(k))X(k) \\ X(k)(A(k) + B(k)K(k))^T & -X(k) \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 4.4.23})$$

Il suffit, en effet, de considérer le paramètre temporel k fixé et de reprendre, dans la zone de recouvrement, le calcul conduisant des inégalités (4.4.8) à l'inégalité (4.4.10).

Il reste donc à démontrer la stabilité quadratique du système LTV en utilisant le théorème de stabilité 4.1.

Définissons la fonction V suivante :

$$\begin{aligned} V : \mathbf{R}^n \times \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x, k) &\mapsto V(x, k) = x(k)^T X(k)^{-1} x(k) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4.4.24})$$

Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 4.1 :

- (i) V est positive et $V(0, k) = 0$
- (ii) Sur l'intervalle $[a, d]$ d'entiers, on peut définir les grandeurs suivantes :

$$\underline{\eta} = \min \left(\left\| \left(\frac{c-k}{c-b} X_1 + \frac{k-b}{c-b} X_2 \right)^{-1} \right\| / b \leq k \leq c \right) \quad (\text{Eq. 4.4.25})$$

$$\bar{\eta} = \max \left(\left\| \left(\frac{c-k}{c-b} X_1 + \frac{k-b}{c-b} X_2 \right)^{-1} \right\| / b \leq k \leq c \right) \quad (\text{Eq. 4.4.26})$$

alors

$$\underline{\eta} I \leq (X(k))^{-1} \leq \bar{\eta} I \quad \text{pour tout } k \text{ tel que } a \leq k \leq d. \quad (\text{Eq. 4.4.27})$$

En effet, le cas des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ est inclus puisque à ces instants $X(k)$ est constante (égale à X_1 et X_2 respectivement). Cette relation mène donc à l'encadrement suivant :

$$\underline{\eta} \|x\|^2 \leq V(x, k) \leq \bar{\eta} \|x\|^2 \quad (\text{Eq. 4.4.28})$$

(iii) Montrons que V est décroissante sur les trajectoires de manière quadratique par le calcul de l'accroissement de V noté $\Delta V(k)$:

$$\begin{aligned}\Delta V(k) &= V(x(k+1), k+1) - V(x(k), k) \\ &= x(k+1)^T X(k+1)^{-1} x(k+1) - x(k)^T X(k)^{-1} x(k) \\ &= x(k)^T \left(A_{cl}(k)^T X(k+1)^{-1} A_{cl}(k) - X(k)^{-1} \right) x(k)\end{aligned}\quad (\text{Eq. 4.4.29})$$

Il s'agit donc de montrer que pour tout k tel que $a \leq k \leq d$,

$$A_{cl}(k)^T X(k+1)^{-1} A_{cl}(k) - X(k)^{-1} < 0 \quad (\text{Eq. 4.4.30})$$

L'application du lemme de Schur montre que cette dernière relation est équivalente à :

$$\begin{aligned}\forall k = a, \dots, d, \\ \begin{pmatrix} -X(k+1) & A_{cl}(k) \\ A_{cl}(k)^T & -X(k)^{-1} \end{pmatrix} < 0\end{aligned}\quad (\text{Eq. 4.4.31})$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante en utilisant la relation de congruence :

$$\begin{aligned}\forall k = a, \dots, d, \\ \begin{pmatrix} -X(k) & A_{cl}(k)X(k) \\ X(k)A_{cl}(k)^T & -X(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Delta X(k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < 0\end{aligned}\quad (\text{Eq. 4.4.32})$$

Or le premier terme de la somme est inférieur à $-\gamma I$ en tout instant d'après la relation (4.4.23), il suffit donc de montrer que :

$$-\Delta X(k) < \gamma I \quad (\text{Eq. 4.4.33})$$

D'autre part, la variation ΔX de X sur un échantillon peut se calculer explicitement en utilisant la définition de X :

$$\begin{aligned} \Delta X(k) &= X(k+1) - X(k) \\ &= \begin{cases} 0 & a \leq k \leq b \\ \frac{1}{c-b}(X_2 - X_1) & b \leq k \leq c \\ 0 & c \leq k \leq d \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4.4.34})$$

En effet

$$\begin{aligned} \Delta X &= \left(\frac{c-k-1}{c-b} X_1 + \frac{k+1-b}{c-b} X_2 \right) - \left(\frac{c-k}{c-b} X_1 + \frac{k-b}{c-b} X_2 \right) \\ &= \frac{1}{c-b} ((c-k)X_1 - X_1 + (k-b)X_2 + X_2 - (c-k)X_1 - (k-b)X_2) \\ &= \frac{1}{c-b} (X_2 - X_1) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4.4.35})$$

Or par hypothèse $-\Delta X < \gamma I$, ce qui termine la démonstration de (iii).

(iv) V a une dérivée en x bornée dans tout voisinage de $x = 0$, et comme V est continue en x , on peut en déduire que V est localement Lipschitz en x , et ce sur l'intervalle temporel $[a \ d] \subset \mathbf{N}$ fini. V vérifie donc la relation suivante avec λ positif :

$$\|V(x_1, k) - V(x_2, k)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\| \quad (\text{Eq. 4.4.36})$$

Fin de démonstration

Commentaires

- Ce théorème conduit donc à une condition suffisante d'interpolation des gains de retour d'état permettant de garantir la stabilité du système non stationnaire.
- La valeur de ΔX peut être interprétée comme une « distance orientée » entre les fonctions de Lyapunov et donc entre les correcteurs. On peut remarquer que lorsque les fonctions de Lyapunov sont identiques, cette valeur est réduite à zéro et la condition sur γ est toujours vérifiée, on peut donc toujours interpoler les gains. Et de plus cette interpolation devient linéaire. On a donc bien une généralisation de l'interpolation linéaire.

- L'existence des matrices X_i qui définissent les fonctions de Lyapunov est garantie de manière théorique par un problème LMI. En effet, si on s'intéresse à l'intervalle de temps discret $[a \ c]$, l'inégalité suivante, linéaire en X_1 :

$$\begin{pmatrix} -X_1 & (A(k)+B(k)K_1)X_1 \\ X_1(A(k)+B(k)K_1)^T & -X_1 \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 4.4.37})$$

doit être vérifiée pour un nombre fini d'indices k . Il n'est cependant pas raisonnable d'espérer résoudre un problème LMI de si grande taille. Une solution pratique consiste à considérer un espace polytopique dans lequel évolue le système non stationnaire et à se limiter à quelques points et à tester a posteriori la condition (4.4.37) sur les autres.

- La Figure 4.4 montre, pour une matrice de gain à deux composantes $K = (\alpha \ \beta)$, les différentes trajectoires possibles permettant de passer de $K_1 = (0 \ 0)$ à $K_2 = (2 \ 2)$, par la méthode d'interpolation proposée (les matrices X_i ont été tirées de façon aléatoire, en ne conservant que les matrices définies positives). Elle met en évidence la quantité importante de trajectoires candidates malgré la redondance de l'interpolation.

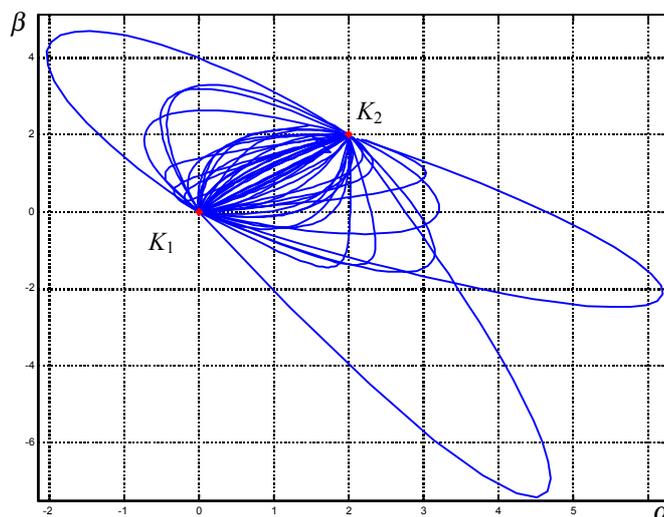


Figure 4.4 Trajectoire aléatoire

La généralisation de l'interpolation à N gains de retour d'état est alors immédiate. On adopte les notations de la Figure 4.5, pour les instants précédemment notés a , b , c et d .

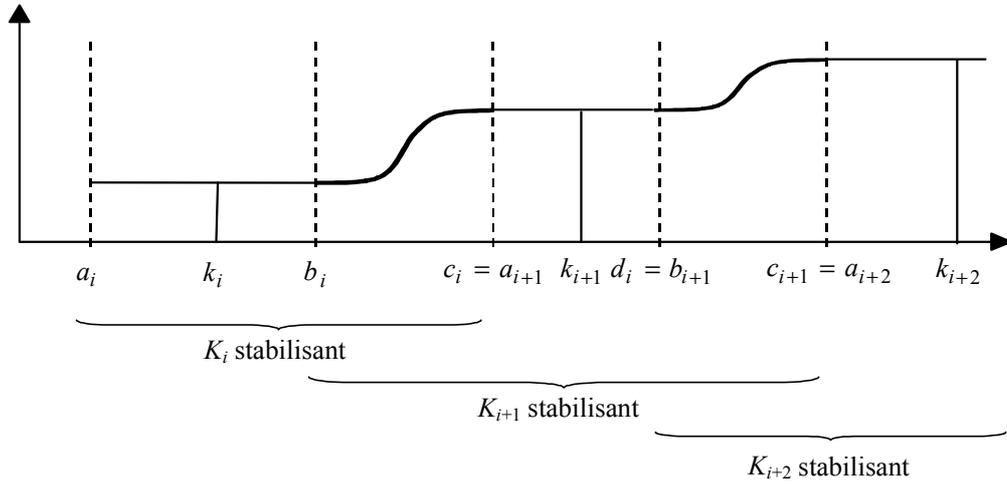


Figure 4.5 Evolution des gains entre les différents instants

Le problème LMI à résoudre est le suivant :

Pour $i = 1 \dots (N - 1)$,

$$\forall k = a_i, \dots, c_i, \quad \begin{pmatrix} -X_i & (A(k) + B(k)K_i)X_i \\ X_i(A(k) + B(k)K_i)^T & -X_i \end{pmatrix} < -\gamma_i I \quad (\text{Eq. 4.4.38})$$

$$\forall k = b_i, \dots, d_i, \quad \begin{pmatrix} -X_{i+1} & (A(k) + B(k)K_{i+1})X_{i+1} \\ X_{i+1}(A(k) + B(k)K_{i+1})^T & -X_{i+1} \end{pmatrix} < -\gamma_i I \quad (\text{Eq. 4.4.39})$$

$$X_i - X_{i+1} < (c_i - b_i)\gamma_i I \quad (\text{Eq. 4.4.40})$$

On remarque que l'intervalle pour lequel le gain K_{i+1} est stabilisant, c'est-à-dire entre les instants b_i et c_{i+1} est traité à cheval sur deux itérations, i et $i+1$. En effet, ce gain est d'une part cible de l'interpolation pour l'itération i , et

ensuite point de départ pour l'itération $i+1$. Cette distinction explique également les redondances dans les notations de la Figure 4.5.

Les points 1 et N ont un traitement particulier et servent à définir les bornes extrémales :

- le premier point est aussi le début de la trajectoire temporelle, on a donc $a_1 = k_1$;
- la fin de la trajectoire temporelle est le dernier point, on a donc $d_{N-1} = k_N$.

Le gain de retour d'état non stationnaire $K(k)$ est alors défini par les relations suivantes :

Pour $a_i \leq k \leq b_i$, $K(k) = K_i$

Pour $b_i \leq k \leq c_i$,

$$K(k) = \left(\frac{c_i - k}{c_i - b_i} K_i X_i + \frac{k - b_i}{c_i - b_i} K_{i+1} X_{i+1} \right) \left(\frac{c_i - k}{c_i - b_i} X_i + \frac{k - b_i}{c_i - b_i} X_{i+1} \right)^{-1} \quad (\text{Eq. 4.4.41})$$

4.4.4. Interpolation de deux observateurs

Nous venons de traiter l'interpolation de correcteurs de type retour d'état. En utilisant la dualité du retour d'état et de l'observateur d'ordre plein, il est facile de transposer le résultat précédent à l'interpolation des observateurs.

Soit le système variant (LTV) suivant

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4.4.42})$$

Soient deux gains d'observateurs L_1 et L_2 tels que $A(k_1) + L_1 C(k_1)$ et $A(k_2) + L_2 C(k_2)$ soient Schur-Cohn respectivement pour $a \leq k_1 \leq c$ et $b \leq k_2 \leq d$.

On suppose que les zones de stabilité (pour k gelé) ne sont pas disjointes conformément à la condition de recouvrement du paragraphe 4.4.2 et on définit les points a , b , c et d selon le schéma de la Figure 4.6.

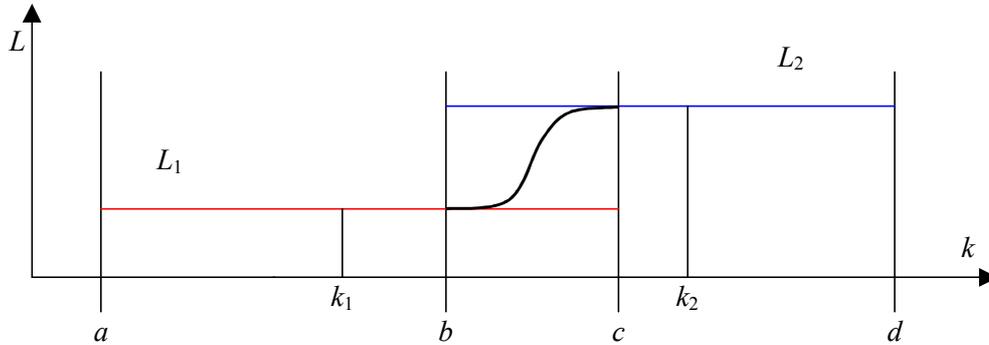


Figure 4.6 Evolution du gain d'observateur dans le temps

Là encore l'interpolation proposée se limite à l'intervalle de temps où les deux gains considérés sont stabilisants.

Théorème 4.3 Interpolation de gains d'observateurs

Si il existe deux matrices X_1 et X_2 symétriques définies positives et un réel strictement positif γ tels que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall k = a, \dots, c, \quad \begin{pmatrix} -X_1 & (A(k) + L_1 C(k))^T X_1 \\ X_1 (A(k) + L_1 C(k)) & -X_1 \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 4.4.43})$$

$$\forall k = b, \dots, d, \quad \begin{pmatrix} -X_2 & (A(k) + L_2 C(k))^T X_2 \\ X_2 (A(k) + L_2 C(k)) & -X_2 \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 4.4.44})$$

$$X_1 - X_2 < (c - b) \gamma I \quad (\text{Eq. 4.4.45})$$

On peut définir le gain variable :

$$L(k) = \begin{cases} L_1 & a \leq k \leq b \\ \left(\frac{c-k}{c-b} X_1 + \frac{k-b}{c-b} X_2 \right)^{-1} \left(\frac{c-k}{c-b} X_1 L_1 + \frac{k-b}{c-b} X_2 L_2 \right) & b \leq k \leq c \\ L_2 & c \leq k \leq d \end{cases} \quad (\text{Eq. 4.4.46})$$

Alors le gain de l'observateur non stationnaire $L(k)$ est tel que l'observateur non linéaire est exponentiellement stable.

Une fonction de Lyapunov non stationnaire associée est la suivante :

$$V(x, k) = x^T X(k)^{-1} x$$

$$\text{avec } X(k) = \begin{cases} X_1 & a \leq k \leq b \\ \frac{c-k}{c-b} X_1 + \frac{k-b}{c-b} X_2 & b \leq k \leq c \\ X_2 & c \leq k \leq d \end{cases} \quad (\text{Eq. 4.4.47})$$

Quant à la généralisation à N observateurs, elle se déduit directement du cas du retour d'état et des résultats de ce paragraphe.

4.4.5. Cas d'un correcteur LQG

L'application directe des théorèmes 4.2 et 4.3 permet de mettre en œuvre l'interpolation de correcteurs de type LQG, qui se présentent naturellement sous la forme d'un observateur d'ordre plein (ou filtre de Kalman) et d'un retour d'état sur l'état estimé. En effet d'après le principe de séparation, la dynamique du système bouclé est formée par la réunion de la dynamique du retour d'état et de celle de l'observateur. L'interpolation du gain de retour d'état et du gain de l'observateur par les procédures proposées garantit donc la stabilité exponentielle du système non stationnaire ainsi bouclé.

4.4.6. Interpolation de deux correcteurs quelconques

A partir d'un correcteur issu d'une synthèse préliminaire autre que LQG, comme par exemple une synthèse H_∞ , il est intéressant de pouvoir interpoler les correcteurs obtenus avec la garantie que la stabilité soit préservée.

Il est en général possible de forcer la structure d'un correcteur pour le mettre sous forme observateur / retour d'état interconnecté avec un paramètre de

Youla, comme on le montre dans le chapitre 2 à propos de la structuration des correcteurs. On rappellera que cette structuration n'est pas toujours possible et que le cas le plus favorable est celui d'un correcteur du même ordre que le modèle de synthèse.

Une solution possible est de choisir un paramètre de Youla constant le long de la trajectoire en utilisant l'algorithme proposé au chapitre 3 pour se ramener à l'interpolation des gains d'observation et de commande. Les correcteurs synthétisés dans un premier temps sont structurés selon la méthode du chapitre 2 ; ensuite une synthèse multiobjectifs et multi-modèles est mise en œuvre afin de garantir la stabilité de l'ensemble des linéarisés tangents avec un paramètre de Youla unique. Au final, on garantit que l'ensemble des points de la trajectoire du système non stationnaire sont exponentiellement stables.

En pratique, le nombre de LMI (ou plus exactement de variables d'optimisation) peut être trop important pour un temps de calcul raisonnable. Une solution pratique plus raisonnable peut être d'utiliser des paramètres de Youla différents, issus de plusieurs synthèses, et de les interpoler eux aussi. On perd dans ce cas la garantie théorique de stabilité sauf dans le cas particulier d'une interpolation linéaire. En effet avec une fonction de Lyapunov commune, si l'ensemble des systèmes bouclés gelés sont stables, la stabilité est assurée sur toute la trajectoire considérée.

4.5. Problème LMI en pratique

Le problème LMI exact ne peut pas raisonnablement trouver une solution par les outils de calcul actuels, il est donc nécessaire de le simplifier en vue d'une application pratique ; voici quelques points qui peuvent être considérés.

1/ On peut réduire le nombre de contraintes en supposant le problème suffisamment régulier.

En effet, la LMI suivante, qui doit être vérifiée pour $a \leq k \leq c$,

$$\begin{pmatrix} -X_1 & (A(k) + B(k)K_1)X_1 \\ X_1(A(k) + B(k)K_1)^T & -X_1 \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 4.5.1})$$

peut être considérée à ses extrémités et ensuite vérifiée sur l'intervalle tout entier.

2/ le choix des extrémités des intervalles est difficile et ne relève pas d'une procédure automatique, on peut donc choisir que l'interpolation se fasse de manière continue. En appelant k_i les instants d'interpolation choisis, l'interpolation entre l'instant k_i et l'instant k_{i+1} est menée en choisissant :

$$\begin{aligned} a &= k_{i-1} \\ b &= k_i \\ c &= k_{i+1} \\ d &= k_{i+2} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4.5.2})$$

Du point de vue algorithmique, si on considère que l'on connaît une solution à l'indice i , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -X_i & (A(k) + B(k)K_i)X_i \\ X_i(A(k) + B(k)K_i)^T & -X_i \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 4.5.3})$$

pour $k \in \{k_{i-1}, k_i, k_{i+1}\}$,

il reste à résoudre le problème LMI suivant :

$$\begin{pmatrix} -X_{i+1} & (A(k) + B(k)K_{i+1})X_{i+1} \\ X_{i+1}(A(k) + B(k)K_{i+1})^T & -X_{i+1} \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 4.5.4})$$

pour $k \in \{k_i, k_{i+1}, k_{i+2}\}$, avec

$$X_i - X_{i+1} < (k_{i+1} - k_i)\gamma I \quad (\text{Eq. 4.5.5})$$

4.6. Exemple d'une bobineuse

Considérons le système d'enroulement de bande issu de [KS72] et représenté sur la Figure 4.7. Un moteur à courant continu entraîne une bobine sur laquelle vient s'enrouler un fil métallique. La commande consiste à maintenir constante la vitesse linéaire d'enroulement.

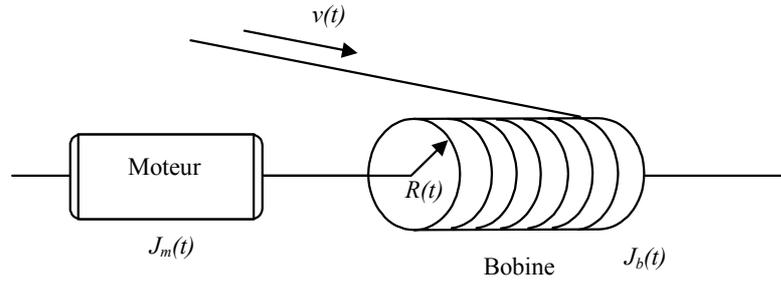


Figure 4.7. Système d'enroulement

L'enroulement du fil provoque l'augmentation du rayon R , et donc du moment d'inertie J_b de la bobine. Si $v(t)$ est constante, on peut établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} R(t) &= \sqrt{R(0)^2 + ht} \\ J(t) &= J(0) + h'(R(t)^4 - R(0)^4) = J_m + J_b(t) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4.6.1})$$

où $J(t)$ est l'inertie totale ramenée sur le moteur.

Soit $u(t)$ la tension d'alimentation du moteur, le comportement du système peut être décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} (J(t)\Omega(t)) = bu(t) - \phi \Omega(t) \quad (\text{Eq. 4.6.2})$$

En notant $\xi(t) = J(t)\Omega(t)$, l'équation d'état peut s'écrire :

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -\frac{\phi}{J(t)} \xi(t) + bu(t) \quad (\text{Eq. 4.6.3})$$

tandis que la vitesse linéaire est donnée par l'équation d'observation :

$$v(t) = \frac{R(t)}{J(t)} \xi(t) \quad (\text{Eq. 4.6.4})$$

Considérons le problème de régulation de la vitesse $v(t)$ autour de v_0 . La commande nominale $u_0(t)$ qui lui correspond est donnée par

$$\begin{cases} \xi_0(t) = v_0 \frac{J(t)}{R(t)} \\ u_0(t) = \frac{v_0}{b} \left(2hh'R(t) - \frac{hJ(t)}{2R(t)^3} + \frac{\phi}{R(t)} \right) \end{cases} \quad (\text{Eq. 4.6.5})$$

Soient $x = \xi - \xi_0$, $\tilde{u} = u - u_0$ et $\tilde{v} = v - v_0$, les variations des grandeurs autour du régime nominal. Ces nouvelles grandeurs vérifient les équations d'état et d'observation :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{\phi}{J(t)} x(t) + b\tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) = \frac{R(t)}{J(t)} x(t) \end{cases} \quad (\text{Eq. 4.6.6})$$

Le problème est donc d'assurer le maintien à 0 de x et \tilde{v} , au moyen d'un retour d'état :

$$\tilde{u}(t) = -K(t)x(t) \quad (\text{Eq. 4.6.7})$$

qui peut être exprimé de façon équivalente en fonction de la vitesse :

$$\tilde{u}(t) = -\frac{K(t)J(t)}{R(t)} \tilde{v}(t) \quad (\text{Eq. 4.6.8})$$

Pour appliquer la méthode d'interpolation proposée, nous allons considérer que le dispositif est piloté par un ordinateur (système échantillonné), il nous faut donc discrétiser le système.

Valeurs numériques

$$\phi = 0,01 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$$

$$b = 0,1 \text{ kg.m}^2.\text{V}^{-1}.\text{s}^{-2}$$

$$\rho = 0,06 \text{ m}^2.\text{V}^{-2}.\text{s}^{-2}$$

$$v_0 = 5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$R(t) = \sqrt{0,01 + 5 \cdot 10^{-4} t} \text{ (en m)}$$

$$J(t) = 0,02 + 66,67(R(t)^4 - R(0)^4) \text{ (en kg.m}^2\text{)}$$

La longueur du fil est de 300 mètres ; l'enroulement s'effectue donc en 60 secondes et double le rayon de la bobine. On choisit une période d'échantillonnage $T_s = 0,4 \text{ s.}$, qui donne donc 150 pas d'échantillonnage.

Afin de tester la méthode, trois types de corrections sont réalisées :

- retour statique (① - courbes en vert)
- retour d'état variant calculé par une méthode de commande linéaire quadratique à horizon fini (③ - courbes en bleu) [KS72]
- retour d'état variant calculé par interpolation des gains de la commande linéaire quadratique (② - courbes en rouge).

Après avoir choisi 3 instants significatifs ($k = 10, 135$ et 150), la méthode du paragraphe 4.5 peut être appliquée (les listings sont en annexe) sur les gains du retour d'état. K_1 est stabilisant sur l'intervalle $[0 \ 135]$, K_2 sur l'intervalle $[10 \ 150]$ et K_3 sur $[135 \ 150]$; les fonctions X_i sont calculées sur les points suivants :

$$X_1 \text{ pour } k = 0, 10, 135$$

$$X_2 \text{ pour } k = 10, 135, 150$$

$$X_3 \text{ pour } k = 135, 150$$

Puis les LMI sont vérifiées sur l'ensemble des points intermédiaires.

Les gains de retour d'état aux différents instants et pour les trois commandes sont donnés sur la Figure 4.8. La Figure 4.9 montre les gains correspondant lorsque la commande est exprimée en fonction de la vitesse.

Remarques :

- Les gains variables s'annulent à la fin de l'enroulement puisqu'il n'y a plus besoin de commande (la commande linéaire quadratique à horizon

fini a été calculée sans pondération terminale) alors que ce n'est évidemment pas possible avec gain constant.

- La Figure 4.10 et la Figure 4.11 montrent l'évolution de la vitesse linéaire v et de la commande u . Lors des simulations temporelles, on introduit des perturbations de vitesse pour mieux se rendre compte de l'action de la correction
- Les résultats sont satisfaisants puisque la stabilité est préservée au prix d'une quantité de calcul faible. De plus les performances du correcteur issu de l'interpolation sont très proches de celles de la commande optimale, alors que le correcteur statique est un peu plus lent malgré un gain de retour de vitesse croissant.

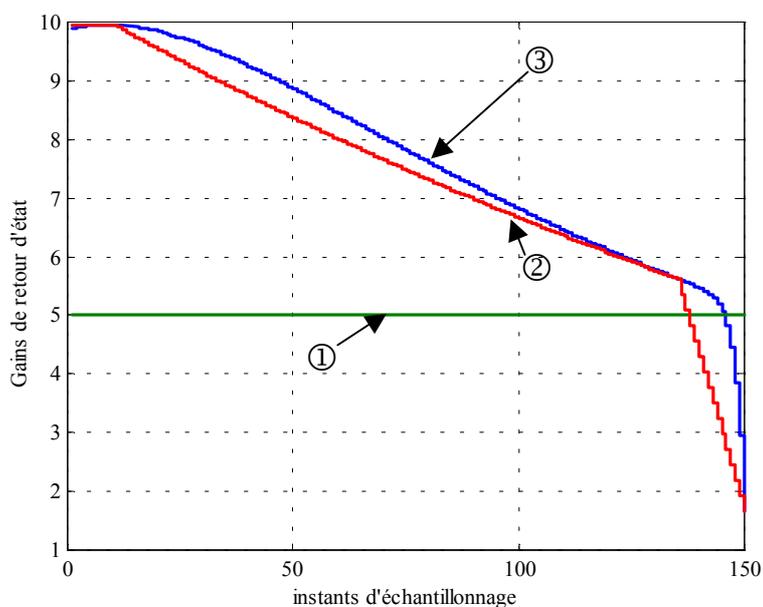


Figure 4.8. Gains de retour d'états

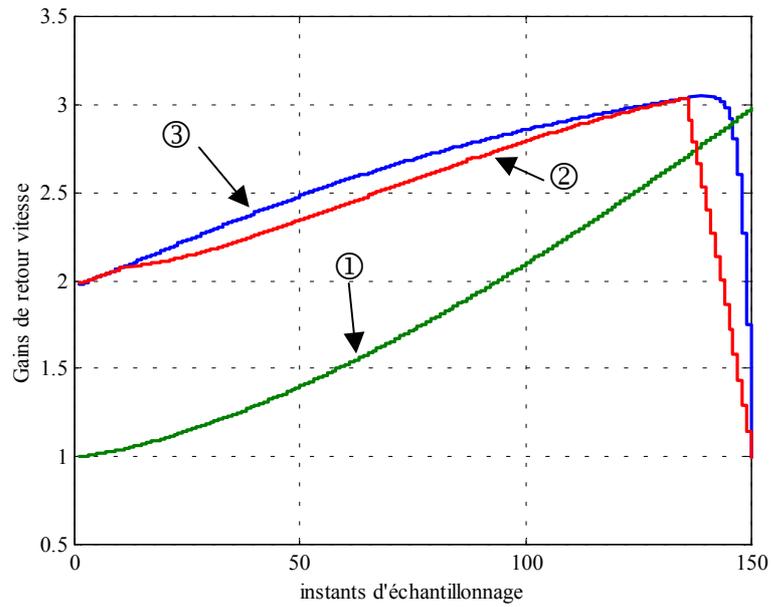


Figure 4.9. Gains de retour de vitesse

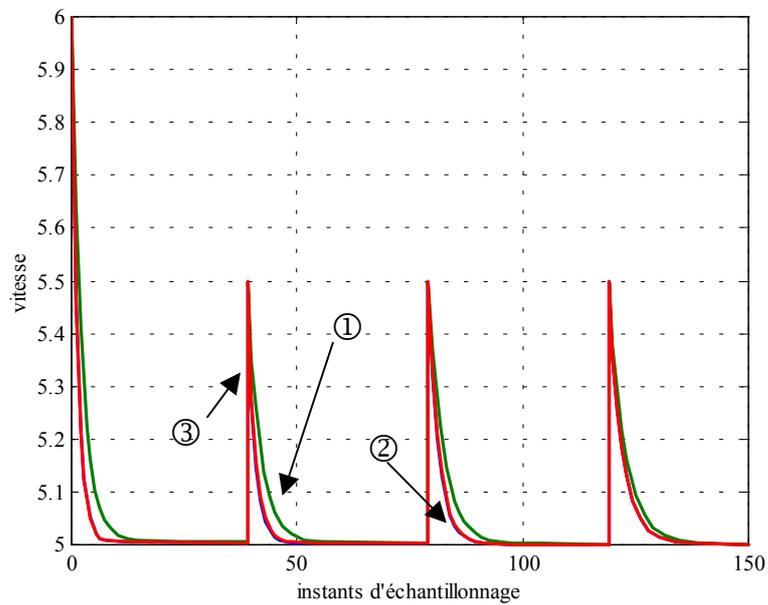


Figure 4.10. Réponse temporelle de la vitesse à des conditions initiales appliquées tous les 40 pas.

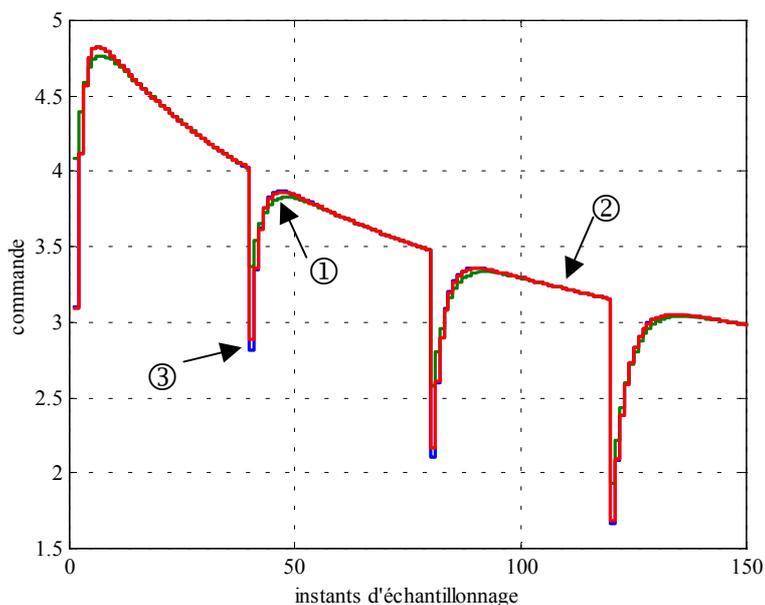


Figure 4.11. Réponse temporelle de la commande à des conditions initiales appliquées tous les 40 pas.

4.7. Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'interpolation originale pour les correcteurs de type observateur – retour d'état. Celle-ci est fondée sur la théorie de la stabilité exponentielle à partir de fonctions de Lyapunov variant dans le temps. Les avantages d'une telle méthode sont multiples :

- la garantie a priori de la stabilité lors de la période de commutation n'existe pas dans les méthodes actuelles alors qu'elle est le point de départ de la méthode proposée ici.
- l'utilisation de l'optimisation convexe sous contraintes LMI allège la quantité de calcul.

Dans le cas où le problème est suffisamment régulier, la méthode d'interpolation proposée devient linéaire et valide a posteriori les applications industrielles qui utilisent cette méthode. On peut également modifier le problème LMI en imposant des fonctions de Lyapunov communes afin d'imposer une interpolation linéaire.

Il est tout de même important de noter que malgré une méthode précise, le spectre des choix qui restent dédiés au concepteur reste large et confirme que le problème des gains variables reste un domaine relativement ouvert.

L'objectif principal des travaux qui vont suivre est d'obtenir des lois de commande non stationnaires sur le modèle du lanceur.

Chapitre 5

Problématique du pilotage d'un lanceur

5.1. Introduction	157
5.2. Généralités.....	158
5.3. Equations de la mécanique.....	162
5.4. Modèle simplifié.....	172
5.5. Bilan de la modélisation	177
5.6. Cahier des charges.....	181
5.7. Interface du Benchmark PIROLA.....	184
5.8. Conclusion	187

5.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse physique d'un lanceur dans sa phase de vol atmosphérique et traduit en termes d'automaticiens les différents comportements. Ce travail a été conduit en étroite collaboration avec le CNES et EADS pour la validation de cette étude.

A l'issue de cette étude physique, il a été mis en place avec l'ONERA (Centre de Toulouse) un benchmark interne au groupe de travail PIROLA. Celui-ci permet de générer des modèles de synthèse, d'analyse et de simulation qui prennent en compte les différents aspects du cahier des charges. De plus les aspects rapidité des outils informatiques et convivialité de l'interface utilisateur ont été pris en compte tout au long de la mise en œuvre de ce benchmark.

Afin de mettre en œuvre un algorithme de synthèse de loi de commande pour un système, il est nécessaire de bien connaître le système étudié. La qualité d'un modèle relève du compromis fait entre le réalisme et la complexité. En effet, la prise en compte de tous les paramètres conduit à un modèle extrêmement complexe et donc inexploitable numériquement ; et inversement, un modèle trop simple ne reflète pas suffisamment la réalité physique du problème. Nous allons donc mettre en place un modèle dynamique de lanceur qui allie réalisme et simplicité.

Notre démarche s'appuie d'une part sur des conditions physiques pour ce qui est de la mécanique de vol des lanceurs et d'autre part sur des conditions propres à l'automatique pour ce qui est de la simplification du modèle [JPC99].

De simples considérations permettent de définir un lanceur comme une structure rigide soumise à des déformations et commandée par des tuyères orientables. Pour simplifier notre approche, nous allons considérer le système en un point de vol donné et utiliser toutes les variables externes comme des constantes du problème. L'étude se résumera en 2 points :

- le mode rigide,
- les modes de flexion.

Les autres phénomènes physiques qui pourraient intervenir dans la modélisation, comme par exemple les modes de ballonnement du carburant,

seront négligés par souci de simplicité. Ils pourront intervenir sous forme d'incertitudes.

Dans un second temps, ce système physique sera considéré du point de vue de l'automatique, autant pour l'analyse que pour la synthèse de lois de commande. Nous verrons dans cette partie un ensemble de schémas-bloc qui reflètent la structure du problème et un ensemble de graphiques qui permettent l'analyse du problème. Cette partie utilise des données numériques produites par *EADS Launch Vehicles* et propose une traduction du cahier des charges en terme d'automatique.

Il est important de noter que la modélisation proposée ici est réalisée sous la forme d'un système régi par des équations différentielles dont les paramètres physiques évoluent dans le temps. Nous verrons donc dans un premier temps la modélisation d'un lanceur autour d'un point de fonctionnement. Puis nous verrons comment évoluent les paramètres qui avait été considérés comme constants.

5.2. Généralités

5.2.1. Phases de pilotage

Les contraintes que l'on soumet au lanceur au cours de son vol varient selon le moment considéré. Pour schématiser le pilotage d'un lanceur on pourra distinguer six phases de pilotage :

- Sur socle
 - Au décollage
 - Eviter les chocs des tuyères avec la table de lancement
 - Limiter le déport latéral de l'engin
- Etage 1
 - Limiter l'incidence aérodynamique pour limiter les efforts généraux
- Etage 2
 - Suivre la consigne du guidage

- Limiter les conditions cinématiques au largage de la coiffe et à la séparation
- Etage 3
 - Identique à l'étage 2 sauf pour le largage de la coiffe
 - Mise à poste des charges
 - Utilisation des tuyères du système de contrôle d'attitude
 - Contraintes de précision en attitude et en vitesse angulaire

La modélisation qui suit est dédiée à la phase 1 de pilotage mais la démarche adoptée est générale et concerne tous les points de vol.

5.2.2. Chaîne de Pilotage

La chaîne de pilotage comprend 2 niveaux distincts :

- le guidage permet d'asservir le centre de gravité du lanceur sur la trajectoire désirée. Il fournit donc les consignes du pilotage
- le pilotage permet de stabiliser le lanceur autour de son centre de gravité en s'adaptant aux variations de l'environnement extérieur. Le pilotage fournit le braquage commandé aux vérins de gouverne.

Ces 2 points sont schématisés sur la Figure 5.1.

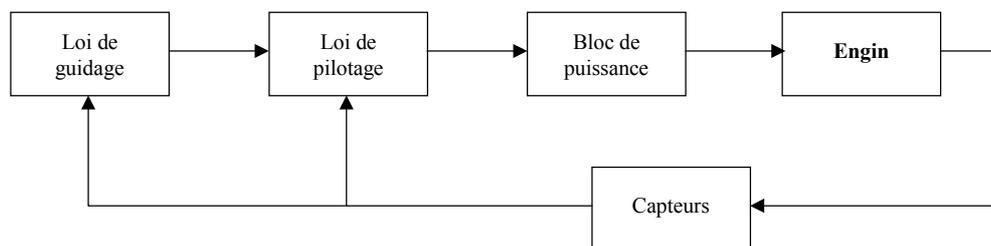


Figure 5.1 Principe du guidage – pilotage

5.2.3. Représentation d'un lanceur et hypothèses

La figure 2 représente un lanceur dans le plan du pilotage en lacet, et permet d'introduire les grandeurs utiles à la modélisation.

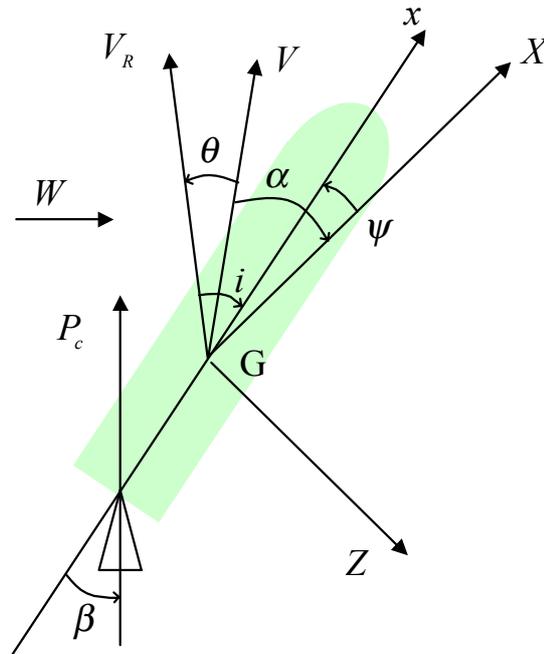


Figure 5.2 Axe de lacet et aux petits angles

La modélisation du lanceur présentée est obtenue par l'écriture des équations de Lagrange (voir paragraphe 5.3.1) qui sont ensuite simplifiées pour être exploitables.

Les hypothèses suivantes sont envisagées :

- mouvement plan autour de la trajectoire de référence supposée plane et rectiligne.
- Petits mouvements autour du centre de gravité.
- Lanceur flexible.
- Ballottements des liquides négligés.

Nomenclature des variables :

G	Centre de gravité total
G_E	Centre de gravité du lanceur rigide sans tuyère
G_T	Centre de gravité de la tuyère
M	Masse du lanceur
M_E	Masse du lanceur sans tuyère
M_T	Masse de la tuyère
M_i	Masse généralisée du mode de flexion i
N_α	Coefficient de portance
O	Point d'articulation de la tuyère (point d'application de la poussée)
F	Foyer
P_c	Poussée utile pour le pilotage (somme de poussées braquables)
P_o	Poussée pivotante
$GXYZ$	Repère lié à la trajectoire nominale
$Gxyz$	Repère lié à l'engin
β	Angle de braquage de la tuyère
$\delta\psi$	Ecart de lacet entre l'attitude commandée ψ_c et l'attitude réelle ψ
W	Vitesse du vent latéral
\dot{z}	Vitesse de dérive sur GZ
i	Incidence
C_z	Coefficient de portance
V	Vitesse du lanceur le long de sa trajectoire nominale

J	Inertie totale du lanceur autour de G
L	Longueur totale du lanceur
I_E	Inertie du lanceur sans tuyère autour de G_E
I_T	Inertie de la tuyère autour de G_T
l_E	Distance G_E – point d’application de la poussée O
l_T	Distance G_T – point d’application de la poussée O
l_F	Distance O – centre de poussée F
Q	Pression dynamique = $\frac{1}{2} \rho V^2$
ρ	Masse volumique de l’air
S	Surface de référence
C_{zi}	Gradient de portance = $\frac{\delta C_z}{\delta i}$
X_A	traînée
η_i	Coordonnée généralisée du mode de flexion i
$h_X(i)$	Amplitude normalisée du mode de flexion i au point X
$h'_X(i)$	Pente du mode de flexion i au point X

5.3. Equations de la mécanique

Contrairement à l’approche classique en utilisant les lois de Newton, nous allons formaliser le problème avec la méthode de Lagrange [Spi72].

Cette approche se ramène au lois de Newton, mais elle est particulièrement intéressante par la facilité relative avec laquelle elle permet de résoudre un certain nombre de problèmes.

5.3.1. Coordonnées généralisées

Soit un système de N points matériels en mouvement et soumis à des liaisons ; alors pour décrire le mouvement, on a besoin d'un certain nombre de coordonnées indépendantes que l'on note de la façon suivante :

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

On les appelle *coordonnées généralisées*. Elles peuvent être des distances, des angles ou des quantités rattachés à ces dernières ; et le nombre n de coordonnées généralisées est le nombre de degrés de liberté du système. Il est important de noter qu'un choix judicieux de ces coordonnées peut considérablement simplifier un problème.

Pour $v = 1 \dots n$, on note le vecteur position \vec{r}_v

$$\vec{r}_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k} \quad (\text{Eq. 5.3.1})$$

Les relations existant entre les coordonnées généralisées et les coordonnées d'espace sont données par les équations de transformation :

$$\vec{r}_v = f_v(q_1, \dots, q_n, t) \quad (\text{Eq. 5.3.2})$$

On note qu'on ne s'intéresse ici qu'aux systèmes holonomes, c'est-à-dire que toutes les liaisons peuvent être représentées mathématiquement par des équations de la forme :

$$\phi(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (\text{Eq. 5.3.3})$$

On peut alors l'énergie cinétique totale du système comme une forme quadratique des *vitesse généralisées* \dot{q}_α :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{\vec{r}}_v^2 \quad (\text{Eq. 5.3.4})$$

On peut définir la notion de force généralisée à partir du travail W fourni à un système de particules par des forces \vec{F}_v agissant sur la $v^{\text{ème}}$ particule. On a :

$$dW = \sum_{\alpha=1}^n \Phi_{\alpha} dq_{\alpha}$$

$$\text{avec } \Phi_{\alpha} = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \bullet \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_{\alpha}} \quad (\text{Eq. 5.3.5})$$

On appelle Φ_{α} la force généralisée associée à la coordonnée généralisée q_{α} .

On peut alors relier la force généralisée à l'énergie cinétique par les équations suivantes dites équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_{\alpha}} = \Phi_{\alpha} \text{ pour } \alpha = 1, \dots, n \quad (\text{Eq. 5.3.6})$$

Ce sont ces équations qui seront à la base de la modélisation qui est ici proposée. Dans un premier temps, le formalisme de Lagrange sera utilisé pour comprendre la notion de mode souple et elle sera ensuite appliquée à l'ensemble du lanceur.

5.3.2. Les modes souples

Un lanceur est un corps élastique dont la masse a été optimisée (allégement maximal des structures) et il peut donc avoir des mouvements de flexions significatifs.

Ces modes de flexions peuvent entraîner une instabilité. En effet une flexion entraîne une perturbation de la mesure, d'où une perturbation sur la commande. Si cette commande induit une force transverse qui provoque elle-même une flexion, alors le système peut devenir instable. Il s'agit donc de maîtriser les flux d'énergie de ces modes.

5.3.2.1. Description d'un mode souple

La description d'un mode souple est faite à partir de l'analyse modale linéaire. On suppose les déformations de faible amplitude pour pouvoir considérer que l'engin est un système élastique linéaire d'axe x .

Les études (par les éléments finis) du comportement vibratoire fournissent une description des modes vibratoires de la structure sous la forme suivante :

- fréquence et amortissement du mode,
- masse généralisée du mode,
- déformée modale de la structure.

On note :

- $h(x)$ la déformée modale,
- $m(x)$ la répartition massique de la poutre,
- $f(x, t)$ le champ d'effort excitant selon l'axe z ,
- $u(x, t)$ le déplacement de la poutre selon l'axe z .

On recherche tout d'abord les solutions de l'équation du mouvement libre de la poutre. Ces solutions sont appelées modes propres et peuvent être écrites sous la forme $\phi(x) \cos(\omega_i t)$; elle fournissent donc la déformée modale $h(x)$ et la pulsation propre ω_i . On suppose ensuite que la solution générale de l'équation du mouvement de la poutre est la superposition des effets de chacun des modes propres et que l'on a la séparation des variables de temps (t) et d'espace (x). On obtient donc :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x) \eta_i(t) \quad (\text{Eq. 5.3.7})$$

où $\eta_i(t)$ est appelé coordonnée modale généralisée du mode i . La Figure 5.3 illustre le cas du premier mode de flexion en lacet.

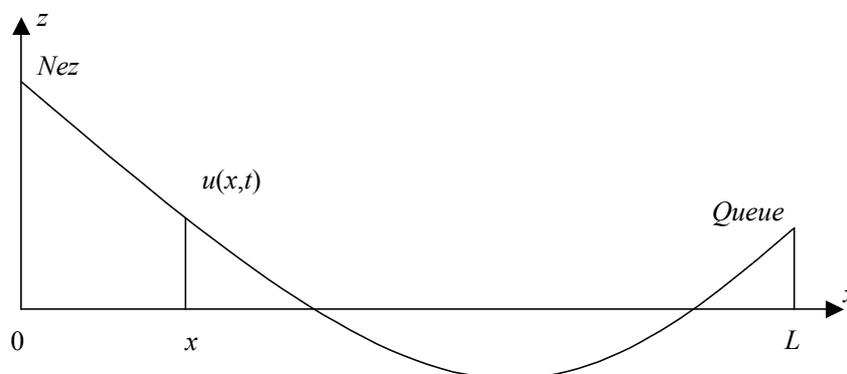


Figure 5.3 – Illustration d'un mode de flexion

En utilisant les équations de Lagrange, on montre que les coordonnées généralisées suivent une équation différentielle du second ordre du type suivant :

$$\mu_i \left(\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) \right) = F_i(t) \quad (\text{Eq. 5.3.8})$$

avec :

- $\mu_i = \int_{\text{poutre}} m(x) h_i(x)^2 dx$: masse généralisée ;
- ξ_i amortissement modal introduit pour tenir compte des dissipations internes d'origine mécanique.
- $F_i(t) = \int_{\text{poutre}} f(x, t) h_i(x) dx$: effort généralisé.

Remarques :

- Chaque mode propre se comporte comme un système masse-ressort amorti.
- La détermination de chaque mode se fait à partir du calcul par éléments finis et d'essais sur maquettes dynamiques.
- Il existe une infinité de modes souples ; pour le pilotage, on ne retient en général que les 4 ou 5 premiers sur chaque axe.
- La force d'excitation provient de la propulsion, de l'aérodynamisme, des forces d'inertie dans les tuyères et des autres modes.

5.3.2.2. Application au lanceur

Dans le cadre de l'étude d'un lanceur, nous nous limitons aux flexions selon un axe unique (Figure 5.4).

En application à notre système, on obtient pour le mode i l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = -\omega_i^2 P_c h_T(i)\beta \quad (\text{Eq. 5.3.9})$$

où $h_T(i)$ est le déplacement du mode propre i au droit de la tuyère et en prenant comme masse généralisée :

$$\mu_i = \frac{1}{\omega_i^2} \quad (\text{Eq. 5.3.10})$$

On a autant d'équations de ce type que de modes souples pour chaque axe.

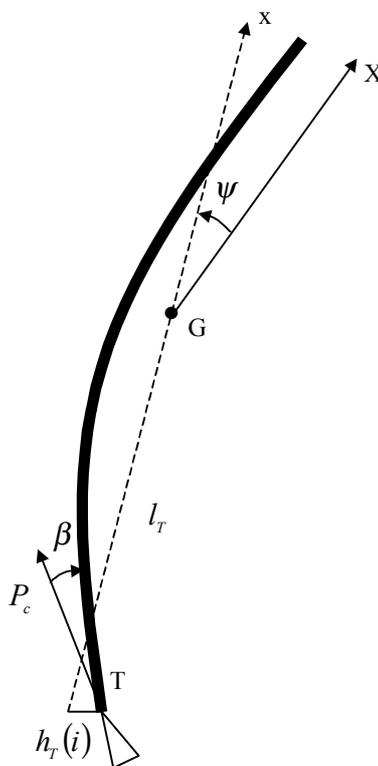


Figure 5.4 – Définition des forces

Au niveau des mesures de lacet et de vitesse de lacet, les modes de flexions induisent des écarts s'ils ne sont placés ni sur un nœud ni sur un ventre de vibration :

- au niveau de la centrale inertielle :

$$\psi_m = \psi - \sum_{i=1}^{\infty} h'_{cI}(i) \eta_i \quad (\text{Eq. 5.3.11})$$

où $h'_{cI}(i)$ est la pente de la déformée modale au droit de la centrale inertielle.

- au niveau du gyromètre :

$$\dot{\psi}_m = \dot{\psi} - \sum_{i=1}^{\infty} h'_{Gy}(i) \dot{\eta}_i \quad (\text{Eq. 5.3.12})$$

où $h'_{Gy}(i)$ est la pente de la déformée modale au droit de la centrale gyrométrique.

Il faut noter que ces valeurs sont soumises à des incertitudes : pour le premier mode, 15% sur la pulsation et 30% sur les déformées modales et leurs dérivées, pour le second mode et les suivants, 10% sur les pulsations et 20% sur les déformées modales et leurs dérivées.

5.3.3. Equations de Lagrange

L'énergie cinétique totale du système s'exprime par la relation suivante :

$$\begin{aligned} 2E_c = M \ddot{z} & \\ & + \left(I_E + I_T + \frac{M_E + M_T}{M} (l_E + l_T)^2 \right) \dot{\psi}^2 \\ & + \sum_i M_i \dot{\eta}_i^2 + \left(I_T + \frac{M_E + M_T}{M} l_T^2 \right) \dot{\beta} \dot{\psi} \\ & + \sum_i \left(I_T h'_O(i) - M_T l_T (h_O(i) - l_T h'_O(i)) \right) \dot{\eta}_i \dot{\beta} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.3.13})$$

L'énergie potentielle et l'énergie dissipative ont la formulation suivante :

$$2E_p = \sum_i M_i \omega_i^2 \eta_i^2 \quad (\text{Eq. 5.3.14})$$

$$E_d = \sum_i M_i \omega_i \xi_i \eta_i^2 \quad (\text{Eq. 5.3.15})$$

Les forces agissant sur le système sont :

$$- \text{ la poussée } \vec{P} = P_c \vec{x} + \left(P_c \left(\psi + \sum_i h'_O(i) \eta_i \right) + P_o \beta \right) \vec{E} \quad (\text{Eq. 5.3.16})$$

$$- \text{ les forces aérodynamiques } \vec{A} = -X_A \vec{x} + (X_A \psi + N_\alpha i) \vec{E} \quad (\text{Eq. 5.3.17})$$

$$- \text{ le couple de la servogouverne } \vec{\Gamma} \quad (\text{Eq. 5.3.18})$$

avec P_c la poussée totale, P_o la poussée pivotante, X_A la traînée, N_α le coefficient de portance, i l'incidence.

Les coordonnées généralisées choisies pour décrire le mouvement du lanceur sont les suivantes :

$$(z \quad \psi \quad \beta \quad \eta_1 \quad \dots \quad \eta_n) \quad (\text{Eq. 5.3.19})$$

avec n le nombre de modes souples considérés

Les forces généralisées associées à chaque coordonnée s'expriment alors par les relations suivantes :

$$Q_z = P_c \left(\psi + \sum_i h'_O(i) \eta_i \right) + P_o \beta - X_A \psi - N_\alpha \left(\psi + \frac{\dot{z} - W}{V} \right) \quad (\text{Eq. 5.3.20})$$

$$Q_\psi = \left(-(P_c - P_o - X_A) \beta + X_A \sum_i h'_O(i) \right) \frac{M_T l_T}{M} - P_c \sum_i h_O(i) \eta_i - \left(P_c \sum_i h'_O(i) \eta_i + P_o \beta \right) \frac{M_E l_E}{M} - N_\alpha \left(\frac{M_T l_T}{M} - \frac{M_E l_E}{M} + l_F \right) \left(\psi + \frac{\dot{z} - W}{V} \right) \quad (\text{Eq. 5.3.21})$$

$$\begin{aligned}
Q_\beta = & \left(-(P_c - P_o - X_A)\beta + X_A \sum_i h'_O(i) \right) \frac{M_T l_T}{M} \\
& - N_\alpha \frac{M_T l_T}{M} \left(\psi + \frac{\dot{z} - W}{V} \right) \\
& + \Gamma
\end{aligned} \tag{Eq. 5.3.22}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\eta_i} = & \left(P_c \sum_i h'_O(i) \eta_i + P_o \beta \right) h_O(i) \\
& + \left(-(P_c - P_o - X_A)\beta + X_A \sum_i h'_O(i) - N_\alpha \left(\psi + \frac{\dot{z} - W}{V} \right) \right) \frac{M_T l_T}{M} h'_O(i)
\end{aligned} \tag{Eq. 5.3.23}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent donc

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \tag{Eq. 5.3.24}$$

Remarque :

Les énergies potentielle et dissipative ne dépendent pas explicitement de \dot{q}_i .

De plus en introduisant la notation M_α :

$$M_\alpha = -N_\alpha \left(\frac{M_T l_T}{M} - \frac{M_E l_E}{M} + l_F \right), \tag{Eq. 5.3.25}$$

on en déduit les équations du mouvement pour les différentes coordonnées mises en jeu :

- Pour la dérive z :

$$M \ddot{z} = (P_c - X_A - N_\alpha) \psi + P_c \sum_i h'_O(i) + P_o \beta - N_\alpha \frac{\dot{z} - W}{V} \tag{Eq. 5.3.26}$$

- Pour l'attitude ψ :

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\psi} + \left(I_T + \frac{M_T M_E}{M} l_T (l_E + l_T) \right) \ddot{\beta} &= M_\alpha \psi \\
 &+ \left(X_A \frac{M_T l_T}{M} - P_c \frac{M_E l_E}{M} \right) \sum_i h'_O(i) \eta_i \\
 &- P_c \sum_i h_O(i) \eta_i \\
 &- \left(\frac{M_T l_T}{M} (P_c - P_o - X_A) + P_o \frac{M_E l_E}{M} \right) \beta \\
 &+ M_\alpha \frac{\dot{z} - W}{V}
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 5.3.27}$$

- Pour la commande β :

$$\begin{aligned}
 \left(I_T + \frac{M_T M_E}{M} l_T^2 \right) \ddot{\beta} + \left(I_T + \frac{M_T M_E}{M} l_T (l_E + l_T) \right) \ddot{\psi} + \sum_i \left(I_T h'_O(i) - h_O(i) \right) \ddot{\eta}_i &= \\
 - N_\alpha \frac{M_T l_T}{M} \psi & \\
 + X_A \frac{M_T l_T}{M} \sum_i h'_O(i) \eta_i & \\
 - (P_c - P_o - X_A) \frac{M_T l_T}{M} \beta & \\
 - N_\alpha \frac{M_T l_T}{M} \frac{\dot{z} - W}{V} & \\
 + \Gamma &
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 5.3.28}$$

- Pour chaque mode souple η_i :

$$\begin{aligned}
& M_i \ddot{\eta}_i + \left(I_T h'_O(i) - M_T l_T (h_O(i) - l_T h'_O(i)) \right) \ddot{\beta} + 2M_i \xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + M_i \omega_i^2 \eta_i = \\
& \left(-N_\alpha \frac{M_T l_T}{M} h'_O(i) \right) \psi \\
& + \left(P_c h'_O(i) + X_A \frac{M_T l_T}{M} h'_O(i) \right) h_O(i) \eta_i \\
& + \left(P_o h_O(i) - (P_c - P_o X_A) \frac{M_T l_T}{M} h'_O(i) \right) \beta \\
& - N_\alpha \frac{M_T l_T}{M} h'_O(i) \frac{\dot{z} - W}{V}
\end{aligned}
\tag{Eq. 5.3.29}$$

Ces quatre équations représentent donc le comportement du lanceur autour d'une trajectoire de référence plane et en considérant des angles petits.

5.4. Modèle simplifié

Afin de pouvoir exploiter les dynamiques du lanceur, il est nécessaire de simplifier ce modèle. La première hypothèse envisagée est issue d'une réflexion sur la servogouverne afin de remplacer l'équation différentielle qui régit celle-ci. La seconde hypothèse concerne le lanceur rigide (c'est-à-dire sans les modes souples) : on suppose que l'inertie et la masse de la tuyère sont nulles ; ce qui semble raisonnable par rapport aux masses et inerties mises en jeu dans le problème.

5.4.1. Servogouverne

Il s'agit du mécanisme qui actionne les vérins de commande de braquage des tuyères pour diriger le lanceur. On modélise cet ensemble par un filtre du second ordre comme on le fait de manière classique pour les actionneurs. Cette simplification est validée par un raisonnement sur les couplages en jeu et les liaisons dynamiques. On simplifie alors l'équation représentant les dynamiques du servomoteur par un second ordre.

$$\ddot{\beta} + 2\xi_T \omega_T \dot{\beta} + \omega_T^2 \beta = \omega_T \beta_c
\tag{Eq. 5.4.1}$$

Les grandeurs ξ_T et ω_T représentent l'amortissement et la pulsation alors que β_c représente l'angle de braquage commandé.

5.4.2. Equation principale

L'équation principale correspond au comportement du lanceur rigide et en particulier à son attitude. On néglige les modes de flexion et on considère comme nulles l'inertie et la masse de la tuyère.

On définit les grandeurs suivantes :

$$A_6 = \frac{M_\alpha}{J} = -\frac{N_\alpha(l_F - l_E)}{J} \quad (\text{Eq. 5.4.2})$$

$$K_1 = -\frac{\frac{M_T l_T}{M} (P_c - P_o - X_A) + P_o \frac{M_E l_E}{M}}{J} = -\frac{P_o l_E}{J} \quad (\text{Eq. 5.4.3})$$

On aboutit alors à l'équation de base du pilotage :

$$\ddot{\psi} = A_6 \left(\psi + \frac{\dot{z} - W}{V} \right) + K_1 \beta \quad (\text{Eq. 5.4.4})$$

A_6 est naturellement positif sur les lanceurs et les missiles, l'engin est donc aérodynamiquement instable (le centre de poussée est sous le centre de gravité). Les allures typiques de l'évolutions des coefficients A_6 et K_1 sont données Figure 5.5. Il est important de noter que les évolutions des paramètres sont connues sous la forme de tableaux de points.

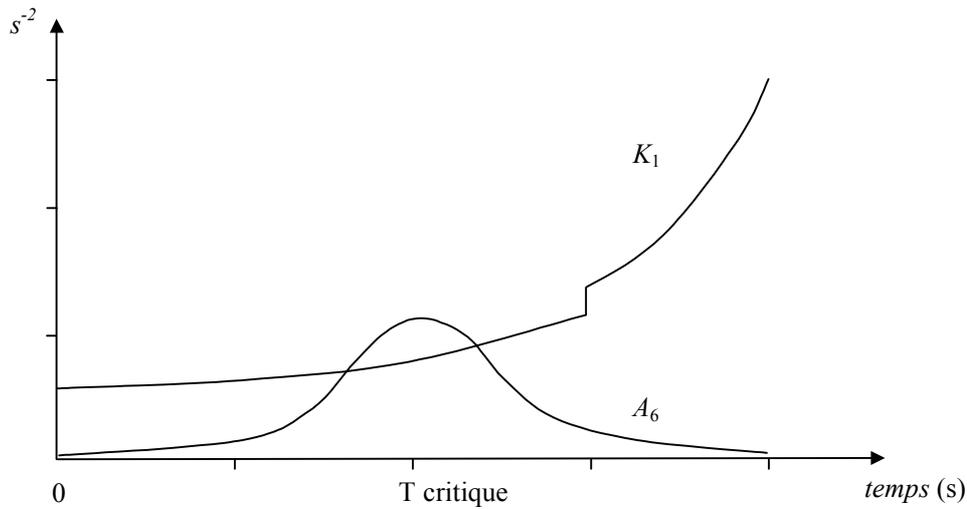


Figure 5.5 Allures des courbes d'évolution de A_6 et K_1

Cette équation peut aussi s'écrire en fonction de l'incidence (angle entre la vitesse relative du lanceur et l'axe vertical du lanceur) ce qui donne l'équation classique du mode rigide :

$$\ddot{\psi} = A_6 i + K_1 \beta \quad (\text{Eq. 5.4.5})$$

En effet, si on considère l'axe de lacet, et les mouvements aux petits angles qui permettent de confondre l'angle, son sinus et sa tangente, on peut exprimer la valeur de l'incidence i .

Conformément à la Figure 5.2, en notant α l'angle entre la vitesse absolue et l'axe GX (trajectoire nominale) et θ l'angle entre vitesse absolue et vitesse relative, l'incidence a pour expression :

$$i = \alpha - \theta + \psi \quad (\text{Eq. 5.4.6})$$

Or en confondant α et son sinus, on obtient :

$$\alpha = \frac{\dot{z}}{|V|} \quad (\text{Eq. 5.4.7})$$

De même, en considérant le vent orthogonal au lanceur et en confondant θ et son sinus, on obtient :

$$\theta = \frac{W}{|V|} \quad (\text{Eq. 5.4.8})$$

On en déduit l'expression de l'incidence

$$i = \psi + \frac{\dot{z} - W}{V} \quad (\text{Eq. 5.4.9})$$

Les différents termes qui ont été négligés, et en particulier les déformations dues aux modes souples, peuvent être pris en compte de manière indirecte sous la forme d'incertitudes sur les coefficients A_6 et K_1 .

5.4.3. Equation de dérive

La dérive selon l'axe z est pris en compte dans l'équation (5.3.25) ; en négligeant les modes souples, on peut facilement la simplifier en l'équation suivante :

$$\ddot{z} = a_1 \psi + a_2 (\dot{z} - W) + a_3 \beta \quad (\text{Eq. 5.4.10})$$

avec

$$a_1 = \frac{P_c - X_A - N_\alpha}{M} \quad (\text{Eq. 5.4.11})$$

$$a_2 = -\frac{N_\alpha}{M} \quad (\text{Eq. 5.4.12})$$

$$a_3 = \frac{P_o}{MV} \quad (\text{Eq. 5.4.13})$$

5.4.4. Les modes souples

Les modes souples qui ont été mis de côté lors des simplifications précédentes doivent tout de même être pris en compte, et c'est par les déformations aux

niveaux des centrales inertielles et gyrométriques que leurs effets vont être introduits.

L'équation dynamique d'évolution de chaque mode souple peut se résumer par l'équation suivante :

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = -\omega_i^2 P_c h_T(i)\beta \quad (\text{Eq. 5.4.14})$$

Tandis que le couplage au mode rigide se fait par les mesures :

$$\psi_m = \psi - \sum_{i=1}^{\infty} h'_{cI}(i)\eta_i \quad (\text{Eq. 5.4.15})$$

$$\dot{\psi}_m = \dot{\psi} - \sum_{i=1}^{\infty} h'_{Gy}(i)\dot{\eta}_i \quad (\text{Eq. 5.4.16})$$

Cette modélisation permet de limiter le nombre de couplages et facilite par la suite la mise sous forme LFT nécessaire pour l'application de certaines méthodes utilisés par le groupe de travail PIROLA.

Tout comme les coefficients A_6 et K_1 du mode rigides les caractéristiques des modes souples évoluent au cours du temps autant pour les pulsations que les amortissements ou encore le déformées modales. Ces variations sont connues sous formes de tabulations.

5.4.5. Centrales inertielle et gyrométrique

Par souci de simplification, la centrale inertielle est considérée comme *parfaite* et se limite à un gain unitaire, tandis que le gyromètre est modélisé par un filtre du second ordre.

Les bruits de mesures utilisés pour les simulations sont additifs aux sorties et centrés.

5.5. Bilan de la modélisation

5.5.1. Equations

On peut résumer la modélisation du lanceur, en omettant les modes de ballottement, par le système dynamique suivant :

$$\ddot{z} = a_1 \psi + a_2 \frac{\dot{z} - W}{V} + a_3 \beta \quad (\text{Eq. 5.5.1})$$

$$\dot{\psi} = A_6 \left(\psi + \frac{\dot{z} - W}{V} \right) + K_1 \beta \quad (\text{Eq. 5.5.2})$$

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -\omega_i^2 P_c h_T(i) \beta \quad \text{pour } i = 1, n \quad (\text{Eq. 5.5.3})$$

Equations de couplage :

$$\psi_m = \psi - \sum_{i=1}^{\infty} h'_{cI}(i) \eta_i \quad (\text{Eq. 5.5.4})$$

$$\dot{\psi}_m = \dot{\psi} - \sum_{i=1}^{\infty} h'_{Gy}(i) \dot{\eta}_i \quad (\text{Eq. 5.5.5})$$

L'aspect non stationnaire des ces équations doit être pris en compte par la connaissance a priori de l'évolution de l'ensemble des paramètres en fonction de la trajectoire.

5.5.2. Schéma bloc

Par l'assemblage des différent éléments, on obtient le schéma bloc de la Figure 5.6. On peut noter que cette représentation modulaire peut facilement évoluer vers des structures qui prennent en compte plus de complexité.

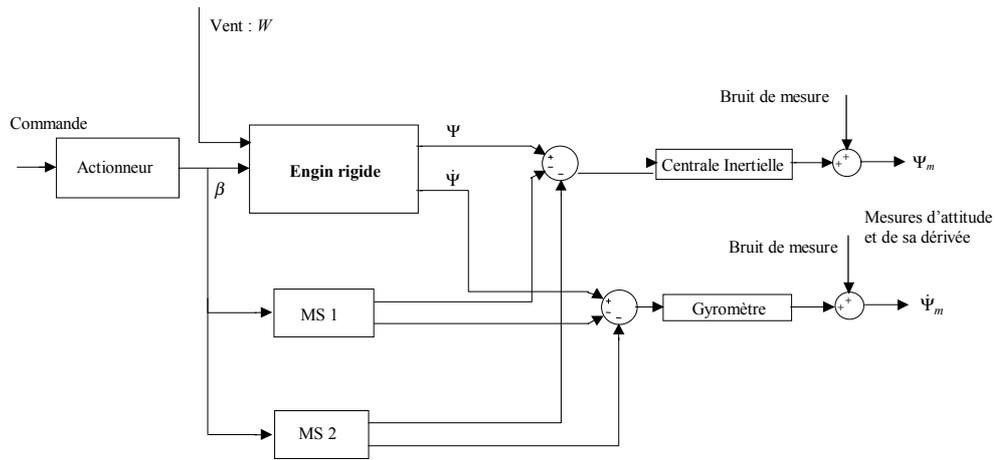


Figure 5.6 Schéma bloc du lanceur (prise en compte de 2 modes souples)

5.5.3. Lanceur rigide

Les entrées sont l'angle de braquage commandé β et la perturbation due au vent W ; et les sorties sont ψ et $\dot{\psi}$.

$$\text{On définit } u = \begin{pmatrix} \beta \\ W \end{pmatrix} \text{ et } x = \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 5.5.6})$$

Une représentation d'état du système est :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ A_6 & 0 & \frac{A_6}{V} \\ a_1 & 0 & a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & -\frac{A_6}{V} \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix} u \quad (\text{Eq. 5.5.7})$$

Soit $H_1(s)$ et $H_2(s)$ les fonctions de transfert de $\beta \rightarrow \psi$ et $W \rightarrow \psi$ pour les systèmes dont les paramètres sont figés à $T_{critique}$ (défini sur la Figure 5.5) :

$$H_1(s) = \frac{K_1 s + \frac{A_6}{V} a_3 + a_2 K}{s^3 - a_2 s^2 - A_6 s + a_2 A_6 - \frac{a_1 A_6}{V}} \quad (\text{Eq. 5.5.8})$$

$$H_2(s) = \frac{-\frac{A_6}{V}s}{s^3 - a_2s^2 - A_6s + a_2A_6 - \frac{a_1A_6}{V}} \quad (\text{Eq. 5.5.9})$$

5.5.4. Les modes souples

La mise sous forme de système dynamique des modes souples conduit pour chaque mode au système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta_i \\ \dot{\eta}_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\phi_i\omega_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_i \\ \dot{\eta}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_i^2 P_c h_T(i) \end{pmatrix} \beta \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h'_{cI}(i) & 0 \\ 0 & h'_{Gy}(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_i \\ \dot{\eta}_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.5.10})$$

Enfin l'interconnexion des systèmes décrivant les modes rigides et les modes souples est donnée par les équations :

$$\begin{aligned} \psi_m &= \Psi - z_1 \\ \dot{\psi}_m &= \dot{\Psi} - z_2 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5.5.11})$$

5.5.5. Interprétations graphiques

Les figures qui suivent (Figure 5.7) représentent les différents transferts mis en jeu dans la modélisation avec les paramètres déléés correspondnat à un instant de vol particulier. Il s'agit du modèle continu discrétisé à la période d'échantillonnage T_e . On considérera deux entrées et trois sorties qui sont :

(i) les entrées :

- l'angle de braquage β ,
- la vitesse du vent W ,

(ii) les sorties :

- l'angle d'attitude ψ_m (mesuré par la centrale inertielle),
- la vitesse de variation de l'angle d'attitude : $\dot{\psi}_m$ (mesurée par le gyromètre),
- l'angle d'incidence i (non mesuré).

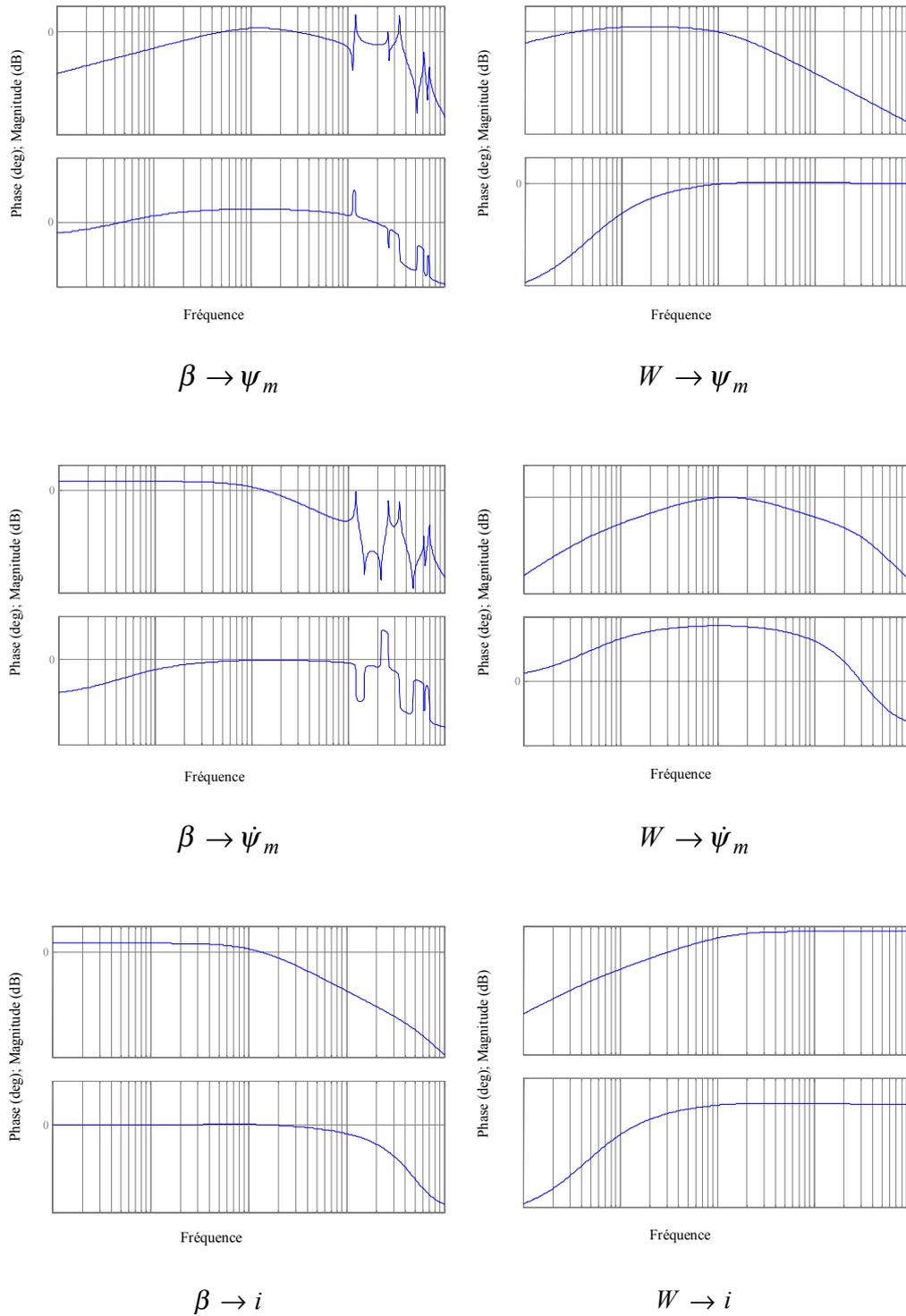


Figure 5.7 Diagrammes de Bode du lanceur

5.6. Cahier des charges

Le cahier des charges pour la synthèse non stationnaire se divise en deux parties ; la première concerne des spécifications fréquentielles qui devront être validées sur l'ensemble des linéarisés tangents du système non stationnaire (c'est-à-dire avec les paramètres gelés) ; et la seconde concerne les simulations temporelles.

En ce qui concerne les contraintes fréquentielles, elles sont identiques pour l'ensemble des points de vols et doivent être validées sur les cas définis dans le Tableau 5.I. Tandis que les spécifications temporelles ne se traduisent pas de la même manière en début et en fin de vol. En effet en début et en fin de vol, la diminution de la pression dynamique permet d'être moins exigeant sur l'incidence.

Pour des raisons de confidentialité des données numériques, l'ensemble des spécifications sont exprimées de manière littérales. Il en est de même pour les résultats qui seront normalisés en fonctions des spécifications.

5.6.1. Cas « pires » à étudier

Pour éviter un balayage complet de l'espace paramétrique des incertitudes, des configurations dites « pire cas » ont été identifiées ; elles correspondent au tableau suivant :

	A_6	K_1	ω_i	Déformées modales
Incertitude	$\pm 40\%$	$\pm 10\%$	$\pm 10\%$ (sauf 15% pour le 1 ^{er} mode)	$\pm 20\%$ (sauf 30% pour le 1 ^{er} mode)
1	min	max	min	max
2	max	min	min	max
3	min	max	max	max
4	max	min	max	max

Tableau 5.I Liste des cas « pires »

5.6.2. *Spécifications fréquentielles*

Les contraintes fréquentielles sont classées selon 3 catégories qui correspondent à trois bandes de fréquences distinctes.

(i) Basses fréquences : marges de stabilité sur le mode rigide

marge de gain BF : ΔG_{BF} dB

marge de gain HF : ΔG_{HF} dB

marge de retard au moins égale à une période d'échantillonnage

(ii) Moyennes fréquences : premier mode de flexion

Sa proximité de la bande passante autorise de régler celui-ci « en phase », c'est-à-dire de placer le pic de résonances entre -90° et 90° dans le plan de Black. Il est toutefois possible de le considérer comme les autres modes décrits dans le point suivant.

La marge de retard doit être supérieure à une période d'échantillonnage

(iii) Hautes fréquences : autres mode de flexion

Les autres modes doivent être atténués en dessous de X_{HF} dB ($X_{HF} < 0$ dB).

Pour se fixer les idées graphiquement, une allure de diagramme de Black typique est donnée Figure 5.8.

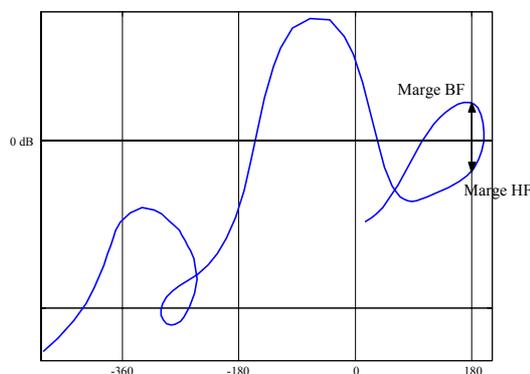


Figure 5.8 Allure typique du diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée

5.6.3. *Spécifications temporelles*

Les contraintes temporelles sont à vérifier en simulation avec un profil de vent typique représenté sur la Figure 5.9 et elles se résument par :

- L'incidence maximale doit rester inférieure à i_{\max} degrés (en valeur absolue),
- Le braquage de tuyère (commande β) est limité au maximum à β_{\max} degrés(en valeur absolue),
- La vitesse de braquage est limité au maximum à $\dot{\beta}_{\max}$ degrés par secondes (en valeur absolue).

D'autre part un critère de consommation doit être pris en compte. Il est défini par la formule suivante

$$\text{consommation} = \sum_{k=0}^{T_f} |\beta(k+1) - \beta(k)| \quad (\text{Eq. 5.6.1})$$

et ne doit pas excéder C_{\max} degrés.

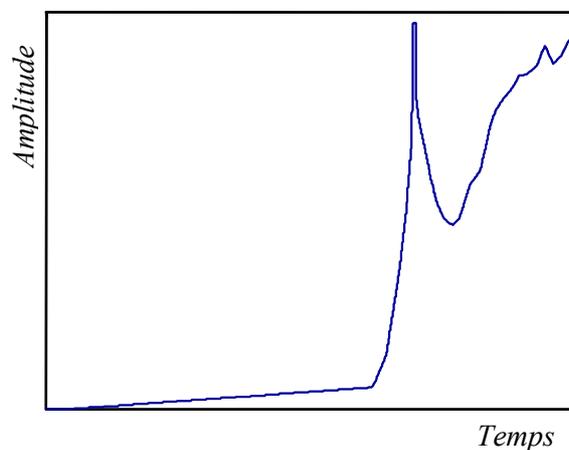


Figure 5.9 Vent de référence

Remarques :

- On peut ajouter aux contraintes que l'attitude doit être proche de zéro en fin de vol pour préparer la phase suivante comme on l'a indiqué dans la présentation du problème.
- Lors de la présentation des résultats, les valeurs numériques seront normalisées à 100 en fonction des spécifications.

5.6.4. La loi de commande

Le correcteur final doit être un système dynamique discret échantillonné à la même vitesse que le simulateur du lanceur.

L'ordre du correcteur est un point important pour des besoins de compréhension / interprétation de ce correcteur et pour des contraintes en place mémoire et charge calcul des ordinateurs de bord du lanceur. Ce point est un souci permanent et a été très influant dans le développement et la mise en place des pilotages actuels. Toutefois, dans un avenir plus lointain et dans une hypothèse de reprise complète de la structure du programme de vol, voire d'évolution des calculateurs embarqués, on peut être moins contraint. Ainsi pour cette application cela n'est pas fixé comme contrainte forte au départ.

5.7. Interface du Benchmark PIROLA

La réalisation pratique du simulateur non stationnaire et des outils d'analyse graphique a été faite en collaboration avec le département DCSD du Centre de Toulouse de l'ONERA et s'adresse à l'ensemble des partenaires du groupe de travail PIROLA.

On montre ici quelques éléments de l'interface MATLAB / SIMULINK :

- le simulateur proprement dit avec la structure qui a été exposée dans le paragraphe précédent
- l'interface Matlab qui permet d'exploiter les résultats

5.7.1. Simulateur

Le simulateur présenté ici reprend les équations différentielles qui régissent le comportement linéaire du lanceur avec l'ensemble des paramètres qui varient dans le temps. Ces variations sont tabulées en fonction du temps et suivent des lois d'interpolation pour les instants intermédiaires. L'ensemble des paramètres sont implantés dans les « blocs » de la Figure 5.11 qui représente la version du modèle à 5 modes souples qui se trouve dans le « bloc lanceur » de la Figure 5.10.

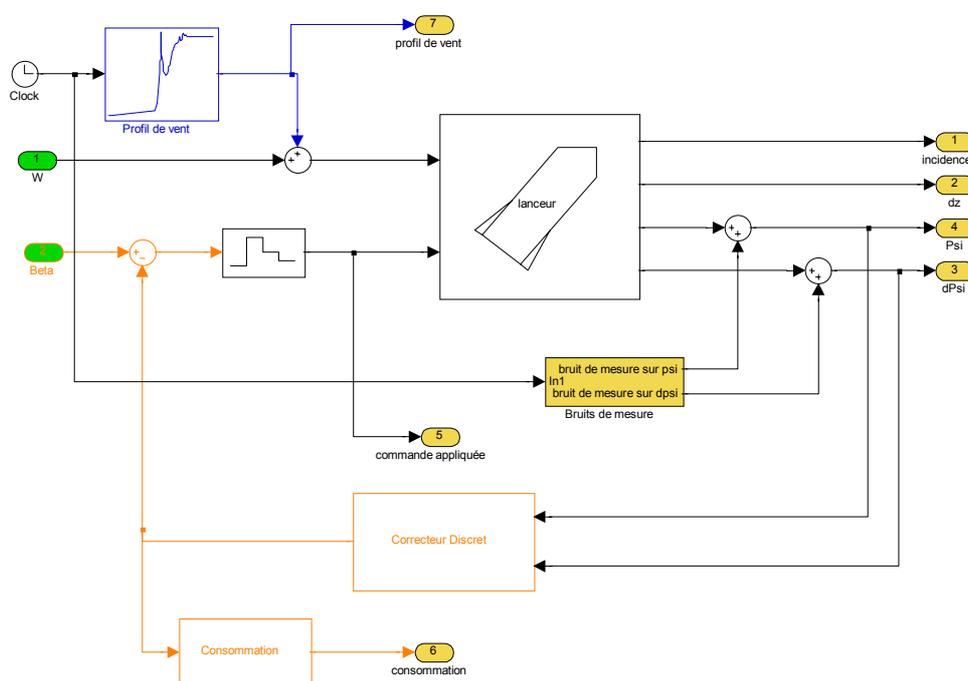


Figure 5.10 Simulateur de la boucle fermée

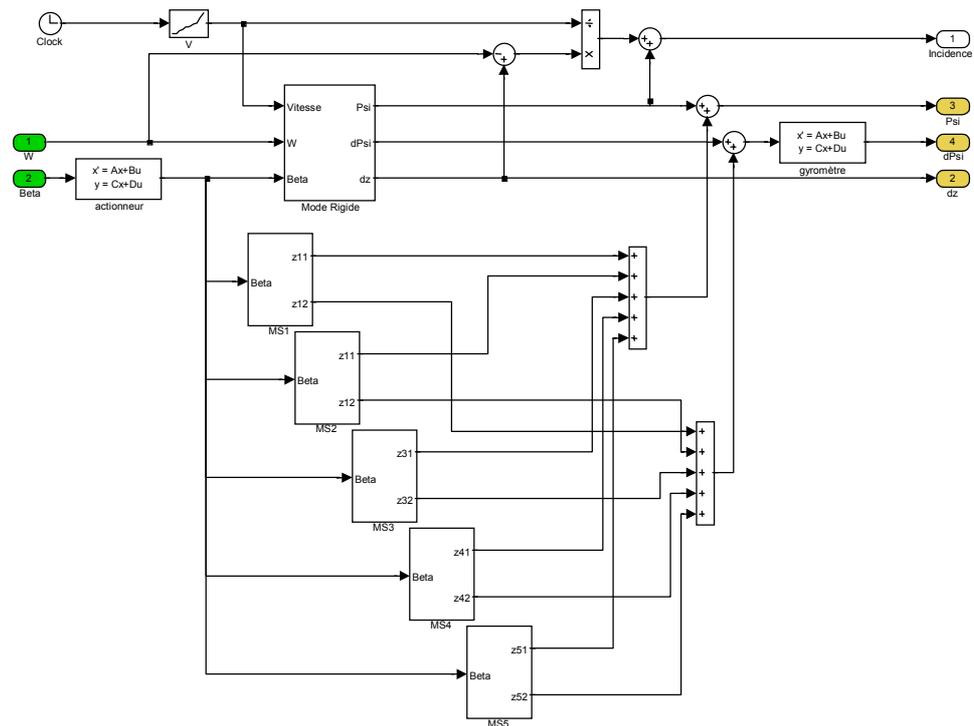


Figure 5.11 Modèle du lanceur à 5 modes souples

5.7.2. Interface graphique pour les résultats

L'interface graphique de la Figure 5.13 permet de visualiser l'ensemble des paramètres de configuration du lanceur à étudier ainsi que l'ensemble des variables temporelles issues des simulations qui elles mêmes sont générés par le menu de la Figure 5.12.

L'ensemble des éléments relatifs à cette interfaces sont consignés dans la note technique Supélec-ONERA [CV01].



Figure 5.12 Fonctionnalités du benchmark

5.8. Conclusion

La conception d'un modèle de simulation a été faite à partir de considérations physiques et des données numériques d'*EADS – LV*. Le développement d'un modèle utilisable sous *Matlab-Simulink* permet de définir un cadre d'application réaliste et évolutif. L'étude faite dans un premier temps ne considère qu'un modèle linéaire en un point de vol mais la démarche adoptée permettra d'étendre le modèle au cas non-stationnaire en utilisant la mise sous forme standard en fonction des paramètres variant en fonction du temps. Cette démarche s'avérera nécessaire pour mener des travaux de synthèse de lois de commande valable sur un large domaine de vol.

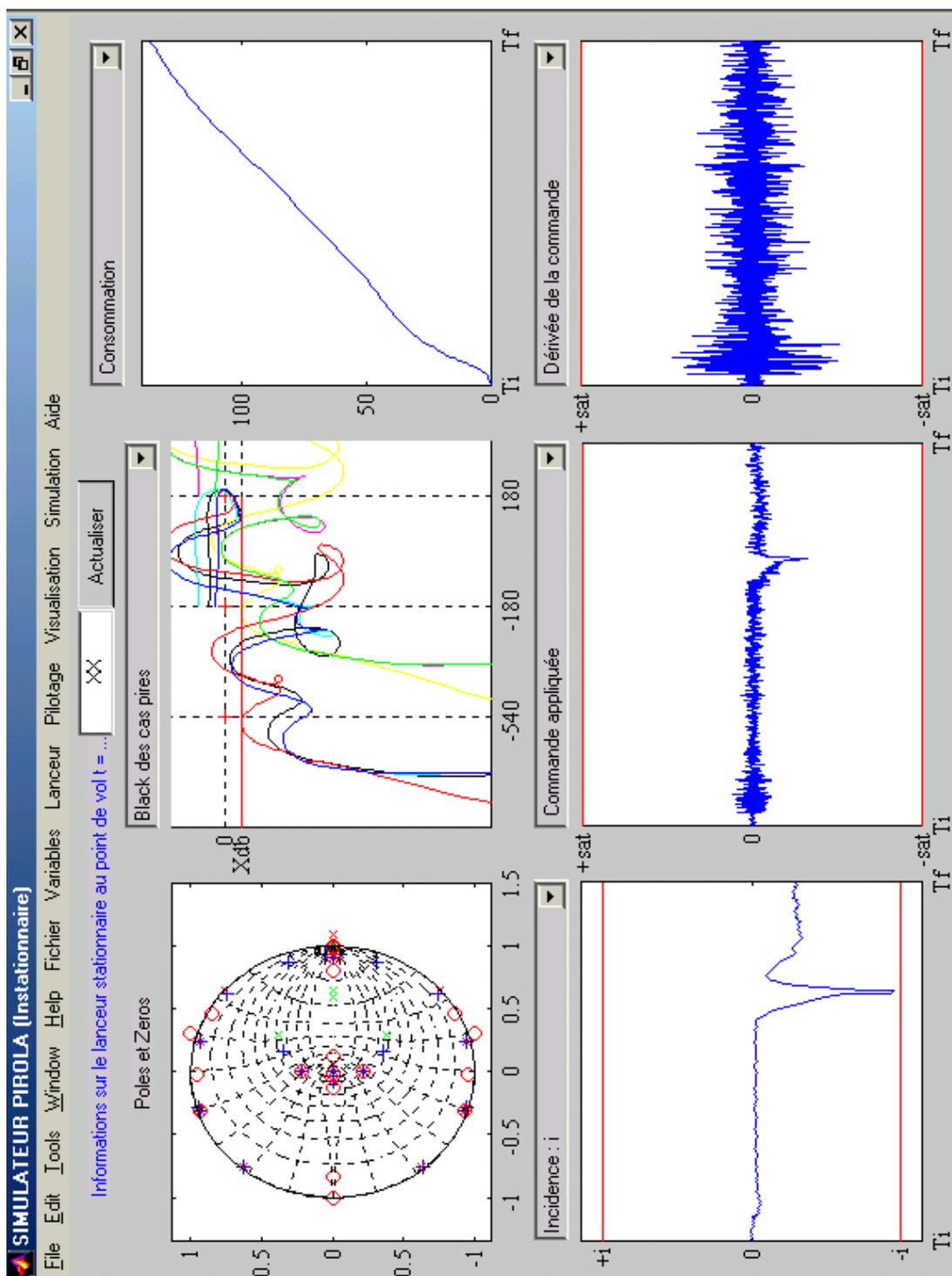


Figure 5.13 Interface graphique du benchmark

Chapitre 6

Pilotage d'un lanceur : synthèse linéaire stationnaire

6.1. Présentation.....	191
6.2. Le schéma de synthèse.....	193
6.3. Généralités sur les synthèses.....	195
6.4. Première étape : réglages sur le mode rigide.....	197
6.5. Deuxième étape : les modes souples.....	203
6.6. Le correcteur et sa réduction <i>a posteriori</i>	213
6.7. Conclusion	216

6.1. Présentation

Ce chapitre d'application est essentiellement consacré à la mise en œuvre des méthodes de synthèse du chapitre 3, c'est-à-dire la synthèse multiobjectifs avec paramétrisation de Youla. Nous avons fait le choix de présenter les différents résultats de manière constructive pour mettre en avant une méthodologie de synthèse pour le pilotage des lanceurs. Il est en effet important à nos yeux d'insister sur le fait qu'une méthode de synthèse n'est rien sans une connaissance approfondie du système pour lequel la synthèse est faite. Ainsi les principes théoriques du chapitre 3 sont ici au service de l'ingénieur pour ajuster les paramètres de réglages.

La méthodologie présentée est reproductible pour une autre configuration de lanceur mais elle est aussi valide pour tout autre système dont le cahier des charges est présenté sous forme d'objectifs contradictoires. Nous allons définir quels sont les principaux objectifs de synthèse et pour chacun d'eux nous effectuerons une synthèse particulière pour laquelle les résultats (et donc les objectifs) précédemment obtenus sont maintenus.

Pour chaque étape, les résultats présentés peuvent être interprétés selon une grille de lecture commune pour visualiser l'évolution des résultats. On rappellera que toutes les figures sont normalisées pour des raisons de confidentialité.

6.1.1. Lecture des critères fréquentiels

Les contraintes fréquentielles peuvent se représenter sur les diagrammes de Black-Nichols :

- des étoiles définissent les limites des marges de gain conditionnelles dites basse fréquence (ΔG_{BF}) et haute fréquence (ΔG_{HF}) ;
- l'atténuation des modes souples à partir du second mode souple est repéré par une ligne horizontale.

Le calcul des marges de retard est donné par la formule suivante et fait l'objet d'un calcul à part :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\phi}{\omega_0}, \quad (\text{Eq. 6.1.1})$$

où ω_0 est la pulsation au gain unité. Dans le cas où celle-ci n'est pas unique, on prend la valeur de $\Delta\tau$ la plus faible.

6.1.2. Lecture des contraintes temporelles

Les courbes de simulation présentées sont générées avec ou sans bruit selon les cas de figure étudiés. En effet les bruits de mesures sont pris en compte uniquement lorsque l'analyse fréquentielle montre que les hautes fréquences sont atténuées. Les grandeurs représentées sont :

- l'incidence i
- l'attitude ψ pour laquelle il n'y a pas de contrainte spécifique mais qui doit rester « faible »¹
- la commande β
- la vitesse de variation de la commande $\dot{\beta}$
- l'évolution de la consommation (dans le cas de simulations bruitées)

L'échelle de temps de toutes les figures est la même que celle du profil de vent type de la Figure 6.1

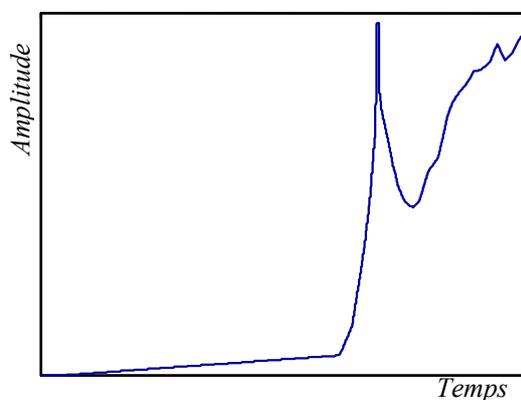


Figure 6.1 Vent de référence

¹ Afin de pouvoir comparer des courbes qui n'ont pas de repère, on utilise la même échelle pour toutes les courbes de ce chapitre correspondant à une même variable.

6.1.3. Etude de la robustesse

Notre travail ne s'est pas spécifiquement orienté vers l'analyse de la robustesse, aucun outil spécifique n'a été développé à ce sujet ; la robustesse est donc simplement vérifiée a posteriori sur les configurations dites « pires cas » définies au chapitre 5 (en plus de l'analyse de la configuration nominale). Les paramètres incertains considérés ainsi que les configurations étudiées sont récapitulés dans le Tableau 6-I.

	A_6	K_1	ω_i	Déformées modales
Numéro de cas	$\pm 40\%$	$\pm 10\%$	$\pm 10\%$ (sauf 15% pour le 1 ^{er} mode)	$\pm 20\%$ (sauf 30% pour le 1 ^{er} mode)
1	min	max	min	max
2	min	max	nominal	max
3	min	max	max	max
4	nominal	nominal	min	max
5	nominal	nominal	nominal	max
6	nominal	nominal	max	max
7	max	min	min	max
8	max	min	nominal	max
9	max	min	max	max

Tableau 6-I Liste des cas « pires » étudiés

6.2. Le schéma de synthèse

Le modèle de lanceur utilisé est issu des études du chapitre 5. Pour la synthèse, nous avons choisi une représentation discrète du processus qui ne tient pas compte des modes souples mais inclut par contre les capteurs et actionneur (Figure 6.2). Ce choix permet de garder un modèle de synthèse d'ordre

raisonnable (ici d'ordre 6). De plus les modes souples ont un mode de réglage spécifique qui permet de les exclure du modèle de synthèse.

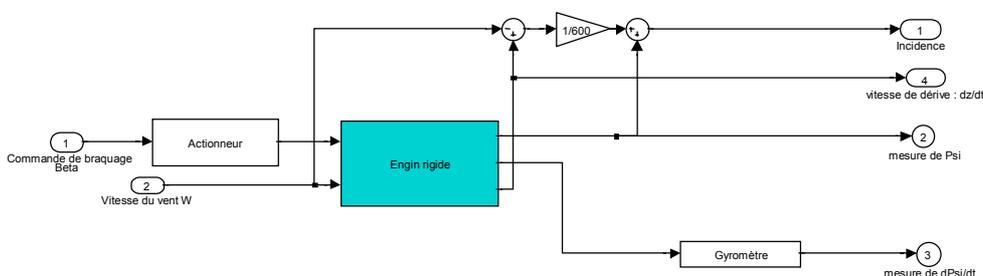


Figure 6.2. Modèle de synthèse du lanceur

En ce qui concerne la validation, le modèle complet du benchmark présenté au chapitre 5 est mis en œuvre avec les cinq premiers modes souples. Comme il s'agit ici de synthèse linéaire stationnaire, on utilise le modèle du benchmark mais avec l'ensemble des paramètres figés.

Le schéma de synthèse (Figure 6.3) reprend le modèle rigide et les capteurs et actionneur et il est augmenté des différentes pondérations qui traduisent les spécifications du cahier des charges.

La synthèse est faite avec l'algorithme de synthèse multicritère décrit au chapitre 3 avec un paramètre de Youla d'ordre 2.

Sur le schéma de synthèse (Figure 6.3), on voit apparaître les différentes pondérations qui servent dans la synthèse. Les interprétations pour chacune d'elles sont explicitées au fur et à mesure :

- W_1 pour la positivité (voir paragraphe 6.5.1)
- W_2 pour le roll-off sur le second mode (voir paragraphe 6.5.2)
- W_3 pour la sensibilité (voir paragraphe 6.4.1)
- W_4 pour la pondération en entrée de vent (voir paragraphe 6.5.1).

En ce qui concerne les simulations temporelles et le schéma de correction on se reportera au simulateur décrit au chapitre 5, et brièvement rappelé sur la Figure 6.4.

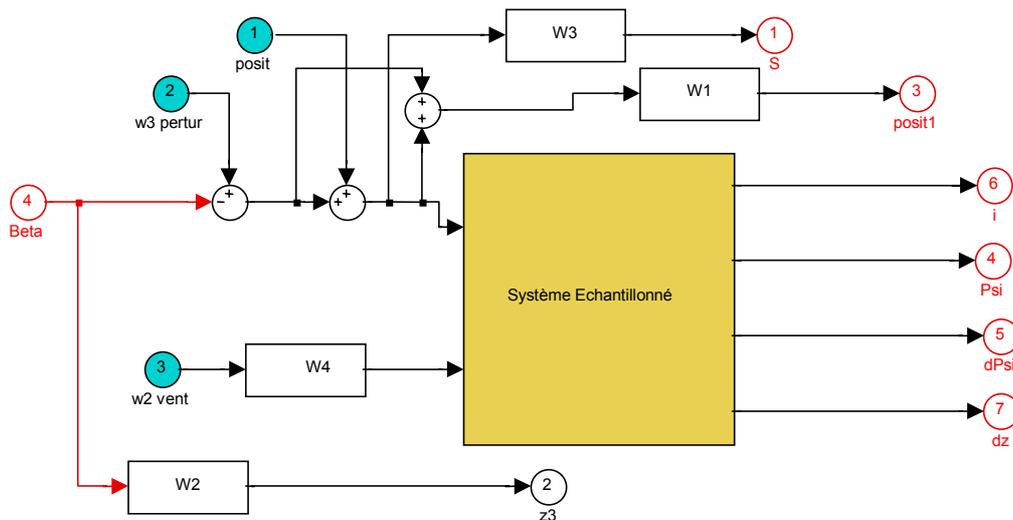


Figure 6.3. Schéma de synthèse

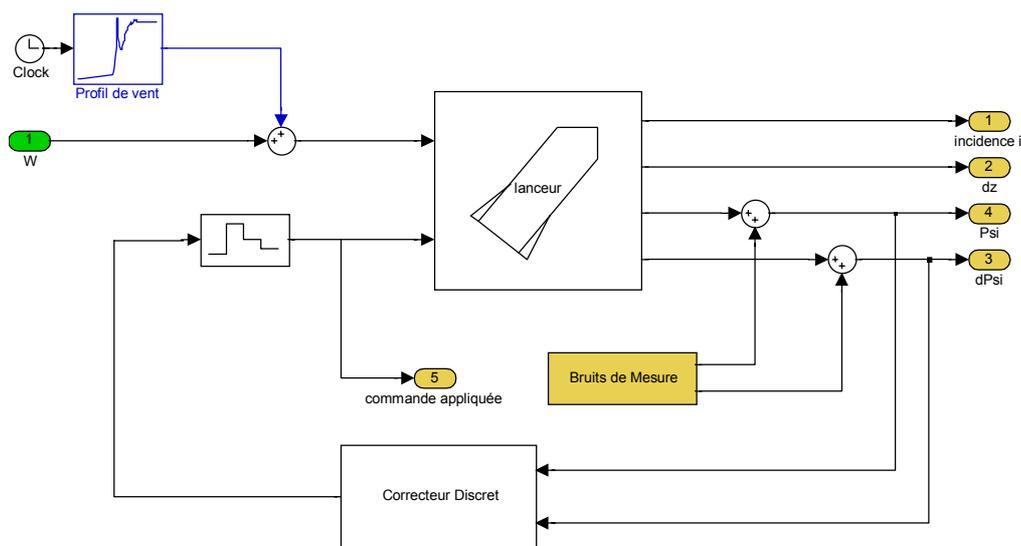


Figure 6.4. Schéma de simulation

6.3. Généralités sur les synthèses

Les synthèses qui suivent s'intègrent dans le cadre de la synthèse H_∞ avec des critères découplés dans le cas où l'on souhaite satisfaire plusieurs critères simultanément. En effet, l'intérêt de la synthèse H_∞ / H_∞ se comprend en

regardant comment se calcule la norme H_∞ d'un système P avec deux entrées (1, 2) et deux sorties (1, 2). On sait alors que :

$$\|P\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad (\text{Eq. 6.3.1})$$

Alors que les spécifications portent sur $\|P_{11}\|_\infty$ et $\|P_{22}\|_\infty$, les termes croisés induisent du conservatisme et peuvent conduire à des solutions très sous-optimales.

La stratégie adoptée procède par étapes successives et constructives :

1. régler la partie rigide du lanceur pour satisfaire les contraintes temporelles ;
2. prendre en compte le premier mode pour assurer la stabilité robuste du correcteur ;
3. introduire les spécifications sur le second mode pour garantir le rejet correct de perturbation.

Nous allons nous rendre compte que le problème de synthèse revient à gérer le compromis entre les différentes exigences. Les résultats sont présentés de manières quasi-identiques pour chaque étape :

- description des contraintes ;
- valeurs numériques : incidence maximale, marges ;
- représentations fréquentielles ;
- représentations temporelles.

La robustesse des lois de commande est testée sur les modèles dits « pires cas » qui correspondent aux configurations avec les valeurs extrêmes des paramètres incertains ; ces configurations sont décrites au chapitre 5 dans le tableau 5.I.

Les résultats sont facilement lisibles sur les courbes, il n'y aura donc que peu de commentaires.

6.4. Première étape : réglages sur le mode rigide

Les différents éléments du cahier des charges apparaissent relativement découplés. En effet les actions du vent et les effets des bruits de mesure n'agissent pas sur les mêmes bandes de fréquences : les variations de la vitesse du vent agissent sur les basses fréquences tandis que les bruits sont plutôt à des fréquences élevées. Ainsi pour assurer que l'incidence ne dépasse pas sa valeur limite, deux approches sont envisageables:

- modeler la fonction de sensibilité afin de « dynamiser » le système, c'est-à-dire lui conférer les dynamiques nécessaires pour rejeter la perturbation de vent
- agir directement sur le transfert entre le vent W et l'incidence i , puisqu'il s'agit de minimiser l'effet du vent sur l'incidence en basse fréquence.

Nous présentons successivement ces deux approches. On remarquera que l'étude de robustesse, n'est faite que sur les cas 1, 4 et 7 puisque les modes souples ne sont pas pris en compte. De plus les cas mentionnés dans les tableaux récapitulatifs des performances sont ceux qui apparaissent sur les différentes figures.

6.4.1. Réglage de la sensibilité

Le principe de réglage de la fonction de sensibilité S pour assurer le respect de la contrainte temporelle sur l'incidence relève de deux paramètres : pulsation de coupure et grand gain en basse fréquence.

Le critère d'optimisation adopté (après réglage de la pondération) est :

$$\min \left(\gamma / \|W_3 S\|_\infty < \gamma \right) \text{ avec } W_3(z) = \frac{0,1919z}{z - 0,9993} \quad (\text{Eq. 6.4.1})$$

Le transfert $W_3 S$ est obtenu en utilisant l'entrée ① et la sortie ① dans le schéma de synthèse (Figure 6.3).

Remarque :

A ce stade de l'étude, les diagrammes fréquentiels et temporels ne prennent pas en compte les modes souples qui déstabiliseraient le système. C'est pourquoi les cas envisagés par le Tableau 6-I se réduisent à trois (Tableau 6-II).

cas	Incidence max ($\times i_{\max}$)	ΔG_{BF} ($\times \Delta G_{BF \min}$)	ΔG_{HF} ($\times \Delta G_{HF \min}$)	$\Delta \tau$ ($\times T_e$)
1	0,949	7,22	2,12	/
4	0,947	5,97	2,40	/
7	0,948	4,81	2,71	/

Tableau 6-II Performance (étape 1)

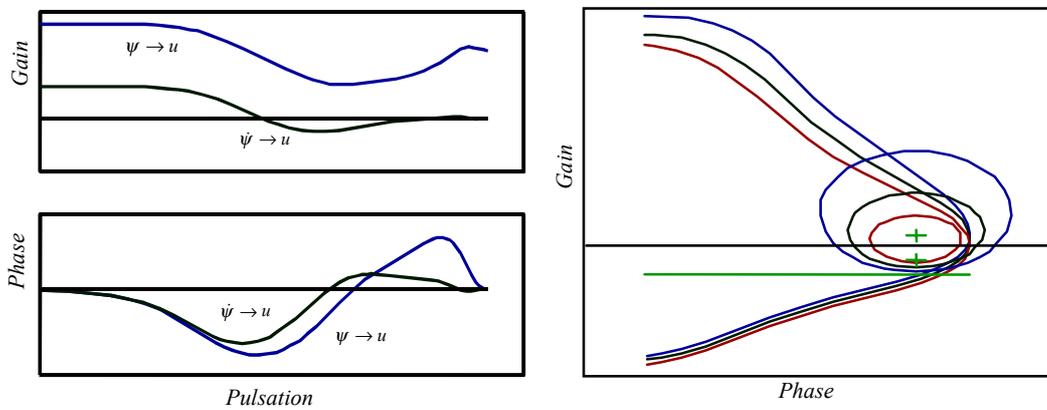
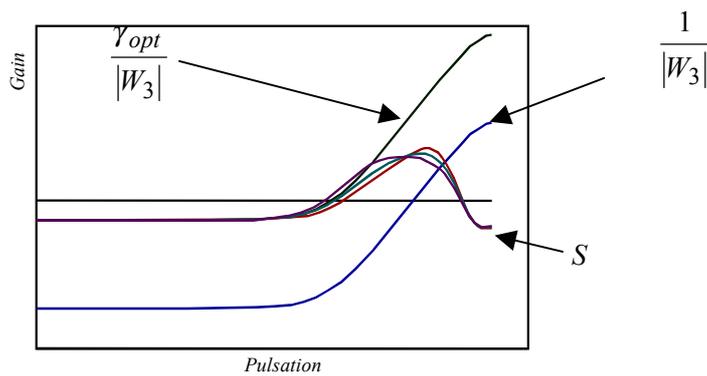


Diagramme de Bode du correcteur

Diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée



Sensibilité

Figure 6.5 Résultats fréquentiels – étape 1

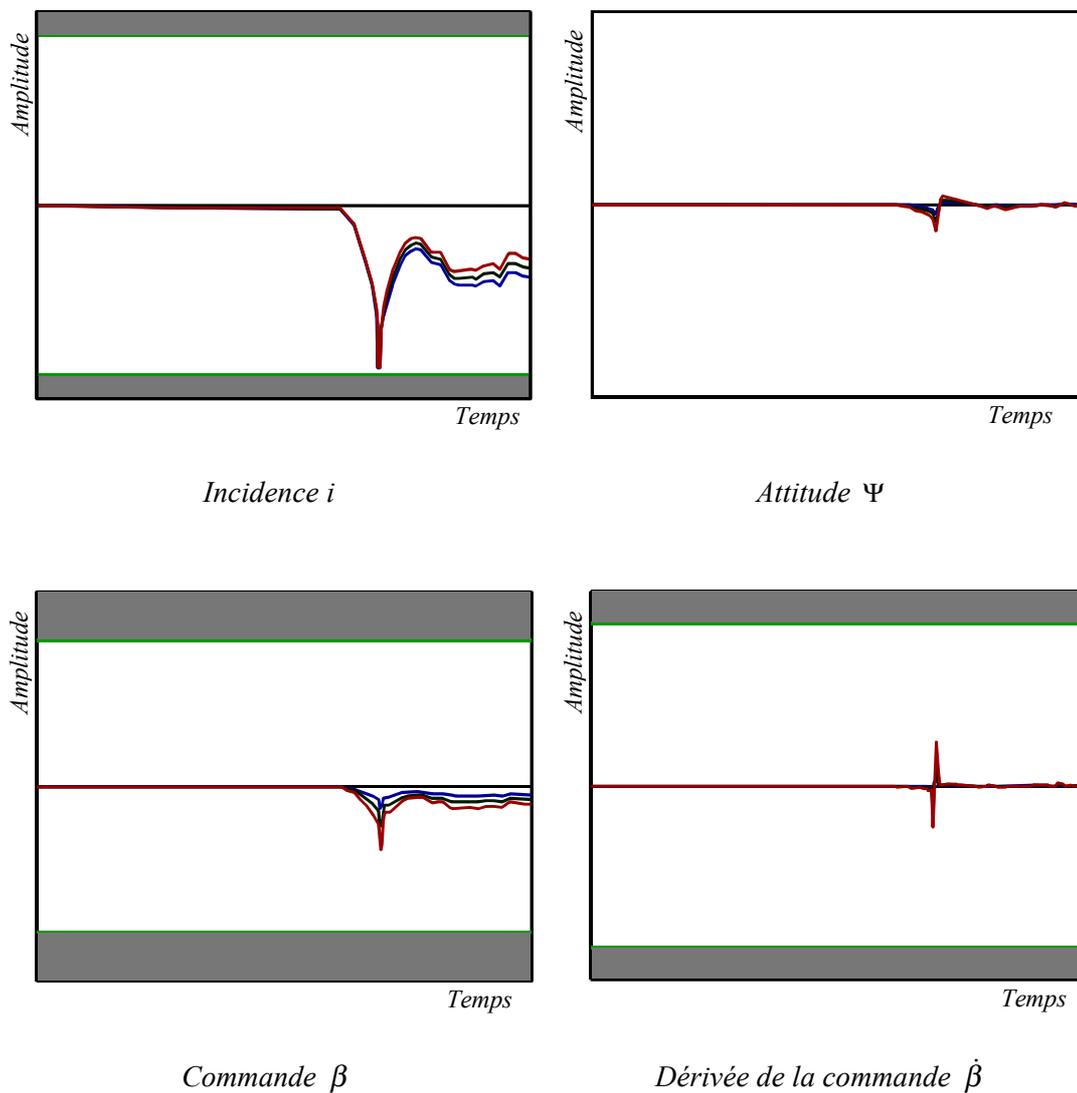


Figure 6.6 Résultats temporels – étape 1

Ce réglage remplit bien les spécifications temporelles mais l'introduction des modes souples rend le système instable. On ne tient compte ici d'aucune autre spécification que la sensibilité.

6.4.2. Réglage du transfert de $W \rightarrow i$

Nous rappelons qu'il s'agit d'une alternative au réglage effectué au paragraphe précédent.

Ce transfert représente l'influence directe du vent sur l'incidence, il s'agit naturellement de l'effet que l'on souhaite minimiser. D'après le schéma de synthèse, c'est l'action de la commande β qui agit. Or le transfert en boucle ouverte non corrigée de β vers i est très faible en comparaison avec le transfert direct de W vers i , il s'agit donc d'une contrainte difficile à satisfaire. Le vent est un phénomène relativement basse fréquence par rapport aux dynamiques propres du lanceur.

Il serait naturel d'utiliser un critère H_2 pour ce critère de synthèse si on connaissait les propriétés statistiques du vent en tant que bruit perturbateur. Mais en réalité on connaît mieux les propriétés fréquentielles de celui-ci, c'est pourquoi un critère H_∞ a été finalement choisi.

Le critère de synthèse est le suivant :

$$\min (\gamma / \|W_4 T_{W \rightarrow i}\|_\infty < \gamma)$$

$$\text{avec } W_4(z) = \frac{0,4107z + 0,4068}{z^2 - 1,9708z + 0,9716} \quad (\text{Eq. 6.4.2})$$

Le transfert optimisé est obtenu en utilisant l'entrée ③ et la sortie ⑥ du schéma de synthèse (Figure 6.3).

cas	Incidence max ($\times i_{\max}$)	ΔG_{BF} ($\times \Delta G_{BF \min}$)	ΔG_{HF} ($\times \Delta G_{HF \min}$)	$\Delta \tau$ ($\times T_e$)
1	0,86	2,36	1,14	/
4	0,80	1,58	1,44	/
7	0,76	0,78	1,76	/

Tableau 6-III Performance (étape 1)

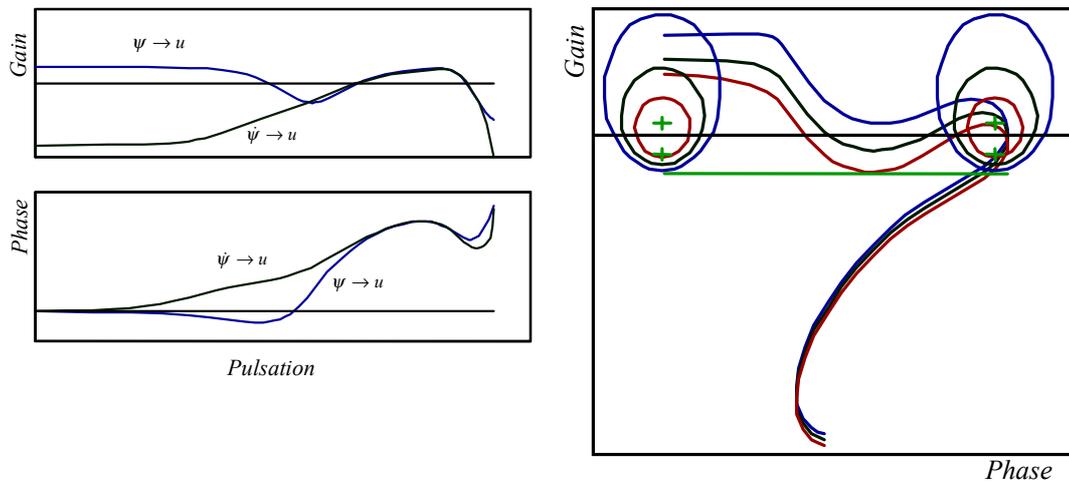


Diagramme de Bode du correcteur

Diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée

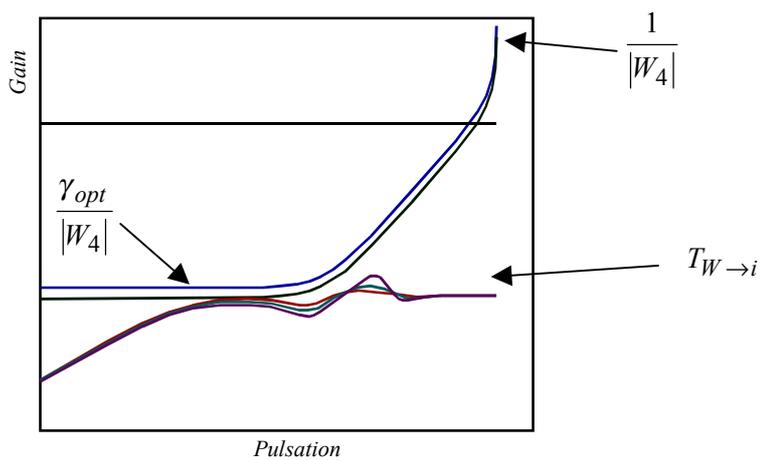
Gabarit de vent W_4 et transfert $W \rightarrow i$

Figure 6.7 Résultats fréquentiels – étape 1bis

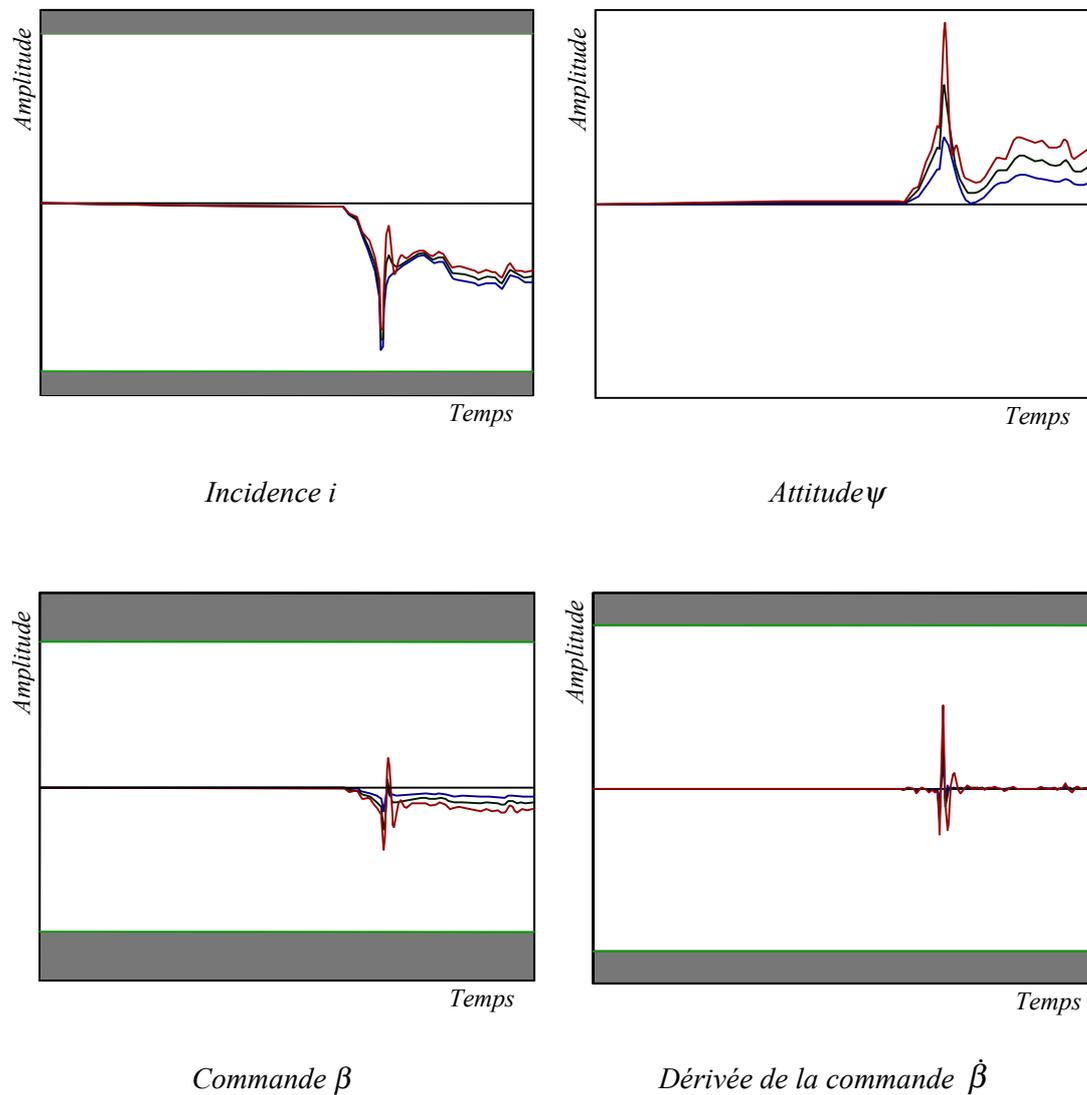


Figure 6.8 Résultats temporels – étape 1bis

Les résultats obtenus sont très bons en ce qui concerne l'incidence même si celle-ci ne revient pas à 0 (cette spécification ne figure pas dans le cahier des charges). Ceci n'a rien d'étonnant, c'est en effet le seul critère pris en compte! Par contre du point de vue fréquentiel, les résultats ne sont pas satisfaisants du tout. Il faut donc ajouter des contraintes tout en faisant attention à conserver au mieux les performances sur l'incidence.

6.4.3. Bilan des deux synthèses

La seconde approche permet de satisfaire plus largement la contrainte sur l'incidence qui s'avère par expérience difficile à régler. Pour s'assurer plus de liberté, nous choisissons donc le second réglage comme point de départ de la seconde étape.

6.5. Deuxième étape : les modes souples

Pour le réglage des modes souples, le choix de placer en phase le premier et d'atténuer les suivants a été choisi. En effet, les modes sont très peu amortis et sont donc difficiles à atténuer. Le premier se trouvant très près de la bande passante ce choix donne à première vue une marge de manœuvre plus grande.

6.5.1. Positivité

Soit $H = S - T$ où S est la fonction de sensibilité et T la fonction de sensibilité complémentaire. Alors on a la propriété de positivité suivante :

$$\forall \omega \in \mathbf{R}, |H(e^{j\omega T})| < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg(L(e^{j\omega T})) < \frac{\pi}{2} \quad (\text{Eq. 6.5.1})$$

où L est le transfert de la boucle ouverte.

En effet, un transfert L est dit positif réel si il répond aux deux propriétés suivantes [AV73] :

- les pôles de $L(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité
- $L(e^{j\omega T}) + L(e^{j\omega T})^* > 0$ pour $\omega \in \mathbf{R}$

On montre également dans [DV75, SC88] que cette dernière relation s'écrit aussi de la manière suivante :

$$\|(I - L)(I + L)^{-1}\|_{\infty} < 1 \quad (\text{Eq. 6.5.2})$$

Or les fonctions de sensibilité sont définies par :

$$\begin{aligned} S &= (1 + L)^{-1} \\ T &= L(1 + L)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 6.5.3})$$

On retrouve bien la relation voulue qui traduit la positivité par une norme H_∞ :

$$\|S - T\|_\infty < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg\left(L(e^{j\omega T})\right) < \frac{\pi}{2} \quad (\text{Eq. 6.5.4})$$

Une étude complète sur la positivité est faite dans [FCG78] et un développement pratique utilisant ce formalisme pour la commande H_∞ est disponible dans [Fon95].

Cette propriété permet donc de commander en phase un mode résonant en imposant la positivité sur une bande de fréquence centrée sur le mode, au moyen d'un filtre passe bande W_1 :

$$W_1(z) = \frac{0,04z^2 + 0,4592z - 0,477}{z^2 - 1,057z + 0,61} \quad (\text{Eq. 6.5.5})$$

On obtient donc un critère H_∞ du type

$$\|W_1(S - T)\|_\infty < \gamma_1 \quad (\text{Eq. 6.5.6})$$

Le transfert correspondant est obtenu en utilisant l'entrée ① et la sortie ③ du schéma de synthèse (Figure 6.3). La synthèse ne prend pas en compte les modes souples dans le modèle et découple les critères de positivité et de rejet de perturbation de vent.

Les critères de cette synthèse sont donc :

$$\min(\gamma_1 / \|W_1(S - T)\|_\infty < \gamma_1) \quad (\text{Eq. 6.5.7})$$

$$\text{et } \min(\gamma_4 / \|W_4 T_{W \rightarrow i}\|_\infty < \gamma_4) \quad (\text{Eq. 6.5.8})$$

Les simulations sont faites avec le premier mode souple uniquement.

L'analyse des résultats peut se résumer à la lecture du Tableau 6-IV, de la Figure 6.9, et de la Figure 6.10 :

- La contrainte d'incidence est bien respectée puisqu'elle ne dépasse pas 90% de la spécification (Tableau 6-IV et Figure 6.10) ;
- le 1^{er} mode est très bien positionné en phase malgré l'incertitude sur la fréquence propre (Figure 6.9) ;
- le second mode ne serait pas du tout amorti ; l'ajout de ce second mode entraînerait la perte de la stabilité, ce qu'on peut vérifier sur la Figure 6.11 ;
- la marge de retard n'est pas respectée pour un certain nombre de cas mais elle n'est pas vraiment représentative car les spécifications des hautes fréquences ne sont pas encore prises en compte.

cas	Incidence max ($\times i_{\max}$)	ΔG_{BF} ($\times \Delta G_{BF \min}$)	ΔG_{HF} ($\times \Delta G_{HF \min}$)	$\Delta \tau$ ($\times T_e$)
1	0,88	3,38	7,74	0,73
2	0,88	3,38	6,42	0,57
3	0,88	3,38	6,13	0,43
4	0,83	2,31	7,63	0,90
5	0,83	2,31	6,60	0,71
6	0,83	2,31	6,20	0,54
7	0,78	1,29	7,90	1,09
8	0,78	1,29	6,81	0,85
9	0,78	1,29	6,44	0,64

Tableau 6-IV Performance (étape 2)

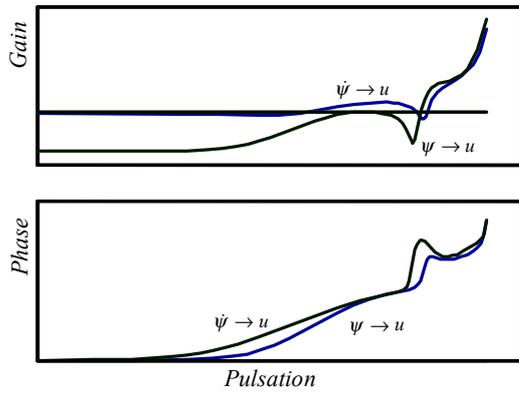


Diagramme de Bode du correcteur

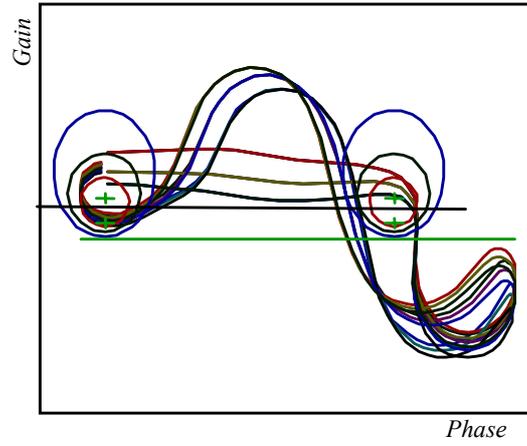
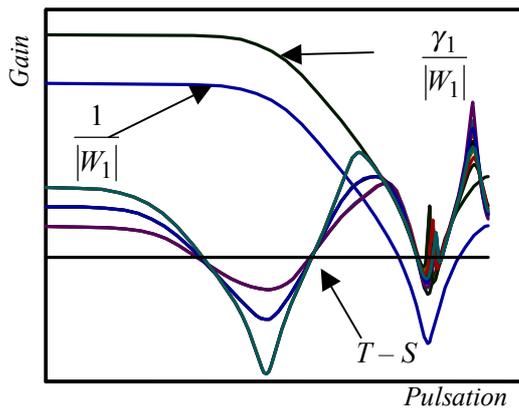
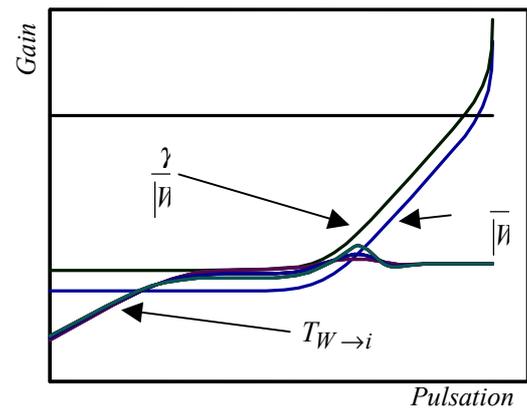


Diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée



Gabarit de positivité



Gabarit sur l'entrée de vent et transfert $W \rightarrow i$

Figure 6.9 Résultats fréquentiels – étape 2

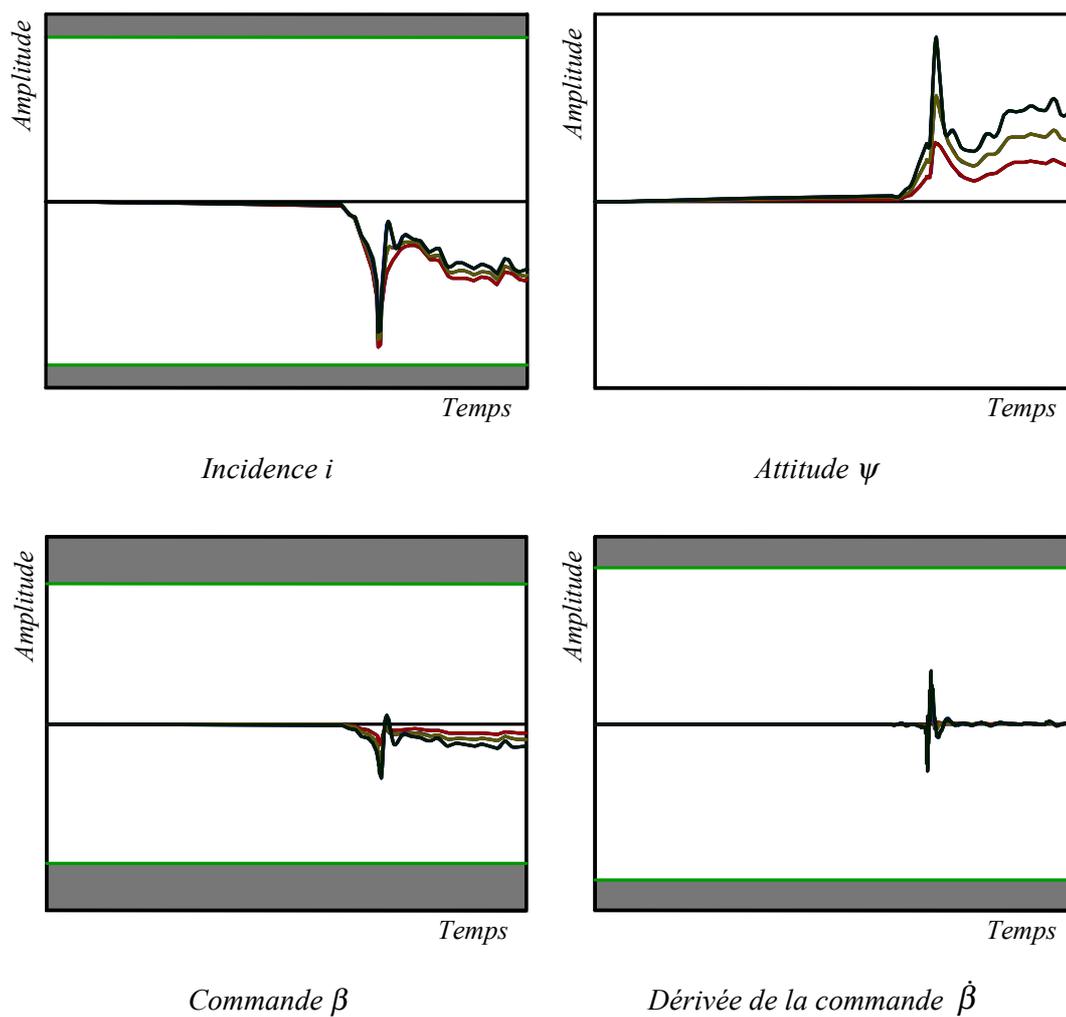


Figure 6.10 Résultats temporels – étape 2

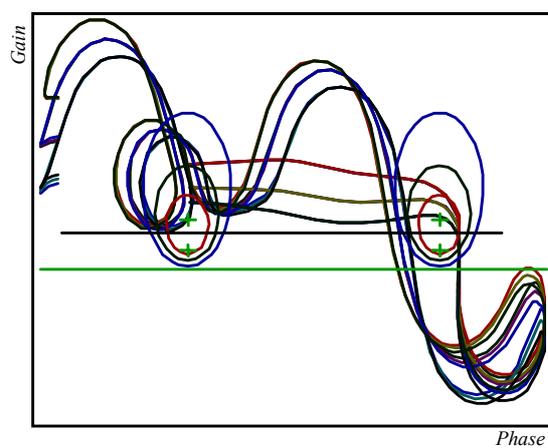


Figure 6.11 Diagramme de Black avec les modes souples – étape 2.

6.5.2. Roll off

Pour éviter que le second mode ne déstabilise la boucle, le cahier des charges préconise de l'atténuer ; de plus cette atténuation permet de commander les autres modes flexibles non modélisés ici. Cette atténuation des hautes fréquences permet aussi de limiter l'effet des bruits qui entachent les mesures. Cette spécification se fait avec un filtre de roll-off W_2 :

$$W_2(z) = \frac{15,010z^3 - 28,654z^2 + 18,163z - 3.8217}{z^3 - 0,3368z^2 + 0.0348z - 0,011} \quad (\text{Eq. 6.5.9})$$

Les critères optimisés sont les suivants :

$$\min (\gamma_1 / \| W_1 (S - T) \|_\infty < \gamma_1) \quad (\text{Eq. 6.5.10})$$

$$\min \left(\gamma_2 / \left\| \begin{array}{cc} W_4 T_{W \rightarrow i} & T_{\beta \rightarrow i} \\ W_2 W_4 T_{W \rightarrow u} & W_2 T_{\beta \rightarrow u} \end{array} \right\|_\infty < \gamma_2 \right) \quad (\text{Eq. 6.5.11})$$

On peut noter que les termes de couplage qui apparaissent ici sont relativement faibles et ne pénalisent pas la synthèse. Le premier transfert est obtenu en utilisant l'entrée ① et la sortie ③ du schéma de la Figure 6.3. Le second utilise les entrées ③ et ② et les sorties ⑥ et ②.

Les réponses fréquentielles qui suivent (Figure 6.12) ont été tracées avec les modes souples pour vérifier que la synthèse effectuée sans les modes souples fournir un roll-off suffisant.

Le Tableau 6-V récapitule numériquement les performances fréquentielles ainsi que la performance d'incidence.

Remarques :

- L'ajout de ce critère nous fait perdre la performance temporelle de l'incidence, mais ce n'est pas critique (97% dans le pire des cas).
- La perte de performance est par contre plus sensible sur la marge de gain conditionnelle HF (82%).

La synthèse du correcteur se fait à partir de compromis entre performances, stabilité et robustesse, on a donc vu dans notre démarche que l'atténuation du second mode se fait au détriment des autres objectifs de performance. Le réglage proposé dans ce paragraphe correspond à notre sens au meilleur compromis atteignable de manière systématique ; c'est donc celui-ci qui est conservé.

Les performances demandées pour la commande et sa dérivée ne prennent tout leur sens qu'en présence de bruit. L'objectif d'atténuation du second mode est corrélé à cette contrainte donc seule la dernière synthèse permet de la satisfaire.

cas	Incidence max ($\times i_{\max}$)	ΔG_{BF} ($\times \Delta G_{BF \min}$)	ΔG_{HF} ($\times \Delta G_{HF \min}$)	$\Delta \tau$ ($\times T_e$)
1	0,97	3,66	0,82	3,18
2	0,97	3,66	0,82	1,92
3	0,97	3,66	0,82	1,12
4	0,99	2,26	1,16	3,18
5	0,99	2,26	1,16	1,95
6	0,99	2,26	1,16	1,12
7	1,01	1,03	1,53	3,22
8	1,01	1,03	1,53	1,95
9	1,01	1,03	1,53	1,12

Tableau 6-V Performance (étape 3)

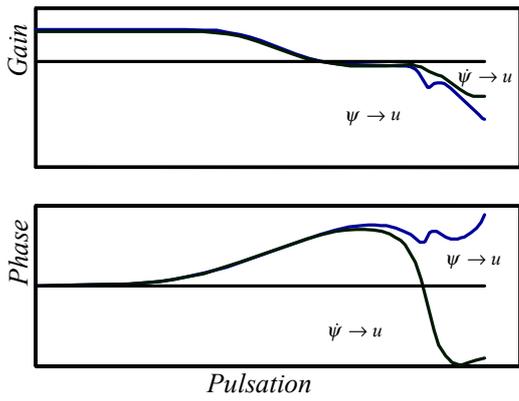
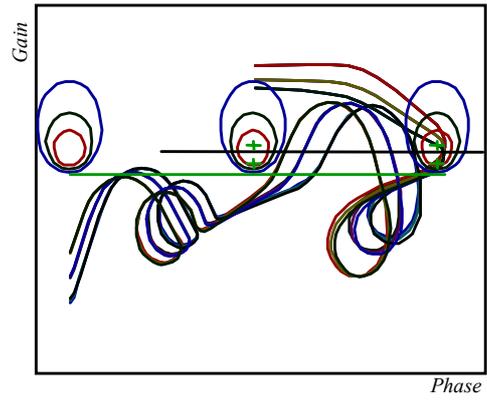
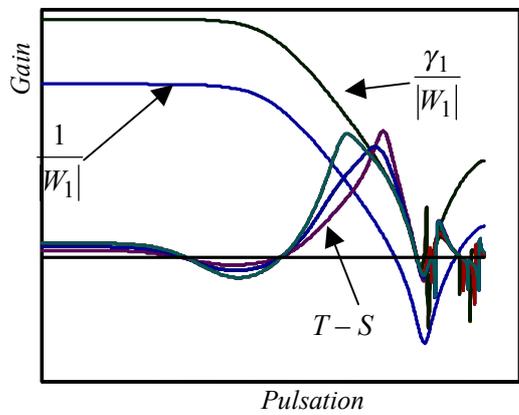


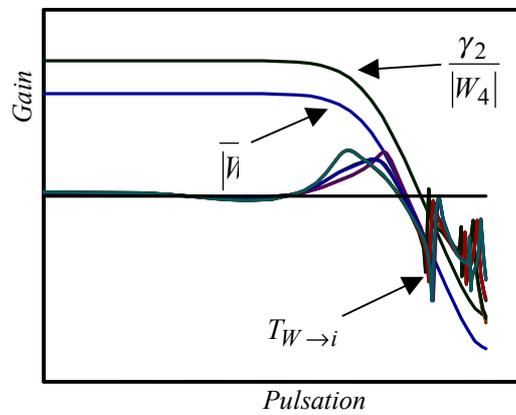
Diagramme de Bode du correcteur



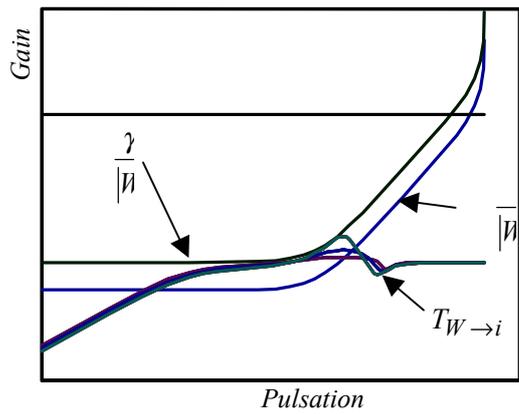
Black de la boucle ouverte corrigée



Gabarit de positivité



Gabarit de Rol-off



Gabarit sur l'entrée de vent W_4 et transfert $W \rightarrow i$

Figure 6.12 Résultats fréquentiels – étape 3

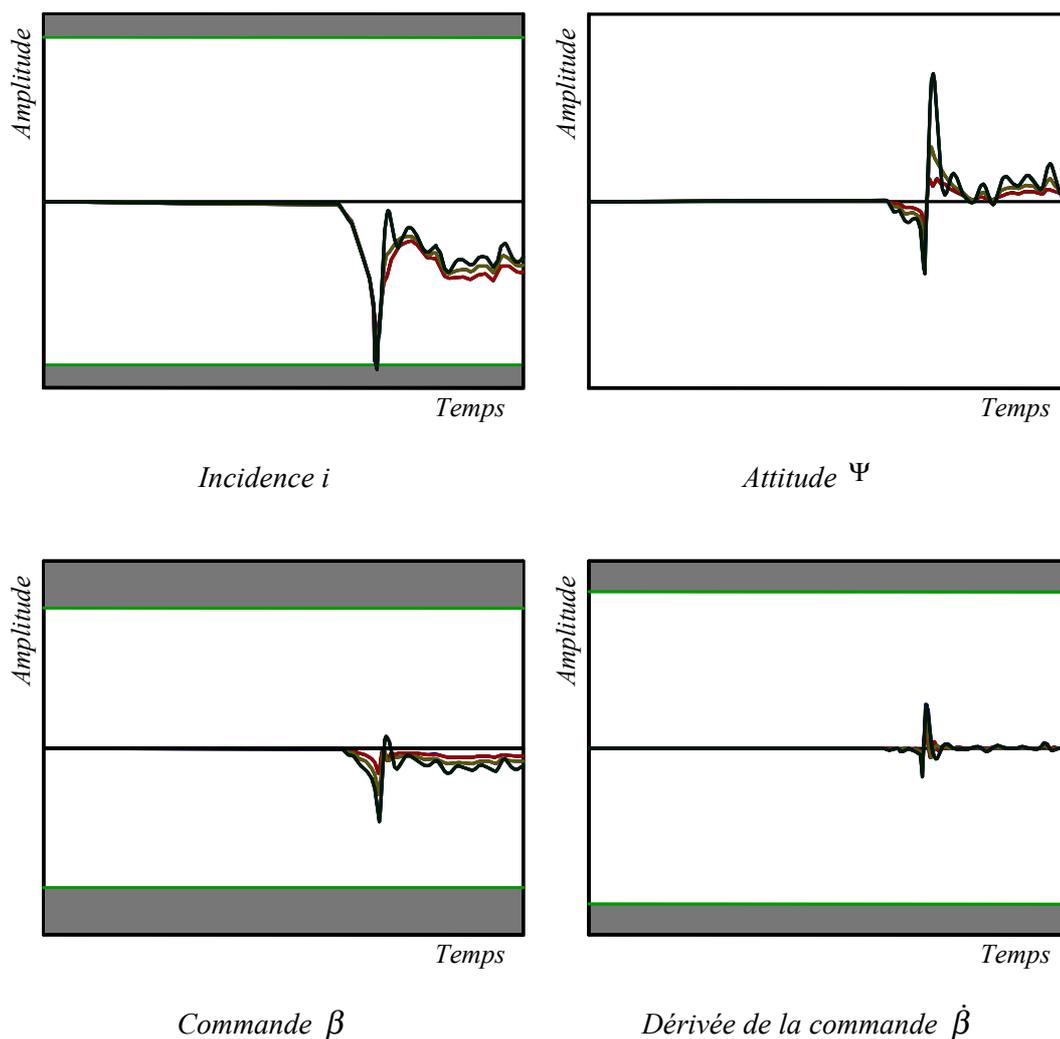


Figure 6.13 Résultats temporels – étape 3

Les figures qui suivent représentent les simulations temporelles avec des mesures bruitées (Figure 6.14).

L'ajout des bruits de mesures n'entraînent pas de changement sur la performance d'incidence. Par contre on remarque qu'ils ont une influence sur la commande et sa dérivée : l'effet de la contrainte de roll-off permet de satisfaire les spécifications. En ce qui concerne la consommation, seules les courbes bruitées ont un sens et on remarque que la contrainte est légèrement dépassée.

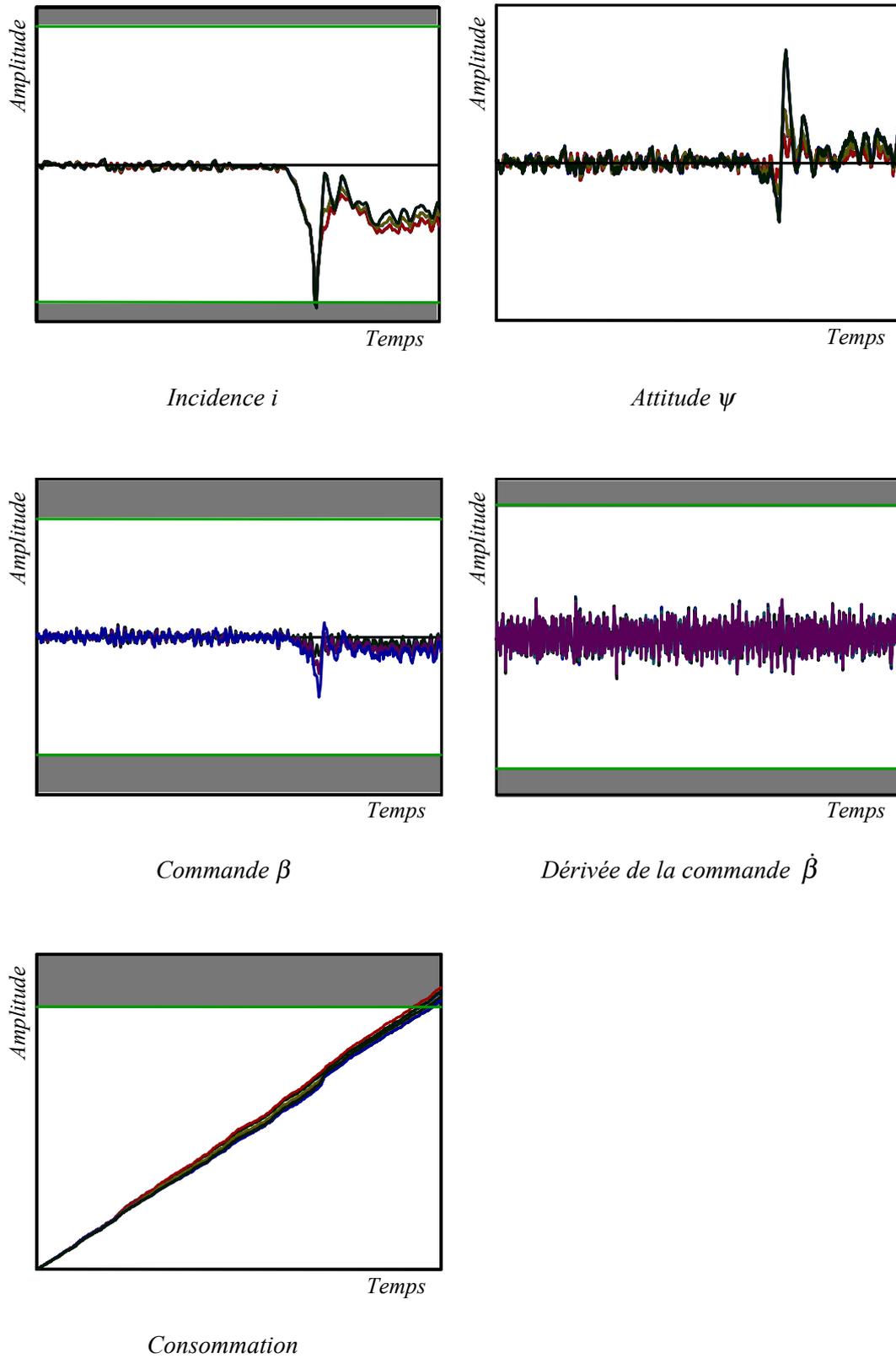


Figure 6.14 Résultats temporels – étape 3 bruitée

6.6. Le correcteur et sa réduction *a posteriori*

Le correcteur final obtenu est d'ordre 15 ; il est connu que les correcteurs synthétisés à partir d'optimisation H_∞ peuvent être réduits sans perte de performance [Val98], c'est pourquoi nous avons voulu voir à titre indicatif comment se comportent les réductions du correcteur trouvé précédemment.

La méthode utilisée est une méthode classique de réduction modale par agrégation [SMB79], qui consiste principalement à retirer les modes les moins importants, au sens d'un coefficient énergétique. Le critère de choix se limite à ne tolérer aucune détérioration des résultats. Le Tableau 6-VI récapitule les modes du correcteur et les valeurs propres qui peuvent être éliminées sont grisées et en gras.

Le résultat est visible sur la Figure 6.15 qui montre que la réduction n'a pas altéré la réponse fréquentielle du correcteur. Les simulations temporelles représentés de la Figure 6.16 sont tout aussi satisfaisantes. On remarque aussi que les diagrammes de Black ne sont pas altérés par la réduction.

Une réduction plus importante entraîne par contre des dégradations de l'atténuation du second mode et de la marge de retard.

Cette réduction à l'ordre 7 garde cependant un caractère informatif car les synthèses sont faites en vue d'une interpolation au cours du temps : or une réduction peut rendre impossible cette opération si les correcteurs ne sont pas du même ordre.

Valeur Propre	Module	Amort.	Puls.	coef. énergie
$6.28e-1+5.12e-1i$	$8.10e-1$	$2.94e-1$	$1.15e-1$	$6.30e-2$
$6.28e-1-5.12e-1i$	$8.10e-1$	$2.94e-1$	$1.15e-1$	$6.30e-2$
1.01	$1.01e+0$	-1.00	$1.46e-3$	$-1.2e+2$
$9.93e-1$	$9.93e-1$	1.00	$1.04e-3$	$1.00e+0$
$8.76e-1$	$8.76e-1$	1.00	$2.11e-2$	$1.95e-3$
$3.56e-1+4.87e-1i$	$6.04e-1$	$4.73e-1$	$1.71e-1$	$1.22e-2$
$3.56e-1-4.87e-1i$	$6.04e-1$	$4.73e-1$	$1.71e-1$	$1.22e-2$
$-2.82e-1+1.86e-1i$	$3.38e-1$	$3.89e-1$	$4.46e-1$	$1.70e-5$
$-2.82e-1-1.86e-1i$	$3.38e-1$	$3.89e-1$	$4.46e-1$	$1.70e-5$
$3.46e-1$	$3.46e-1$	1.00	$1.70e-1$	$1.36e-3$
$4.11e-2+1.12e-1i$	$1.19e-1$	$8.67e-1$	$3.93e-1$	$1.37e-5$
$4.11e-2-1.12e-1i$	$1.19e-1$	$8.67e-1$	$3.93e-1$	$1.37e-5$
$-5.17e-2+1.67e-2i$	$5.44e-2$	$7.17e-1$	$6.52e-1$	$2.82e-8$
$-5.17e-2-1.67e-2i$	$5.44e-2$	$7.17e-1$	$6.52e-1$	$2.82e-8$
$2.60e-2$	$2.60e-2$	1.00	$5.86e-1$	$8.10e-10$

Tableau 6-VI. Décomposition modale pour l'agrégation

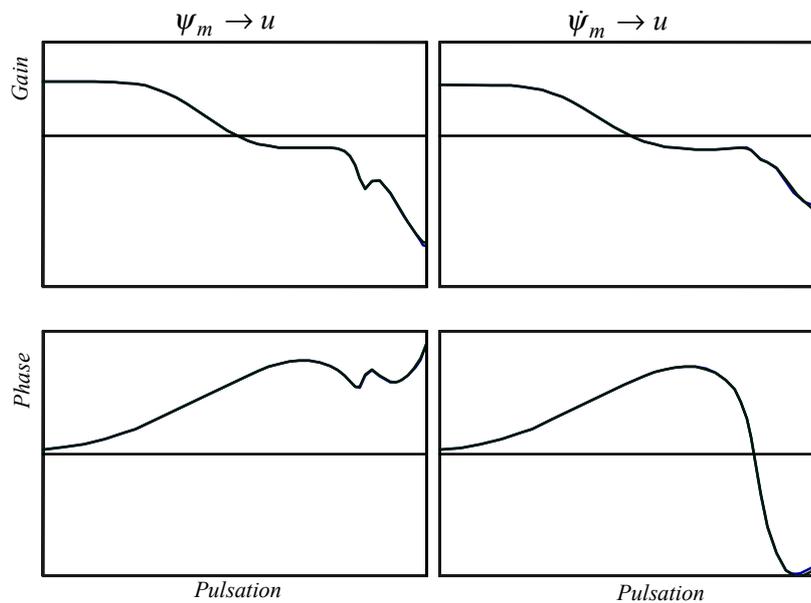


Figure 6.15. Comparaison des diagrammes de Bode du correcteur initial et du correcteur réduit

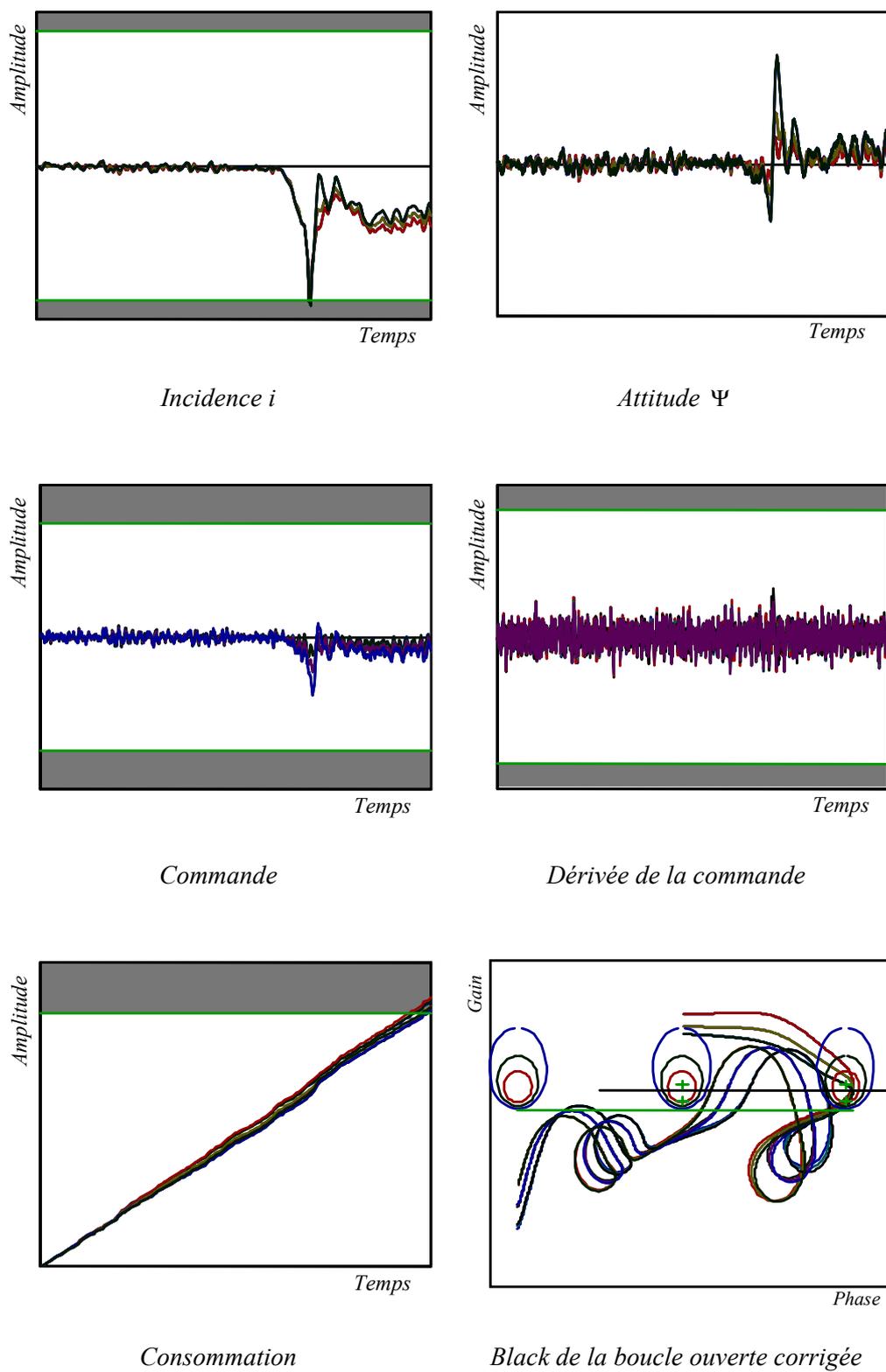


Figure 6.16 Résultats temporels – correcteur réduit

6.7. Conclusion

Nous venons de présenter une mise en œuvre des méthodes de synthèse multiobjectifs par optimisation LMI présentées au chapitre 3, avec des critères fréquentiels qui tentent de traduire le cahier des charges. Celui-ci étant redondant sur plusieurs points, seuls trois critères sont effectivement considérés : le premier règle principalement les performances temporelles du lanceur tandis que les suivants s'intéressent au réglage en phase du premier mode souple et à l'atténuation des modes souples plus hauts en fréquence.

Les points clés de la démarche sont les suivants :

- Nous avons suivi une méthode constructive par étapes successives pour respecter au mieux les objectifs
- Les différents objectifs ont pu être découplés de sorte que l'on réduit le conservatisme induit par l'utilisation de différents critères.

Les résultats obtenus ne sont valables en toute rigueur que sur le point de vol de synthèse, les simulations également ; il s'agit donc maintenant de généraliser cette synthèse au système non stationnaire correspondant à l'ensemble de la phase de vol. C'est l'objet du chapitre suivant qui reprend cette méthode de synthèse pour un certain nombre de points de vol en vue d'une interpolation des correcteurs.

Une version de ces résultats a été présentée au Comité Scientifique du pôle PIROLA le 14 septembre 2000 et en juillet 2000 lors de la conférence *IEEE Mediterranean Conference on Control on Automation* [CD00b].

Chapitre 7

Pilotage d'un lanceur : interpolation de correcteurs

7.1. Cadre d'application.....	219
7.2. Méthodologie.....	219
7.3. Les cinq étapes de synthèse par séquençement de gains.....	221
7.4. Les résultats	232
7.5. Conclusion	239

7.1. Cadre d'application

En considérant les performances requises et l'évolution du système à commander, le pilotage d'un lanceur semble difficilement réalisable avec un correcteur LTI pour l'ensemble du vol. En effet, même en se limitant à la phase atmosphérique, on comprend intuitivement qu'un certain nombre de paramètres physiques du lanceur évoluent le long de la trajectoire de l'engin : la masse du lanceur, la gravité, la température... changent ; cependant ces changements de paramètres peuvent être considérés comme lents par rapport aux vitesses de variation des grandeurs que l'on cherche à commander¹. Ainsi la modélisation du chapitre 5 reste valable à tout instant mais en considérant les paramètres physiques comme variables le long de la trajectoire ; on se trouve donc dans le contexte des systèmes LPV.

D'autre part, la trajectoire que doit suivre le lanceur est parfaitement connue à l'avance, et l'évolution des paramètres l'est aussi, puisque ceux-ci dépendent explicitement de la trajectoire. On se trouve ainsi dans un cadre très favorable aux techniques de séquençement de gains décrites au chapitre 4 : un système linéaire à paramètres variant lentement dans le temps et dont la trajectoire est déterminée à l'avance. Il est donc possible de mettre en œuvre la méthodologie proposée.

Les travaux de pilotage non stationnaire présentés dans ce chapitre s'inscrivent dans les tâches du groupe de travail PIROLA afin de comparer les apports des nouvelles méthodes par rapport à celles aujourd'hui utilisées.

7.2. Méthodologie

Les méthodes mises en œuvre sur les lanceurs relèvent actuellement de méthodes LQG non stationnaires présentées dans [MS98] ; la mise en place de synthèses H_∞ est en cours de réalisation pour les vols futurs.

¹ On a vu qu'une motivation principale du « gain scheduling » est que des variations lentes des paramètres garantissent un comportement similaire du système non linéaire et de ses linéarisés tangents (voir chapitre 4 à ce sujet).

Le but de ce chapitre n'est pas de démontrer qu'une méthode est meilleure qu'une autre, mais plutôt de présenter une méthodologie constructive qui permet de systématiser un savoir faire souvent intuitif.

Le cahier des charges de la commande non stationnaire est similaire à celui présenté pour le cas stationnaire au chapitre 5.

Contraintes fréquentielles :

- Basses fréquences : marges de stabilité sur le mode rigide

marge de gain BF : ΔG_{BF} dB

marge de gain HF : ΔG_{HF} dB

marge de retard au moins égale à une période d'échantillonnage

- Moyennes fréquences : premier mode de flexion

Sa proximité de la bande passante autorise de régler celui-ci « en phase », c'est-à-dire de placer le pic de résonance entre -90° et 90° dans le plan de Black. Il est toutefois possible de le considérer comme les autres modes décrits dans le point suivant.

La marge de retard doit être supérieure à une période d'échantillonnage

- Hautes fréquences : autres mode de flexion

Les autres modes doivent être atténués en dessous de X_{HF} dB ($X_{HF} < 0$ dB).

Spécifications temporelles :

- l'incidence maximale doit rester inférieure à i_{\max} degrés,
- le braquage de tuyère (β) est limité au maximum à β_{\max} degrés,
- la vitesse de braquage est limitée au maximum à $\dot{\beta}_{\max}$ degrés par secondes,
- la consommation ne doit pas excéder C_{\max} .

7.3. Les cinq étapes de synthèse par séquençement de gains

On reprend ici la méthode de séquençement de gains point par point en utilisant les arguments développés au chapitre 4 pour l'interpolation des différents éléments. Comme dans toutes les méthodes de séquençement, certains choix n'ont de justification que dans la connaissance approfondie du système physique.

7.3.1. Choix des variables qui traduisent le séquençement à suivre

Dans le schéma de synthèse qui est rappelé Figure 7.1, le modèle sur lequel est fait la synthèse est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 7.3.1})$$

avec les coefficients des matrices A , B , C et D qui varient lentement dans le temps. Le seul paramètre à prendre en compte est donc le temps¹.

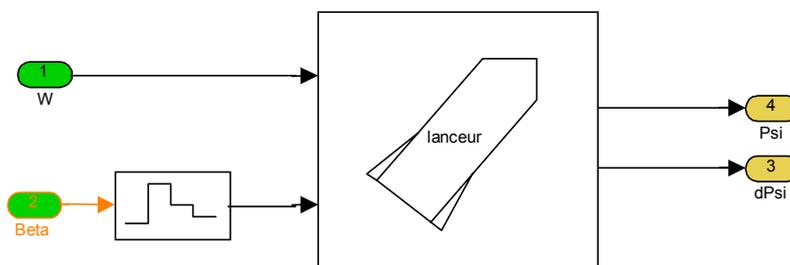


Figure 7.1 Système de synthèse

De part cette structure particulière que l'on retrouve dans la littérature sous le nom de système LTV, on réduit considérablement la taille du système et on évite ainsi de parcourir un espace paramétrique trop grand. La dernière remarque sur cette forme vient de la nature même du paramètre choisi, l'évolution du système ne se fait que dans un seul sens puisque le temps n'est pas réversible.

¹ La dénomination *paramètre* peut paraître déroutante pour qualifier le temps mais il s'agit d'un raccourci pour dire que la seule connaissance de l'instant de simulation (le temps) permet de déterminer l'ensemble des paramètres du système.

7.3.2. Choix des points de la trajectoire

L'étape du choix des points de synthèse sur la trajectoire paramétrique du système est l'étape la plus empirique de la méthode ; il s'agit d'échantillonner les évolutions des paramètres dans le temps. Dans notre cas cette procédure est facilitée par la structure LTV, il suffit de garantir que l'écart entre les courbes réelles et celles reliant les différents points ne soit pas « trop grand ». La Figure 7.2 rend compte de manière caricaturale de ce que peut être un bon choix qui « colle » à la courbe initiale et un mauvais choix qui ne rend pas compte de l'évolution. Mais il faut bien faire attention à gérer le compromis fidélité / nombre de points qui peut rapidement rendre les synthèses impossibles.

Dans le cas de l'évolution des paramètres du lanceur, nous avons limité le choix à 10 points uniformément répartis sur l'ensemble de la phase atmosphérique que nous étudions ; ils seront notés k_i avec i variant de 1 à 10. Ce choix permet de rendre compte de manière fidèle des différentes évolutions paramétriques.

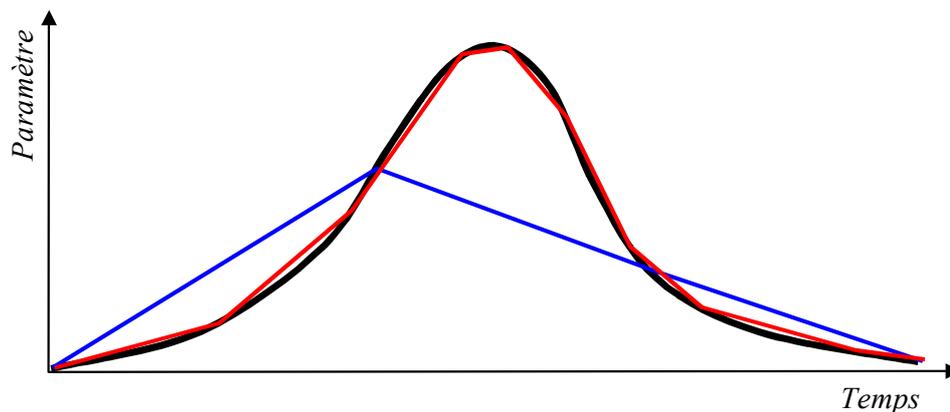


Figure 7.2 Exemples de choix de points

7.3.3. Linéarisation

Lors de la linéarisation d'un système, la difficulté peut se trouver pour certaines non linéarités. Dans le cas du modèle de lanceur que nous avons développé, le système est modélisé sous forme LTV, la linéarisation est donc une opération immédiate et sans difficulté ; le système linéarisé tangent à l'instant π est représenté par le système linéaire invariant dit « gelé » suivant :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(\pi)x(k+1) + B(\pi)u(k+1) \\ y(k) &= C(\pi)x(k) + D(\pi)u(k)\end{aligned}\quad (\text{Eq. 7.3.2})$$

7.3.4. Synthèse d'un correcteur linéaire en chacun de ces points

La synthèse des correcteurs est alors faite selon la méthode décrite au chapitre 6 avec quelques précautions supplémentaires. En effet afin d'assurer une continuité dans l'évolution de la boucle fermée, la même structure de synthèse est utilisée en ne faisant varier que les paramètres des filtres de synthèses.

Ces variations s'expliquent facilement par les évolutions de la structure du modèle au cours de sa progression sur la trajectoire :

- L'évolution des paramètres A_6 (Figure 7.3) et K_1 (Figure 7.4) modifie les performances fréquentielles en terme de marge de gain et les performances temporelles. Ainsi le pire des cas est obtenu lorsque la valeur de K_1 est maximale. L'évolution du gabarit de performance suit sensiblement l'évolution de ces paramètres : la Figure 7.6 montre les gabarits retenus pour les dix points de synthèse choisis.
- L'évolution de la fréquence du premier mode souple (Figure 7.5) change la zone de fréquence qui doit répondre au critère de positivité. Ainsi la fréquence centrale du filtre de positivité évolue avec celle de la fréquence du premier mode souple (Figure 7.6).

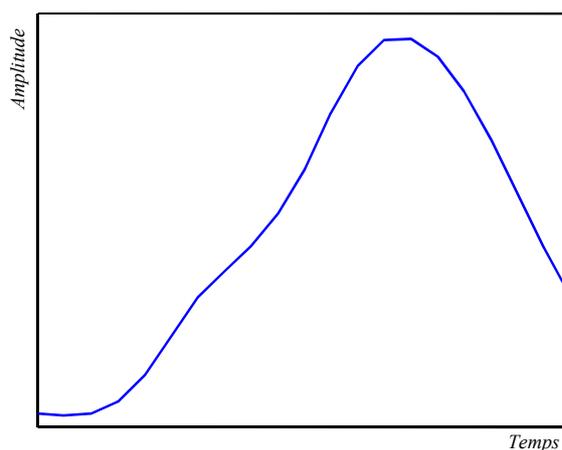


Figure 7.3 Evolution du paramètre A_6

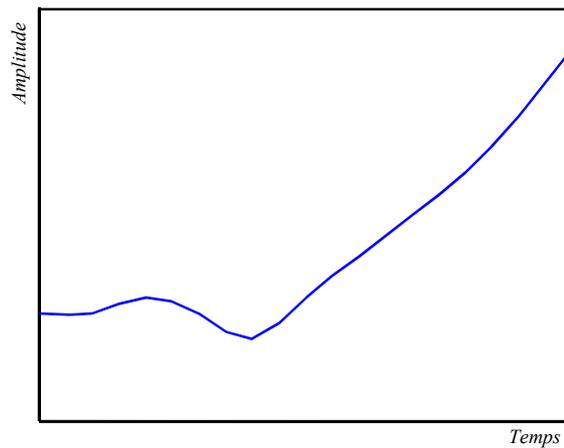


Figure 7.4 Evolution du paramètre K_1

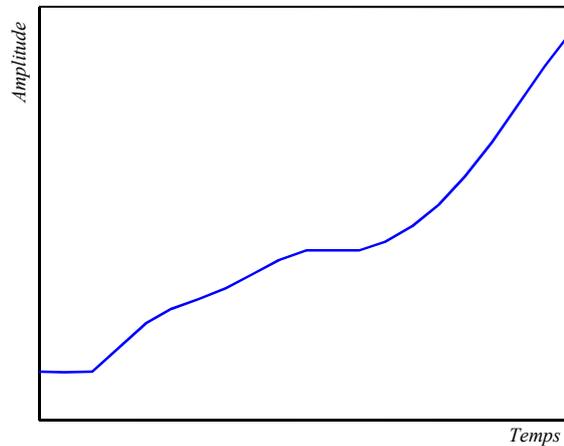


Figure 7.5 Evolution de la fréquence du premier mode souple

On préserve ainsi une certaine continuité tout en suivant l'évolution des paramètres physiques.

La seconde précaution importante qu'il faut prendre intervient lors de la structuration du correcteur pour le mettre sous la forme d'un observateur et d'un retour d'état complété par un paramètre de Youla. En effet cette opération va être répétée autant de fois qu'il y aura de points de synthèse (10 fois) et doit respecter elle aussi la continuité de la boucle fermée. Le problème réside dans le choix de l'affectation à la commande et à l'observateur des dynamiques de la boucle fermée. Il est donc nécessaire de systématiser cette étape.

Or il a été dit dans le chapitre 3, à propos de la structuration, que cette étape ne pouvait pas être systématique. Cependant lorsqu'il s'agit d'un système qui

évolue continûment dans le temps, on peut en dégager les grandes lignes et en déduire des choix possibles comme le montre la Figure 7.7.

Les deux étapes de la méthode consiste donc à :

1. identifier par continuité les évolutions des valeurs propres ;
2. faire un choix parmi la combinatoire qui garantisse la continuité de l'observateur et de la commande.

Remarques :

- On notera que dans la pratique, c'est bien souvent le conditionnement numérique qui dicte le choix des affectations. Dans le cas présent, une solution à la fois systématique et bien conditionnée numériquement consiste à retenir les dynamiques les plus rapides dans l'observateur avec en outre une paire de valeurs propres complexes mal amorties et non commandables.
- Les deux cas où la méthode garantit la stabilité sont l'interpolation du retour d'état et de l'observateur avec paramètre de Youla fixe et l'interpolation linéaire de l'ensemble des éléments. Nous verrons par la suite qu'il est possible de proposer une interpolation linéaire, c'est donc cette seconde option qui a été choisie car elle permet de limiter la quantité de calculs tout en donnant plus de souplesse aux différentes synthèses.
- Les paramètres de Youla sont quant à eux interpolés de manière linéaire entre les points de synthèse sur la base des retards utilisée pour les synthèses stationnaires.

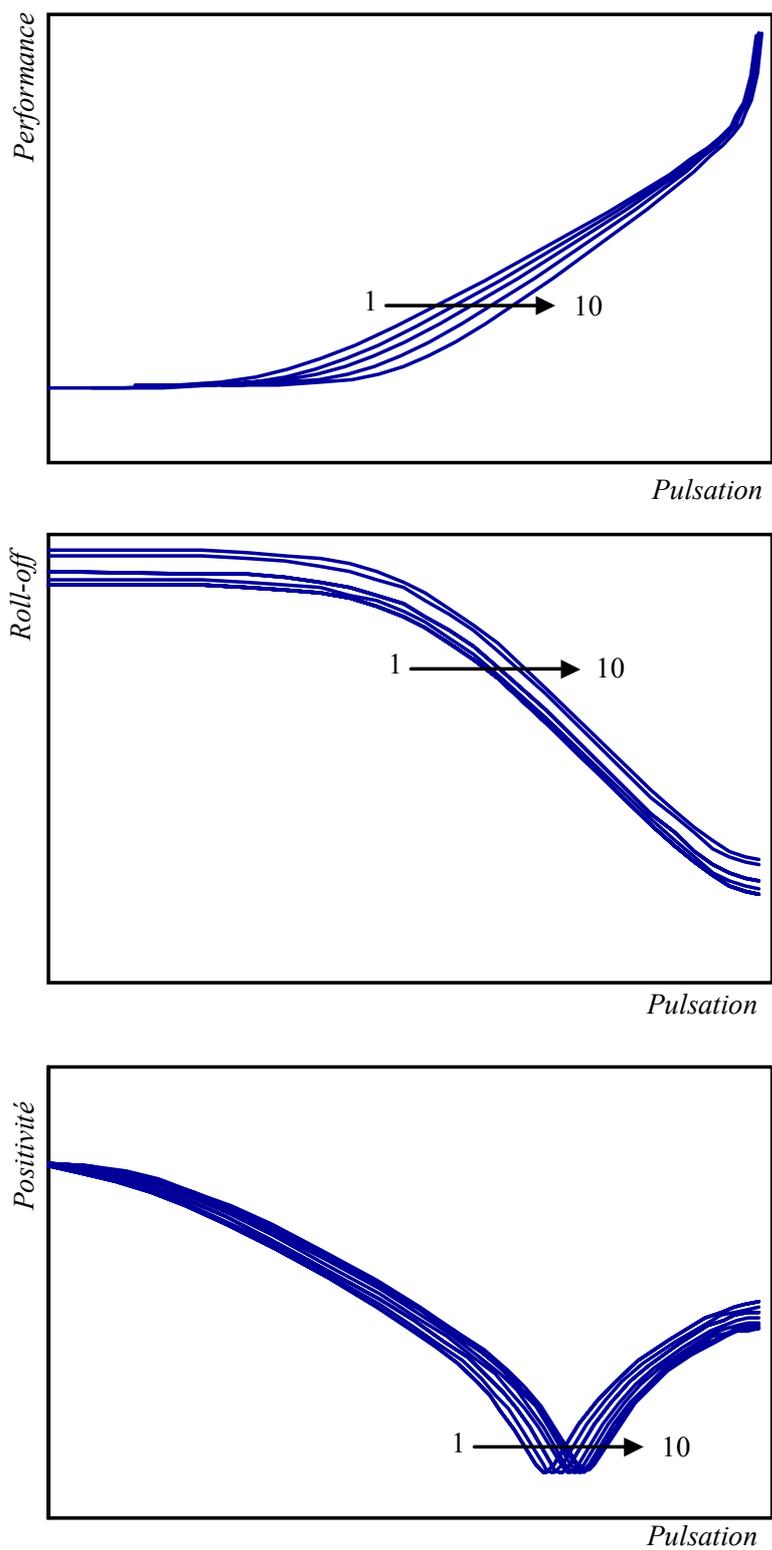


Figure 7.6 Evolution des gabarits de synthèse

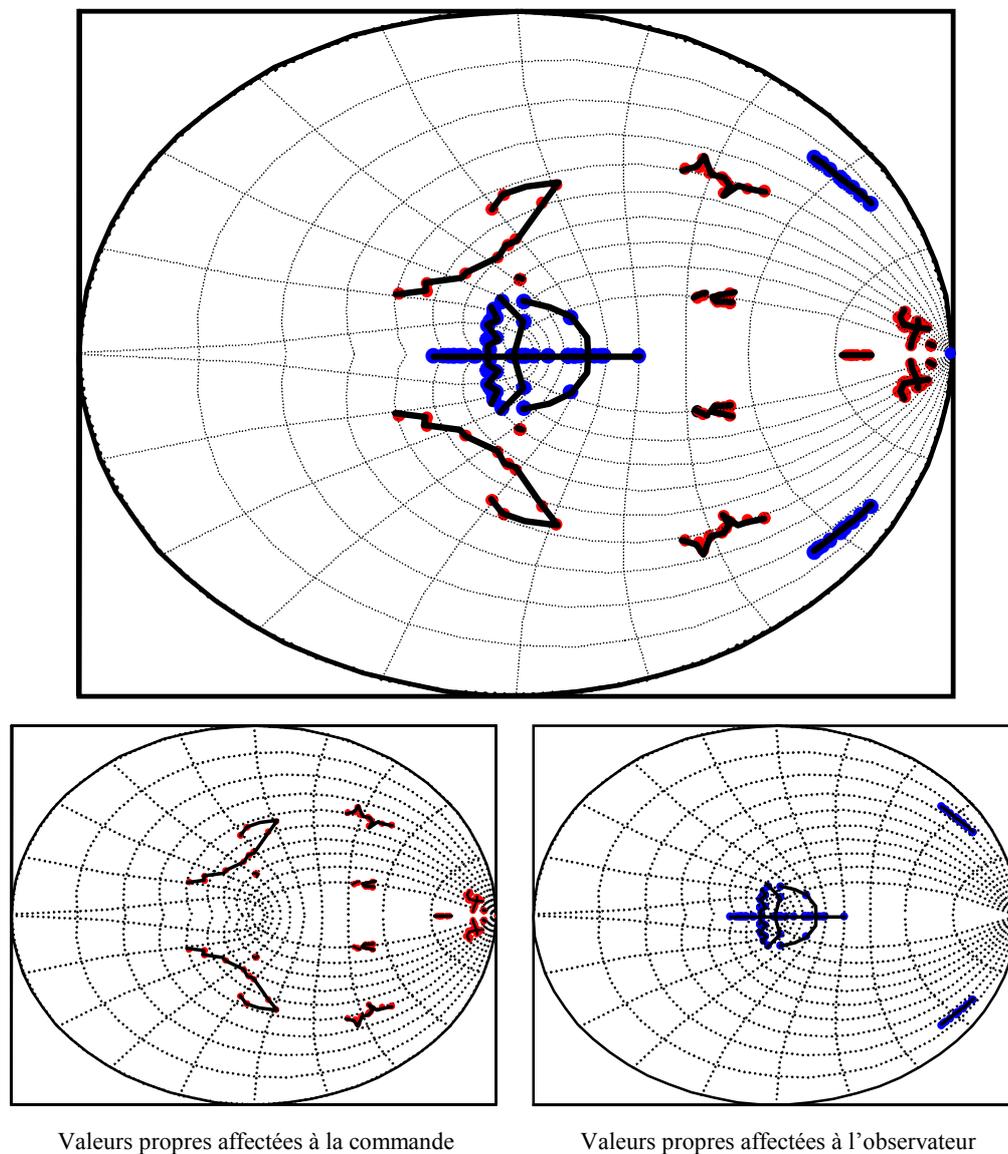


Figure 7.7 Evolution et affectation des valeurs propres de la boucle fermée

7.3.5. Interpolation de l'ensemble des correcteurs synthétisés

L'ensemble des correcteurs synthétisés est maintenant mis sous la forme voulue, c'est-à-dire observateur, retour d'état et paramètre de Youla, prêts pour la mise en œuvre d'une interpolation des différents gains. Nous utilisons la méthode présentée au paragraphe 4.4, en effectuant de façon itérative l'interpolation de deux correcteurs entre deux points de synthèse consécutifs (théorème 4.2 et 4.3).

Les cas des observateurs et des retours d'état sont traités de la même manière, on se limitera donc à la présentation du cas du retour d'état.

Il s'agit ici de définir le gain de retour d'état non stationnaire suivant :

$$K(k) = \begin{cases} K_1 & \text{si } a \leq k \leq b \\ \left(\frac{c-k}{c-b} K_1 X_1 + \frac{k-b}{c-b} K_2 X_2 \right) \left(\frac{c-k}{c-b} X_1 + \frac{k-b}{c-b} X_2 \right)^{-1} & b \leq k \leq c \\ K_2 & c \leq k \leq d \end{cases} \quad (\text{Eq. 7.3.3})$$

Après une description générale de la méthodologie pratique de calcul des fonctions d'interpolation pour deux points consécutifs, on montrera comment dans le cas du lanceur, on peut utiliser une interpolation linéaire.

7.3.5.1. Méthodologie générale

Les étapes nécessaires pour l'interpolation entre deux points k_i et k_{i+1} pour préciser l'approche pratique sont les suivantes :

1. définir les intervalles en jeux et donc les points a, b, c et d ;
2. poser le problème d'optimisation qui permet de définir les matrices X_i et X_{i+1} solutions des LMI relatives aux points k_i et k_{i+1} ;
3. simplifier le problème ainsi posé en limitant le nombre d'instantes considérés dans les intervalles $[a \ c]$ et $[b \ d]$;
4. valider les solutions du problème simplifié sur tout l'intervalle $[a \ d]$.

Voici donc comment les étapes 1 et 2 peuvent se dérouler ; les points 3 et 4 ne posent pas de difficultés particulières, ils ne seront donc pas commentés plus avant. Les choix qui sont faits ici ont pour but principal de simplifier l'approche et d'aboutir à des résultats satisfaisants tout en limitant la quantité de calculs.

1. Choix des intervalles

La Figure 7.8 présente le problème d'interpolation entre les points k_i et k_{i+1} , pour rappeler les notations introduites au chapitre 4.

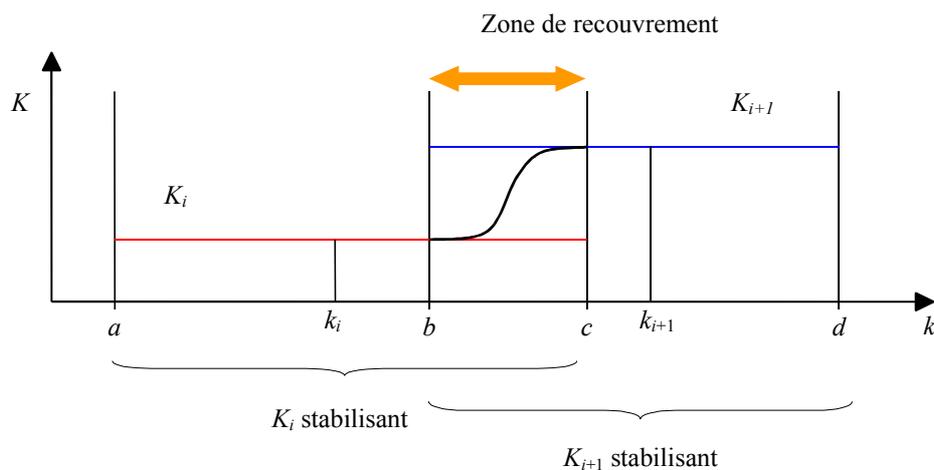


Figure 7.8 Evolution du correcteur dans le temps

Un choix simple d'intervalles consiste à conduire l'interpolation en continu sur l'intervalle entier $[k_i \quad k_{i+1}]$; ce choix se traduit par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 a &= k_{i-1} \\
 b &= k_i \\
 c &= k_{i+1} \\
 d &= k_{i+2}
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 7.3.4}$$

où les k_i sont les points choisis sur la trajectoire pour lesquels la synthèse est faite et entre lesquels les correcteurs sont interpolés.

Dans le cas des extrémités le traitement est particulier :

- le premier point correspond au premier point de la trajectoire :

$$\begin{aligned}
 a &= k_1 \\
 b &= k_1 \\
 c &= k_2 \\
 d &= k_3
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 7.3.5}$$

- le dernier point correspond au dernier point de la trajectoire :

$$\begin{aligned}
a &= k_8 \\
b &= k_9 \\
c &= k_{10} \\
d &= k_{10}
\end{aligned}
\tag{Eq. 7.3.6}$$

2. Problème d'optimisation

On considère que le problème est résolu jusqu'à l'instant k_i et on cherche donc à trouver une fonction d'interpolation pour passer au retour d'état K_{i+1} de l'instant k_{i+1} . De plus pour limiter la taille du problème LMI, on ne considère que quelques instants d'échantillonnage sur l'intervalle considéré (les autres instants seront validés a posteriori).

Du point de vue algorithmique, si on considère que l'on connaît une solution à l'indice i , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -X_i & (A(k) + B(k)K_i)X_i \\ X_i(A(k) + B(k)K_i)^T & -X_i \end{pmatrix} < -\gamma I
\tag{Eq. 7.3.7}$$

pour $k \in \{k_{i-1}, k_i, k_{i+1}\}$

il reste à résoudre le problème LMI de faisabilité suivant :

$$\begin{pmatrix} -X_{i+1} & (A(k) + B(k)K_{i+1})X_{i+1} \\ X_{i+1}(A(k) + B(k)K_{i+1})^T & -X_{i+1} \end{pmatrix} < -\gamma I
\tag{Eq. 7.3.8}$$

pour $k \in \{k_i, k_{i+1}, k_{i+2}\}$

$$X_i - X_{i+1} < (k_{i+1} - k_i)\gamma I
\tag{Eq. 7.3.9}$$

Les variables d'optimisation sont X_{i+1} et γ (puisque X_i est connue depuis l'étape précédente).

Il faut ensuite vérifier la validité de la solution sur tout l'intervalle $[k_{i-1}, k_{i+1}]$:

$$\forall k = k_{i-1}, \dots, k_{i+1},$$

$$\begin{pmatrix} -X_i & (A(k) + B(k)K_i)X_i \\ X_i(A(k) + B(k)K_i)^T & -X_i \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 7.3.10})$$

$$\forall k = k_i, \dots, k_{i+2},$$

$$\begin{pmatrix} -X_{i+1} & (A(k) + B(k)K_{i+1})X_{i+1} \\ X_{i+1}(A(k) + B(k)K_{i+1})^T & -X_{i+1} \end{pmatrix} < -\gamma I \quad (\text{Eq. 7.3.11})$$

Dans le cas où la solution n'est pas valide, il suffit d'ajouter des instants d'échantillonnage intermédiaires pour faire le calcul.

7.3.5.2. Interpolation linéaire

Dans le cas de l'interpolation linéaire, il suffit de forcer l'égalité des fonctions de Lyapunov dans les contraintes du problème de faisabilité précédent :

$$X_i = X_{i+1} \quad (\text{Eq. 7.3.12})$$

Il faut alors résoudre simultanément les LMI (7.3.7) pour tous les instants k_i sélectionnés, avec la même fonction de Lyapunov.

On garantit alors la décroissance de la fonction de Lyapunov sur l'ensemble de la trajectoire et donc la stabilité quadratique du système non stationnaire.

On peut aussi choisir de résoudre l'interpolation sur chaque intervalle sans prendre en compte les résultats de l'itération précédente, c'est-à-dire en calculant une matrice X_i commune aux instants k_i et k_{i+1} , mais différente à chaque itération. On garantit alors la décroissance par morceaux (sur chaque intervalle) de la fonction de Lyapunov. Cette restriction ne pose pas de problème ici car la trajectoire paramétrique n'est parcourue qu'une seule fois¹ et le nombre de points de changement de paramètre est fini. On peut donc garantir que la fonction énergétique de Lyapunov converge exponentiellement vers 0 à partir d'un certain temps. Par conséquent, la stabilité de la trajectoire suivie est assurée pour l'interpolation considérée.

¹ En effet la trajectoire est définie à l'avance et ne dépend que du temps, on est donc dans un cas favorable pour garantir la stabilité.

C'est cette dernière approche qui a été développée dans la suite afin de garantir une interpolation linéaire, ce qui réduit considérablement la quantité de calcul lors des simulations temporelles.

On rappelle également que les différents paramètres de Youla sont interpolés linéairement sur la base des retards. Ceci ne pose pas de problème car la solution finale s'avère être une interpolation linéaire.

7.4. Les résultats

L'interpolation des gains de retour d'état et d'observation est donc obtenue par des interpolations linéaires entre chaque point de synthèse comme le montrent les figures suivantes : la Figure 7.9 montre l'évolution des différents coefficients de $K_c(k)$, la Figure 7.10 montre l'évolution de la première colonne du gain de l'observateur $K_f(k)$, et la Figure 7.11 la seconde colonne. Les points de synthèses sont matérialisés par des ronds et la trajectoire de chaque coordonnée est indiquée en trait continu. Toutes les courbes sont normalisées par rapport à leur valeur en $k = 0$.

L'analyse des simulations temporelles qui montrent le comportement du correcteur issu des interpolations est scindée en deux paragraphes : on montre d'abord le comportement nominal pour lequel l'interpolation a été faite, puis une analyse de robustesse a posteriori est faite sur l'ensemble des « pires cas » déjà mentionnés dans les chapitres 5 et 6. Il en est de même pour l'analyse de l'ensemble des systèmes linéarisés tangents étudiés dans le plan de Black.

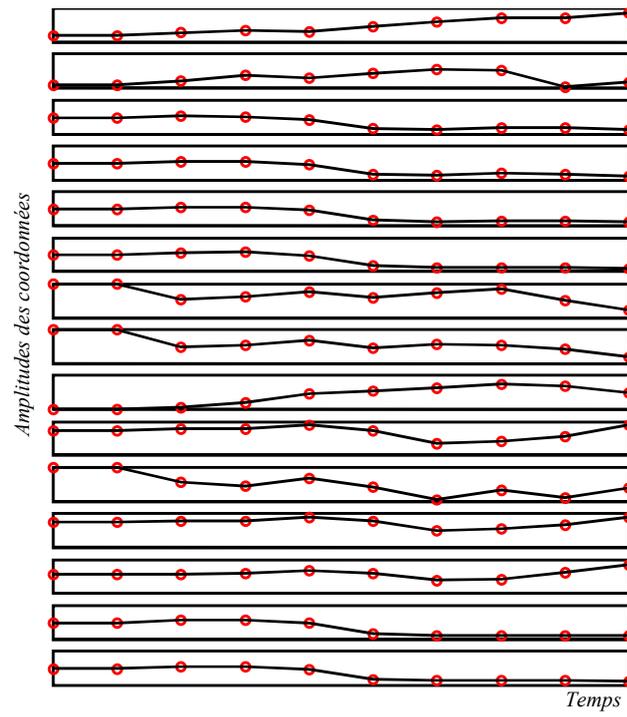


Figure 7.9 Evolution du gain de retour d'état

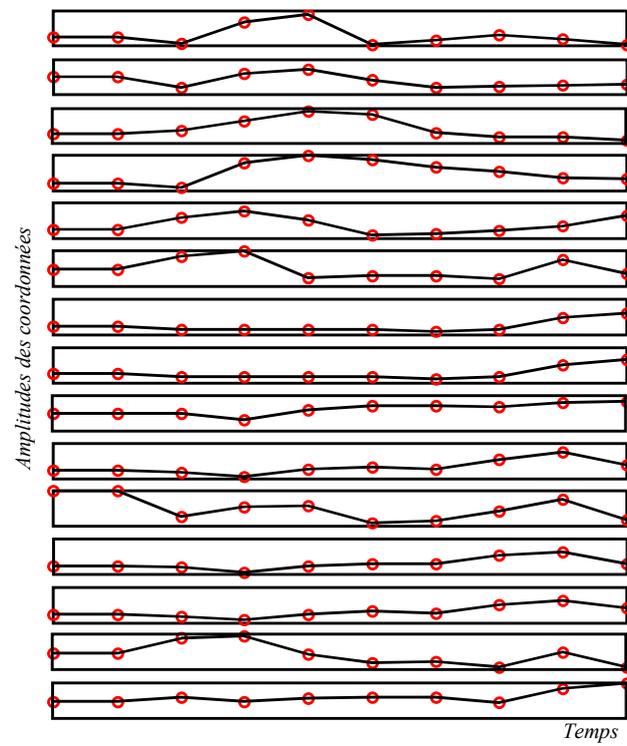


Figure 7.10 Evolution de la 1^{ère} colonne du gain d'observation

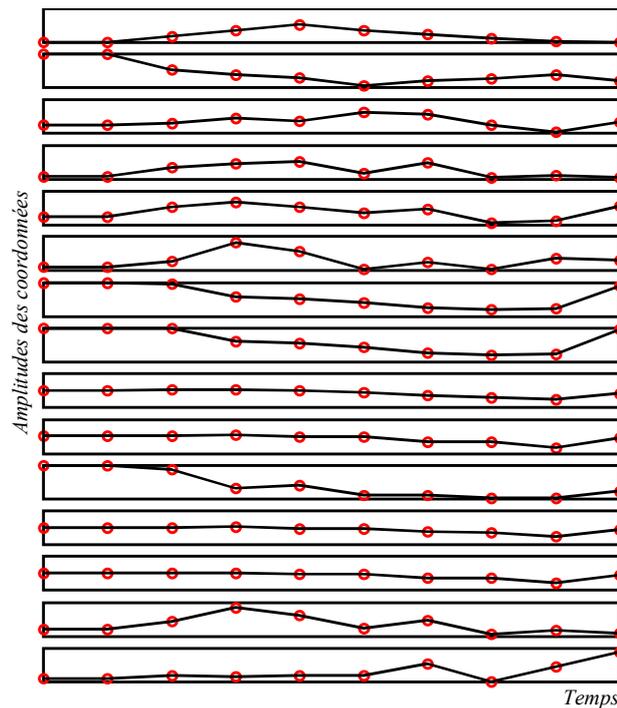


Figure 7.11 Evolution de la 2nde colonne du gain d'observation

7.4.1. Système nominal non stationnaire

L'analyse de l'ensemble des linéarisés tangents en boucle ouverte corrigée de la Figure 7.12 montre bien que les spécifications fréquentielles de marges de gains basse et haute fréquences sont garanties pour l'ensemble des points de fonctionnement tout comme les marges de retard. L'atténuation des modes souples hautes fréquences est dans la plupart des cas satisfaite. Ces résultats sont synthétisés dans le Tableau 7-I.

En ce qui concerne les simulations temporelles prenant en compte les bruits de mesures (Figure 7.13), on retrouve les différentes grandeurs caractéristiques du lanceur. On peut noter les deux indicateurs suivants :

- l'incidence maximale atteint 1,12 fois la spécification ;
- la consommation finale vaut 0,67 fois la spécification.

tandis que β et $\dot{\beta}$ restent très en-deçà des limites autorisées par le cahier des charges.

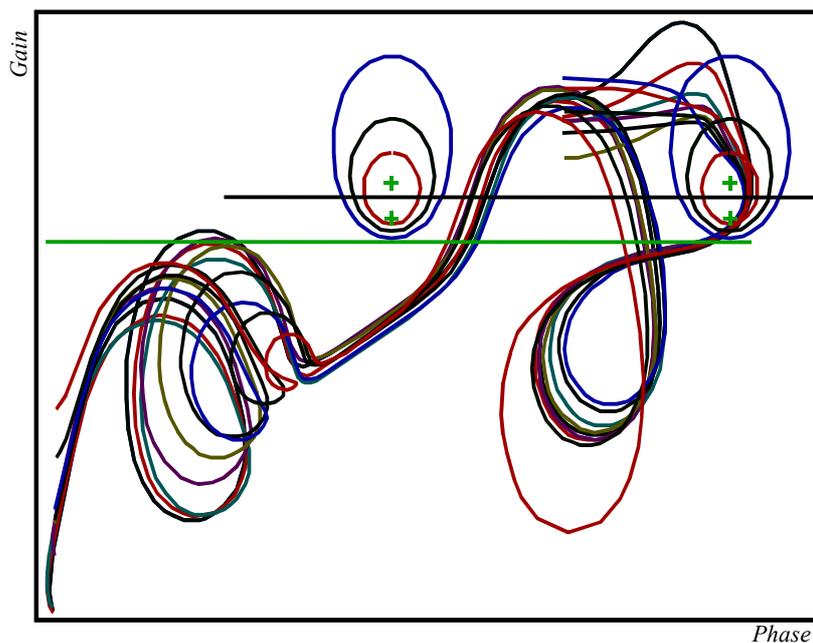


Figure 7.12 Ensemble de linéarisés tangents de la boucle ouverte corrigés

Point de fonctionnement	$\Delta G_{BF} (\times \Delta G_{BF \text{ min}})$	$\Delta G_{HF} (\times \Delta G_{HF \text{ min}})$	$\Delta \tau (\times T_e)$
1	7,7163	1,5971	2,624
2	7,7163	1,5971	2,624
3	7,3742	1,705	2,2345
4	5,6544	1,7684	2,3695
5	5,4489	1,7516	1,7852
6	4,7325	1,9279	1,7939
7	4,3668	2,0754	2,0889
8	2,7735	2,2596	2,1868
9	4,4514	2,2562	1,6036
10	5,8225	2,3174	1,2769

Tableau 7-I Analyse fréquentielle des linéarisés tangents

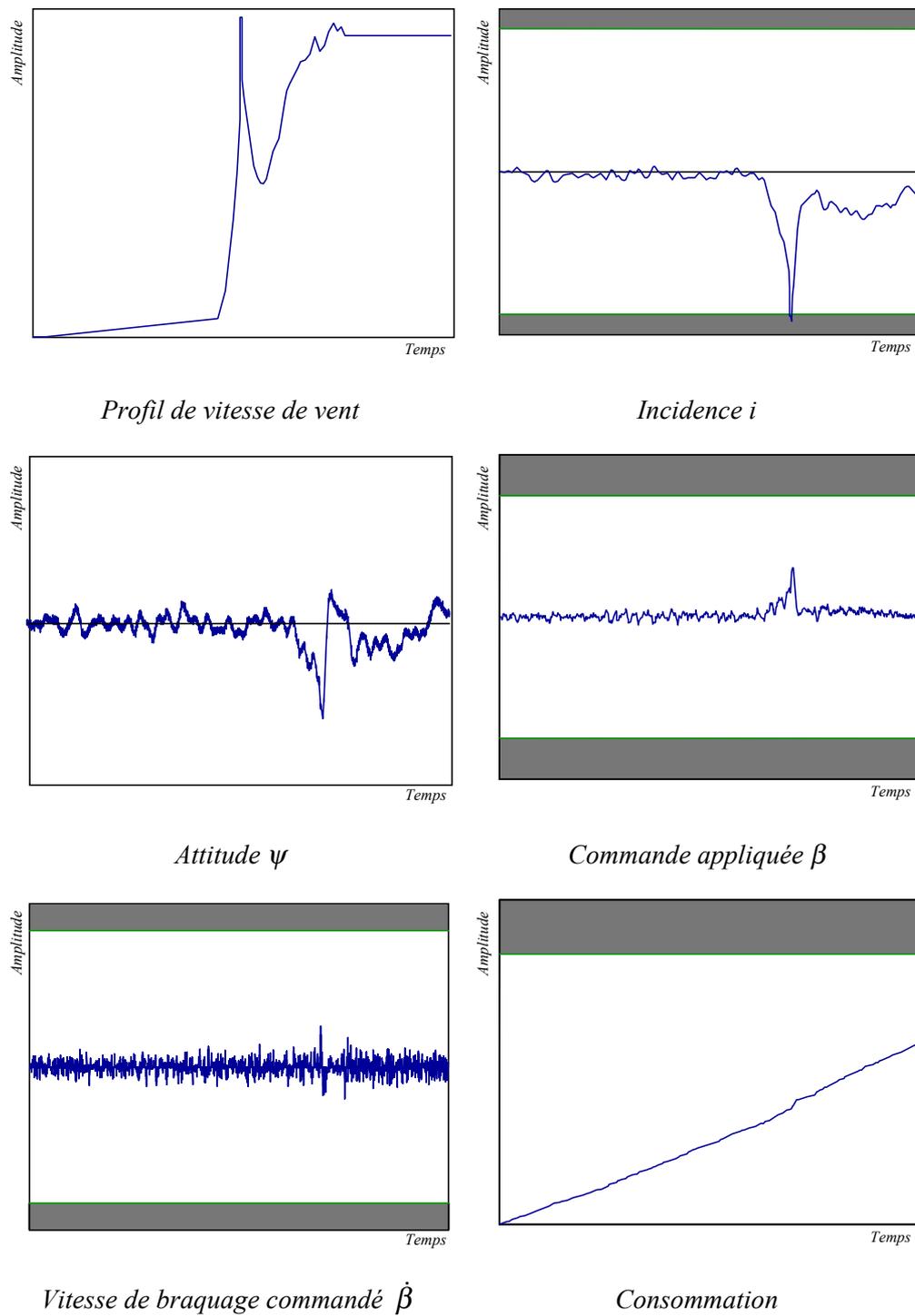


Figure 7.13 Simulation temporelles pour le correcteur interpolé

7.4.2. Robustesse a posteriori

Comme dans le cas linéaire la robustesse de la loi de commande est testée a posteriori sur les configurations identifiées comme les pires (voir chapitre 5).

La Figure 7.14 représente l'ensemble des diagrammes de Black des pires cas pour l'ensemble des points de fonctionnement.

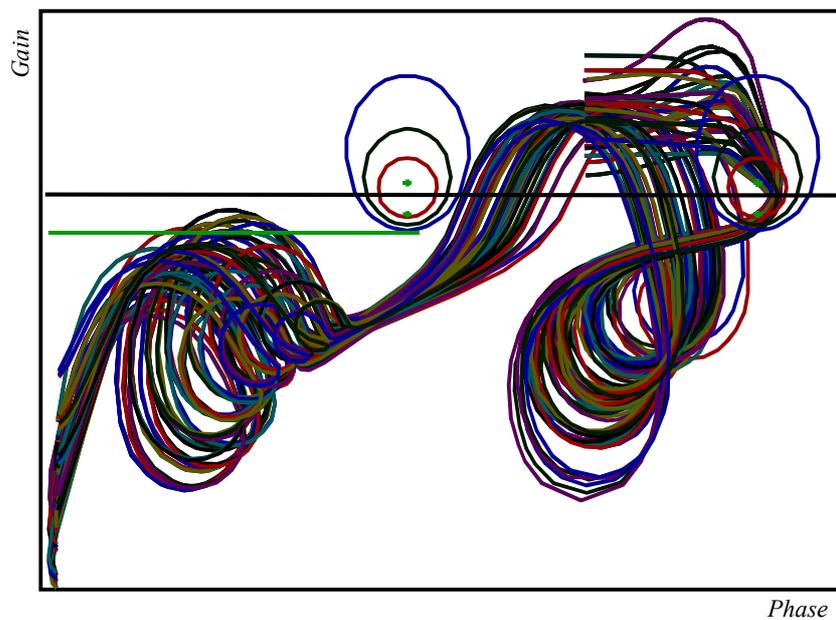


Figure 7.14 Ensemble des diagrammes de Black des boucles ouvertes corrigées pour les pires cas de l'ensemble des points de vol

Les marges du flot de courbes peuvent se résumer par les données suivantes :

- marge de gain conditionnelle basse fréquence
 - valeur minimale : $0,934 \Delta G_{BF \min}$
 - valeur maximale : $9,441 \Delta G_{BF \min}$
 - 95% des cas satisfont la spécification

- marge de gain conditionnelle haute fréquence
 - valeur minimale : $0,926 \Delta G_{HF \min}$
 - valeur maximale : $1,902 \Delta G_{HF \min}$
 - 91% des cas satisfont la spécification

- marge de retard

valeur minimale : $0,789 T_e$

valeur maximale : $3,919 T_e$

96% des cas satisfont la spécification

Les simulations temporelles sur l'ensemble des pires cas des grandeurs caractéristiques du pilotage sont représentées Figure 7.15. Le Tableau 7-II récapitule les performances d'incidence et de consommation des pires cas étudiés.

Il en ressort que seule la performance d'incidence n'est pas respectée de manière systématique alors que les autres spécifications le sont dans la majorité des configurations étudiées.

Les résultats présentés correspondent à ce qui nous semble être le meilleur compromis tout en conservant des réglages simples et donc rapidement reproductibles.

cas	Incidence ($\times i_{\max}$)	Consommation ($\times C_{\max}$)
1	1,1291	0,6719
2	1,1264	0,67637
3	1,1318	0,64354
4	1,0311	0,6842
5	1,0487	0,7064
6	1,0941	0,67344
7	1,1527	0,73651
8	1,1653	0,72253
9	1,2173	0,75672

Tableau 7-II Analyse temporelle des pires cas

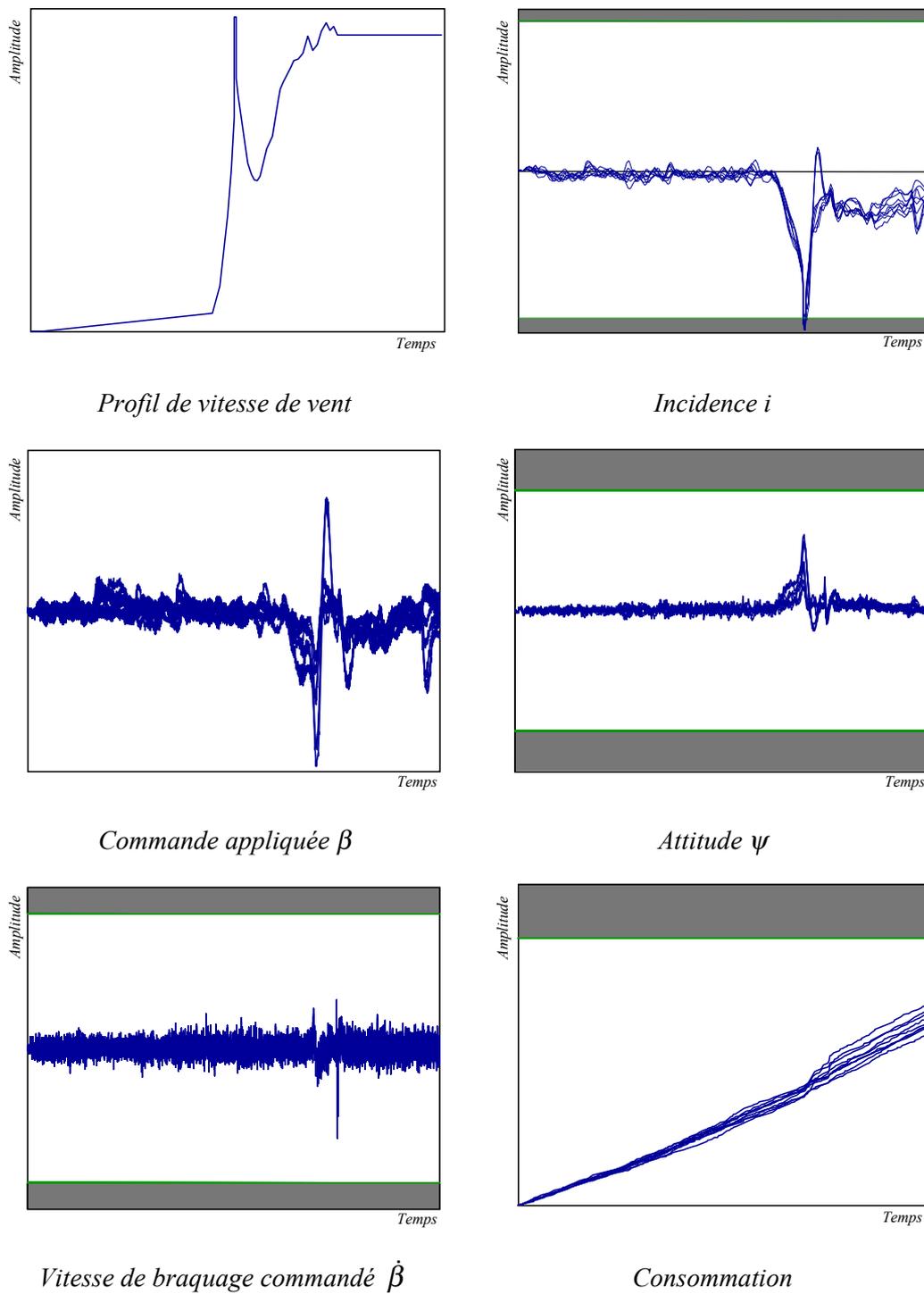


Figure 7.15 Etude a posteriori de la robustesse de l'interpolation

7.5. Conclusion

Ce chapitre montre de manière pratique comment mettre en œuvre une loi de commande non stationnaire pour un lanceur. Celle-ci établit des compromis entre les différentes spécifications du cahier des charges. Ceux présentés ici sont issus de réglages simples et facilement reproductibles. Nous avons choisi de prendre en compte des spécificités globales du lanceur et non pas les spécificités du modèle utilisé. Ainsi la démarche peut aussi se transposer à d'autres systèmes appartenant à la même problématique de commande.

En ce qui concerne l'application de la méthode d'interpolation du chapitre 4, on remarque que le lanceur correspond à un cas très favorable pour lequel on peut se ramener à l'interpolation linéaire. Il serait donc peu intéressant du point de vue de la quantité de calcul d'utiliser une autre façon d'interpoler. Rappelons ici que la méthode proposée permettrait de le faire si nécessaire, et qu'elle garantit présentement la stabilité de l'interpolation linéaire.

Il est tout de même important de noter que l'étape de structuration des correcteurs est des plus délicates. Les choix que nous avons effectués ont été dictés par le conditionnement numérique.

La loi de commande proposée finalement est issue d'une méthode de synthèse qui utilise l'ensemble des concepts exposés tout au long des 6 chapitres précédents et s'inscrit donc dans une démarche systématique qu'il est facile de reproduire pour des configurations différentes voire pour des systèmes physiques appartenant à la même classe de systèmes : systèmes discrets non stationnaires dont la trajectoire est connue à l'avance en fonction du temps¹.

¹ Toutes les considérations faites en fonction du temps peuvent se ramener à la variation d'un paramètre scalaire lui-même connu en fonction du temps et présentant une évolution monotone.

Conclusion

Dans notre Thèse, les aspects concernant les contributions et la prospective sont étroitement liés : d'une part les réflexions que nous avons menées ont abouti à des résultats concrets ; d'autre part, elles nous ont permis de mieux comprendre comment maîtriser les enjeux de la commande en Automatique et ainsi d'ouvrir de nouvelles perspectives de recherche.

Contributions

Les contributions de notre Thèse relèvent volontairement d'une problématique à mi-chemin entre les aspects théoriques et la mise en œuvre pratique. Pour cela, nous avons mis en place des outils (ou méthodologies) pratiques utilisables par l'ingénieur en utilisant les avancées théoriques de l'Automatique de ces dernières années. Nous avons donc abordé les thèmes de la synthèse multiobjectifs et des méthodes de séquençement de gains comme bases pour la synthèse d'une loi de pilotage pour un lanceur spatial.

En revisitant la synthèse multiobjectifs à la lumière de la paramétrisation de Youla et de l'optimisation convexe, nous avons montré comment réduire le conservatisme des méthodes déjà existantes. C'est en effet principalement ce défaut que des applications pratiques délicates ne peuvent supporter, puisque le conservatisme induit par une méthode assure que les propriétés recherchées sont « fortement » garanties ; dès lors que le processus requiert un réglage très fin, la méthode se révélera donc inadéquate. Dans cette recherche de réduction du conservatisme, il reste cependant nécessaire de bien gérer le compromis entre la réduction du conservatisme et la quantité de calcul nécessaire à la résolution des problèmes posés, car il est bien connu que l'un se fait au détriment de l'autre¹.

¹ Voir la discussion à ce sujet au chapitre 1.

La méthodologie proposée comporte plusieurs étapes clés énoncées au chapitre 4 et peut s'appliquer à toute sorte de problème de synthèse, à partir du moment où le cahier des charges peut être traduit par un problème d'optimisation avec des contraintes matricielles. On remarquera qu'aujourd'hui un grand nombre de contraintes possèdent de telles expressions.

De plus cette étape de synthèse peut parfaitement s'inscrire dans une démarche de synthèse d'une loi de commande non stationnaire par des méthodes de séquençement de gains¹. Cette problématique de la commande séquencée occupe une grande place autant dans les préoccupations théoriques que pratiques. En effet, les motivations intuitives de l'interpolation de correcteurs entre des points de fonctionnement d'un processus permettent d'utiliser la simplicité des méthodes de l'automatique linéaire stationnaire pour des systèmes non linéaires pour lesquelles les outils généraux sont plus difficiles à manipuler. Dans notre cas, on remarquera que le travail est facilité par le choix d'une structure de modèle de lanceur sous forme LTV particulièrement adaptée à cette approche.

Dans ce domaine de synthèse non stationnaire, notre travail a principalement porté sur les méthodes d'interpolation utilisées pour le passage d'un correcteur à l'autre tout en garantissant un certain nombre de propriétés. Nous avons ainsi montré que l'interpolation linéaire peut être généralisée pour aboutir à une interpolation à stabilité garantie. Il s'agit bien évidemment de conditions suffisantes, mais qui ont l'avantage de se présenter sous la forme d'un problème d'optimisation convexe ; l'objectif de cette optimisation étant de tendre vers l'interpolation linéaire, qui est la plus simple qui soit.

On retrouve dans ces deux thèmes le souci d'aboutir à des méthodologies systématiques qui ont pour but d'être reproductibles et dont le fonctionnement est dicté par la simplicité. Cette exigence est à notre avis fondamentale pour que des méthodes soient largement utilisées par des ingénieurs.

C'est donc dans ce cadre que le pilotage du lanceur a été considéré. Nous avons mis en œuvre les méthodes développées dans notre Thèse sur un modèle de lanceur conçu en collaboration avec le CNES et EADS-LV afin de garantir sa pertinence physique. Le cahier des charges associé est lui aussi issu de ce partenariat.

¹ Le terme anglais de gain scheduling est très largement utilisé dans la communauté automatique.

La synthèse multiobjectifs a permis de découpler les différentes contraintes imposées par le cahier des charges du lanceur et d'éviter ainsi le conservatisme induit par ces couplages. Nous avons donc pu mettre en place une méthodologie propre au pilotage d'un lanceur avec des outils généraux de synthèse.

Le caractère reproductible de cette approche a permis de réitérer les synthèses pour plusieurs points de vol de la trajectoire du lanceur. Cette trajectoire étant parfaitement définie à l'avance, nous avons pu interpoler les différents gains par la méthode originale que nous proposons.

Les résultats obtenus représentent à nos yeux le meilleur compromis entre les différentes contraintes du cahier des charges avec des réglages simples et rapides. L'objectif principal de cette application n'est pas de trouver la « meilleure » solution, mais plutôt de mettre en avant une méthodologie réutilisable par un ingénieur spécialiste du domaine en question sur des configurations de lanceur qui évoluent selon le type de mission à effectuer et aussi selon les évolutions techniques touchant au reste de la conception.

Prospective

Comme dans toute démarche scientifique, la recherche de la réponse à une question appelle en général de nouvelles questions (parfois très nombreuses), et ce, à chaque étape de la réflexion. Ce sont ces questions souvent passionnantes qui définissent les orientations du travail mais en laissant en suspens d'autres interrogations, de nouveaux axes de travail apparaissent.

Sans rentrer dans les détails techniques qui sont développés au fur et à mesure de notre Thèse, certains points nous semblent particulièrement intéressants à développer. Il s'agit d'une part de définir de manière systématique des bases de l'ensemble des transferts stables pour élargir la portée de toutes les méthodes qui utilisent la paramétrisation de Youla. Ce domaine est aussi porteur pour l'identification des systèmes. D'autre part, la méthode d'interpolation proposée exige la connaissance a priori de la trajectoire, la question qui se pose naturellement est l'extension de celle-ci dans un cadre moins spécifique ; on pourra alors s'interroger sur le conservatisme que peut induire une généralisation de ce genre.

De manière plus globale, deux axes majeurs se dégagent pour les études prospectives ; l'une porte sur les méthodes de séquençement de gains tandis que l'autre plus générale porte sur les problèmes d'optimisation.

Comme nous l'avons indiqué à plusieurs reprises dans notre Thèse, les méthodologies qui relèvent des gains variables sont d'abord issues de considérations industrielles et ont abouti à des résultats de très bonne qualité. Cependant cette branche de l'automatique a été très largement illustrée dans la littérature pour définir des méthodes, des outils, des critères, etc... Mais les liens entre ces aspects théoriques restent encore peu nombreux et méritent toute notre attention.

On se rend compte que dans les problèmes de commande qui se posent actuellement, la place de l'optimisation est fondamentale ; il est donc tout aussi fondamental que les automaticiens et les numériciens trouvent des terrains d'entente comme cela s'est produit pour l'utilisation des LMI. Ce travail de grande envergure demande un investissement des deux communautés et représente à nos yeux un challenge intéressant.

En parallèle avec les problèmes d'optimisation, une voie d'analyse intéressante du point de vue des applications est de s'interroger sur l'influence de l'évolution d'un cahier des charges sur une méthodologie donnée. Pour reprendre des termes d'automatique, il s'agit d'une analyse de robustesse d'une méthodologie face à un cahier des charges.

Ces perspectives sont des orientations possibles pour des travaux futurs qui trouvent leur place à la fois dans un cadre théorique de formalisation mais aussi dans un contexte industriel demandeur de telles investigations.

Bibliographie

- [AA98] P. Apkarian, R. J. Adams, Advanced gain scheduling techniques for uncertain systems, *IEEE Transactions on Control System Technologies*, **6**, pp. 21-32, 1998.
- [AA99] D. Alazard, P. Apkarian, Exact Observer-Based Structures for Arbitrary Compensators, *International Journal of Robust and Non Linear Control*, **9**, pp. 101-118, 1999.
- [AB95] P. Apkarian, J. M. Biannic, Self-scheduled H_∞ control of missile via Linear Matrix Inequalities, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **18**, pp. 532-538, May 1995.
- [ABG95] P. Apkarian, J.M. Biannic, P. Gahinet, Self-scheduled H_∞ control of missile via Linear Matrix Inequalities, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **18**, pp. 532-538, May 1995.
- [AG95] P. Apkarian, P. Gahinet, A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, pp. 853-864, May 1995.
- [AGB94] P. Apkarian, P. Gahinet, G. Becker, Self-scheduled H_∞ control of linear parameter varying systems, *American Control Conference*, pp. 856-860, 1994.
- [AGB95] P. Apkarian, P. Gahinet, G. Becker, Self-scheduled H_∞ control of linear parameter varying systems : a design example, *Automatica*, **31**, pp. 1251-1261, September 1995.
- [AHS84] K.J. Åström, P. Hagander, J. Sternby, Zeros of sampled systems, *Automatica*, **20**, pp. 31-38, 1984.
- [AMP98] F. Amato, M. Mattei, A. Pironti, A note on quadratic stability of uncertain linear discrete-time systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**, pp. 227-229, 1998.
- [And98] B.D.O. Anderson, From Youla-Kucera to Identification, Adaptive and Nonlinear Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**, pp. 1485-1506, 1998.
- [AP01] D. Arzelier, D. Peaucelle, Quelques notes dur les solveurs en programmation semi-définie positive, *séminaire du groupe MAC du LAAS-CNRS*, Luchon, février/mars 2001.
- [Apk97] P. Apkarian, On the discretization of LMI synthesized LPV controllers, *Automatica*, **33**, pp. 665-661, 1997.

-
- [AT98] P. Apkarian, H.D. Tuan, Parametrized LMIs in Control Theory, *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 152-157, Tampa, 1998.
- [AV73] B.D.O. Anderson, S. Vongpanitlerd, *Network Analysis and synthesis: a modern systems theory approach*, Prentice Hall, 1973.
- [AW95] K.J.Åström, B. Wittenmark, *Adaptive Control*, 2nd edition, Addison Wesley, 1995
- [BB91] S. Boyd, C. Barrat, *Linear Controller Design: Limits of Performance*, Prentice-Hall, 1991
- [BBFE93] S. Boyd, V. Balaskrishnan, E. Feron, L. El Ghaoui, Control system and synthesis via Linear Matrix Inequalities, *American Control Conference*, pp. 2147-2154, San Francisco, 1993.
- [BBN90] S. Boyd, C. Barrat, S. Norman, Linear controller design :limits of performance via convex optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **78** (3), pp 529-574, March 1988.
- [BCH98] S. Boyd, C. Crusius, A. Hansson, Control Applications of Nonlinear Convex Programming, *Journal of Process Control*, **8**, number 5-6, pp. 313-324, 1998
- [BDKR00] G.I. Bara, J. Daafouz, F. Kratz, J. Ragot, Observer interpolation for state reconstruction of discrete time LPV systems: an LMI approach, *8th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Rio-Patras, July 2000.
- [BE93] S. Boyd, L. El Ghaoui, Method of centers for minimizing generalized eigenvalues, *Linear Algebra and Applications*, pp. 63-111, July 1993.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balaskrishnan, *Linear Matrix Inequalities in systems and control theory*, SIAM Publications, June 1994.
- [Ben85] R.A. Bender, Some considerations for estimator-based compensator design, *International Journal of Control*, **41**, pp. 1577-1588, 1985.
- [BGT81] R. G. Bland, D. Goldfarb, M. J. Todd, The ellipsoid method : a survey, *Operations research*, **29** (6), pp 1039-1091, 1981.
- [BH89] D.S. Bernstein, W.M. Haddad, LQG control with an H_∞ performance bound: a Riccati equation approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**, pp. 293-305, 1989.
- [Bia96] J. M. Biannic, *Commande des systèmes variants paramétrés*, Thèse de Doctorat, ONERA-CERT, Toulouse, octobre 1996.
- [Bla34] H.S. Black, Stabilized feedback amplifiers, *Bell System Technical Journal*, 13:1-18, 1934
- [BLW91] S. Bittanti, A.J. Laub, J.C. Willems, *The Riccati Equation*, Springer Verlag, Heidelberg, 1991.
- [Bod40] H.W. Bode, Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design, *Bell System Technical Journal*, 19:421-454, 1940.
- [BP93] G. Becker, A. Packard, Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback, *Systems and Control Letters*, **23**, pp. 205-215, 1993.

-
- [BPPB93] G. Becker, A. Packard, Philbrick, G. Balas, Control of parametrically dependent linear system: a single quadratic Lyapunov approach, *American Control Conference*, pp. 2795-2799, San Francisco, 1993.
- [BS72] R.H. Bartels, G.W. Stewart, Solution of the matrix equation $AX + XB = C$, *Comm. of the ACM*, Vol.15 n°9 1972.
- [BSU93] R. Bambang, E. Shimemura, K. Uchida, Mixed H_2/H_∞ control with pole placement : state feedback case, *American Control Conference*, pp. 2777-2779, 1993.
- [BV95a] V. Balakrishnan, L. Vandenberghe, Connections between duality in control theory and convex optimization, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 4030-4034, 1995.
- [BV95b] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Introduction to convex optimization with Engineering Applications*, Lecture Notes for Electrical Engineering Department Stanford University, 1995.
- [BVG94] S. Boyd, L. Vandenberghe, M. Grant, Efficient convex optimization for engineering design, In *Proceedings IFAC Symposium on Robust Control Design*, Rio de Janeiro, Brazil, September 1994.
- [CBB00] C. Courties, H.Bouazizi, J. Bernussou, Commande LPV à l'aide d'un observateur, *1ère Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'2000)*, Lille (France), 5-8 Juillet 2000, pp.273-277
- [CBG99] C.Courties, J. Bernussou, G.Garcia, LPV control by dynamic output feedback, 1999 *American Control Conference (ACC'99)*, San Diego (USA), 2-4 Juin 1999, pp.2267-2271
- [CD00a] B. Clement, G. Duc, Multiobjective Control via Youla parameterization and LMI optimisation: application to a flexible arm, *IFAC Symposium on Robust Control and Design*, Prague, juin 2000.
- [CD00b] B. Clement, G. Duc, A Multi-Objective Control Algorithm: application to a launcher with bending modes, *8th IEEE Mediterranean Conference on Control on Automation*, Rio-Patras, July 2000.
- [CD01] B. Clement, G. Duc, *Synthèse multicritère utilisant la paramétrisation de Youla et l'optimisation convexe*, chapitre de livre, Editions Hermes, Paris, 2001, à paraître.
- [CD99] B. Clement, G. Duc, Synthèse Multicritère par retour de sortie : formulation par LMI, *Journées Doctorales d'Automatique*, Nancy, pp. 127-131, septembre 1999.
- [CDMB01] B. Clement, G.Duc, S.Mauffrey, A.Biard, Gain Scheduling for an aerospace launcher with bending modes, *15th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Bologne, September 2001.
- [CG96] M. Chilali, P. Gahinet, H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**, pp. 358-368, 1996.
- [CHDF01] B. Clement, S. Hbaïeb, G. Duc, S. Font, Paramétrisation de Youla : application à la commande robuste par optimisation convexe, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, numéro spécial *Commande Robuste Multivariable*, février 2001.

- [Chi96] M. Chilali, Méthodes LMI pour l'analyse et la synthèse multi-critère, Thèse de Doctorat de l'Université Paris Dauphine, mars 1996.
- [Cle00] B. Clement, Utilisation de la paramétrisation de Youla pour la commande, *réunion du Groupe Commande Robuste*, Lyon, mars 2000.
- [Cle01a] B. Clement, Synthèse d'un pilotage automatique pour un lanceur, *Journée des thèses EADS-LV*, Les Mureaux, avril 2001.
- [Cle01b] B. Clement, Synthèse d'un pilote séquencé pour le pilotage d'un lanceur, *Journées Jeunes Chercheurs (JC²)*, Toulouse, juin 2001.
- [Cle99] B. Clement, Rapport bibliographique : le formalisme LMI en automatique, *rapport CNES commande 713/2/98/0065*, janvier 1999.
- [Cour99] C. Courtiès, *Sur la commande robuste et LPV de systèmes à paramètres lentement variables*, PhD thesis, LAAS-CNRS, octobre 1999.
- [CSZ98] X. Chen, G. Salomon, K. Zhou, Multiobjective Output Feedback Control, *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1810-1811, Tampa, 1998.
- [CV01] B. Clement, O. Voinot, Définition d'un benchmark pour le Pilotage Robuste des Lanceurs, *Note technique pour le pôle PIROLA*, Mars 2001.
- [Dan96] R. D'Andrea, LMI approach to mixed H_2 and H_∞ performance objective controller design, *IFAC World Congress*, G, pp. 327-332, 1996.
- [Dar98] I. Dardenne, *Développement et méthodologies pour la synthèse de loi de commande d'un avion de transport souple*, thèse, ENSEA Toulouse, 1998 .
- [DBKR00] J.Daafouz, G.I. Bara, F. Kratz, J. Ragot, State observer for discrete time LPV systems: an interpolation approach, *IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, December 2000.
- [DC75] C.A. Desoer, W. Chang, The feedback interconnection of lumped linear time invariant system, *Journal of Franklin Institute*, 300, Nov-Dec, 1975.
- [DE98] S. Dussy, L. El Ghaoui, Measurement-scheduled control for RTAC problem : an LMI approach, *International Journal of Robust and Non Linear Control*, **8**, pp. 377-400, 1998.
- [Des69] C.A. Desoer, Slowly varying system $\dot{x} = A(t)x$, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **14**, pp. 780-781, 1969.
- [DF99] G. Duc, S. Font, *Commande H_∞ et μ -analyse : des outils pour la robustesse*, Hermès, 1999.
- [DGB99] M.C. De Oliveira, J.C.Geromel, J. Bernussou, An LMI optimization approach to multiobjective and robust H controller design for discrete-time systems, *Rapport LAAS N°99124*, Mars 1999, 19p.
- [DGKF89] J. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis, State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**, pp. 831-847, 1989.
- [DLMF80] C.A. Desoer, R.W. Liu, J. Murray, R. Sacks, Feedback system design: the fractional approach to analysis and synthesis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **25**, pp. 399-412, 1980.
- [Dor91] P. Dorato, A survey of multiobjective design techniques, *Control of Uncertain Dynamical Systems*, pp. 249-261, CRC Press, Boca Raton, 1991.

-
- [Doy78] J. Doyle, Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **23**, pp. 756-757, 1978.
- [Doy82] J.C. Doyle, Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE Proceedings Part D*, 129, pp. 242-250, 1982.
- [Doy84] J.C. Doyle Lecture Notes ONR/Honeywell Workshop on Advances in Multivariable Control, 1984.
- [DPZ91] J.C. Doyle, A. Packard, K. Zhou, Review of LFT's, LMI's and μ , *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1227-1232, Brighton, December 1991.
- [Dus98] S. Dussy, *Approche LMI de la commande robuste multicritère*, Thèse de Doctorat, Université Paris IX, mars 1998.
- [DV75] C.A. Desoer, M. Vidyasagar, Feedback systems: input-output properties, Academic Press, 1975.
- [EF96a] L. El Ghaoui, J.P. Folcher, Multiobjective robust control of LTI systems subject to unstructured perturbations, *Systems and Control Letters*, **28**, pp. 23-30, June 1996.
- [EF96b] L. El Ghaoui, J.P. Folcher, Robust multiobjective LTI control design for systems with structured perturbations, *IFAC World Congress*, pp. 179-184, June 1996.
- [ES96] L. El Ghaoui, G. Scorletti, Control of rational systems using LFT and LMI, *Automatica*, **32**, pp. 1273-1284, 1996.
- [FB85] D.J. Fowell, R.A. Bender, Computing the estimator-controller form of a compensator, *International Journal of Control*, **41**, pp. 1565-1575, 1985.
- [FCG78] P. Faure, M. Clerget, F. Germain, Opérateurs rationnels positifs, application à l'hyperstabilité et aux processus aléatoires, *Méthodes Mathématiques de l'informatique*, Dunod, Paris, 1978.
- [FF97] G. Ferreres, V. Fromion, Convex synthesis of robust output feedback systems, *American Control Conference*, 1997.
- [FG94] J.P. Folcher, L. El Ghaoui, State-feedback design via LMI: Application to a benchmark problem, *IEEE Conference on Control Applications*, pp. 1217-1222, August 1994.
- [FMN96] V. Fromion, S. Monaco, D. Normand-Cyrot, Robustness and stability of LPV plants through frozen system analysis, *International Journal of Robust and Non Linear Control*, **6**, pp. 235-248, 1996.
- [Fol97] J.P. Folcher, *Approche multicritère par formulation LMI de la commande des systèmes*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, décembre 1997.
- [Fon95] S. Font, *Méthodologie pour prendre en compte la robustesse des systèmes asservis : Optimisation H_∞ et approche symbolique de la Forme Standard*, Thèse de Doctorat, Université Paris XI et Supélec, 1995.
- [Fra87] B.A. Francis. A course in H_∞ control theory, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 88, 1987
- [Fro95] V. Fromion, *Une approche incrémentale de la robustesse non linéaire ; application au domaine de l'aéronautique*, PhD thesis with Supélec and Université Paris XI, 1995

- [FS01] V. Fromion, G. Scorletti, Weighted incremental norm: a new approach to gain scheduling, *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Orlando, 2001.
- [FS01] V. Fromion, G. Scorletti, Weighted incremental norm: a new approach to gain scheduling, rapport interne LASB, 2001.
- [GA94] P. Gahinet, P. Apkarian, A Linear Matrix Inequality approach to H_∞ control, *International Journal of Robust and Non Linear Control*, **4**, pp. 421-448, 1994.
- [GAC96] P. Gahinet, P. Apkarian, M. Chilali, Affine parameter dependent Lyapunov functions and real parameter uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**, pp. 436-442, 1996.
- [Gah94] P. Gahinet, Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis, *American Control Conference*, pp. 2396-2400, 1994.
- [Gan66] F.R. Gantmacher, *Théorie des Matrices*, Tome 1, Dunod, Paris, 1966.
- [GBG98] J.C. Geromel, J. Bernussou, G. Garcia, M.C. De Oliveira, H_2 and H_∞ robust filtering for discrete-time linear systems, *37th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'98)*, Tampa (USA), 16-18 Décembre 1998, pp.632-637
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A.J. Laub, M. Chilali, *The LMI Control Toolbox for Use with Matlab*, The Mathworks Inc., 1995.
- [GPB91] J.C. Geromel, P.L.D. Peres, J. Bernussou, On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **29**, pp. 381-402, 1991.
- [GSL96] K. C. Goh, M. G. Safonov, and J. H. Ly. Robust synthesis via bilinear matrix inequalities. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, **6(9/10)**:1079–1095, November–December 1996.
- [GSP94] K.G. Goh, M.G. Safonov, and G.P. Papavassilopoulos. A Global Optimization Approach for the BMI Problem. In *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp. 2009-2014, 1994.
- [GSP95] K. C. Goh, M. G. Safonov, and G. P. Papavassilopoulos. Global optimization for the biaffine matrix inequality problem. *Journal of Global Optimization*, **7**:365–380, 1995.
- [GTSP94] K.C. Goh, L. Turan, M.G. Safonov, G. Papavassilopoulos, Biaffine Matrix Inequalities properties and computational methods, *American Control Conference*, pp. 850-855, Baltimore, 1994.
- [Hah67] W. Hahn, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [HDB98] A. Hired, G. Duc, J. P. Bonnet, The application of gain-scheduling H_∞ controllers for a missile autopilot, *IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Seoul, 1998.
- [HDB98] A. Hired, G. Duc, J.P. Bonnet, The application of gain-scheduling H_∞ controllers for a missile autopilot, *IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Seoul, 1998.
- [Hel95a] A. Helmersson, μ synthesis and LFT gain scheduling with mixed uncertainties, *European Control Conference*, Roma, July 1995.
- [Hel95b] A. Helmersson, *Methods for robust gain-scheduling*, PhD thesis, Linköping University, November 1995.

-
- [HFBF01] S. Hbaieb, S. Font, P. Bendotti, C.M. Falinower, Robust optimal control via convex optimization – efficient dimensional Q-parameterization, submitted to *Control and Decision Conference (CDC)*, Orlando, 2001.
- [HG93] A.R. Hyde, K. Glover, The application of scheduled H_∞ controllers to a VSTOL aircraft, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**, pp. 1023-1039, 1993.
- [HHB98] H. Hindi, B. Hassidi, S. Boyd, Multiobjective H_2/H_∞ -optimal control via finite dimensional Q-parametrization and LMI, *American Control Conference*, pp. 3244-3248, 1998.
- [Hir99] A. Hired, *Pilotage robuste d'un missile sur un large domaine de vol : synthèse et analyse dans le cadre H_∞ et LPV*, PhD thesis, Supélec et Université Paris XI, octobre 1999
- [HJ85] R.A. Horn, C.A. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [Imb01] N. Imbert, Robustness analysis of a launcher attitude controller via μ -analysis, *15th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Bologne, septembre 2001.
- [JPC99] F. Jouhaud, A. Piquereau, J.P. Chrétien, Application de l'automatique au guidage, au pilotage et à la restitution d'attitude des véhicules aérospaciaux, *Notes de cours Supaéro*, 3^{ème} année.
- [Kal64] R.E. Kalman, When is a linear control system optimal? *Transactions ASME, Journal of Basic Engineering*, 86:51-60, 1964.
- [KKR93] I. Kaminer, P.P. Khargonekar, M.A. Rotea, Mixed H_2/H_∞ control for discrete-time systems via convex optimization, *Automatica*, **29**, pp. 57-70, 1993.
- [KR91a] P.P. Khargonekar, M.A. Rotea, Multiple objective optimal control of linear systems: the quadratic norm case, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**, pp. 14-24, 1991.
- [KR91b] P.P. Khargonekar, M.A. Rotea, Mixed H_2/H_∞ control: a convex optimization approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**, pp. 824-837, 1991.
- [Kra63] N. Krasovskiy, *Stability of Motion*, Standford University Press, Standford, 1963.
- [KS72] H. Kwakernaak, R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, New-York, 1972
- [Kuc74] V. Kucera, *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*, New York Wiley, 1974.
- [LCR93] I.D. Landau, C. Cyrot, D. Rey, "Robust Control Design Using the Combined Pole Placement / Sensitivity Function Shaping Method", *2nd European Control Conference*, pp. 1693-1698, Groningen, 1993.
- [LDL96] I.D. Landau, J.M. Devesne, J. Langer, « Régulation numérique robuste d'un bras manipulateur souple. Banc d'essais comparatif de différentes méthodes de synthèse », in *Commande Robuste* (Ed. : J. Bernussou), Hermès, 1996.
- [LL00] Leith D.J., Leithead W.E., Survey of gain scheduling analysis and design, to appear in the *International Journal of Control*, 2000.

- [Lya92] A. Lyapunov, Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales de la faculté de science de Toulouse*, 1892, (traduction Kharkov).
- [LZD96] W.M. Lu, K. Zhou, J.C. Doyle, Stabilization of LFT systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, pp 50-65, 1996.
- [Mac89] J. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley, Wokingham, England, 1989.
- [MC01] S. Monaco, D. Normand-Cyrot, Issues on nonlinear digital control, *European Journal of Control*, 0:79-96, 2001.
- [MC93] S. Monaco, D. Normand-Cyrot, Quelques éléments sur la commande numérique non linéaire, *Systèmes Non Linéaires* (tome 3), Ed. Masson, pp. 109-136.
- [Mer95] O. du Merle, Points intérieurs et plans coupants : mise en œuvre et développement d'une méthode pour l'optimisation convexe et la programmation linéaire structurée de grande taille, Thèse, Faculté des Sciences Economiques et Sociales, Genève, 1995.
- [MOS98] I. Masubuchi, A. Ohara, N. Suda, LMI-based controller synthesis : a unified formulation and solution, *International Journal of Robust and Non Linear Control*, 8, pp. 669-686, 1998.
- [MS98] S. Mauffrey, M. Schoeller, Non-stationary H_∞ control law for launcher with bending modes, *IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, pp. 438-444, Seoul,, 1998.
- [MSP00] M. Mesbahi, M.G. Safonov, and G P. Papavassilopoulos. Bilinearity and complementarity in robust control. In L. El Ghaoui and S. Niculescu, editors, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, pages 269–292. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [NG97] B. Ninness, F. Gustafsson, A unifying construction of orthonormal bases for system identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 (4), April 1997.
- [Nie99] N. H. Niemann, Application of the dual Youla parameterization, In Proceeding of *European Control Conference ECC'99*, Karlsruhe, Germany, September 1999.
- [NN88] Y. Nesterov, A. Nemirovskii, *A general approach to polynomial-time algorithm design for convex programming*, Technical Report, Centr. Econ. Math. USSR Acad. Sci., Moscow, 1988.
- [NN94] Y. Nesterov, A. Nemirovskii, *Interior point polynomial methods in convex programming : theory and applications*, volume 13 of SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [NRR93] R.A. Nichols, R.T. Reichert, W.J. Rugh, Gain scheduling for H-infinity controllers: a flight exemple, *IEEE Transactions on Control Systems Technologies*, 1, pp. 69-79, 1993.
- [NS98] S.G. Nash, A. Sofer, On the complexity of a practical interior-point method, *SIAM Journal of Optimisation*, 8 (3), pp. 833-349, August 1998.
- [NS99] N. H. Niemann, J. Stoustrup, Gain scheduling using the Youla parameterization, submitted to the *IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, USA, 1999.

-
- [NY83] A. Nemirovskii, D. Yudin, *Problem Complexity and Method efficiency in optimization*, John Wiley & Sons, 1983.
- [Nyq42] H. Nyquist, Regeneration theory, *Bell System Technical Journal*, 11:126-147, 1932.
- [Pac94] A. Packard, Gain scheduling via linear fractional transformations, *Systems and Control Letters*, **22**, pp. 79-92, 1994.
- [Par96] V. Pareto, *Cours d'économie Politique*, Rouge, 1896
- [PBPB93] A. Packard, G. Becker, D. Philbrick, G. Balas, Control of dependent systems: application to H-infinity gain scheduling, *American Control Conference*, 1993
- [PZPB91] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey, G. Becker, A collection of robust control problems leading to LMI's, *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1245-1250, Brighton, December 1991.
- [RF58] J.R. Raggazini, G.F. Franklin, *Sampled-Data Control Systems*, New York McGraw-Hill, 1958.
- [RS98] H. Rotstein, M. Sznaier, An exact solution to general four-block discrete time mixed H_2/H_∞ problems via convex optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**, pp. 1475-1480, 1998.
- [Rug91] W.J. Rugh, Analytical Framework for gain scheduling, *IEEE Control System Magazine*, January, pp 79-84, 1991.
- [SA77] M.G. Safonov, M. Athans, Gain and Phase margins for multiloop LQG regulators, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **22**, pp. 173-179, 1977.
- [SA90] S. Shamma, M. Athans, analysis of gain scheduled control for nonlinear plants, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **35**, pp. 898-905, 1990.
- [SB89] S. Sastry, M. Bodson, *Adaptive Control*, Prentice Hall, 1989.
- [SBS99] Z.Szabo, J. Bokor, F. Schipp, Identification of rational approximate models in H_∞ Using generalized orthonormal basis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44** (1), January 1999.
- [SC88] M.G. Safonov, R.Y. Chiang, CACSD using the state space L_∞ theory – a design example, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**, pp. 477-479, 1988.
- [Sch80] J.M. Schumacher, Compensator synthesis using (C,A,B)-pairs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **25**, pp. 1133-1138, 1980.
- [Sch95] C.W. Scherer, Multiobjective H_2/H_∞ control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, pp. 1054-1062, 1995.
- [Sch99] C.W. Scherer, From Mixed to Multi-Objective Control, *IEEE Conference on Decision and Control*, 1999.
- [Sco96] G. Scorletti, Some results about the stabilization and the L_2 gain control of LFT systems, *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1240-1245, 1996.
- [Sco97] G. Scorletti, *Approche unifiée de l'analyse et de la commande des systèmes par formulation LMI*, Thèse de Doctorat, Université Paris XI et Supélec, juin 1997.

- [SDV97] M. V. Salapaka, M. Dahleh, P. Voulgaris, Mixed Objective Control Synthesis, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **35**, Number 5, pp 1672-1689, 1997.
- [SE98] Scorletti G., El Ghaoui L., Improved LMI conditions for gain scheduling and related problems, *International Journal of Robust and Non Linear Control*, **8**, pp. 845-877, 1998.
- [SGC97] C.W. Scherer, P. Gahinet, M. Chilali, Multiobjective output feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**, pp. 896-911, 1997.
- [Sha88] J.S. Shamma, *Analysis and design of gain scheduled control system*, PhD thesis with the Massachusset Institute of Technologie, 1988.
- [Sha95] J. Shamma, Robust stability analysis of time varying systems using time varying quadratic forms, *Systems and Control Letters*, **24**, pp. 13-17, 1995.
- [Sho85] N. Shor, Springer series in computational mathematics, chapter Minimization methods for non-differentiable functions, Springer-Verlag, 1985.
- [SL72] R.A. Skoog, C.C.G. Lau, Instability of slowly varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **17**, pp. 86-92, 1972.
- [SMB79] J.M. Siret, G. Michăilescu, P. Bertrand, "On the Use of Aggregation Techniques". In M. Singh et A. Titli (Eds.), *Handbook of Large Scale Systems Engineering Applications*, North-Holland, 1979, p. 20-37.
- [SNT85] Y. Sawaragi, H. Nakayama, T. Tanino, Theory of multiobjective optimisation, *Mathematic in science and Engineering*, **176**, 1985.
- [SP94] M. G. Safonov and G. Papavassilopoulos. The diameter of an intersection of ellipsoids and BMI robust synthesis. In Proc. IFAC Symposium on Robust Control Design, pages 313–317, Rio de Janeiro, Brazil, September 14–16, 1994. IFAC, Laxenberg, Austria.
- [Spi72] M.R. Spiegel, *Theory and problems of theoretical mechanics*, Mc Graw-Hill Inc., New York, 1972.
- [SR00] W.J. Rugh, J.S. Shamma, Research on gain scheduling, *Automatica*, **36**, pp. 1401-1425, 2000
- [SR98] D.J. Stilwell, W.J. Rugh, Interpolation Methods for Gain Scheduling, *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3003-3008, Tampa, 1998.
- [Szn94] M. Sznair, An exact solution to general SISO mixed H_∞/H_2 problems via convex optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**, pp. 2511-2517, 1994.
- [Val98] C. Valentin-Charbonnel, *Commande robuste avec contrainte d'ordre pour la norme H_∞ et le formalisme LMI. Application au contrôle d'attitude d'un satellite d'observation de la terre*, Thèse de Doctorat, Université Paris XI et Supélec, novembre 1998.
- [VB96] L. Vandenberghe, S. Boyd, Semidefinite Programming, *SIAM Review*, **38**, pp. 49-95, 1996.
- [Vid78] M. Vidyasagar, *Nonlinear System Analysis*, Prentice Hall, 1978.
- [Vid85] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: a factorization approach*, Cambridge, MIT Press, 1985.

-
- [VJ97] Vroemen, Jager, Multiobjective control : an overview, *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 440-445, December 1997.
- [Wil70] J.C. Willems, *The analysis of feedback systems*, The MIT Press, 1970.
- [WM99] J. K Ward, R. H. Middleton, Sequential approach to control systems synthesis with constraints, 14th triennial World Congress IFAC , Beijing, P. R. China, 1999.
- [YJB76] D.C. Youla, H.A. Jabr, J.J. Bongiorno, Modern Wiener Hopf design of optimal controller, part II : multivariable case, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **21**, pp. 319-338, 1976.
- [YS98] J. Yu, A. Sideris, H_∞ control synthesis via reduced order LMIs, *International Journal of Control*, **70**, pp. 85-101, 1998.
- [Zam81] G. Zames, Feedback and optimal sensitivity: model reference transformation, multiplicative semi norms and approximate inverses, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**, pp. 301-320 1981.
- [ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

Annexe :

Formalisme LMI

A.1. Brefs rappels historiques.....	A-3
A.2. Notations et définitions.....	A-4
A.3. le problème LMI	A-5
A.4. Les LMI : un outil performant	A-11
A.5. Les algorithmes d'optimisation convexe	A-12

L'optimisation sous contraintes LMI (pour Linear Matrix Inequality) est l'outil de base utilisé dans la résolution des problèmes posés dans notre manuscrit ; en effet l'objectif principal de ces travaux a été de mettre en place des méthodologies de synthèse en s'appuyant sur les outils d'optimisation convexe. Il est alors naturel d'utiliser le formalisme LMI qui s'avère être très performant.

A.1. Brefs rappels historiques

The basic importance of the LMI seems to be largely unappreciated, it would be interesting to see whether or not it can be exploited in computational algorithms, for example.

Willems, 1971.

L'histoire des LMI a plus de 100 ans, elle semble avoir débuté en 1890 quand Lyapunov montre que la stabilité du système $\dot{x} = Ax$ est équivalente à l'existence d'une matrice P symétrique définie positive telle que $A^T P + PA < 0$, Lyapunov montre aussi qu'il est possible de résoudre analytiquement ce problème. Dans les années 1940, l'école Russe menée par Lur'e et Postnikov énonce des critères de stabilité, en particulier pour des systèmes non linéaires, sous forme de LMI. Celles-ci étaient résolues analytiquement pour des systèmes de faible taille. L'étape suivante dans l'évolution du formalisme LMI, a lieu au début des années 1960 lorsque Yakubovich, Kalman et Popov traduisent les problèmes d'analyse par des critères graphiques que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de Critère du Cercle par exemple. On arrive ainsi à la résolution de LMI d'ordre élevé par des critères graphiques. Au début des années 1970, on montre que certaines LMI peuvent être résolues en terme d'équations de Riccati algébriques, on retiendra à ce propos les travaux de Willems. La dernière pierre de cette évolution repose sur la formulation des problèmes classiques d'automatique en tant que problème d'optimisation convexe. Pyatnitskii et Skorodinski réduisent le problème de Lur'e sous la forme d'un problème d'optimisation convexe qu'ils résolvent numériquement en utilisant l'algorithme de l'ellipsoïde en 1982. On assiste alors durant les années 1980 et 1990 au développement des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation convexe [BBFE93, BBN90, BCH98, BV95a, BV95b, BVG94, Dan96, DGB99, Dus98, ES96, GA94, Gah94, VB96, AT98, FF97].

Les travaux actuels se concentrent sur les formulations possibles des problèmes d'automatique en tant que problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMI et l'amélioration des problèmes numériques. Ces derniers concernent la diminution des temps de calcul qui restent encore importants, et les problèmes de convergence lorsque la taille du problème devient grande .

A.2. Notations et définitions

Définition Positivité d'une matrice

Soit la matrice $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ telle que $X = X^T$, X est dite définie positive si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, x^T X x > 0 \quad (\text{Eq. A.2.1})$$

Définition Matrice de Hurwitz

Une matrice M est dite de Hurwitz si et seulement si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négative.

Définition Racine carrée d'une matrice [HJ85]

Soit A une matrice complexe semi-définie positive, il existe une unique matrice hermitienne semi-définie positive B telle que $B^2 = A$. On note $B = A^{\frac{1}{2}}$. On a de plus les 3 propriétés suivantes :

$$(i) \quad BA = AB \quad (\text{Eq. A.2.2})$$

$$(ii) \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(B) \quad (\text{Eq. A.2.3})$$

$$(iii) \quad B \text{ est réelle si et seulement si } A \text{ est réelle.} \quad (\text{Eq. A.2.4})$$

Définition Valeur propre généralisée

Soient A et B deux matrices définies positives. Une valeur propre généralisée de (A, B) est une valeur propre de la matrice

$$\left(B^{-\frac{1}{2}} \right)^T A B^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{Eq. A.2.5})$$

On note $\lambda_{\max}(A, B)$ la valeur propre généralisée de (A, B) de plus grand module.

Définition *Valeur singulière*

Une valeur singulière d'une matrice complexe A notée $\sigma(A)$ est définie par

$$\sigma(A) = \sqrt{\lambda(A^* A)} \text{ où } \lambda(M) \text{ est une valeur propre de } M. \quad (\text{Eq. A.2.6})$$

Les valeurs singulières sont réelles non négatives. On note $\bar{\sigma}(A)$ la plus grande valeur singulière de A .

A.3. le problème LMI

A.3.1 Optimisation convexe sous contrainte LMI

Définition *Inégalité Matricielle Affine*

Soit une famille de matrices symétriques $(P_i)_{i=0..r}$ de $\mathbf{R}^{n \times n}$ et un vecteur $x \in \mathbf{R}^r$, une inégalité matricielle affine (LMI) s'écrit sous la forme suivante :

$$P(x) = P_0 + \sum_{i=1..r} x_i P_i > 0 \quad (\text{Eq. A.3.1})$$

Remarque fondamentale : l'ensemble C défini par :

$$C = \{x \in \mathbf{R}^r / P(x) > 0\} \quad (\text{Eq. A.3.2})$$

est convexe (voir paragraphe 1.5), ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

D'autre part il est possible d'accumuler les contraintes LMI, en effet plusieurs contraintes se résument en une seule : si $P(x) > 0$ et $Q(x) > 0$ sont des contraintes LMI, elles s'expriment sous la forme d'une seule LMI :

$$\begin{pmatrix} P(x) & 0 \\ 0 & Q(x) \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{Eq. A.3.3})$$

Pour résoudre un problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI, on se ramène en général à un des problèmes suivants par manipulations techniques. On adoptera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{R}^r \text{ et } P(x), Q(x), R(x) \text{ des contraintes LMI.} \\ c \in \mathbf{R}^r \end{aligned} \quad (\text{Eq. A.3.4})$$

Définition *Problème de faisabilité*

Trouver un élément x de l'ensemble

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbf{R}^r / P(x) > 0\} \quad (\text{Eq. A.3.5})$$

Définition *Minimisation de coût linéaire*

On cherche à minimiser un objectif linéaire sous une contrainte LMI :

$$\min_{x \in \mathbf{R}^r} (c^T x / P(x) > 0) \quad (\text{Eq. A.3.6})$$

Définition *Minimisation de valeur propre généralisée*

On cherche à minimiser la plus grande valeur propre généralisée du système (P, Q) sous la contrainte LMI $R(x) > 0$, c'est-à-dire :

$$\min_{(\lambda, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^r} \left(\lambda / \begin{cases} \lambda P(x) - Q(x) > 0 \\ P(x) > 0 \\ R(x) > 0 \end{cases} \right) \quad (\text{Eq. A.3.7})$$

Remarque :

ce problème est quasi-convexe alors que les deux précédents sont convexes.

Exemple classique

On se propose ici d'étudier la stabilité asymptotique par fonction de Lyapunov d'un système libre d'ordre n régi par l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \text{ où } \begin{cases} x \in \mathbf{R}^n \\ A \in \mathbf{R}^{n \times n} \end{cases} \quad (\text{Eq. A.3.8})$$

Soit V une fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(x) = x^T X x \text{ où } X \in \mathbf{R}^{n \times n} / X = X^T > 0 \quad (\text{Eq. A.3.9})$$

L'étude de la stabilité s'exprime sous la forme d'un problème de faisabilité LMI c'est-à-dire qu'il suffit de montrer que

$$\left\{ X \in \mathbf{R}^{n \times n} / X = X^T > 0 \text{ et } A^T X + X A < 0 \right\} \neq \emptyset \quad (\text{Eq. A.3.1})$$

Puisque P est symétrique, on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n x_{ij} X_{ij} \quad (\text{Eq. A.3.10})$$

où X_{ij} est une matrice dont les seuls termes non nuls sont les éléments (i, j) et (j, i) qui valent 1. Le problème devient alors de montrer que l'ensemble suivant est non vide :

$$\left\{ x \in \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} / X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n x_{ij} X_{ij} > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n x_{ij} (A^T X_{ij} + X_{ij} A) < 0 \right\} \quad (\text{Eq. A.3.11})$$

Cet ensemble peut se réécrire sous la forme

$$\left\{ x \in \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} / \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n x_{ij} \begin{pmatrix} -X_{ij} & 0 \\ 0 & A^T X_{ij} + X_{ij} A \end{pmatrix} < 0 \right\} \quad (\text{Eq. A.3.12})$$

ce qui montre que les inégalités $X > 0$ et $A^T X + X A < 0$ sont effectivement des LMI.

A.3.2 Les outils techniques

Ces outils permettent d'exprimer des problèmes d'analyse ou de commande de systèmes sous forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. En effet la mise sous forme LMI d'un problème d'optimisation consiste dans un

premier temps à traduire les contraintes par des inégalités matricielles que l'on tente ensuite de rendre affine en fonction des variables d'optimisation.

Le complément de Schur ou lemme de Schur est un outil fondamental dans le maniement des inégalités matricielles ; en effet il permet dans certains cas de mettre sous forme LMI des contraintes non linéaires.

Lemme Complément de Schur

Soient les matrices symétriques $(Q, S) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{m \times m}$ et la matrice $R \in \mathbf{R}^{n \times m}$, les 2 propositions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \begin{pmatrix} Q(x) & R(x) \\ R^T(x) & S(x) \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{Eq. A.3.13})$$

$$(ii) Q > 0 \text{ et } S(x) - R(x)^T Q(x)^{-1} R(x) > 0 \quad (\text{Eq. A.3.14})$$

Si les matrices Q , R et S sont affines en x , alors (i) est affine en x alors que (ii) ne l'est pas.

La preuve de ce résultat se trouve dans [HJ85] et repose sur la remarque suivante :

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -R^T Q^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ R^T & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -Q^{-1}R \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S - R^T Q^{-1}R \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. A.3.15})$$

Exemple d'application

Soit $A(x) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ une matrice affine en x , on cherche à mettre sous forme LMI le problème suivant : trouver x tel que la plus grande valeur singulière de A soit minimisée, c'est-à-dire :

$$(x, \lambda) = \min_{x, \lambda > 0} (\lambda / \lambda I_m - A(x)^T A(x) > 0) \quad (\text{Eq. A.3.16})$$

Pour le couple (x, λ) vérifiant la relation (A.3.17), la plus grand valeur singulière de A est en effet $\sqrt{\lambda}$. On remarque que le problème n'est pas affine en (x, λ) . En appliquant directement le lemme de Schur, on transforme l'inégalité matricielle en

$$\begin{pmatrix} I_m & A(x) \\ A(x)^T & \lambda I_m \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{Eq. A.3.17})$$

Le problème est maintenant de type LMI car affine en λ et x .

Le *lemme de complétion* ou *lemme d'élimination* est utilisé en synthèse pour rendre linéaire un problème bilinéaire, par projection.

Lemme d'élimination

Soient trois matrices $G \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbf{R}^{n \times p}$, $V \in \mathbf{R}^{n \times q}$, les trois problèmes (i), (ii) et (iii) sont équivalents.

$$(i) \exists K \in \mathbf{R}^{p \times q} / G + UKV^T + VK^T U^T < 0 \quad (\text{Eq. A.3.18})$$

$$(ii) \begin{cases} U_{\perp}^T G U_{\perp} < 0 \\ V_{\perp}^T G V_{\perp} < 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. A.3.19})$$

$$(iii) \exists \sigma \in \mathbf{R} / \begin{cases} G - \sigma U U^T < 0 \\ G - \sigma V V^T < 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. A.3.20})$$

U_{\perp} et V_{\perp} sont les compléments orthogonaux des matrices U et V respectivement ; le complément orthogonal de U est la matrice $U_{\perp} \in \mathbf{R}^{n \times (n-p)}$ telle que :

$$U_{\perp}^T U = 0 \text{ et } \text{rang}(\begin{bmatrix} U & U_{\perp} \end{bmatrix}) = n$$

Une démonstration de ce résultat est disponible dans [BEFB94].

Le lemme de la S -procédure est utile pour transformer un ensemble de contraintes quadratiques non convexes en une contrainte quadratique convexe.

Lemme S -procédure

Considérons les matrices $T_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ avec $i = 0 \dots k$ et les formes quadratiques associées

$$\forall u \in \mathbf{R}^n, F_i(u) = u^T T_i u, \quad (\text{Eq. A.3.21})$$

alors la proposition (i) implique la proposition (ii).

$$(i) \exists \tau_i \in \mathbf{R}_+ / F_0(u) - \sum_{i=1..k} \tau_i F_i(u) > 0 \quad (\text{Eq. A.3.22})$$

$$(ii) F_0(u) > 0 \text{ pour tout } u \neq 0 \text{ tel que } \forall i \in I, F_i(u) \geq 0 \quad (\text{Eq. A.3.23})$$

Quand $k=1$, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes s'il existe un u_0 tel que :

$$F_1(u_0) > 0 \quad (\text{Eq. A.3.24})$$

Il est de plus possible d'obtenir l'équivalence des deux propositions lorsque les formes quadratiques F_i sont des intégrales quadratiques. Pour plus de détails, on se reportera à la thèse de Gérard Scorletti [Sco97].

Il existe aussi une version matricielle de la S-procédure qui est la suivante :

Lemme Corollaire de la S-procédure

Soient $A = A^T, B, C, D, U = U^T, V, W = W^T$ des matrices réelles de taille compatibles telles que

- C est de rang plein

- la matrice $\begin{pmatrix} U & V \\ V^T & W \end{pmatrix}$ possède une valeur propre positive

Alors les propositions (i) et (ii) sont équivalentes

$$(i) \begin{pmatrix} A - C^T W C & B - C^T V - C^T W D \\ B^T - V^T C - D^T W C & -U - D^T V - V^T D - D^T W D \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{Eq. A.3.25})$$

$$(ii) \quad \forall \Delta / \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} U & V \\ V^T & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} \geq 0, \quad (\text{Eq. A.3.26})$$

$$\begin{cases} \det(I - D\Delta) \neq 0 \\ A + B\Delta(I - D\Delta)^{-1}C + C^T(I - D\Delta)^{-T} \Delta^T C^T > 0 \end{cases}$$

A.3.3 Les BMI

Un nombre important de problèmes de commande robuste ne peuvent pas s'exprimer sous forme LMI, cependant Safonov a proposé la notion de BMI (Bilinear Matrix Inequality) [SGL96, GTSP94 GSP94, MSP00, GSP95, SP94] qui peut être vue comme une généralisation de la notion de LMI.

Définition Inégalité Matricielle Bilinéaire

Le problème d'optimisation de faisabilité BMI est défini par :

Trouver x sous la contrainte BMI :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j,k=1,1}^{m,m} x_j x_k F_{jk} \geq 0 \quad (\text{Eq. A.3.27})$$

avec des matrices symétriques données :

$$\begin{aligned} F_i &= F_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n} \\ F_{jk} &= F_{jk}^T \in \mathbf{R}^{n \times n} \end{aligned} \quad (\text{Eq. A.3.28})$$

Il n'existe pas aujourd'hui de méthode exacte pour résoudre ce genre de problèmes mais des heuristiques ont été mises en place dans différents cadres. Une classification des différents problèmes et des approches qui y sont adaptées est aujourd'hui une préoccupation conjointe de l'automatique et de l'analyse numérique.

A.4. Les LMI : un outil performant

Les travaux actuels utilisant le formalisme LMI, que nous allons expliciter dans la suite, considèrent les problèmes d'automatique sous l'angle de l'optimisation de critères. Se posent alors des problèmes inhérents à cette représentation :

- Les critères d'optimisation choisis ne doivent pas se révéler trop conservatifs pour permettre d'aboutir à une solution
- Afin d'obtenir une formulation de problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI, il est nécessaire de s'assurer de la convexité des critères choisis.
- Il s'agit ensuite de traduire les critères sous forme de problèmes d'optimisation convexe
- Les solutions analytiques à ce type de problèmes restent marginales et sont difficiles à obtenir dès que la taille du problème s'élève un peu.

Aujourd'hui, il existe des algorithmes performants pour la résolution des problèmes d'optimisation convexe sous contrainte LMI mais les temps de calcul s'avèrent très vite rédhibitoires dès que la taille des systèmes devient conséquente. Ainsi la taille du modèle, sa réduction, la représentation des contraintes, la taille des ensembles considérés sont autant d'éléments délicats dans la mise en place informatique des problèmes.

A.5. Les algorithmes d'optimisation convexe

La résolution d'un problème sous contraintes LMI pose des problèmes numériques qui se révèlent gênants. Les temps de calcul importants, la non convergence des algorithmes pour les problèmes de grand taille ou numériquement mal conditionnés ont largement limité les études utilisant ce formalisme. Même s'il existe aujourd'hui des outils de calcul performants, dès que la taille d'un problème devient conséquente, le temps de calcul devient prohibitif. Ainsi la recherche d'algorithme qui facilitent la résolution des problèmes LMI reste d'actualité.

Depuis la fin des années 80, les travaux sur l'optimisation des problèmes convexes font l'objet de nombreuses recherches. Les paragraphes qui suivent résument les méthodes de résolution algorithmique les plus utilisées.

Il existe par ailleurs des boîtes à outils pour la résolution des problèmes LMI, on peut citer notamment la *LMI Control Toolbox* du logiciel Matlab [GNLC95]. Cependant les temps de calcul et les interfaces ne sont pas toujours à la hauteur des résultats attendus. Il existe aujourd'hui des développements autour des différents algorithmes pour mettre en place des outils plus

conviviaux et surtout plus rapides. On peut citer en particulier les travaux de D. Peaucelle au LAAS-CNRS de Toulouse [AP01].

A.5.1 Algorithme de l'ellipsoïde

Il s'agit d'un algorithme simple développé par Shor, Nemirovskii et Yudin [NY83, Sho85] à partir des résultats de [BGT81]. Il permet de résoudre en temps polynomial des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMI.

L'idée principale réside dans la construction d'un algorithme qui détermine des ellipsoïdes de volume décroissant avec la garantie de toujours contenir le point optimal. Voici en 4 étapes le déroulement de cet algorithme.

1. Initialiser l'algorithme par la recherche d'un ellipsoïde dont on sait qu'il contient le point optimal.
2. Couper cet ellipsoïde par un plan sécant passant par son centre.
3. Déterminer le plus petit ellipsoïde qui enveloppe le demi-ellipsoïde précédent contenant la solution.
4. Itérer le processus en 2 jusqu'à obtenir un ellipsoïde suffisamment petit.

On trouvera une présentation plus précise de cet algorithme dans [BE93, BEFB94].

On montre que la suite des volumes observe une décroissance géométrique, ce qui garantit un temps de convergence polynomial. Malgré ce point la mise en œuvre pratique conduit à des temps de calcul souvent prohibitifs. De plus une grande difficulté vient du choix de l'ellipsoïde initial.

A.5.2 Méthodes de points intérieurs

Les techniques d'optimisation dites de points intérieurs ont été développées par Y. Nesterov et A. Nemirovskii à la fin des années 80 [NN88, NN94, NS98]. Elles se sont rapidement révélées performantes en terme de rapidité de convergence et ont suscité par la suite de nombreuses améliorations.

Pour le problème de minimisation d'une fonction convexe $f(x)$ satisfaisant une contrainte LMI, la méthode repose sur l'introduction d'une fonction barrière. C'est-à-dire une fonction ϕ différentiable qui possède en outre les 2 propriétés suivantes :

1) ϕ est strictement convexe sur l'ensemble admissible de la LMI

$$\mathbf{F} = \{x \in \mathbf{R}^m / F(x) > 0\} \quad (\text{Eq. A.5.1})$$

2) Pour toute suite x_n de points de \mathbf{F} convergeant vers la frontière de \mathbf{F} ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\phi(x_n)) = +\infty \quad (\text{Eq. A.5.2})$$

On peut alors transformer le problème de minimisation sous contrainte non différentiable en problème d'optimisation différentiable non contraint :

$$\min(t f(x) + \phi(x)) \quad (\text{Eq. A.5.3})$$

où t est appelé paramètre de pénalisation.

Une fonction barrière candidate à la résolution du problème de faisabilité est la fonction suivante :

$$\phi(x) = \begin{cases} -\log(\det(F(x))) & \text{si } x \in \mathbf{F} \\ +\infty & \text{si } x \notin \mathbf{F} \end{cases} \quad (\text{Eq. A.5.4})$$

Index des figures

Figure 1.1. Boucle de correction.....	16
Figure 1.2 Interconnexion de P et K.....	24
Figure 2.1 Principe de paramétrisation.....	33
Figure 2.2 Interconnexion $P * K$	34
Figure 2.3. Principe de la paramétrisation de Youla.....	34
Figure 2.4. Forme générale de la paramétrisation de Youla.....	37
Figure 2.5 Paramétrisation de Youla pour un système stable.....	42
Figure 2.6 Paramétrisation de Youla d'un système instable.....	43
Figure 2.7 Paramétrisation de Youla d'un correcteur par retour d'état estimé.....	45
Figure 2.8. Equivalence avec un correcteur de type observateur / retour d'état utilisant la paramétrisation de Youla.....	47
Figure 3.1. Illustration de l'optimalité au sens de Pareto.....	71
Figure 3.2 Ensemble des points faisables.....	76
Figure 3.3 a. Objectifs faiblement couplés – b. Objectifs fortement couplés.....	76
Figure 3.4 Boucle de correction.....	83
Figure 3.5. Forme générale de la paramétrisation de Youla.....	86
Figure 3.6 Structure avec un Q dynamique.....	90
Figure 3.7 Système augmenté par une batterie de retards.....	91
Figure 3.8 Bras flexible.....	95
Figure 3.9 Représentation de Bode des 3 modèles de bras souple.....	96
Figure 3.10 Schéma de synthèse (première approche).....	99
Figure 3.11 Diagramme de Bode du correcteur.....	101
Figure 3.12. Diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte corrigée (contours à 1 dB, 3 dB et 6 dB).....	102
Figure 3.13 Fonctions de sensibilité S et KS.....	102
Figure 3.14 Réponses à un échelon de consigne.....	102

Figure 3.15. Réponses à un échelon de perturbation	103
Figure 3.16 Incertitude sur le mode M_i	104
Figure 3.17 Schéma de synthèse (deuxième approche)	104
Figure 3.18 Diagramme de Bode du correcteur	107
Figure 3.19 Diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée pour les 3 modèles (contours à 1 dB, 3 dB et 6 dB).....	107
Figure 3.20 Fonctions de sensibilité S et KS	108
Figure 3.21 Fonction de suivi de trajectoire S_{bis}	108
Figure 3.22 Réponse à un échelon de consigne	108
Figure 3.23 Réponse à un échelon de perturbation	109
Figure 3.24 Système à régler	111
Figure 3.25. Synthèse H_2	113
Figure 4.1 Principe du séquençement de gains	123
Figure 4.2 Principe de l'interpolation	129
Figure 4.3 Evolution du correcteur dans le temps.....	136
Figure 4.4 Trajectoire aléatoire.....	141
Figure 4.5 Evolution des gains entre les différents instants.....	142
Figure 4.6 Evolution du gain d'observateur dans le temps	144
Figure 4.7. Système d'enroulement.....	148
Figure 4.8. Gains de retour d'états	151
Figure 4.9. Gains de retour de vitesse	152
Figure 4.10. Réponse temporelle de la vitesse à des conditions initiales appliquées tous les 40 pas.	152
Figure 4.11. Réponse temporelle de la commande à des conditions initiales appliquées tous les 40 pas.	153
Figure 5.1 Principe du guidage – pilotage.....	159
Figure 5.2 Axe de lacet et aux petits angles.....	160
Figure 5.3 – Illustration d'un mode de flexion.....	166
Figure 5.4 – Définition des forces.....	167
Figure 5.5 Allures des courbes d'évolution de A_6 et K_1	174
Figure 5.6 Schéma bloc du lanceur (prise en compte de 2 modes souples).....	178
Figure 5.7 Diagrammes de Bode du lanceur	180
Figure 5.8 Allure typique du diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée....	182

Figure 5.9 Vent de référence.....	183
Figure 5.10 Simulateur de la boucle fermée	185
Figure 5.11 Modèle du lanceur à 5 modes souples	186
Figure 5.12 Fonctionnalités du benchmark.....	186
Figure 5.13 Interface graphique du benchmark	188
Figure 6.1 Vent de référence.....	192
Figure 6.2. Modèle de synthèse du lanceur.....	194
Figure 6.3. Schéma de synthèse	195
Figure 6.4. Schéma de simulation.....	195
Figure 6.5 Résultats fréquentiels – étape 1	198
Figure 6.6 Résultats temporels – étape 1	199
Figure 6.7 Résultats fréquentiels – étape 1bis	201
Figure 6.8 Résultats temporels – étape 1bis.....	202
Figure 6.9 Résultats fréquentiels – étape 2	206
Figure 6.10 Résultats temporels – étape 2	207
Figure 6.11 Diagramme de Black avec les modes souples – étape 2.....	207
Figure 6.12 Résultats fréquentiels – étape 3	210
Figure 6.13 Résultats temporels – étape 3	211
Figure 6.14 Résultats temporels – étape 3 bruitée	212
Figure 6.15. Comparaison des diagrammes de Bode du correcteur initial et du correcteur réduit	214
Figure 6.16 Résultats temporels – correcteur réduit	215
Figure 7.1 Système de synthèse	221
Figure 7.2 Exemples de choix de points	222
Figure 7.3 Evolution du paramètre A_6	223
Figure 7.4 Evolution du paramètre K_1	224
Figure 7.5 Evolution de la fréquence du premier mode souple	224
Figure 7.6 Evolution des gabarits de synthèse.....	226
Figure 7.7 Evolution et affectation des valeurs propres de la boucle fermée.....	227
Figure 7.8 Evolution du correcteur dans le temps	229
Figure 7.9 Evolution du gain de retour d'état	233
Figure 7.10 Evolution de la 1 ^{ère} colonne du gain d'observation	233

Figure 7.11 Evolution de la 2 nd e colonne du gain d'observation.....	234
Figure 7.12 Ensemble de linéarisés tangents de la boucle ouverte corrigés	235
Figure 7.13 Simulation temporelles pour le correcteur interpolé	236
Figure 7.14 Ensemble des diagrammes de Black des boucles ouvertes corrigées pour les pires cas de l'ensemble des points de vol	237
Figure 7.15 Etude a posteriori de la robustesse de l'interpolation	239

Index de tableaux

Tableau 1-I. Exemples de fonctions de stabilité	22
Tableau 1-II Etude de la stabilité	23
Tableau 3-I Paramètres des 3 modèles	96
Tableau 3-II Résultats temporels.....	100
Tableau 3-III Résultats fréquentiels	101
Tableau 3-IV Résultats temporels.....	106
Tableau 3-V Résultats fréquentiels.....	106
Tableau 3-VI Boîte à outils pour synthèse avec fonction de Lyapunov unique (temps discret).....	116
Tableau 3-VII Boîte à outils pour synthèse avec fonctions de Lyapunov différentes (temps discret).....	117
Tableau 3-VIII Boîte à outils pour synthèse avec fonction de Lyapunov unique (temps continu)	118
Tableau 3-IX Boîte à outils pour synthèse avec fonctions de Lyapunov différentes (temps continu).....	119
Tableau 5.I Liste des cas « pires »	181
Tableau 6-I Liste des cas « pires » étudiés.....	193
Tableau 6-II Performance (étape 1)	198
Tableau 6-III Performance (étape 1).....	200
Tableau 6-IV Performance (étape 2).....	205
Tableau 6-V Performance (étape 3).....	209
Tableau 6-VI. Décomposition modale pour l'agrégation	214
Tableau 7-I Analyse fréquentielle des linéarisés tangents.....	235
Tableau 7-II Analyse temporelle des pires cas.....	238

Titre

Synthèse multiobjectifs et séquençement de gains : application au pilotage d'un lanceur spatial.

Résumé

Les travaux de notre Thèse reposent sur des réflexions menées sur la problématique du pilotage des lanceurs spatiaux ; celles-ci nous ont conduit à considérer les thèmes de la synthèse multiobjectifs et du séquençement de gains dans le cadre de la commande numérique de systèmes flexibles non stationnaires, en utilisant des méthodes d'optimisation convexe.

La paramétrisation de Youla, caractérisation de l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné, nous a permis de développer une méthode de synthèse multiobjectifs qui a le triple avantage de transformer le problème initial en un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI (inégalités matricielles linéaires), de réduire le conservatisme de la synthèse, et de proposer un correcteur structuré sous la forme classique d'un observateur et d'un retour d'état. C'est aussi cette structuration qui nous a amené à considérer l'interpolation de correcteurs sous cette forme spécifique dans le cadre de la commande par gains séquencés de systèmes linéaires non stationnaires.

En expérimentant ces méthodes sur le pilotage d'un lanceur spatial, notre objectif est de montrer que les aspects théoriques (structuration d'un correcteur, synthèse multiobjectifs et interpolation de correcteurs) se révèlent facilement adaptables aux spécificités du problème posé : ils se situent à mi-chemin entre préoccupations pratiques et bases théoriques générales.

Les aspects pratiques de la validation de ces expérimentations sont mis en œuvre sur un simulateur numérique que nous avons développé en collaboration avec le *CNES*, *EADS Launch Vehicles* et l'*ONERA*.

Mots-clés

synthèse multiobjectifs	optimisation LMI	paramétrisation de Youla
séquencement de gain	interpolation	structuration de correcteurs
guidage / pilotage	lanceur spatial	

Title

Multiobjective synthesis and gain scheduling: application to an aerospace launcher guidance

Summary

The work of our Thesis relies on reflections carried out on the guidance problems for space launchers; These ones led us to consider the topics of multiobjective synthesis and gain scheduling within the framework of the discrete-time control for linear time varying (LTV) flexible systems, based on convex optimisation methods.

The Youla parameterisation, characterising the set of all stabilising controllers for a given system, makes possible the development of a method for multiobjective synthesis. It presents the triple advantage of: transforming the initial problem into a convex optimisation problem under LMI (linear matrix inequalities) constraints, reducing the conservatism of the synthesis, and proposing a structured controller in the traditional form with an observer and a state feedback. This structuration also took us along to consider the interpolation of the controllers in this specific form within the LTV systems gain scheduling framework.

By performing out these methods to design a space launcher autopilot, our main objective is to show that the theoretical aspects (structuration of a given controller, multiobjective synthesis and interpolation of controllers) appear to be easily adaptable to the specificities of the arising problem: they are located halfway between the practical concerns and very general theoretical bases.

The practical aspects of these experiments validation are performed on a numerical simulator which has been developed in collaboration with the *CNES* (French Space Agency), *EADS Launch Vehicles* and *ONERA*.

Keywords

multiobjective synthesis	LMI Optimisation	Youla parameterisation
gain scheduling	interpolation	controller structuration
guidance	space launcher	