ENSTA Bretagne

Simulation de robots en MATLAB

Fabrice LE BARS

Rappels sur les équations d'état

- Modélisation de systèmes avec des équations d'état
  - Le fonctionnement de très nombreux systèmes (voiture, bateau…) de la vie quotidienne peut être modélisé par des équations d'état
  - Equation d'état/représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) & \text{équation d'évolution} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) & \text{équation d'observation} \end{cases}$$

  - Variables d'état : en général les variables nécessaires pour dessiner le système à un t donné + celles permettant de prévoir ce qui se passera au t suivant

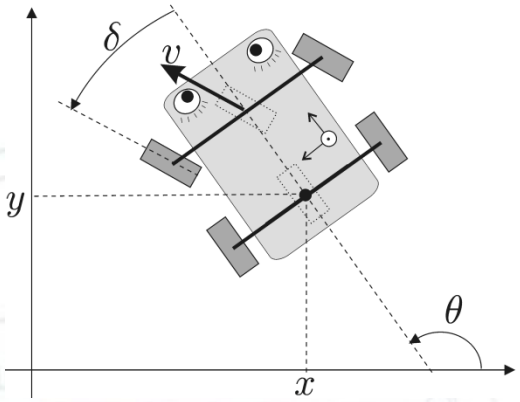
Rappels sur les équations d'état

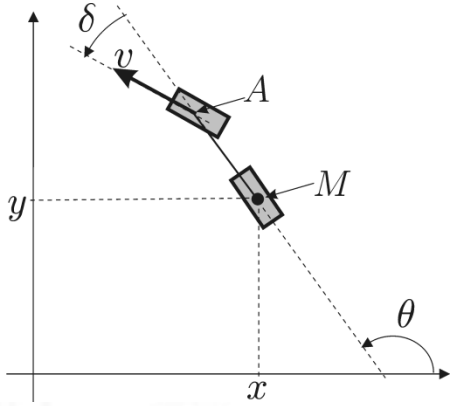
- Modélisation de systèmes avec des équations d'état
  - Etat : vecteur souvent noté $\mathbf{x}$ regroupant les variables d'état
  - Entrées : vecteur souvent noté $\mathbf{u}$ regroupant en général les signaux de commande directement envoyés au système, ou parfois leurs mesures plus ou moins directes
  - Sorties : vecteur souvent noté $\mathbf{y}$ regroupant en général les variables intéressantes mesurées par les capteurs du système

Rappels sur les équations d'état

- Modélisation de systèmes avec des équations d'état
  - Equation d'évolution : équation différentielle permettant de savoir vers où va se diriger l'état x(t) sachant sa valeur à l'instant présent t et la commande u(t) actuelle
  - Equation d'observation : calcul des sorties y(t) actuelles en fonction de l'état actuel x(t) et la commande actuelle u(t)
  - Exemple : voiture

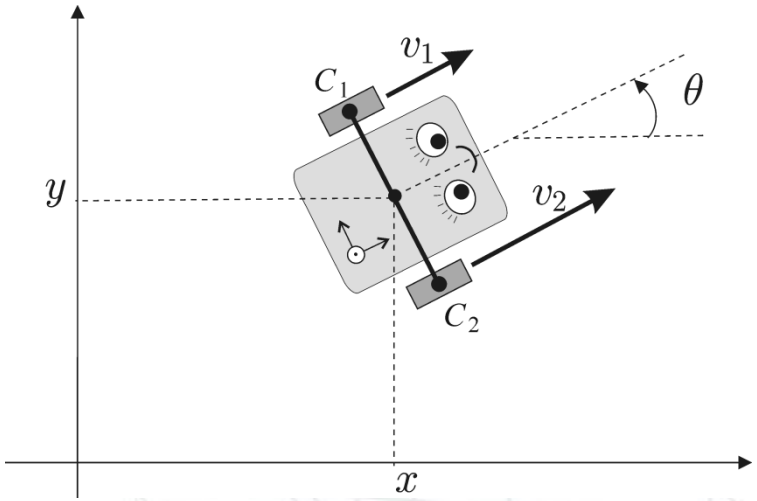
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\delta\cos\theta \\ v\cos\delta\sin\theta \\ \frac{v\sin\delta}{L} \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$





Rappels sur les équations d'état

- Modélisation de systèmes avec des équations d'état
  - Exemple : char



$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{r\alpha_1 u_1 + r\alpha_2 u_2}{2}\cos\theta \\ \dot{y} = \frac{r\alpha_1 u_1 + r\alpha_2 u_2}{2}\sin\theta \\ \dot{\theta} = \frac{r\alpha_2 u_2 - r\alpha_1 u_1}{l} \end{cases}$$

$$v = \frac{v_1+v_2}{2}$$

$$\omega = \frac{v_2-v_1}{l}$$

$$\omega_1 = \alpha_1 u_1$$

$$\omega_2 = \alpha_2 u_2$$

$$v_1 = r\omega_1$$

$$v_2 = r\omega_2$$

r Rayon des roues

Distance entre roues

Rappels sur les équations d'état

- Modélisation de systèmes avec des équations d'état
  - Exemple : autre type de char

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

  - Exemple : modèle de robot simple et assez général évoluant en 2.5D (e.g. quadrirotor, sous-marin…), souvent utilisé en post-traitement

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\cos u_4 - u_2\sin u_4 \\ u_1\sin u_4 + u_2\cos u_4 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Rappels sur les équations d'état

- Simulation par méthode d'Euler
  - Une fois qu'on a trouvé des équations d'état pour un système, il est bon de faire une simulation pour voir si elles représentent bien son comportement
  - Vu que l'équation d'évolution est une équation différentielle, on peut utiliser une méthode d'intégration numérique comme la méthode d'Euler :

Avec $\mathbf{x}(t+dt) \simeq \mathbf{x}(t) + dt.\dot{\mathbf{x}}(t)$

Vu l'équation d'évolution $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$

On a $\mathbf{x}(t+dt) \simeq \mathbf{x}(t) + dt.\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$

Outils pour la simulation en MATLAB

- Simulation par méthode d'Euler en MATLAB
  - Dans le code MATLAB, on va noter le vecteur d'état x comme un vecteur MATLAB, e.g. pour un modèle char $\mathbf{x} = (x, y, \theta, v)$:

MATLAB	$\rightarrow$	Théorie
$\mathbf{x}(1)$	$\rightarrow$	x
$\mathbf{x}(2)$	$\rightarrow$	y
$\mathbf{x}(3)$	$\rightarrow$	θ
$\mathbf{x}(4)$	$\rightarrow$	v

  - Les fonctions d'évolution f et d'observation g seront codées comme des fonctions MATLAB : e.g. pour f d'un modèle char

```
function xdot = f(x,u)
xdot = [x(4)*cos(x(3));
    x(4)*sin(x(3));
    u(1);
    u(2)];
end
```

Outils pour la simulation en MATLAB

- Simulation par méthode d'Euler en MATLAB
  - Une simulation en MATLAB pour un modèle char :

```
x = [0;0;0;10];
u = [0;0];
dt = 0.01;
t = 0;
while (t < 30)
    x = x+f(x,u)*dt;
    clf; draw(x);
    pause(dt);
    t = t+dt;
end
```

Outils pour la simulation en MATLAB

- Coordonnées homogènes
  - Pour dessiner un système simulé, on a souvent des rotations et des translations d'éléments à faire
  - Pour combiner ces 2 types d'opérations facilement, on peut utiliser le formalisme des coordonnées homogènes

    e.g. si on veut faire une rotation de theta puis une translation de x,y, il nous faut définir la matrice

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Outils pour la simulation en MATLAB

- Coordonnées homogènes
  - Le motif 2D des lignes représentant notre système au repos (**x=0**) devra être défini comme une matrice

    M=[coordonnées x…;coordonnées y…;1…]
  - Les 1 de la 3èmes colonnes sont nécessaires pour que la multiplication par la matrice **R** fonctionne comme attendu

Outils pour la simulation en MATLAB

- Coordonnées homogènes en MATLAB
  - Dans le code MATLAB, e.g. pour un modèle char pour **x=0**

```
function draw(x)
M = [1 -1  0  0 -2 -2 0 0 -1 1 0 0 3  3  0;
    -2 -2 -2 -1 -1  1 1 2  2 2 2 1 1 -1 -1;
    1  1  1  1  1  1 1 1  1 1 1 1 1  1  1];
R = [ cos(x(3)) -sin(x(3))  x(1);
      sin(x(3))  cos(x(3))  x(2);
      0          0          1];
M = R*M;
plot(M(1,:),M(2,:),'b');
end
```