

Concept d'Invariance Relâchée pour le Calcul de Tubes de Capture

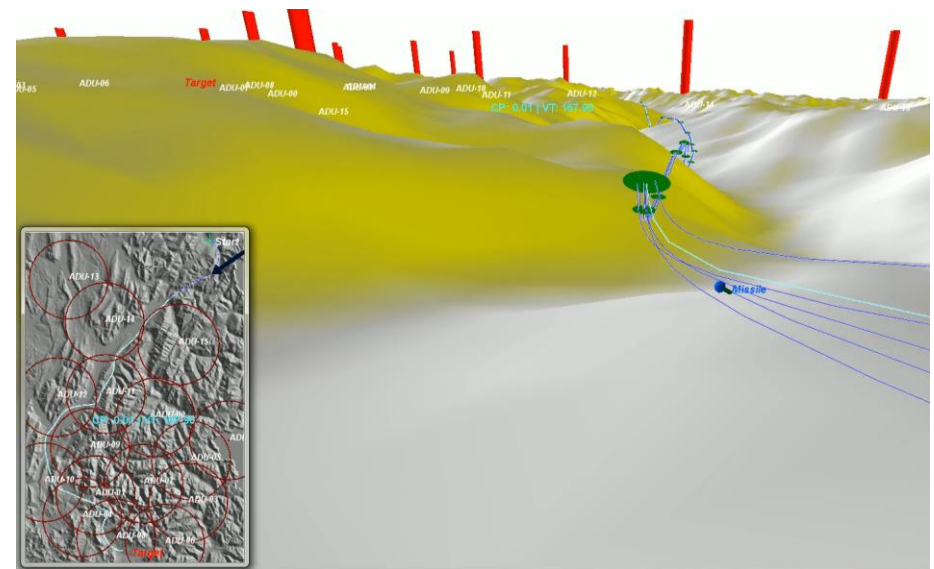
Stéphane Le Ménéec
MBDA

Jeudi 9 novembre 2017
Journée MEA GDR MACS
Nancy

*Projet bénéficiant du support de l'ANR-16-CE33-0024
Projet « CONTREDO »*

- Introduction / Contexte
- Modèle Cinématique
- Loi de Contrôle (Navigation / Localisation & Guidage)
- Invariance Ensembliste (V-Stabilité)
- Tube de Capture
- Approche Intervalles
- Invariance Relative
- Exemples
- Conclusions / Suites

- Planification de trajectoires
- Couloirs de navigation
 - Cf. couloirs de covariance de filtres de navigation
 - Compromis discrétion / collision terrain
- Enjeux :
 - Méthodes de Validation et Vérification plus rapides
 - Éviter les marges sur les marges
- Nouvelle approche basée invariance ensembliste
 - Moins de simulations
 - Preuve



Modèle Cinématique

- Point matériel
- Vecteur d'état de dimension 5
 - Position (x, y, z) et attitude (site, gisement)
- Contrôle de dimension 3
 - Module de la vitesse et vitesse angulaire
- Saturations sur les contrôles

```
function f(x[5],u[3])  
    x = cos(x[4])*cos(x[2]);  
    y = cos(x[4])*sin(x[2]);  
    z = sin(x[4]);  
    return (u[0]*x, u[0]*y, u[0]*z,  
           u[1], u[2]);  
end
```

- Consigne : trajectoire planifiée :
liste de points 4D (x, y, z, t) + vitesse (v_x, v_y, v_z)
- Calcul d'un vecteur vitesse consigne pour rejoindre en ligne droite le point de passage suivant
- Contrôle : module de vitesse et vitesse angulaire proportionnelle à l'écart entre le vecteur vitesse et la direction idéale
- Saturations
- Guidage cadencé au pas de temps de la trajectoire consigne

Contrôle

```
// calcule contrôle demandé (avant saturation)
Affine2Vector compute_control(Affine2Vector &x, Affine2Vector &xd ){
    // x(3) : point courant engin : x y z
    // xd(6) : point (x y z) consigne suivant : xd[0] xd[1] xd[2]
    // et vitesse consigne (xdot ydot zdot) désirée au point futur : xd[3] xd[4] xd[5]
    Affine2Vector res(3); // vitesse demandée

    // vitesse consigne (dt = 1 sec., pas waypoints trajectoire consigne)
    Affine2 nx(xd[0]-x[0]+xd[3]);
    Affine2 ny(xd[1]-x[1]+xd[4]);
    Affine2 nz(xd[2]-x[3]+xd[5]);

    Affine2 norm(sqrt(nx*nx+ny*ny+nz*nz));
    res[0] = norm; // control u0 : v : norme vitesse 3D

    double gain =10; // gain calcul vitesse angulaire

    Affine2 xp(cos(x[2])); // initialisation xp à cos(psi) ; cos circulaire / gisement
    Affine2 yp(sin(x[2])); // initialisation xp à sin(psi) ; sin circulaire / gisement

    Affine2 norm_xy(sqrt(ny*ny+nx*nx));
    Affine2 normv_xy(sqrt(xp*xp + yp*yp));
    Affine2 pv_xy((xp*ny - yp*nx)/(norm_xy*normv_xy));
    (res)[1] = gain*pv_xy; // control u1 : dot psi : (psi : angle de gisement)

    Affine2 xyp(cos(x[4]));
    Affine2 zp(sin(x[4]));
    Affine2 normv(sqrt(xp*xp + yp*xp + zp*zp));
    Affine2 pv((xyp*nz-zp*norm_xy)/(normv*norm));
    (res)[2] = gain*pv; // control u2 : dot theta (theta : angle d'élévation / site)

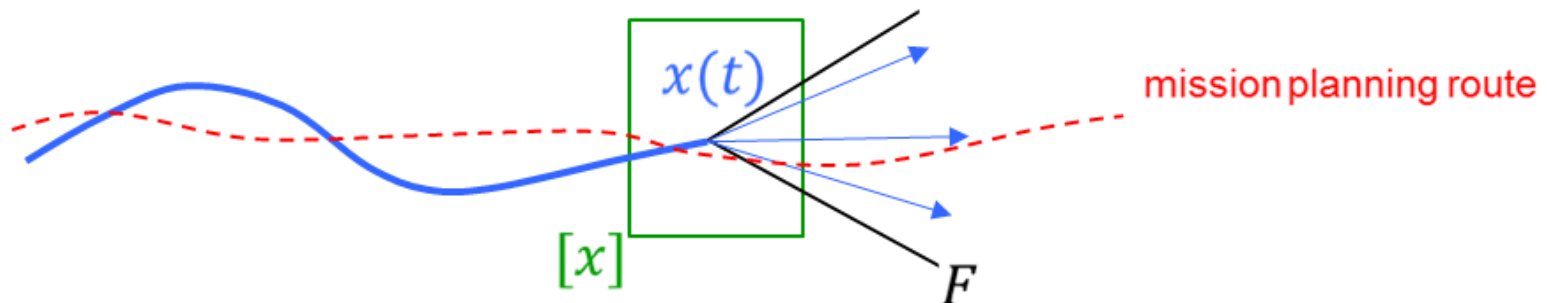
    return res;
}
```

Erreurs de Navigation

- Évolution incertaine engin due :
 - Aux erreurs de modèle (environnement, vent)
 - Et aux erreurs de localisation / navigation, état estimé utilisé pour le guidage
 - Navigation hybridée basée terrain (centrale inertielle + altimètre / carte terrain)
- Erreurs implémentées en intervalles (fonction du terrain à t)

$$\dot{x} = f(x, u(\hat{x}, t)) \rightarrow \dot{x} \in F(x, u([x], t))$$

Inclusion Différentielle



Invariance Ensembliste

- Systèmes non linéaires, approche sans linéarisation

The Lie derivative (also called directional derivative) of a function $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ with respect to a vector field $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is the function $\mathcal{L}_f V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\mathcal{L}_f V(x) = \frac{\partial}{\partial x} V(x) f(x). \quad (13.3)$$

A differentiable function $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be non-increasing along every trajectory of the system if each solution $x : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ satisfies

$$\dot{V}(x(t)) = \mathcal{L}_f V(x(t)) \leq 0,$$

or, equivalently, if each point $x \in X$ satisfies

$$\mathcal{L}_f V(x) \leq 0.$$

- Ensemble invariant

Given a dynamical system (X, f) , a set $W \subset X$ is invariant if each solution starting in W remains in W , that is, if $x(0) \in W$ implies $x(t) \in W$ for all $t \geq 0$.

Théorème de Krasovskii-LaSalle

- Convergence de système
- Caractéristique d'un ensemble invariant / attracteur

Theorem 13.4 (LaSalle Invariance Principle). *Consider a dynamical system (X, f) with differentiable f . Assume there exist*

(i) a compact set $W \subset X$ that is invariant for (X, f) , and


(ii) a continuously-differentiable function $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying $\mathcal{L}_f V(x) \leq 0$ for all $x \in X$.

Then each solution $t \mapsto x(t)$ starting in W , that is, $x(0) \in W$, converges to the largest invariant set contained in

$$\{x \in W \mid \mathcal{L}_f V(x) = 0\}.$$

Note: If the set S is composed of multiple disconnected components and $t \mapsto x(t)$ approaches S , then it must approach one of its disconnected components. Specifically, if the set S is composed of a finite number of points, then $t \mapsto x(t)$ must converge to one of the points.

V-Stabilité

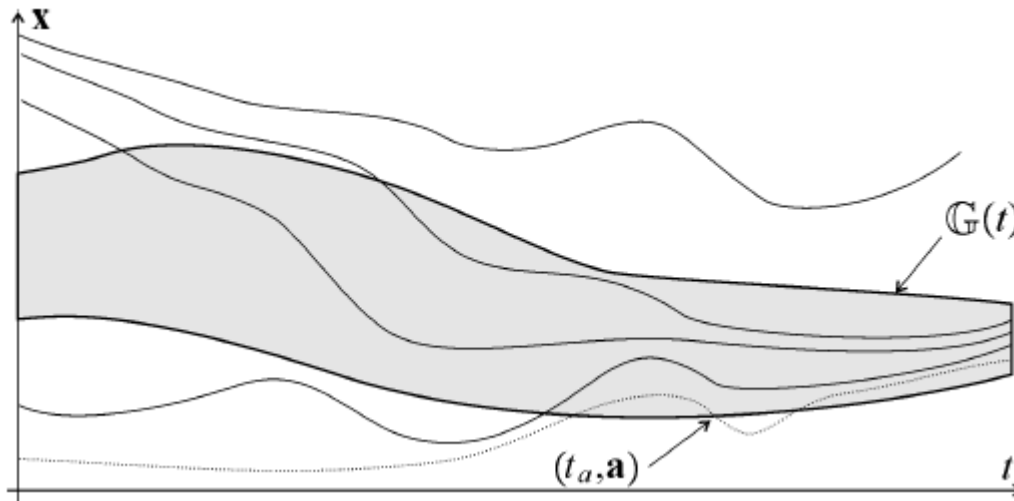
- Preuve qu'un ensemble est invariant
- Pas d'analyse complète d'attracteur ensembliste
- Preuve que la contraposée (système d'équations ci-dessous) n'a pas de solution
- Approche intervalle (contracteurs Ibex) 
- Ensemble invariant pré supposé
- Invariant $g(x, t)$ (fonction de potentiel V)
caractérisé par l'ensemble d'équations $g_i(x, t) \leq 0$

$$\begin{cases} (i) & \nabla g_i(x, t) = \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} \cdot f(x, t) + \frac{\partial g_i(x, t)}{\partial t} > 0 \\ (ii) & g_i(x, t) = 0 \\ (iii) & g(x, t) \leq 0 \end{cases}$$

Tube de Capture (de trajectoires)

- Cas d'un ensemble invariant dépendant du temps (V-Stabilité précédemment déjà écrite dans ce contexte)
- Tube de capture : « trace temporelle d'un ensemble invariant »

A set $\mathbb{G}(x,t)$ is called a (positive) invariant set if we have the following implication : $x(t) \in \mathbb{G}, \tau > 0 \Rightarrow x(t + \tau) \in \mathbb{G}$



Computing capture tubes

Luc Jaulin¹, Vincent Le Doze², Stéphane Le Menec², Jordan Ninin¹,
Gilles Chabert³, Mohamed Saad Ibseddik¹, Alexandru Stancu⁴

¹ Labsticc, IHSEV, OSM, ENSTA-Bretagne

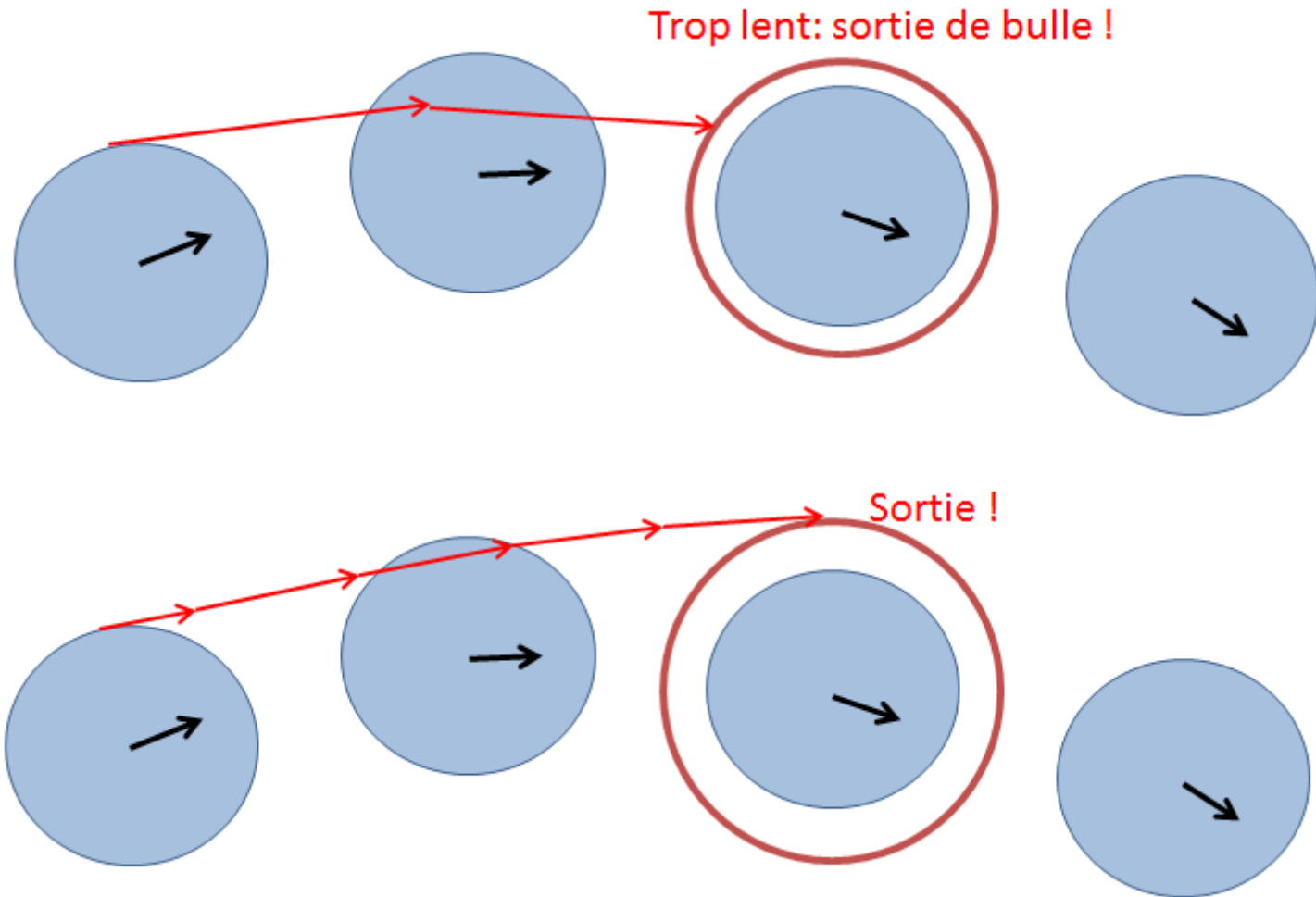
² MBDA-Airbus Group, Paris, France

³ Ecole des Mines de Nantes

⁴ Aerospace Research Institute, University of Manchester, UK

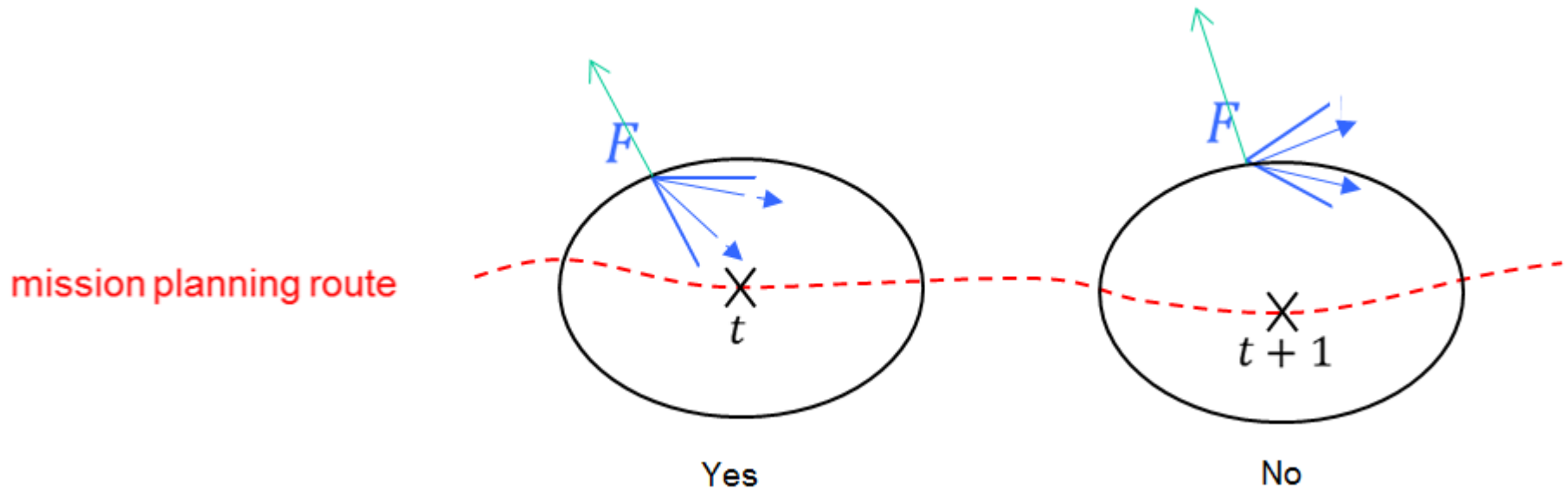
SCAN2015

Tube de Capture BubbIbex (temps discret)



BubbIbex (Phase 1)

- Preuve d'invariance sans intégration / simulation



Bulle BubbIbex

```
function g(x[5],t)
    // Xdpres : écart en position au point de passage courant, centre bulle
    ex=xdpres-x[0];
    ey=ydpres-x[1];
    ez=zdpres-x[3];

    // Xd : point de passage suivant, Xdd : vitesse au point de passage
    // calcul consigne en vecteur vitesse (pas de temps 1 sec.)
    nx=xd-x[0]+xdd;
    ny=yd-x[1]+ydd;
    nz=zd-x[3]+zdd;

    norm_xy=sqrt((ny)^2+(nx)^2);
    norm=sqrt((nx)^2+(ny)^2+(nz)^2);

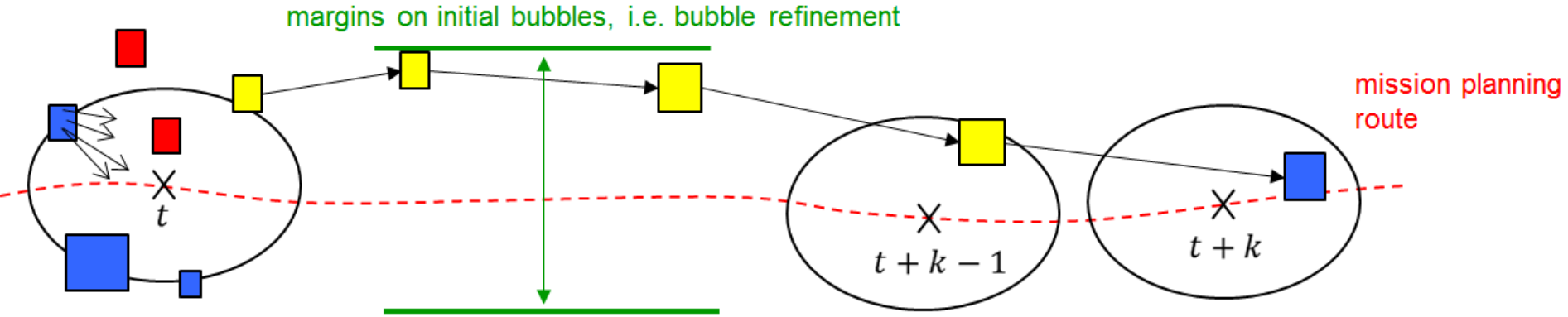
    // pour équations de bulle sur les variables d'état angulaires
    ecos_xy=nx/norm_xy-cos(x[2]);
    esin_xy=ny/norm_xy-sin(x[2]);
    ecos_xyz=norm_xy/norm-cos(x[4]);
    esin_xyz=nz/norm-sin(x[4]);

    return(
        (ex^2+ey^2+ez^2-5),
        (ecos_xy^2+esin_xy^2-0.00005),
        (ecos_xyz^2+esin_xyz^2-0.00005)
    );
end
```

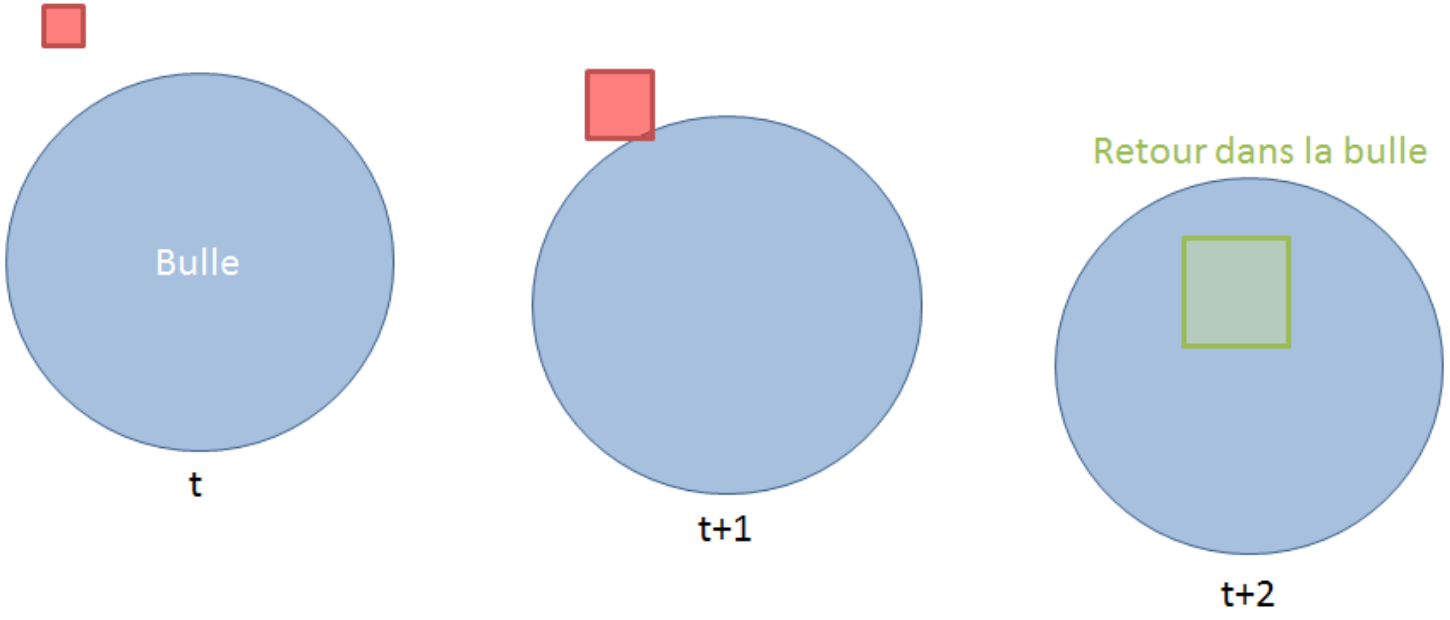
Invariance Relative

- Difficile de présupposer une bulle
- Impossible pour un système non holonome (commande en accélération : vitesse angulaire) de rentrer dans une bulle géométrique telle que définie précédemment
- Éviter de trop bissecter
- Bubbibex :
 - Phase 1 : preuve de non solution du système contraposé
 - Phase 2 : intégration / simulation intervalle pour prouver la « ré entrance » à $t + \Delta t$ (intégration intervalle forme affine)
- Invariance relative, calcul de marges
- Analyse d'invariance en temps discret

Intégration Intervalle

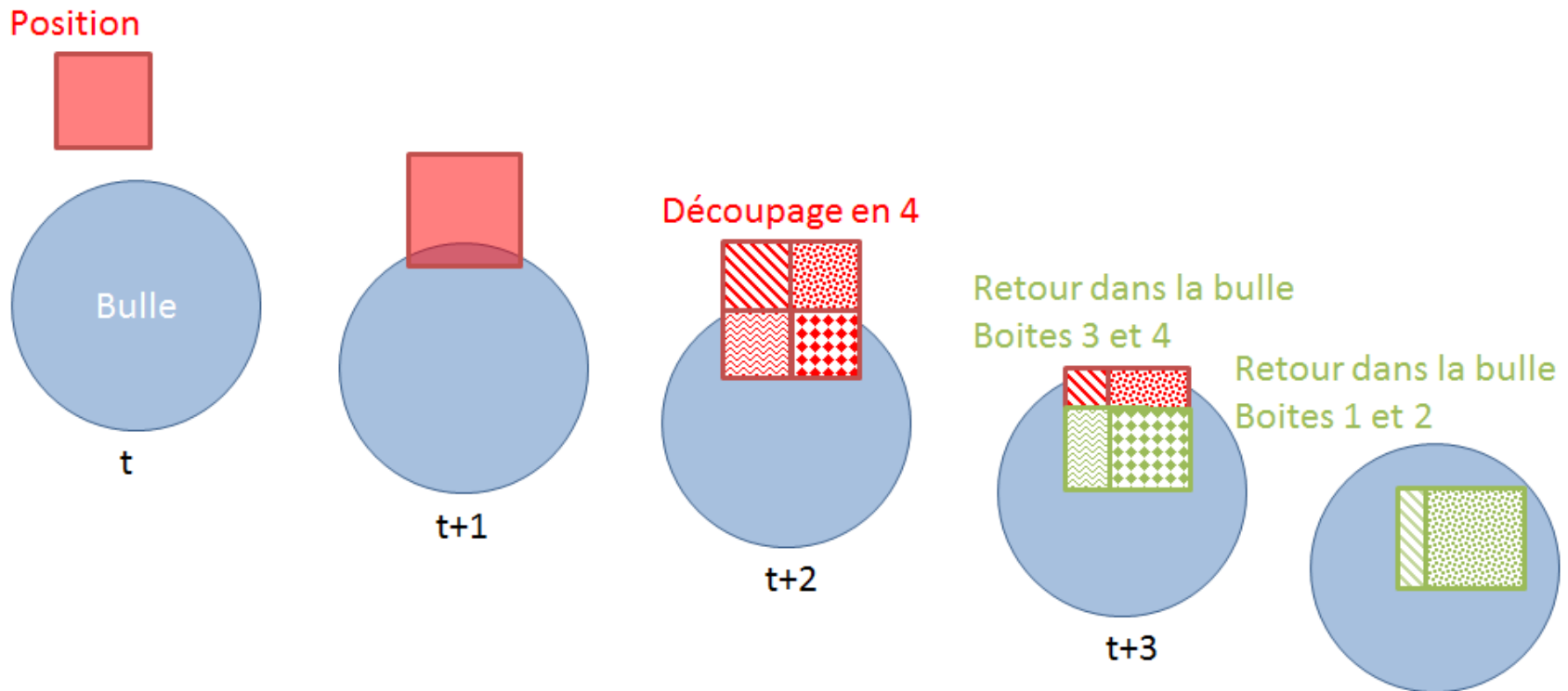


Position



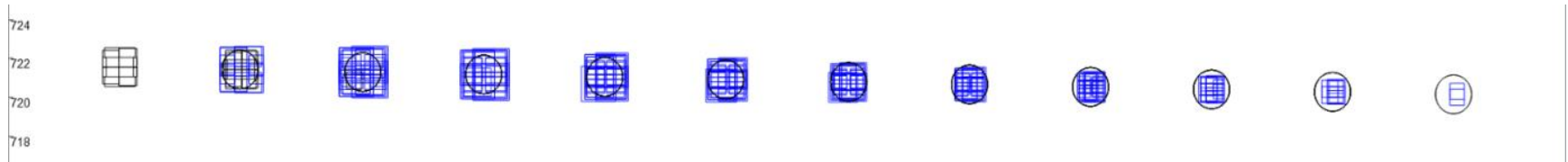
Phase 2 Algorithme BubbIbex

- Bisection dans l'intégration intervalle

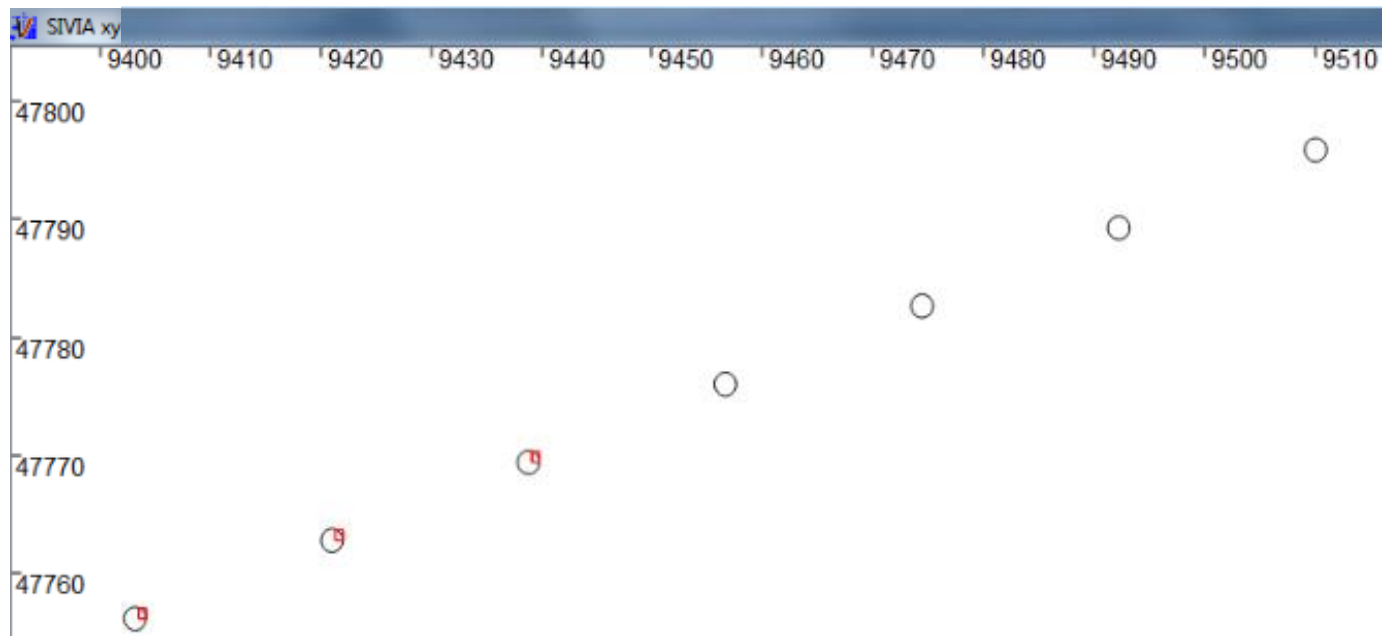


Résultats - 1

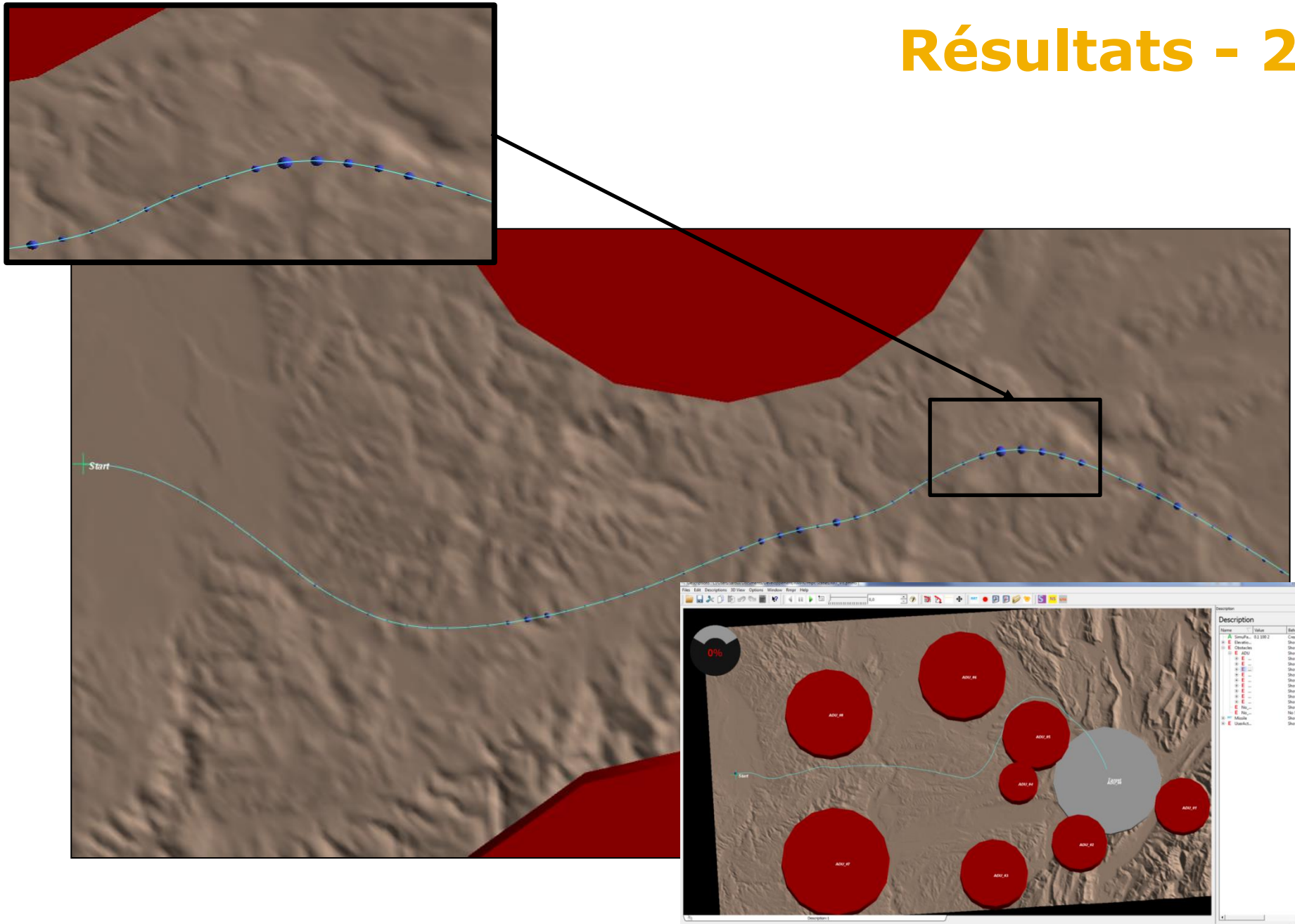
- Cas « ré entrance » (projection xy)



- Cas non « ré entrance » (à Δt)

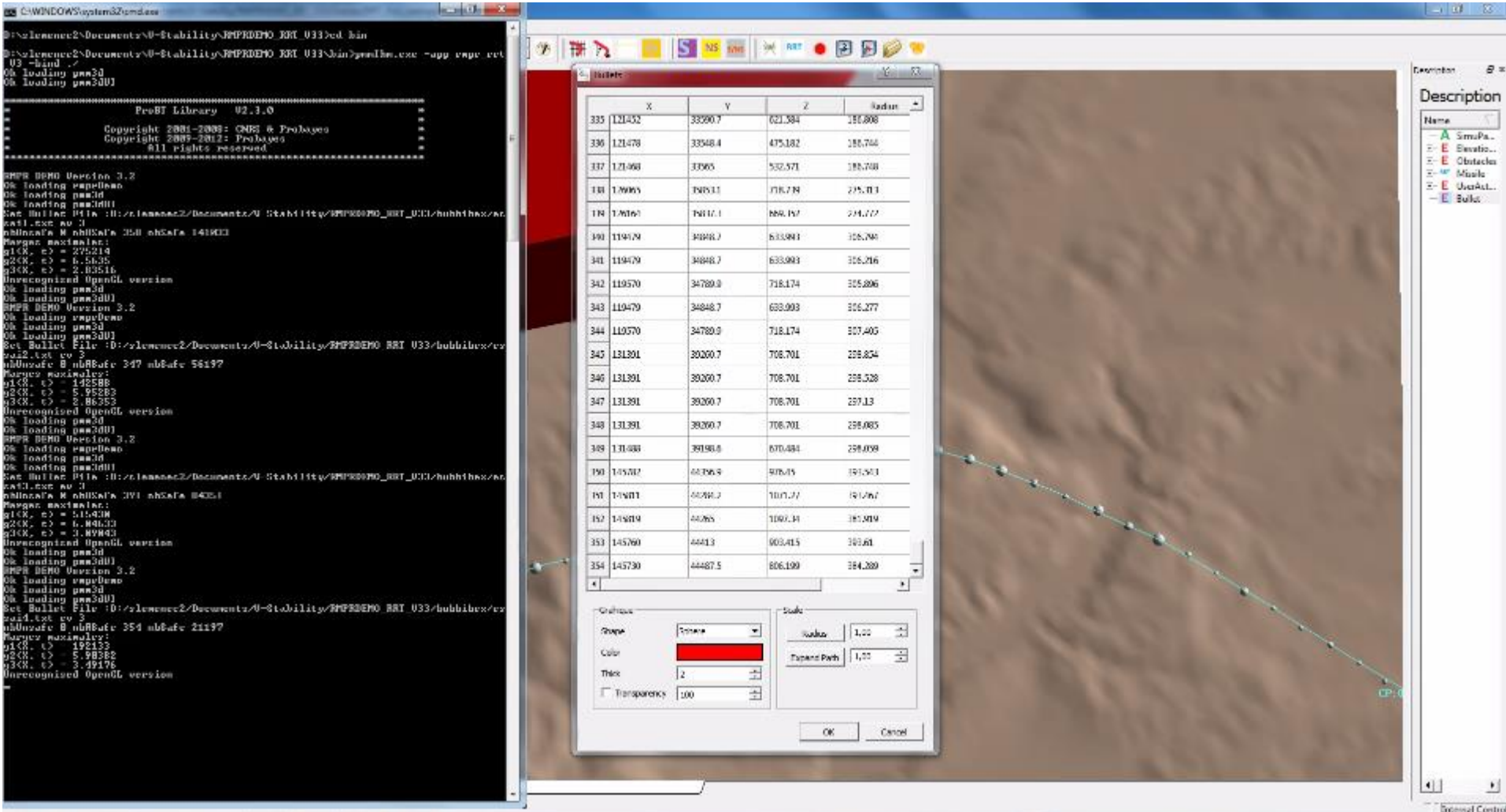


Résultats - 2



Vidéo RMPR

- Avec planner / autorouter / outil d'optimisation de trajectoires



- Résumé
 - V&V basée invariance ensembliste
 - Approche intervalle
 - Pas de linéarisation
 - Réduction du nombre d'intégration / simulation nécessaire
 - Preuve
 - Démarche inversée (hypothèse bulle ...) par rapport à l'habitude (optimisation trajectoire 2D, 3D, filtre navigation)
- Suites
 - Intégration garantie
 - Continu / discret
 - Utilisation de CONTRacteurs EDO
 - Guidage coopératif, vol en formation, essais