Méthodes par intervalles • Principe et Application

Luc Jaulin, Xavier Baguenard, Massa Dao, Pau Herrero

LISA-Angers

Séminaire d'Automatique de Paris

20 novembre 2002, 14h

Les méthodes intervalles permettent la résolution numérique et garantie de problèmes non-linéaires comme par exemple

- l'optimisation globale de critères non convexes,
- la résolution de systèmes d'égalités et/ou inégalités,
- intégration d'équations différentielles.
- preuve de théorème, ...

Elles ont été utilisées en automatique et en robotique

- estimation de paramètres et d'états,
- path planning,
- commande robuste, . . .

Calcul par intervalles

Si $\diamond \in \{+, -, \times, /, \max, \min\}$

$$[x] \diamond [y] \triangleq [\{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}] \, .$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
[x^-, x^+] + [y^-, y^+] &= [x^- + y^-, x^+ + y^+] \\
[x^-, x^+].[y^-, y^+] &= [\min(x^-y^-, x^+y^-, x^-y^+, x^+y^+), \\
&\quad \max(x^-y^-, x^+y^-, x^-y^+, x^+y^+)] \\
\max\left([x^-, x^+], [y^-, y^+]\right) &= [\max(x^-, y^-), \max(x^+, y^+)]
\end{aligned}$$

Si $f \in \{$cos, sin,sqr, sqrt, log, exp, $\dots\}$

$$f([x]) \triangleq [\{f(x) \mid x \in [x]\}].$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\sin([0,\pi]) &= [0,1] \\
\text{sqr}([-1,3]) &= [-1,3]^2 = [0,9] \\
\text{abs}([-7,1]) &= [0,7] \\
\text{sqrt}([-10,4]) &= \sqrt{[-10,4]} = [0,2] \\
\log([-2,-1]) &= \emptyset
\end{aligned}$$

Projection de contraintes

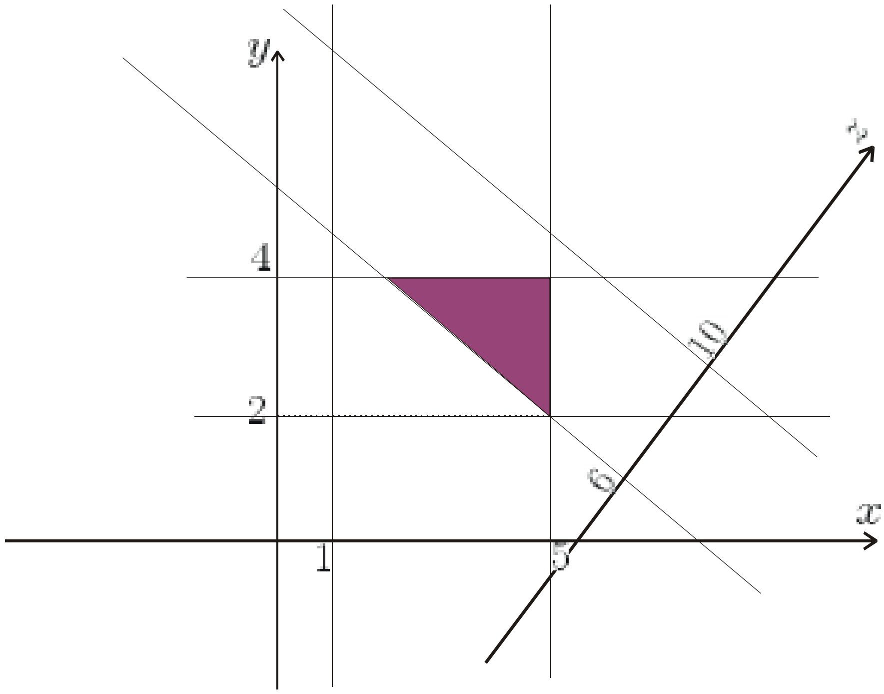
Soient 3 variables x, y, z telles que

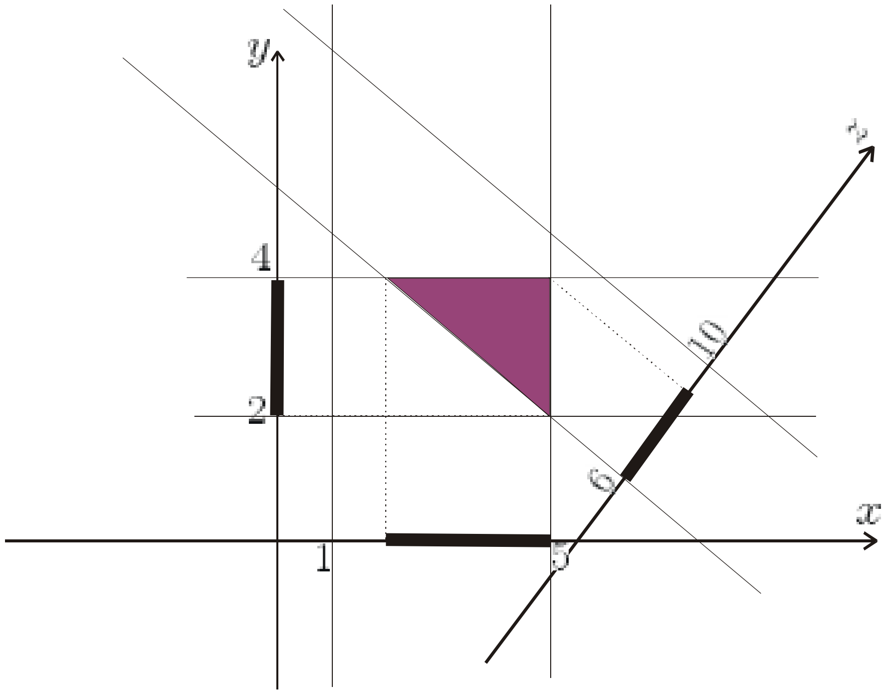
$$\begin{aligned} x &\in [1, 5] \\ y &\in [2, 4] \\ z &\in [6, 10] \\ z &= x + y \end{aligned}$$

Les valeurs 1 pour x et 10 pour y sont dites inconsistantes.

Projeter une contrainte (ici, $z = x + y$), c'est calculer les plus intervalles qui ne contiennent que des valeurs consistantes. Pour notre exemple, cela revient à projeter 3 fois (suivant x, y, puis z) le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in [1, 5] \times [2, 4] \times [6, 10] \mid z = x + y\}$$


y
z
4
10
2
6
x
1
5



y
4
2
1
5
x
6
10
z

Méthode de projection

$$
\begin{aligned}
z = x + y \Rightarrow \;\; z \in \;\; & [6,10] \cap ([1,5] + [2,4]) \\
& = [6,10] \cap [3,9] = [6,9] \\
x = z - y \Rightarrow \;\; x \in \;\; & [1,5] \cap ([6,10] - [2,4]) \\
& = [1,5] \cap [2,8] = [2,5] \\
y = z - x \Rightarrow \;\; y \in \;\; & [2,4] \cap ([6,10] - [1,5]) \\
& = [2,4] \cap ([1,9] - [1,5]) = [2,4]
\end{aligned}
$$

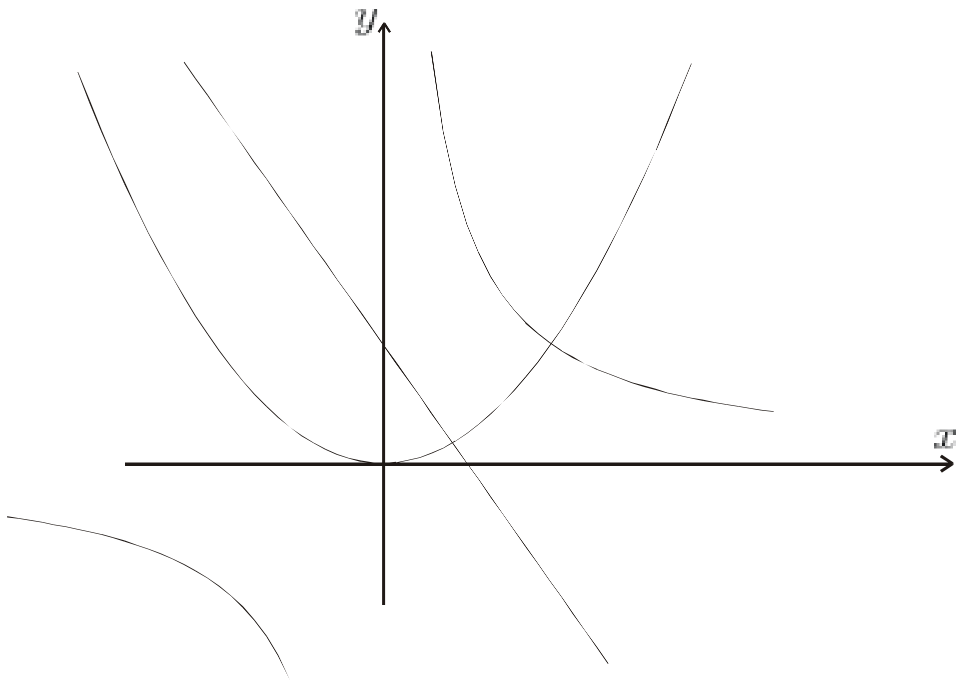
Propagation de contraintes

Soient les trois contraintes suivantes

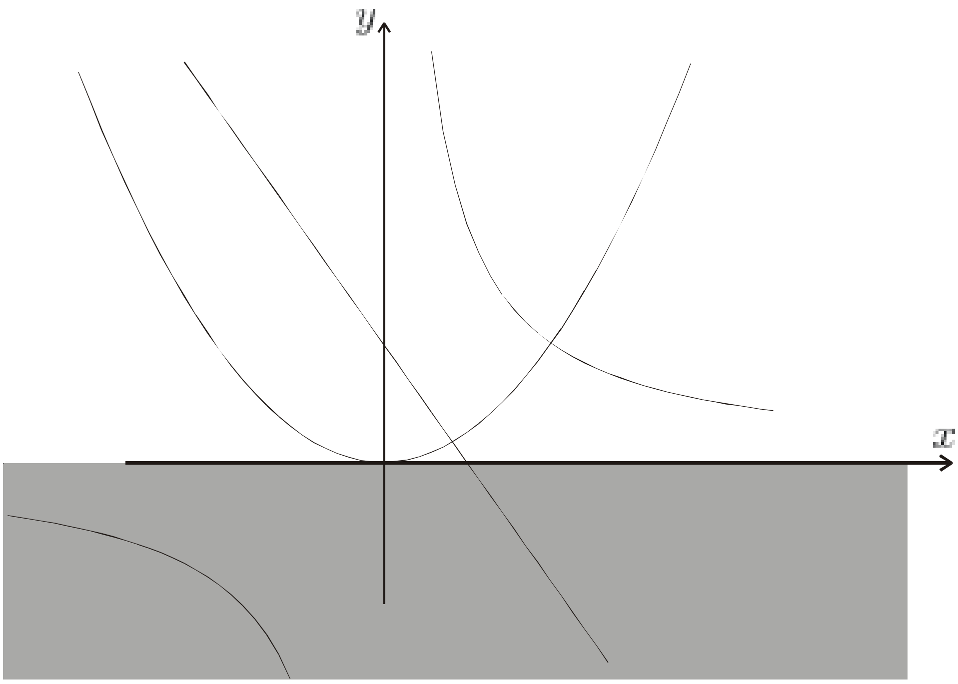
$$\begin{aligned}(C_1) &\ :\ y = x^2 \\ (C_2) &\ :\ xy = 1 \\ (C_3) &\ :\ y = -2x + 1\end{aligned}$$

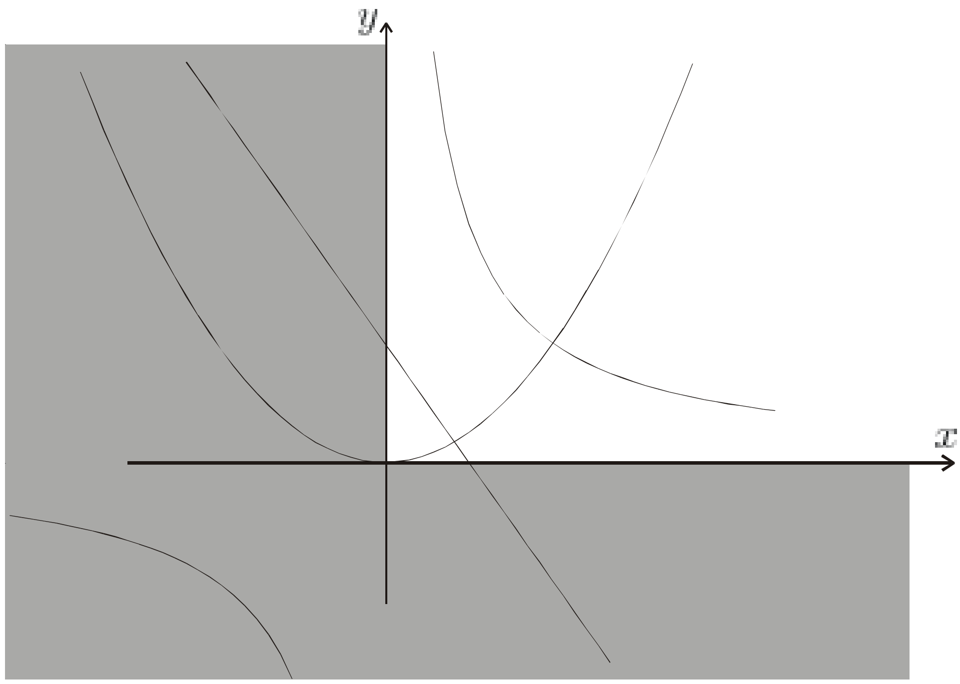
A chaque variable on effecte le domaine $]-\infty, \infty[$.

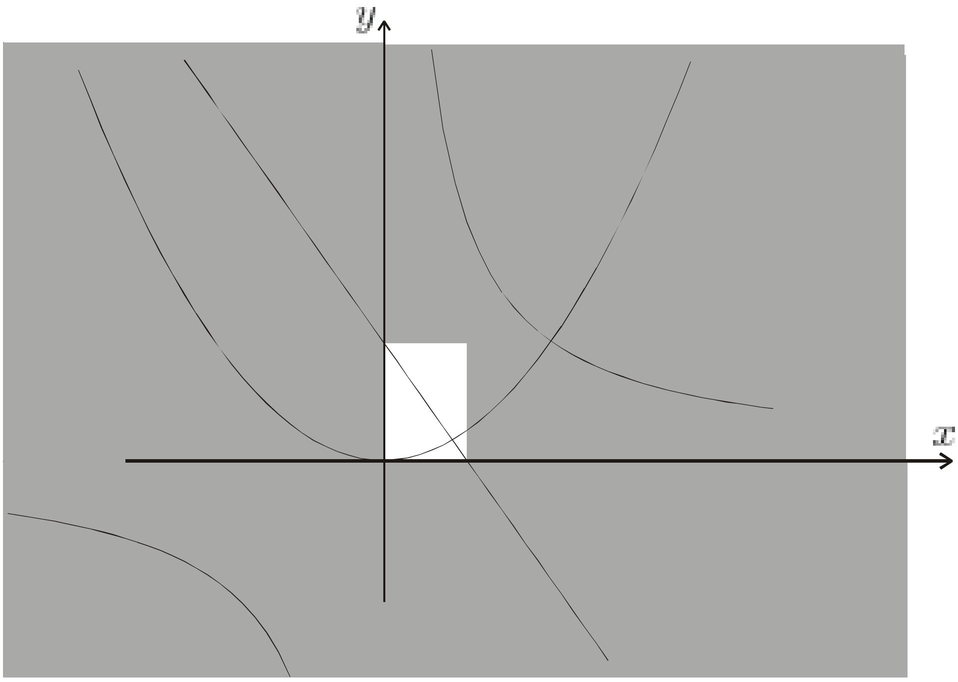
Une propagation de contrainte consiste à projeter les contraintes jusqu'au blocage.

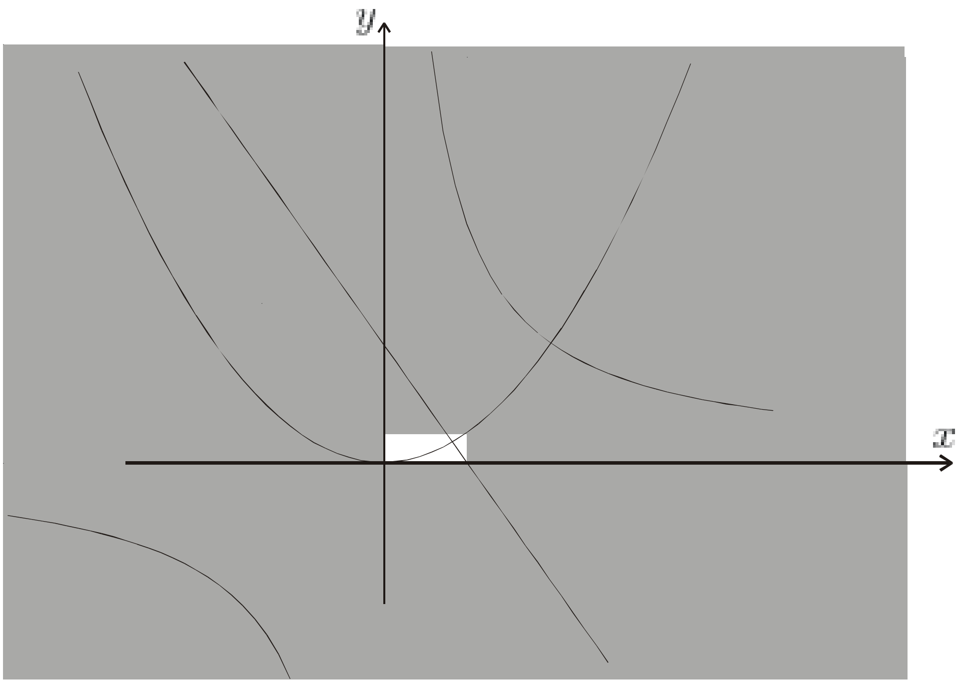


y
x


y
x


y
x


y
x



y
x

$$
\begin{aligned}
(C_1) \Rightarrow\ & y \in\ ]-\infty,\infty[^2 =\ [0,\infty[\\
(C_2) \Rightarrow\ & x \in\ 1/[0,\infty[= [0,\infty[\\
(C_3) \Rightarrow\ & y \in\ [0,\infty[\ \cap\ ((-2)\,.[0,\infty[+1) \\
& \qquad = [0,\infty[\ \cap\ (]-\infty,1]) = [0,1] \\
& x \in\ [0,\infty[\ \cap\ (-[0,1]/2+1/2) \\
& \qquad = [0,1/2] \\
(C_1) \Rightarrow\ & y \in\ [0,1] \cap [0,1/2]^2 = [0,1/4] \\
(C_2) \Rightarrow\ & x \in\ [0,1/2]\ \cap\ 1/[0,1/4] = \emptyset \\
& y \in\ [0,1/4] \cap 1/\emptyset = \emptyset
\end{aligned}
$$

Décomposition en contraintes primitives

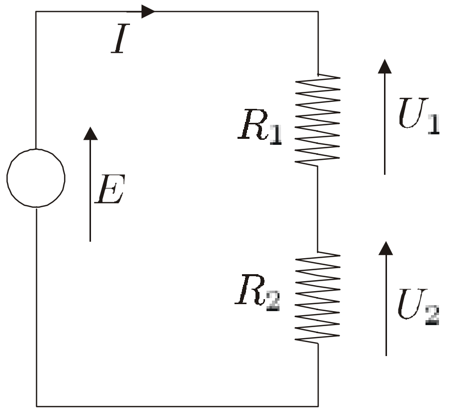
Pour les contraintes plus complexes, il nous faut effectuer une décomposition. Par exemple,

$$x + \sin(y) - xz \leq 0,$$
$$x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], z \in [-1, 1]$$

se décompose en

$$\left\{\begin{array}{l} a = \sin(y) \\ b = x + a \\ c = xz \\ b - c = d \end{array}\right. , \quad \begin{array}{ll} x \in [-1, 1] & a \in]-\infty, \infty[\\ y \in [-1, 1] & b \in]-\infty, \infty[\\ z \in [-1, 1] & c \in]-\infty, \infty[\\ & d \in]-\infty, 0] \end{array}$$

Exemple (estimation à erreurs bornées)



Contraintes :

$$P = EI;\ E = (R_1 + R_2)\, I;$$
$$U_1 = R_1 I;\ U_2 = R_2 I;\ E = U_1 + U_2.$$

Domaines

$$E \in [23V, 26V],\ I \in [4A, 8A],\ U_1 \in [10V, 11V],$$
$$U_2 \in [14V, 17V],\ P \in [124W, 130W],$$

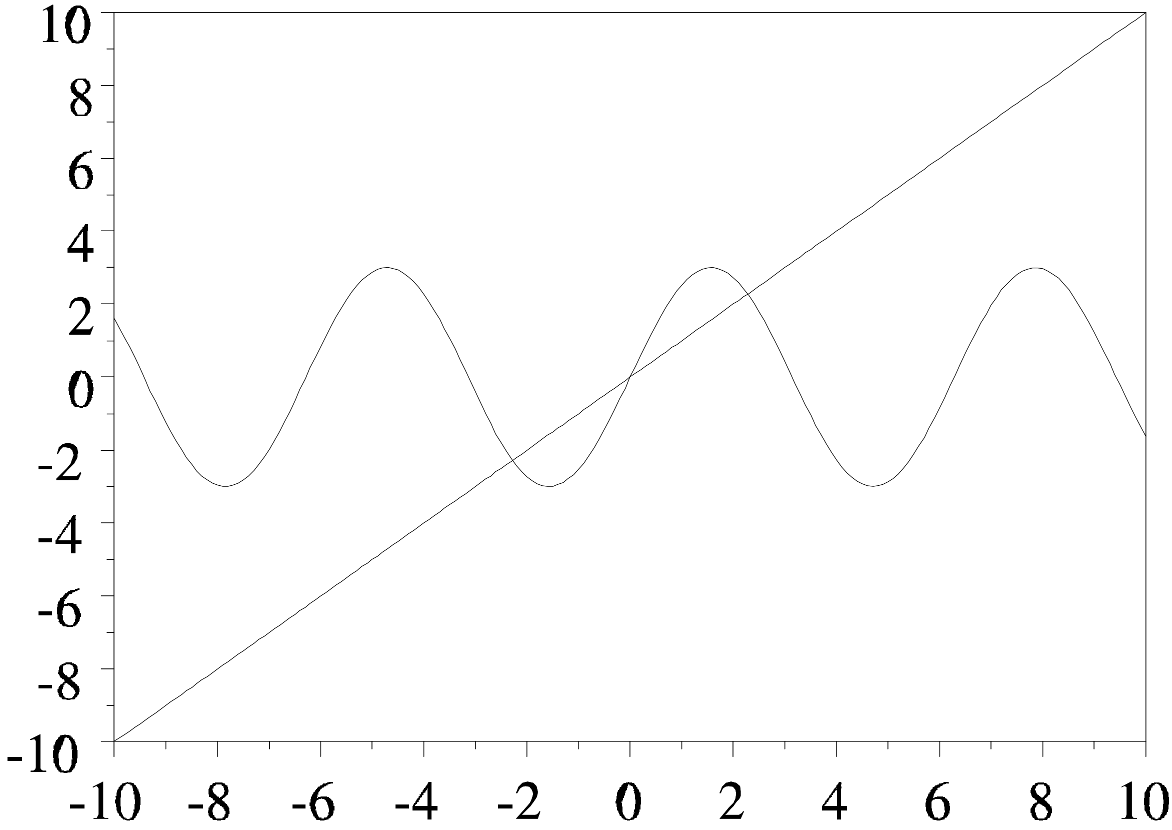
Résolution d'équations nonlinéaires

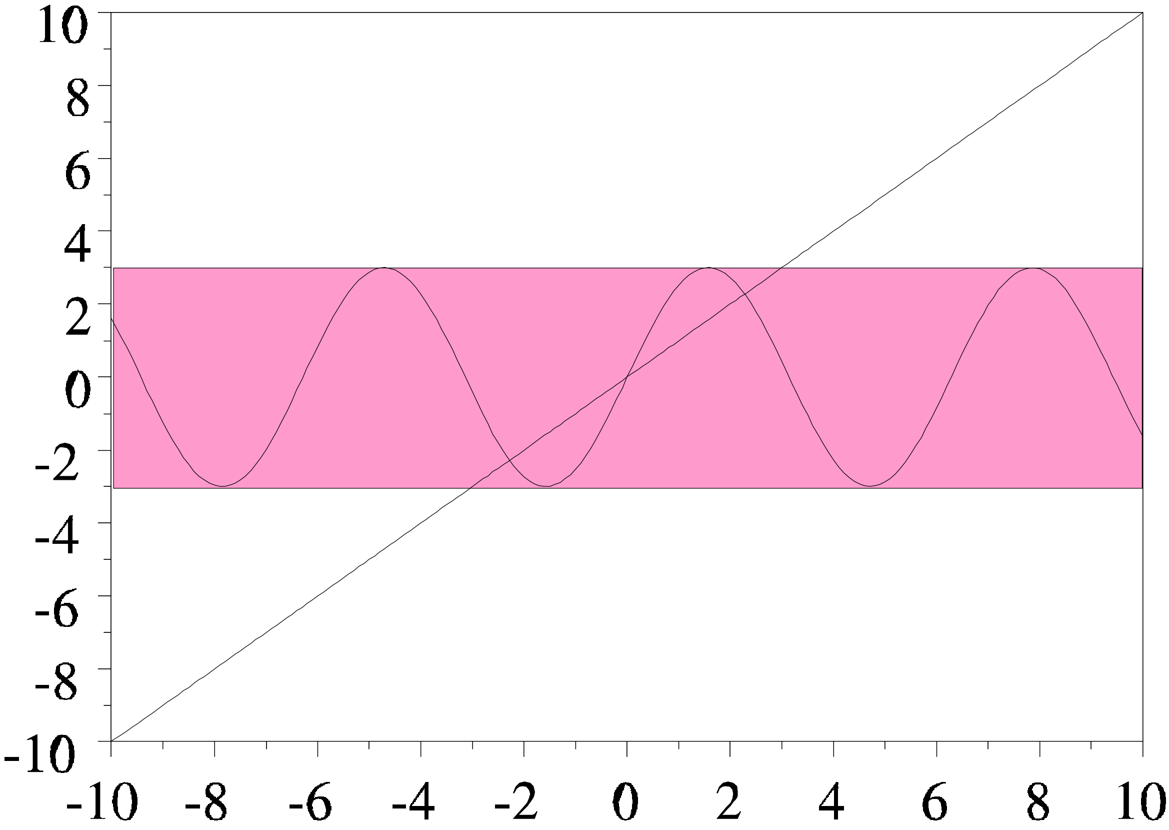
Cherchons par exemple à résoudre

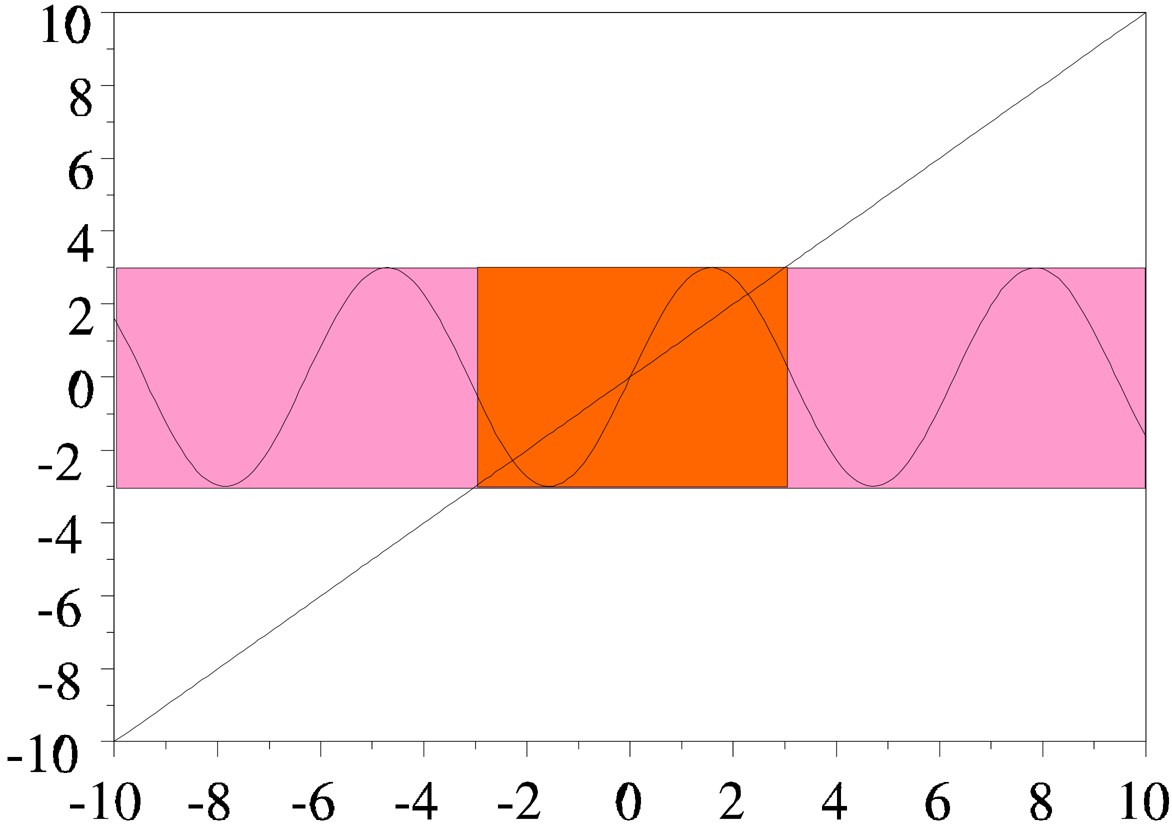
$$3\sin(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

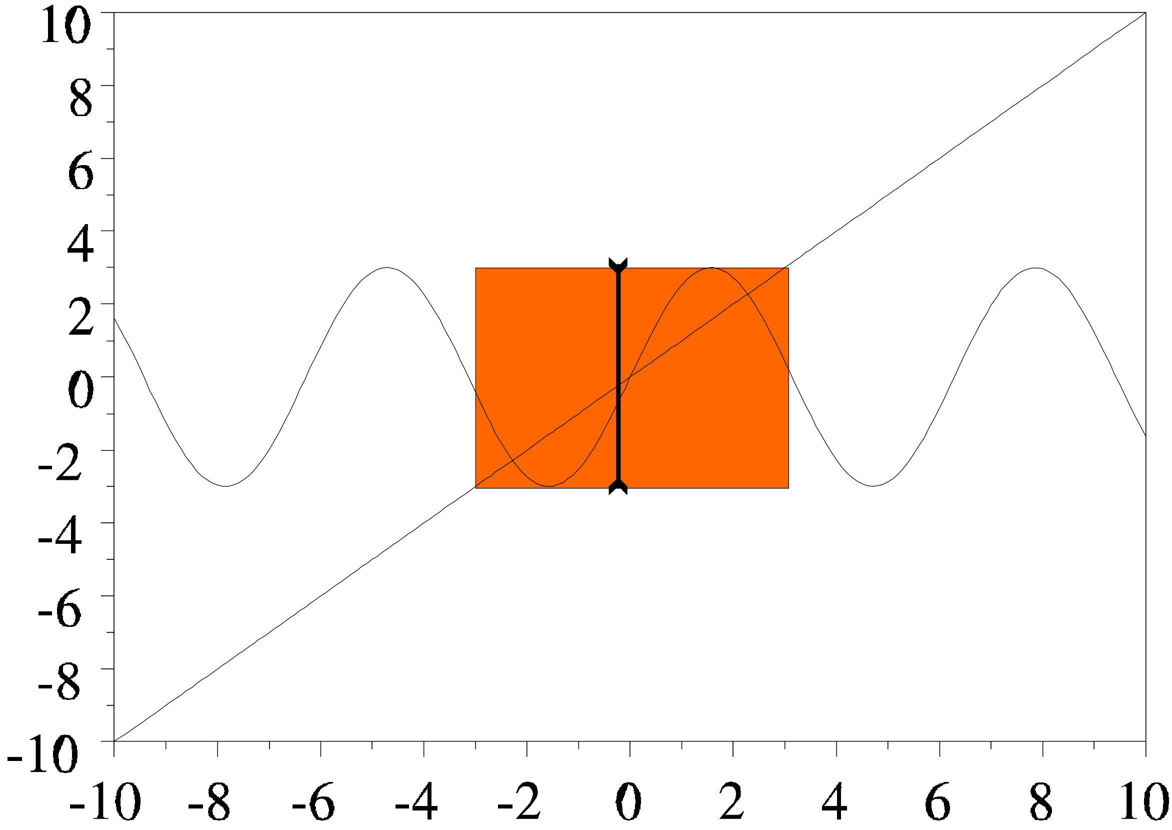
Cette équation se décompose en

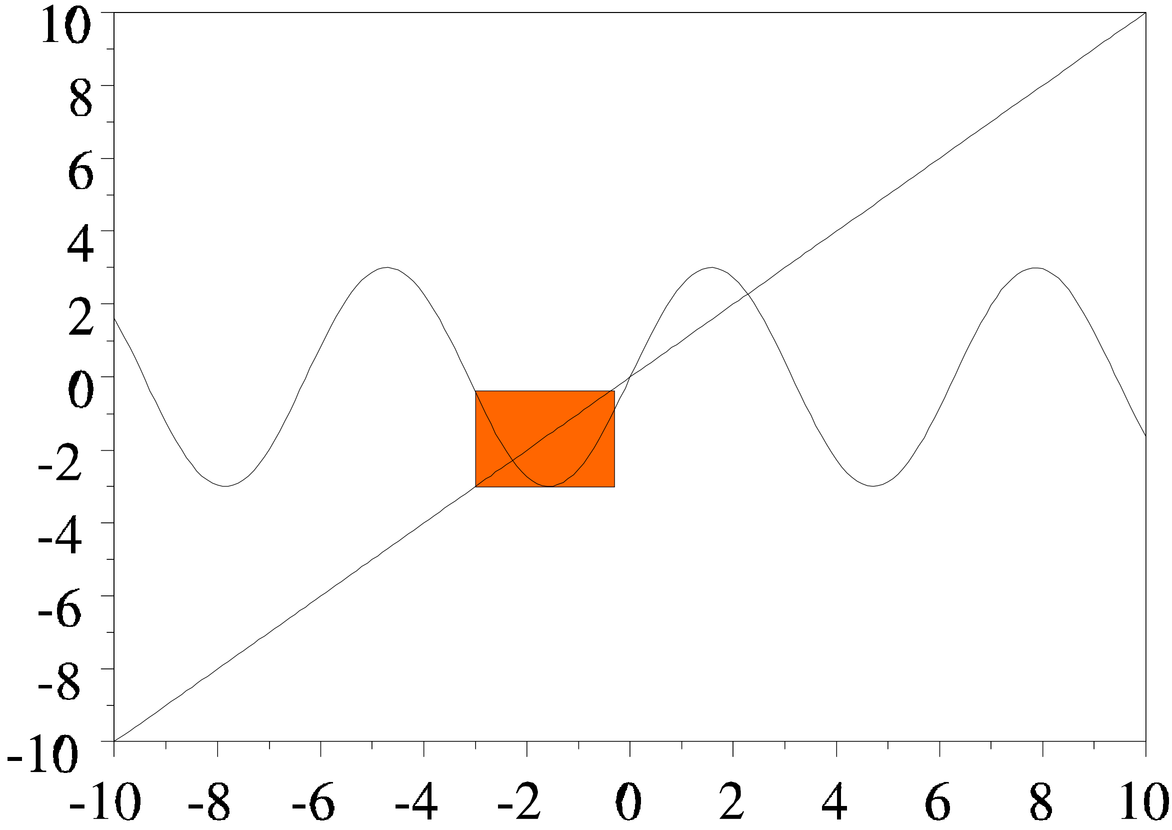
$$\begin{cases} y &= 3\sin(x) \\ y &= x \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \, y \in \mathbb{R}.$$

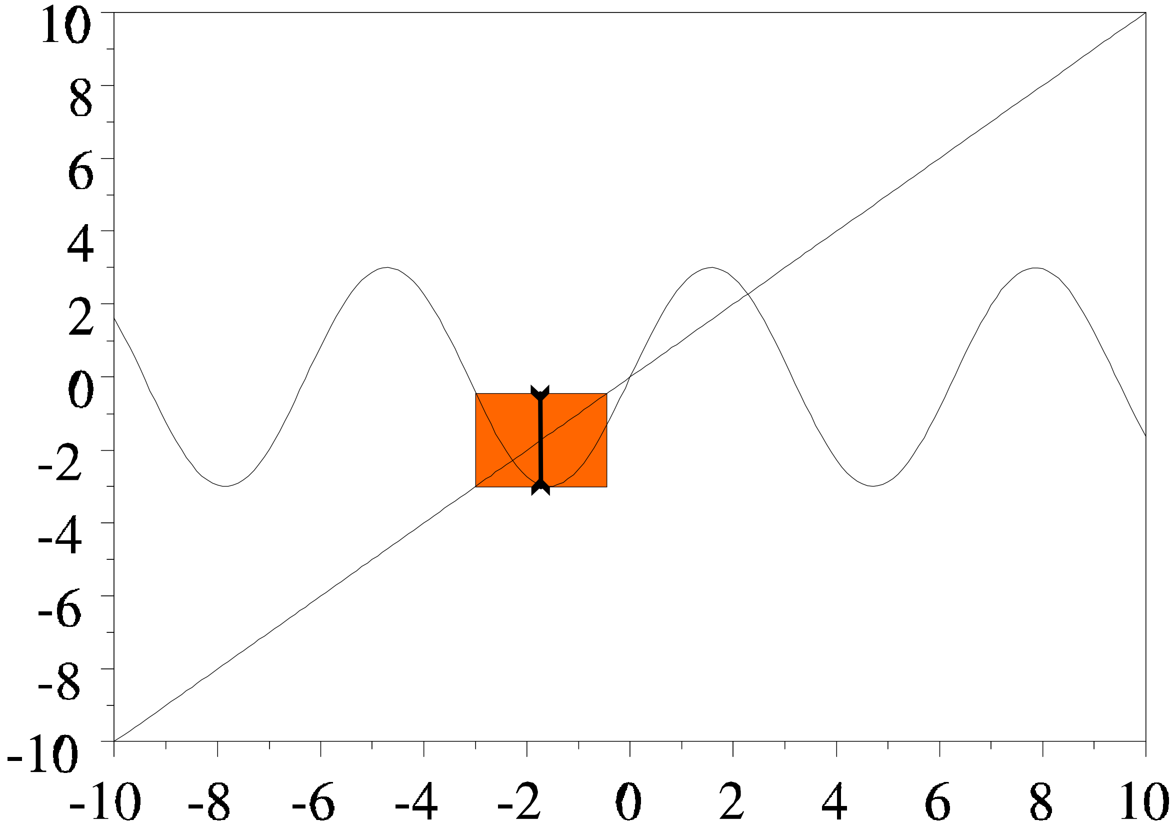

10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10

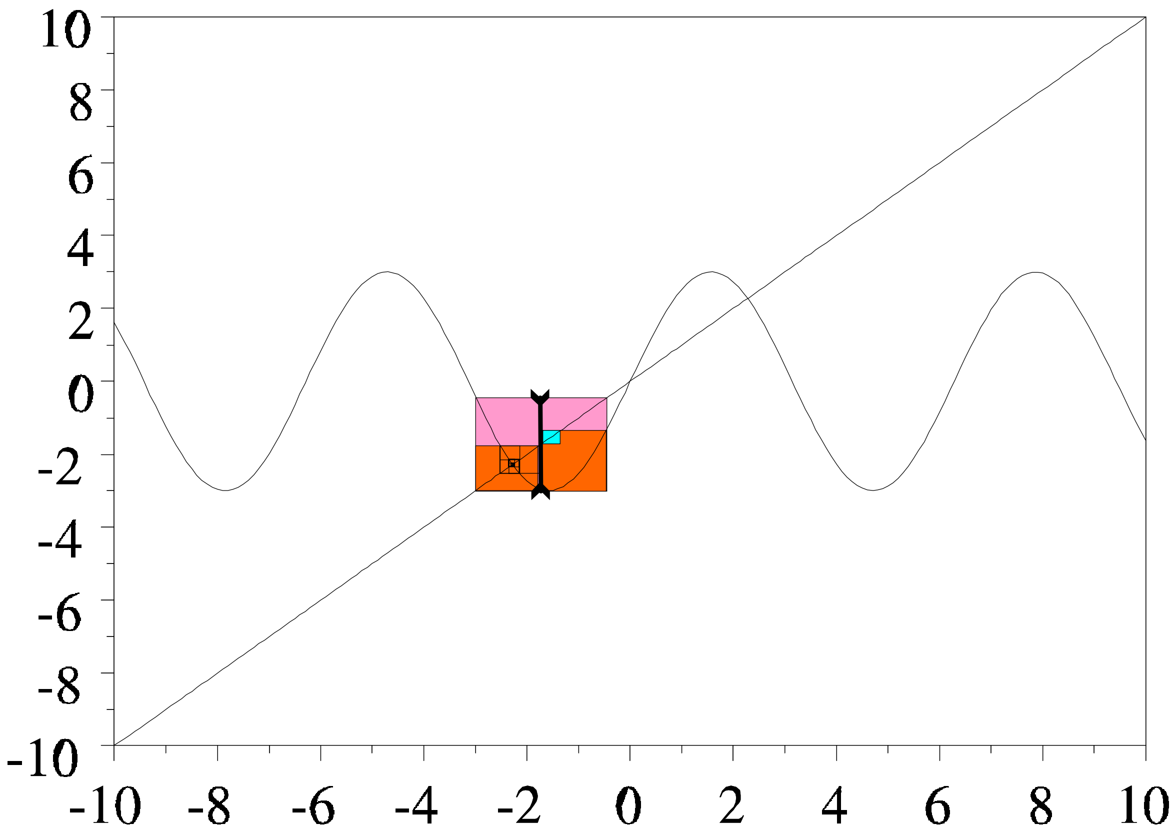

10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10

Prouver qu'un ensemble de contraintes est toujours satisfait

(pour montrer la stabilité robuste, par exemple)

Idée : On complémente l'ensemble des contraintes.

Par exemple, montrer que

$\forall x \in [x]$,$\forall y \in [y],\ f(x,y) \leq 0$ et $g(x,y) \leq 0,$

revient à montrer que

$f(x,y) > 0$ ou $g(x,y) > 0$ n'a pas de solution sur $[x]\times[y],$

c'est-à-dire que

$\max\left(f(x,y), g(x,y)\right) > 0$ n'a pas de solution sur $[x]\times[y],$

Objectifs

1) Développer des solveurs pour les automaticiens et les roboticiens,

2) Résoudre des problèmes reconnus comme durs par ces derniers.

Présentation du solveur Chloé

Présentation du solveur Proj2D

1) Exemple de la résolution de $3 \sin x = x$;

2) Exemple d'un problème d'estimation à erreurs bornées.

Localisation d'un satellite

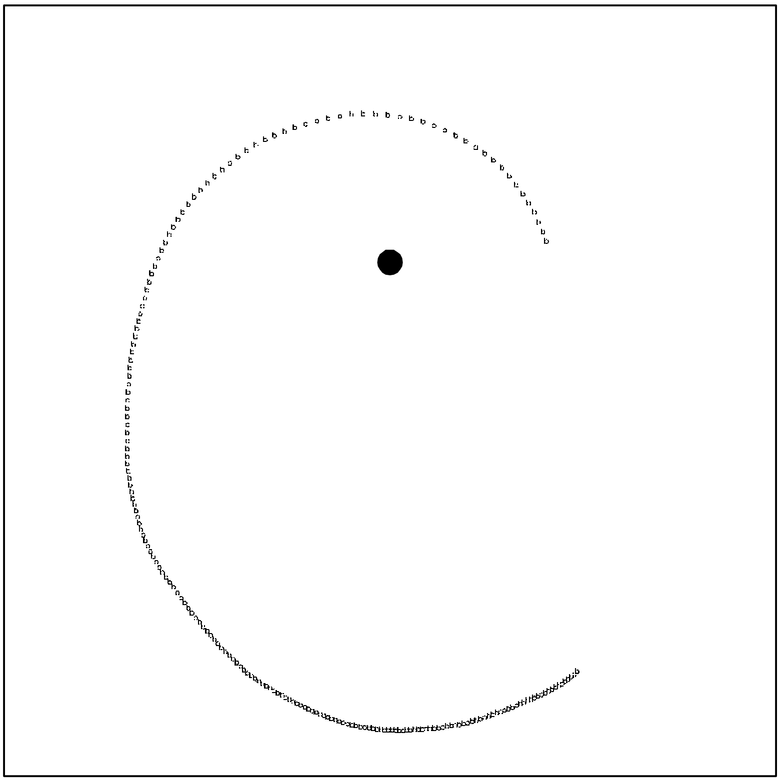
$$
\begin{cases}
x_1(k+1) &= x_1(k) + 0.5\ x_3(k) + w_1(k) \\
x_2(k+1) &= x_2(k) + 0.5\ x_4(k) + w_2(k) \\
x_3(k+1) &= x_3(k) - 0.5\ \frac{x_1(k)}{\sqrt{x_1^2(k)+x_2^2(k)}^3} + w_3(k) \\
x_4(k+1) &= x_4(k) - 0.5\ \frac{x_2(k)}{\sqrt{x_1^2(k)+x_2^2(k)}^3} + w_4(k) \\
y_1(k) &= x_2(k)/x_1(k) \\
y_2(k) &= x_1(k)x_3(k) + x_2(k)x_4(k) \\
y_3(k) &= x_1^2(k) + x_2^2(k)
\end{cases}
$$

Fichier en entrée dans le solveur (Realpaver)

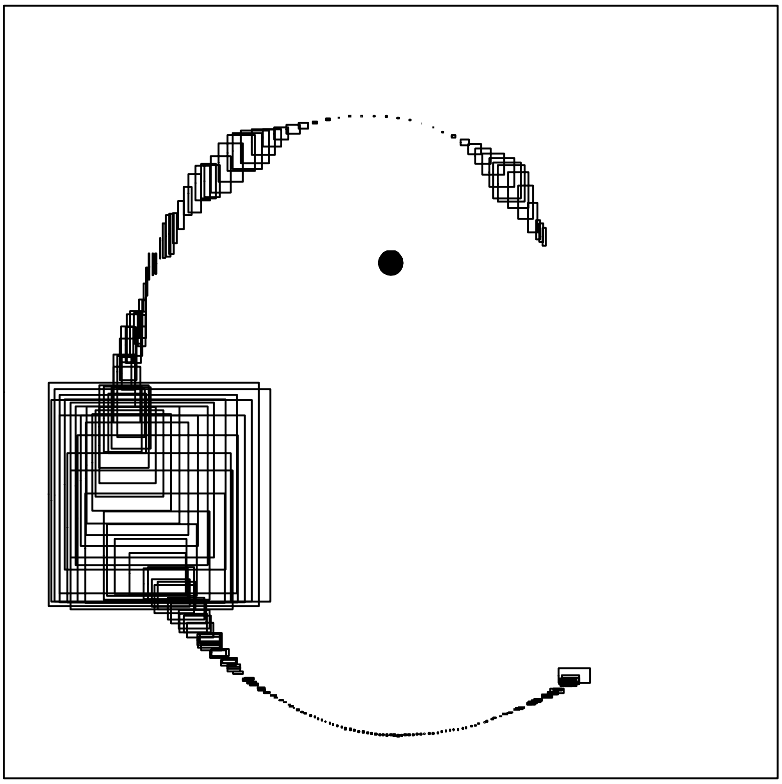
```
x1_0 in [-oo,oo],
x2_0 in [-oo,oo],
x3_0 in [-oo,oo],
x4_0 in [-oo,oo],
w1_0 in [-0.01,0.01],
w2_0 in [-0.01,0.01],
w3_0 in [-0.01,0.01],
w4_0 in [-0.01,0.01],
y1_0 in [0.107,0.307],
y2_0 in [-0.710,-0.510],
y3_0 in [16.117,16.317],
...

Constraints
x1_1=x1_0+0.5*x3_0+ w1_0,
x2_1=x2_0+0.5*x4_0+ w2_0,
x3_1=x3_0-0.5*x1_0/
   (sqrt(x1_0^2+x2_0^2))^3+w3_0,
...
```

Fichier en sortie du solveur

```
  x1_0 in [3.89 , 4.01]
  x2_0 in [0.41 , 0.95]
  x3_0 in [-0.41 , -0.14]
  x4_0 in [0.20 , 0.93]
  y1_0 in [0.10 , 0.25]
  y2_0 in [-0.71 , -0.51]
  y3_0 in [16.11 , 16.31]
...
  x1_200 in [4.38 , 4.88]
  x2_200 in [-10.84 , -10.61]
  x3_200 in [-0.14 , 0.54]
  x4_200 in [-0.00 , 0.32]
  y1_200 in [-2.42 , -2.22]
  y2_200 in [-0.92 , -0.72]
  y3_200 in [136.61 , 136.81]
...
  Elapsed time: 810 ms
```



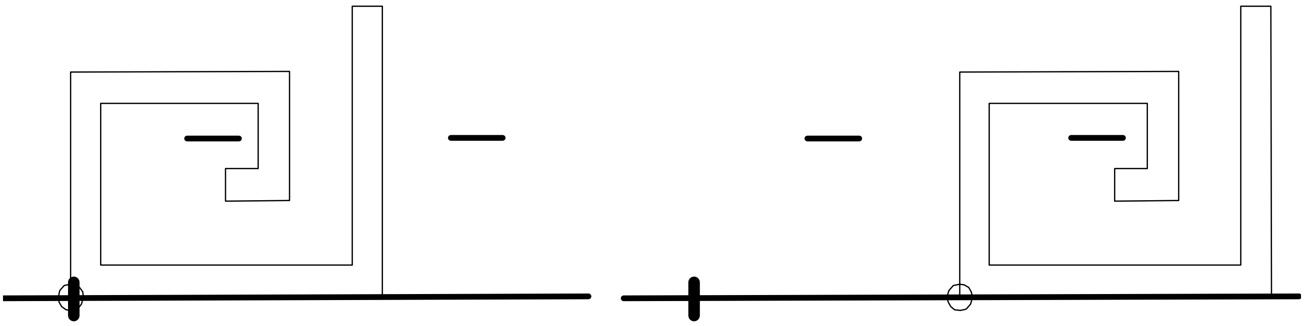
Positions du satellite générées par simulation
pour k allant de 0 à 200



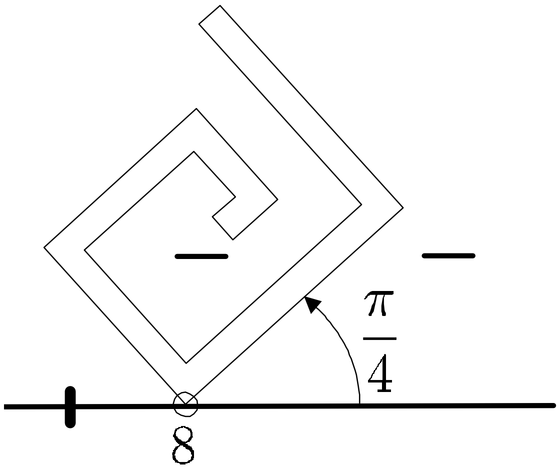
Pavés générés par Realpaver

Ce problème est un CSP (constraint satisfaction problem) contenant 8815 variables et 5607 contraintes.

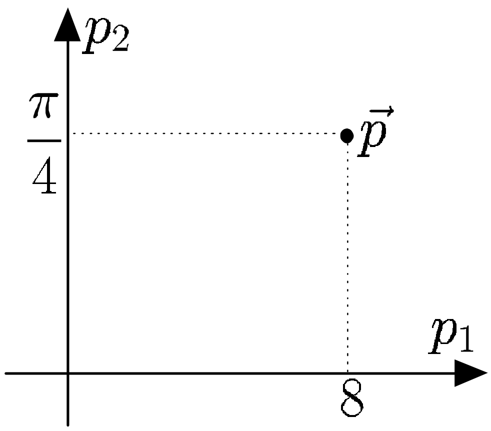
Path planning



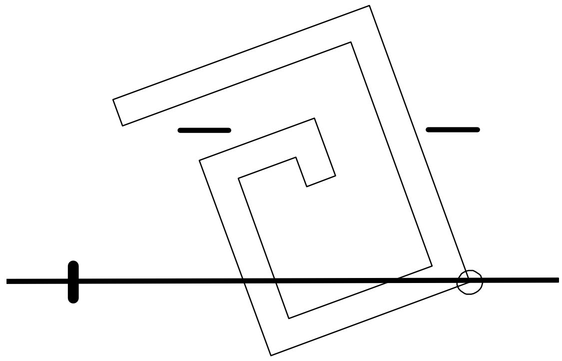
Initial configuration: $\vec{p} = (0\ 0)^{\mathrm{T}}$ Goal configuration: $\vec{p} = (17\ 0)^{\mathrm{T}}$

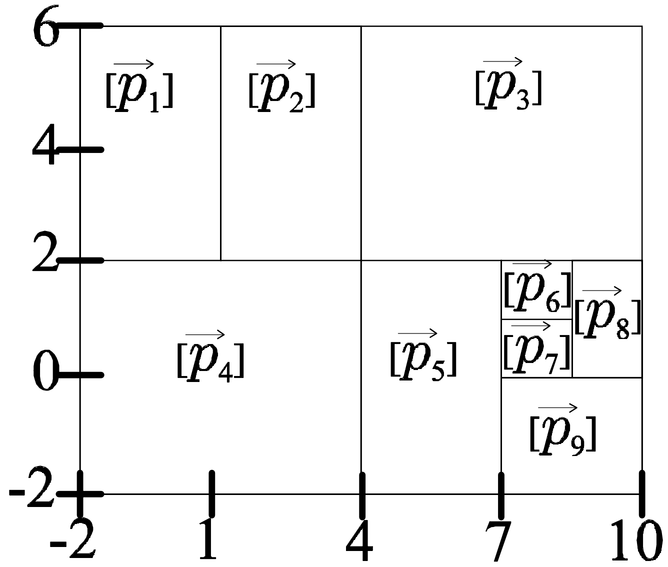


Room

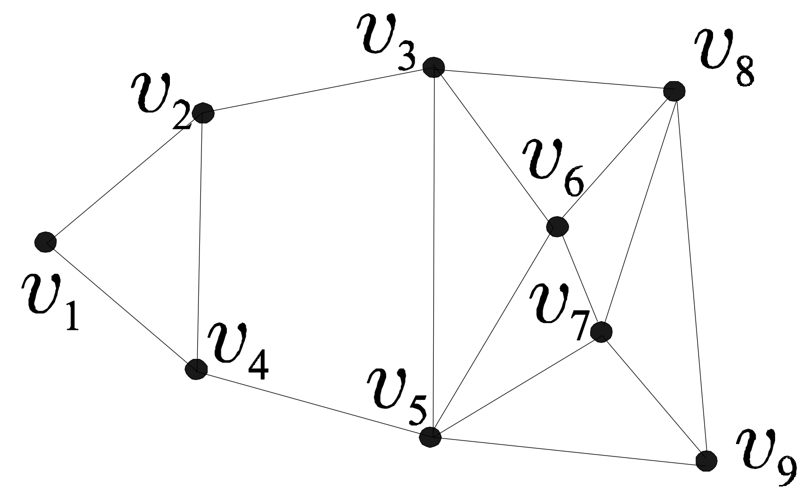


Configuration space

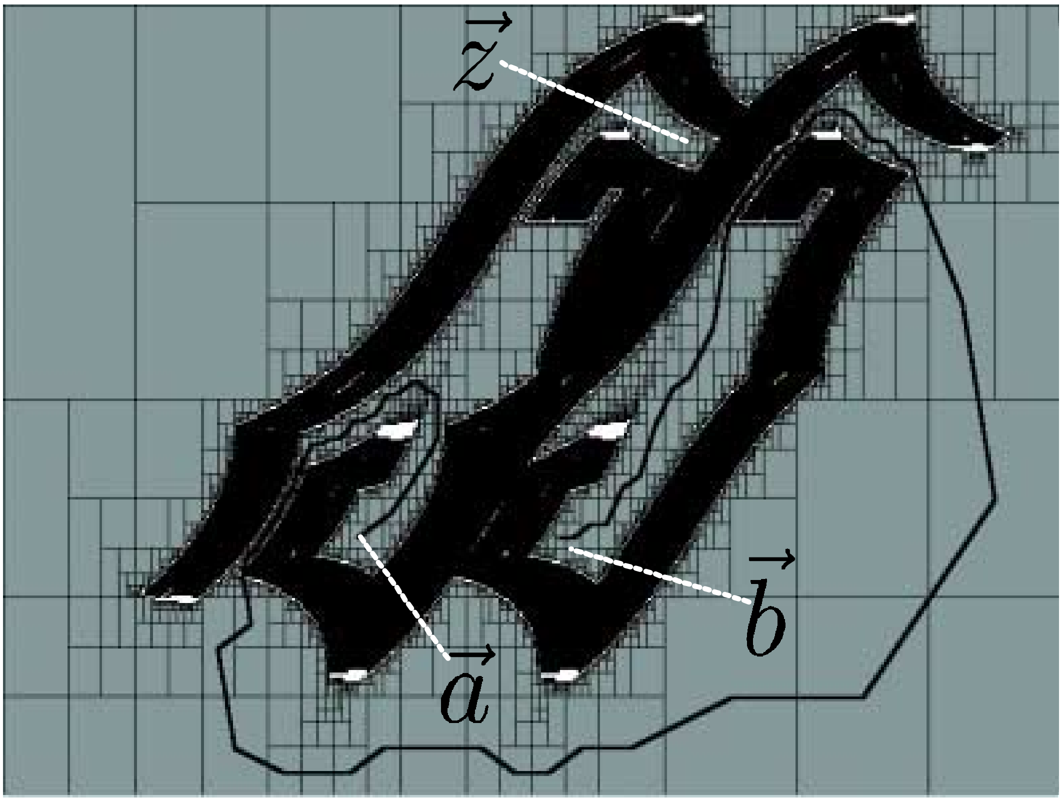




6
4
2
0
-2
$[\overrightarrow{p}_1]$
$[\overrightarrow{p}_2]$
$[\overrightarrow{p}_3]$
$[\overrightarrow{p}_4]$
$[\overrightarrow{p}_5]$
$[\overrightarrow{p}_6]$
$[\overrightarrow{p}_7]$
$[\overrightarrow{p}_8]$
$[\overrightarrow{p}_9]$
-2
1
4
7
10



v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9



$\vec{z}$
$\vec{a}$
$\vec{b}$