

# Sur la Commande des Systèmes $(\max,+)$ Linéaires.

DEA Automatique et Informatique Appliquée - Angers

Laurent Hardouin

Décembre 2004



# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>7</b>  |
| <b>2</b> | <b>Préliminaires algébriques</b>  | <b>9</b>  |
| 2.1      | Dioïdes   | 9         |
| 2.2      | Equations au point fixe   | 10        |
| 2.3      | Théorie de la Résiduation   | 10        |
| 2.4      | Le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$                                    | 13        |
| 2.4.1    | Somme de matrices   | 14        |
| 2.4.2    | Produit de matrices   | 14        |
| 2.5      | Solution de $x = ax \oplus b$   | 14        |
| 2.5.1    | Equations $ax \preceq b$  | 15        |
| 2.5.2    | Théorie spectrale des matrices  | 16        |
| <b>3</b> | <b>Modélisation de systèmes</b>   | <b>17</b> |
| 3.1      | Equations aux dateurs   | 17        |
| 3.2      | Equations aux compteurs   | 20        |
| 3.3      | Dioïdes de séries formelles   | 22        |
| 3.3.1    | Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$                             | 23        |
| 3.3.2    | Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$                             | 24        |
| 3.3.3    | Représentation Bi-dimensionnelle, $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ | 25        |
| <b>4</b> | <b>Commande de systèmes</b>   | <b>29</b> |
| 4.1      | Commande Optimale   | 29        |
| 4.2      | Synthèse d'un correcteur de type précompensateur                            | 31        |
| 4.2.1    | Illustration  | 32        |
| 4.3      | Synthèse d'un correcteur de type retour de sortie                           | 35        |
| 4.3.1    | Illustration  | 36        |
| 4.4      | Synthèse d'un correcteur de type retour d'état                              | 37        |
| 4.5      | Synthèse d'un observateur   | 38        |
| 4.5.1    | Application : contrôle de type retour de sortie avec observateur            | 40        |
| 4.5.2    | Illustration  | 42        |
| 4.6      | Commande en présence de perturbations                                       | 43        |
| 4.6.1    | Application : contrôle par retour d'état en présence de perturbations       | 44        |
| 4.6.2    | Illustration  | 46        |
| 4.7      | Synthèse de contrôleurs robustes pour les GET                               | 46        |
| 4.7.1    | Notation et préliminaires algébriques                                       | 47        |
| 4.7.2    | Modélisation de GET incertains  | 47        |
| 4.7.3    | Synthèse de contrôleurs   | 49        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>5</b> | <b>Annexe A</b>   | <b>51</b> |
| 5.1      | Propriétés de l'opérateur $*$ . . . . .                           | 51        |
| 5.2      | Propriétés des résidues des applications $L_a$ et $R_a$ . . . . . | 51        |

# Notations

$\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  : dioïde des séries formelles en  $\gamma$  et  $\delta$  à exposants dans  $\mathbb{Z}$  et à coefficients booléens.

$\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  : quotient du dioïde  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  par la relation d'équivalence :

$$\forall A, B \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]] \quad , \quad A \equiv B \iff \gamma^* (\delta^{-1})^* A = \gamma^* (\delta^{-1})^* B.$$

$\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$  : dioïde des élément causaux de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .

$\text{Im}\Pi$  : image de l'application  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $\text{Im}\Pi = \{\Pi(s) \mid s \in \mathcal{S}\}$ .

$\Pi|_A$  : restriction de l'application  $\Pi$  au domaine  $A$ .

$B|_B\Pi$  : restriction de l'application  $\Pi$  au codomaine  $B$  (avec  $\text{Im}\Pi \subset B$ ).

$B|_B\Pi|_A$  : restriction de l'application  $\Pi$  au domaine  $A$  et au codomaine  $B$  (avec  $\Pi(A) \subset B$ ).

$\Pi^\sharp$  : application résiduée de l'application  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $\Pi^\sharp(t) = \text{Sup}\{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq t\}$ .

$L_a$  : produit à gauche par  $a$ ,  $L_a(x) = a \otimes x$ .

$R_a$  : produit à droite par  $a$ ,  $R_a(x) = x \otimes a$ .

$L_a^\sharp$  : résiduée de l'application  $L_a$ .

$R_a^\sharp$  : résiduée de l'application  $R_a$ .

$a \backslash b$  : notation utilisée pour représenter  $L_a^\sharp(b)$ .

$b / a$  : notation utilisée pour représenter  $R_a^\sharp(b)$ .

$S$  : application étoile de Kleene définie sur un dioïde complet,  $S(x) = x^* = \bigoplus_{i \geq 0} x^i$ .

$P$  : application "plus" dérivée de l'étoile de Kleene,  $P(x) = x^+ = x \otimes x^* = \bigoplus_{i \geq 1} x^i$ .

$I_C$  : injection canonique d'un sous-ensemble  $C$  de  $\mathcal{D}$ ,  $I_C : C \rightarrow \mathcal{D}$ .

$\text{Pr}_C$  : application résiduée de l'injection canonique,  $\text{Pr}_C : \mathcal{D} \rightarrow C$ .

$I(\mathcal{D})$  : dioïde d'intervalles.

$\mathcal{V}^*$  : plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$ .

$\hat{\mathcal{V}}$  : plus grand idéal principal  $(A \oplus BF)$ -invariant inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$ .

$\tilde{\mathcal{V}}$  : plus grand idéal principal  $(A \oplus BFC)$ -invariant inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$ .



# Chapitre 1

## Introduction

Sous l'appellation *Systèmes (Dynamiques) à Événements Discrets* (SED) sont regroupés certains systèmes, généralement de conception humaine<sup>1</sup>, dont le comportement dynamique ne peut être décrit par des équations différentielles ou aux différences. Cette classe de systèmes regroupe aussi bien les systèmes de production (ateliers flexibles, lignes d'assemblage) [Cohen et al., 1983, Cohen et al., 1985], les réseaux de communication (réseaux informatiques) [LeBoudec and Thiran, 2002] que les systèmes de transport (routier, ferroviaire ou aérien) [Lotito et al., 2001, Braker, 1993, Olsder et al., 1998].

L'importance prise par ces systèmes dans notre société a conduit de nombreux chercheurs à proposer des modèles mathématiques permettant de décrire leur comportement afin d'en évaluer les performances et d'optimiser leur conception ou leur pilotage. La diversité de ces systèmes conduit naturellement à différents modèles, citons les modèles à base d'automates à états finis, les chaînes de Markov et les Réseaux de Petri. Le cadre de notre étude se situe dans le contexte des systèmes qui admettent un modèle linéaire dans les algèbres de type  $(\max,+)$ . L'un des premiers ouvrages concernant ces structures algébrique est sans doute celui de R.A. Cuninghame-Green ([Cuninghame-Green, 1979]), mais c'est en Août 1981 ([Cohen et al., 1999]) que l'équipe " $(\max,+)$ " de l'INRIA a assuré le lien avec les systèmes à événements discrets. L'idée forte fut de montrer qu'en changeant d'algèbre, le comportement de certains systèmes à événements discrets pouvait être décrit à l'aide d'équations linéaires. Il s'agit des systèmes caractérisés uniquement par des phénomènes de synchronisation et de retard. Ils correspondent à une sous classe de réseaux de Petri temporisés, les Graphes d'Événements Temporisés (GET).

Au cours des années 80, cette équipe a ainsi construit une théorie des systèmes  $(\max,+)$  linéaires à l'image de celle qui existait pour les systèmes linéaires dans l'algèbre classique. Ce travail donna lieu à un ouvrage collectif paru en 1992 ([Baccelli et al., 1992], disponible depuis <http://maxplus.org>) et à plusieurs thèses ([Moller, 1988], [Gaubert, 1992], [Braker, 1993]). Au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA, FRE 2656 CNRS), c'est Jean-Louis Boimond qui s'intéressa le premier, en 1991, à cette théorie.

Ce polycopié a donc pour objectif de rappeler les résultats proposés au cours des vingt années passées et tout particulièrement les résultats relatifs à la commande de ces systèmes. Comme en automatique classique, par commande, il faut comprendre le contrôle des entrées afin d'atteindre des performances spécifiées au préalable. Compte tenu de leur nature, le contrôle des entrées d'un GET consiste à retarder le plus possible l'entrée de jetons tout en respectant les performances imposées par une spécification, ce qui correspond à la problématique de commande en juste-à-temps<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>En opposition aux systèmes "naturels" décrits par les lois de la physique.

<sup>2</sup>Juste-à-temps est une traduction littérale du terme anglais "just-in-time". Il doit être interprété comme la "quantité juste" (satisfaisant le besoin) au "temps voulu" (date du besoin).



## Chapitre 2

# Préliminaires algébriques

### 2.1 Diïodes

Ce paragraphe a pour vocation de donner de manière informelle les définitions et les principaux outils algébriques utilisés par la suite. Je renvoie le lecteur intéressé au chapitre 4 du livre ([Baccelli et al., 1992]) et également aux supports de cours de G. Cohen et S. Gaubert disponibles sur les pages web des auteurs (accessibles depuis <http://maxplus.org>. Les actes de l'école de printemps de Noirmoutier sont également une source didactique (notamment [Cohen, 1998], [Olsder, 1998]). Je recommande également les thèses de B. Cottenceau [Cottenceau, 1999], de C.A. Maia [Maia, 2003, en portugais] et de M. Lhommeau [Lhommeau, 2003](voir <http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin>).

La théorie des systèmes  $(\max,+)$  repose amplement sur la théorie des treillis et l'inversion d'applications définies sur des ensembles ordonnés, je recommande donc également la lecture de [Davey and Priestley, 1990], et de [Blyth and Janowitz, 1972].

L'algèbre  $(\max,+)$  et autres algèbres assimilées ont une structure de demi-anneau idempotent. Nous parlerons ici de dioïde.

**Définition 1 (Monoïde)**  $(M, \oplus, \varepsilon)$  est un monoïde si  $\oplus$  est une loi interne, associative, et admettant un élément neutre  $\varepsilon$  ( $\forall m \in M, m \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus m = m$ ). Si la loi  $\oplus$  est commutative, le monoïde est dit commutatif.

**Définition 2 (Dioïde)**  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  est un dioïde si

- $(\mathcal{D}, \oplus, \varepsilon)$  est un monoïde commutatif idempotent,  $\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a$ ,
- $(\mathcal{D}, \otimes, e)$  est un monoïde,
- la loi  $\otimes$  distribue à gauche et à droite par rapport à la loi  $\oplus$ ,
- $\varepsilon$  est absorbant pour la loi  $\otimes$ ,  $\forall a \in \mathcal{D}, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ .

Si  $(\mathcal{D}, \otimes, e)$  est un monoïde commutatif, le dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  est dit commutatif.

Puisqu'un dioïde  $\mathcal{D}$  bénéficie naturellement d'une structure de monoïde commutatif idempotent  $(\mathcal{D}, \oplus)$ ,  $\mathcal{D}$  peut être muni d'une relation d'ordre  $a \succeq b \iff a = a \oplus b$ . Par conséquent, un dioïde est un sup-demi treillis. De plus si le dioïde est complet (*i.e.*, les sommes infinies sont définies, et la loi  $\otimes$  distribue sur ces sommes infinies), le dioïde a une structure de treillis, on note  $\top$  (pour Top) la borne supérieure du treillis.

**Exemple 1 (Algèbres  $(\max,+)$ )**  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$  est un dioïde commutatif complet pour lequel  $\varepsilon = -\infty$ ,  $e = 0$ , et  $\top = +\infty$ . L'ordre  $\preceq$  associé à  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  est total et coïncide avec l'ordre naturel  $\leq$ .

**Exemple 2 (Algèbres (min,+))**  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$  est un dioïde commutatif complet pour lequel  $\varepsilon = +\infty$ ,  $e = 0$ , et  $\top = -\infty$ . L'ordre  $\preceq$  associé à  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  est total et coïncide avec l'ordre naturel  $\geq$ .

**Définition 3 (Sous-dioïde)** Soit  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  un dioïde et  $\mathcal{D}_{sub} \subset \mathcal{D}$ .  $(\mathcal{D}_{sub}, \oplus, \otimes)$  est dit sous-dioïde de  $\mathcal{D}$  si  $\varepsilon, e \in \mathcal{D}_{sub}$  et si  $\mathcal{D}_{sub}$  est fermé pour les lois  $\oplus$  et  $\otimes$ .

## 2.2 Equations au point fixe

Par définition tous les éléments de  $\mathcal{D}$  ne sont pas symétrisables pour les lois  $\oplus$ , et tous les éléments de  $\mathcal{D}$  ne sont pas inversibles. Cependant, moyennant quelques hypothèses<sup>1</sup>, il est possible de résoudre des équations aux points fixes définies sur ces structures algébriques et de considérer le problème d'inversion d'applications définies sur des ensembles ordonnés. Nous retrouvons ici quelques définitions et les résultats sur lesquels repose la résolution des problèmes de commande présentés par la suite.

**Théorème 1 ([Baccelli et al., 1992])** Soient  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  un dioïde et  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  une application semi-continue inférieurement (i.e.,  $\Pi(\bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x) = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} \Pi(x)$ ). La plus petite solution de l'équation  $x \succeq \Pi(x) \oplus b$  est  $x = \Pi^*(b)$ , où

$$\Pi^0 = \text{Id}_{\mathcal{D}}, \quad \Pi^n = \underbrace{\Pi \circ \Pi \circ \dots \circ \Pi}_{n \text{ fois}} \quad \text{et} \quad \Pi^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi^n = \text{Id}_{\mathcal{D}} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi^{n+1}.$$

De plus,  $x = \Pi^*(b)$  est solution de  $x = \Pi(x) \oplus b$ .

**Exemple 3** L'équation implicite

$$x = a \otimes x \oplus b \tag{2.1}$$

admet  $x = a^*b = (\bigoplus_{k \geq 0} a^k)b$  comme plus petite solution. Par la suite nous noterons  $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto x^* = \bigoplus_{k \geq 0} x^k$ . Nous renvoyons à l'annexe pour un rappel des propriétés de cette application.

## 2.3 Théorie de la Résiduation

**Définition 4 (Applications Résiduables)** Une application  $f : (\mathcal{D}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{C}, \preceq)$  isotone est dite résiduable, si l'équation  $f(x) \preceq b$  admet une plus grande solution dans  $\mathcal{D}$  pour tout  $b \in \mathcal{C}$ .

Le théorème suivant fournit une caractérisation de ces applications.

**Théorème 2 ([Blyth and Janowitz, 1972])** Soit  $f : (\mathcal{D}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{C}, \preceq)$  une application isotone. Sont équivalents

- (i)  $f$  est résiduable.
- (ii) il existe une application isotone  $f^\# : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  telle que  $f \circ f^\# \preceq \text{Id}_{\mathcal{C}}$  et  $f^\# \circ f \succeq \text{Id}_{\mathcal{D}}$ .

**Théorème 3** Soit  $f : (\mathcal{D}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{C}, \preceq)$  une application résiduable, alors :

- (i)  $f \circ f^\# \circ f = f$
- (ii)  $f^\# \circ f \circ f^\# = f^\#$

<sup>1</sup>Essentiellement des hypothèses de semi-continuité.

**Théorème 4** Soit  $f : (\mathcal{D}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{C}, \preceq)$  et  $g : (\mathcal{C}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{E}, \preceq)$  2 applications résiduables, alors :

$$(i) (g \circ f)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp$$

**Exemple 4** Dans [Cohen, 1998], sont considérées les applications suivantes :

$$\begin{aligned} L_a & : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \\ & : x \mapsto a \otimes x \quad (\text{produit à gauche par } a), \\ R_a & : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \\ & : x \mapsto x \otimes a \quad (\text{produit à droite par } a). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il est montré que ces applications sont résiduables. Les applications résiduées sont notées :

$$\begin{aligned} L_a^\sharp(x) & = a \backslash x \quad (\text{division à gauche par } a), \\ R_a^\sharp(x) & = x / a \quad (\text{division à droite par } a). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le lecteur trouvera en annexe un ensemble de propriétés relatives à ces "opérateurs".

**Exemple 5** ([Blyth and Janowitz, 1972], [Menguy, 1997], [Cohen, 1998], [Lhommeau, 2003]) Il est possible de montrer que les applications suivantes sont résiduables, avec  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  des ensembles ordonnés et  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  le dual de l'ensemble  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire le même ensemble équipé de l'ordre inverse (i.e.,  $a \preceq_{\mathcal{C}^{\text{op}}} b \Leftrightarrow a \succeq_{\mathcal{C}} b$ ).

$$\begin{aligned} \Lambda_a & : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}} \\ & \quad x \mapsto x \backslash a, \\ \Psi_a & : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D} \\ & \quad x \mapsto a / x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Les applications résiduées sont respectivement :

$$\begin{aligned} \Lambda_a^\sharp = \Psi_a & : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D} \\ & \quad x \mapsto a / x, \\ \Psi_a^\sharp = \Lambda_a & : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}} \\ & \quad x \mapsto x \backslash a. \end{aligned} \tag{2.5}$$

**Remarque 1** Ce résultat montre que la plus grande solution dans  $\mathcal{D}$  de l'inégalité  $x \backslash a \succeq b$  est  $a / b$ , de même  $b \backslash a$  est la plus grande solution de l'inégalité  $a / x \succeq b$ .

Ci-dessous nous considérons des applications particulières : les fermetures. Nous rappelons notamment qu'une fermeture est résiduable si son co-domaine est restreint à son image. Cette propriété est à la base des résultats concernant la synthèse de correcteurs de type boucle fermée.

**Théorème 5** L'équation implicite

$$x = a \backslash x \wedge b$$

admet  $x = a^* \backslash b$  comme plus grande solution.

**Définition 5 (Fermeture)** On appelle fermeture une application  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ , qui a les propriétés suivantes :

- elle est extensive :  $\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{D}}$ ,
- elle est idempotente :  $\Pi \circ \Pi = \Pi$ ,
- elle est isotone :  $\forall x, x' \in \mathcal{D}, x \preceq x' \Rightarrow \Pi(x) \preceq \Pi(x')$ .

**Définition 6 (Injection canonique d'un sous-ensemble)** Soit  $\mathcal{U}$  un sous-ensemble de l'ensemble  $\mathcal{D}$ . L'injection canonique de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{D}$  est l'application  $I_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{D}$ , définie par  $I_{\mathcal{U}}(u) = u$  pour tout  $u \in \mathcal{U}$ .

**Définition 7 (Application image)** L'application image de  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  est l'injection canonique de  $\Pi(\mathcal{D})$  dans  $\mathcal{C}$ ; cette application sera notée  $I_{\text{Im}\Pi}$ .

**Définition 8 (Restriction d'une application à un domaine)** Soit  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\mathcal{U}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{D}$ . Nous noterons  $\Pi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$  l'application vérifiant

$$\Pi|_{\mathcal{U}} = \Pi \circ I_{\mathcal{U}}$$

où  $I_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{D}$  représente l'injection canonique de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{D}$ . L'application  $\Pi|_{\mathcal{U}}$  sera appelée restriction de  $\Pi$  au domaine  $\mathcal{U}$ .

**Définition 9 (Restriction d'une application à un co-domaine)** Soit  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\text{Im}\Pi \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{C}$ . Nous noterons  ${}_{\mathcal{V}}\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$  l'application définie par l'égalité

$$\Pi = (I_{\mathcal{V}}) \circ ({}_{\mathcal{V}}\Pi)$$

où  $I_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}$  représente l'injection canonique de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{C}$ . L'application  ${}_{\mathcal{V}}\Pi$  sera dite restriction de  $\Pi$  au codomaine  $\mathcal{V}$ .

**Proposition 1 ([Blyth and Janowitz, 1972])** Soit  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  une fermeture. La restriction  ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi$  est résiduable et sa résiduée

$$({}_{\text{Im}\Pi}\Pi)^{\sharp} = I_{\text{Im}\Pi}$$

avec  $I_{\text{Im}\Pi}$  l'injection canonique de  $\text{Im}\Pi$  dans  $\mathcal{D}$ .

**Exemple 6 ([Cottenceau, 1999])** L'application  $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto x^*$  est une fermeture. Par conséquent  $({}_{\text{Im}S}S)$  est résiduable et sa résiduée est  $({}_{\text{Im}S}S)^{\sharp} = I_{\text{Im}S}$ . En d'autres termes, l'inégalité  $x^* \preceq a^*$  admet  $x = a^*$  comme plus grande solution.

**Exemple 7 ([Cottenceau, 1999])** L'application  $P : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto \bigoplus_{i \geq 1} x^i = x^+$  est une fermeture. Par conséquent  $({}_{\text{Im}P}P)$  est résiduable et sa résiduée est  $({}_{\text{Im}P}P)^{\sharp} = I_{\text{Im}P}$ . En d'autres termes, l'inégalité  $x^+ \preceq a^+$  admet  $x = a^+$  comme plus grande solution.

**Exemple 8 ([Lhommeau et al., 2004a])** L'application isotone  $Q_a : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto (xa)^*x$  est une fermeture. Par conséquent  ${}_{\text{Im}Q_a}Q_a$  est résiduable et sa résiduée est  $({}_{\text{Im}Q_a}Q_a)^{\sharp} = I_{\text{Im}Q_a}$ . En d'autres termes, l'inégalité  $(xa)^*x \preceq b$ , avec  $b \in \text{Im}Q_a$ , admet  $x = b$  comme plus grande solution, de plus on a  $(ba)^*b = b$ .

**Exemple 9 ([Cottenceau, 1999], [Cottenceau et al., 2001])** Soient l'application isotone  $M_h : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto h(xh)^*$  définie sur des diodes complets et les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{g \in \mathcal{D} \mid \exists a \in \mathcal{D}, g = a^*h\}, \\ \mathcal{G}_2 &= \{g \in \mathcal{D} \mid \exists b \in \mathcal{D}, g = hb^*\}. \end{aligned}$$

Nous avons montré que  ${}_{\mathcal{G}_1}M_h$  et  ${}_{\mathcal{G}_2}M_h$  étaient résiduables avec :

$$({}_{\mathcal{G}_1}M_h)^{\sharp}(x) = h \backslash x \phi h,$$

$$({}_{\mathcal{G}_2}M_h)^{\sharp}(x) = h \backslash x \phi h.$$

Ci-dessous nous rappelons que l'injection canonique d'un sous-dioïde complet dans un dioïde complet est résiduable et par conséquent qu'il est possible de considérer les problèmes d'inversion d'applications définies sur ces sous-ensembles. Cette propriété nous a été fort utile pour nous restreindre aux éléments causaux d'un dioïde, (voir [Cottenceau et al., 1999]) et pour nous restreindre aux dioïdes de couples ordonnés lors de l'introduction d'un dioïde d'intervalle (voir [Lhommeau et al., 2004a] et [Lhommeau, 2003]).

**Théorème 6 (Lemme de projection [Blyth and Janowitz, 1972])** Soient  $\mathcal{D}$  un dioïde complet et  $\mathcal{D}_{sub}$  un sous-dioïde complet de  $\mathcal{D}$  contenant le plus petit élément  $\varepsilon_{\mathcal{D}}$  de  $\mathcal{D}$ . L'injection canonique  $I_{\mathcal{D}_{sub}} : \mathcal{D}_{sub} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto x$  est résiduable. L'application résiduée  $\text{Pr}_{\mathcal{D}_{sub}} = I_{\mathcal{D}_{sub}}^{\#}$  vérifie :

- (i)  $\text{Pr}_{\mathcal{D}_{sub}} \circ \text{Pr}_{\mathcal{D}_{sub}} = \text{Pr}_{\mathcal{D}_{sub}}$ ,
- (ii)  $\text{Pr}_{\mathcal{D}_{sub}} \preceq \text{Id}_{\mathcal{D}}$ ,
- (iii)  $x \in \mathcal{D}_{sub} \iff \text{Pr}_{\mathcal{D}_{sub}}(x) = x$ .

**Proposition 2 ([Cottenceau, 1999])** Soient  $\Pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une application résiduable définie sur des dioïdes complets et  $I_{\mathcal{C}_{sub}}$  l'injection canonique du sous-dioïde complet  $\mathcal{C}_{sub}$  dans  $\mathcal{C}$ . L'équation  $\Pi \circ I_{\mathcal{C}_{sub}}(x) \preceq b$  est résiduable et sa résiduée est donnée par

$$(\Pi|_{\mathcal{C}_{sub}})^{\#}(b) = (\Pi \circ I_{\mathcal{C}_{sub}})^{\#}(b) = \text{Pr}_{\mathcal{C}_{sub}} \circ \Pi^{\#}(b). \quad (2.6)$$

**Proposition 3 ([Cottenceau, 1999])** Soient  $\Pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une application résiduable définie sur des dioïdes complets et  $I_{\mathcal{D}_{sub}}$  l'injection canonique du sous-dioïde complet  $\mathcal{D}_{sub}$  (avec  $\text{Im}\Pi \subset \mathcal{D}_{sub} \subset \mathcal{D}$ ) dans  $\mathcal{D}$ . L'application  ${}_{\mathcal{D}_{sub}}|\Pi$  est résiduable et

$$({}_{\mathcal{D}_{sub}}|\Pi)^{\#} = \Pi^{\#} \circ I_{\mathcal{D}_{sub}} = (\Pi^{\#})|_{\mathcal{D}_{sub}}.$$

La définition du noyau d'une application (*i.e.*, l'ensemble  $\{x | \Pi(x) = \varepsilon\}$ ) n'a que peu de sens lorsque les applications sont définies sur des treillis. En revanche la définition suivante, classique pour ces applications, est essentielle pour appréhender les problèmes de commande (voir 4.6).

**Définition 10 (Noyau)** Le noyau de l'application linéaire  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , noté  $\ker C$ , est défini par la relation d'équivalence

$$x \stackrel{\ker C}{\equiv} x' \iff C(x) = C(x'). \quad (2.7)$$

Cette relation définit une congruence. L'ensemble quotient  $\mathcal{X}/_{\ker C}$  est donc l'ensemble des classes d'équivalence modulo  $\ker C$ .

**Notation 1** Une classe d'équivalence de  $\mathcal{X}/_{\ker C}$  sera notée  $[x]_C$ .

**Proposition 4 ([Cohen et al., 1996])** Si  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est une application résiduable alors chaque classe d'équivalence  $[x]_C$  contient un et un seul élément de  $\text{Im}C^{\#}$  qui, de plus, est le plus grand élément dans cette classe.

## 2.4 Le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\text{max}}$

L'objet de ce paragraphe est de familiariser le lecteur avec la manipulation d'éléments du dioïde  $(\text{max}, +)$ , noté  $\overline{\mathbb{Z}}_{\text{max}}$  et introduit dans l'exemple 1.

### 2.4.1 Somme de matrices

Soit deux matrices  $A$  et  $B \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{n \times p}$ , la somme de matrices est définie comme suit :

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

**Exemple 10** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} e & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  on a :

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

### 2.4.2 Produit de matrices

Soit trois matrices  $A \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{m \times p}$ ,  $B \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{p \times n}$  et  $C \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{m \times n}$ , le produit de matrices est défini comme suit :

$$C_{ij} = (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}$$

Par convention nous noterons  $\varepsilon$  la matrice nulle, c'est à dire la matrice dont tous les éléments sont égaux à  $\varepsilon$ .

De même nous noterons  $e$ , la matrice nulle, c'est à dire la matrice dont tous les éléments sont égaux à  $e$  à l'exception des éléments de la diagonale qui sont égaux à  $e$ .

Par extension pour  $n \in \mathbb{N}$  on a  $A^n = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{n \text{ fois}}$  avec  $A^0 = e$  la matrice identité.

**Exemple 11** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}$  on a :

$$C = A \otimes B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Rappelons que  $e = 0$  et  $\varepsilon = -\infty$ .

## 2.5 Solution de $x = ax \oplus b$

Cette équation peut admettre une infinité de solution et, en accord avec le corollaire 3, elle admet une plus petite solution, notée  $a^*b$  avec  $a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$ . Classiquement, le calcul des étoiles de matrices se réduit au calcul d'étoiles de scalaire après avoir procédé à une élimination de Gauss. Par exemple l'algorithme de Jordan ci-dessous conduit au calcul de l'étoile de la matrice  $A \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{n \times n}$ .

$$\begin{aligned} & A^{(0)} = A; \\ & \text{for}(k = 1; k == n; k++) \\ & \{ \\ & \text{for}(i = 1; i == n; i++) \\ & \{ \\ & \text{for}(j = 1; j == n; j++) \\ & \{ \\ & A_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(k-1)} \oplus A_{ik}^{(k-1)} (A_{kk}^{(k-1)})^* A_{kj}^{(k-1)} \\ & \} \\ & \} \\ & \} \\ & A^* = e \oplus A^{(n)} \end{aligned}$$

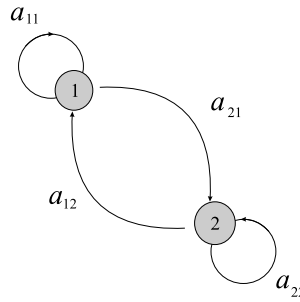


FIG. 2.1 – Graphe associé à une matrice  $2 \times 2$

**Remarque 2** Il est possible de donner une interprétation en terme de graphe à ces matrices. Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  à laquelle on associe le graphe de la figure 2.1. L'élément  $a_{ij}$  caractérise le poids associé à l'arc qui relie le noeud  $j$  à  $i$ . De même  $A^k$  fournit le poids des chemins de longueur  $k$  reliant chaque noeud, c'est à dire que  $(A^k)_{ij}$  caractérise le poids le plus élevé des chemins de longueur  $k$  reliant le sommet  $j$  à  $i$ .

**Exemple 12** Soit le système

$$x = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix}$$

le calcul de  $a^*$  donne :

$$a^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \varepsilon = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & e & 3 \\ 4 & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

qui donne

$$x = a^*b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

### 2.5.1 Equations $ax \preceq b$

Dans un dioïde complet l'équation  $ax \preceq b$  admet une plus grande solution notée  $a \setminus b$  (voir l'exemple 4), qui repose sur la résiduation de l'application  $L_a : x \mapsto ax$ . De même  $xa \preceq b$  admet  $b \not\!/\! a$  comme plus grande solution. En considérant  $A, D \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{m \times n}$ ,  $B \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{m \times p}$ ,  $C \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{n \times p}$ , nous avons :

$$C_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m (A_{ki} \setminus B_{kj})$$

$$D_{ij} = \bigwedge_{k=1}^p (B_{ik} \not\!/\! C_{jk})$$

**Exemple 13** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$  alors :

$$C = A \setminus B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que dans le cas présent  $A \otimes (A \setminus B) = B$  et que cet exemple est à comparer avec l'exemple 11.

### 2.5.2 Théorie spectrale des matrices

Nous donnons ici 2 définitions relatives à la théorie des graphes. Nous renvoyons à l'annexe ?? pour une présentation plus étoffée.

**Définition 11 (Graphe fortement connexe)** *Un graphe est dit fortement connexe si pour deux noeuds  $i$  et  $j$  quelconques il existe un chemin allant de  $i$  à  $j$ .*

**Définition 12 (Matrice irréductible)** *Une matrice  $A \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{n \times n}$  est dite irréductible si le graphe associé est fortement connexe, sinon,  $A$  est dite réductible.*

**Définition 13 (Trace d'une matrice)** *La trace d'une matrice est définie classiquement :*

$$\text{trace}(A) = \bigoplus_{i=1}^n (A)_{ii}.$$

**Remarque 3** *La remarque 2 précise que  $(A^j)_{ii}$  représente le poids maximum de tous les circuits de longueur  $j$  passant par  $i$ . De la définition 13, il découle que  $\bigoplus_{i=1}^n (A^j)_{ii} = \text{trace}(A^j)$  est le plus grand parmi tous les poids maximum associé à chaque noeud  $i \in [1, n]$ .*

**Définition 14**  *$(\text{trace}(A^j))^{(\frac{1}{j})}$  correspond au poids moyen associé aux circuits de longueur  $j$ .*

**Définition 15**

$$\lambda = \bigoplus_{j=1}^n (\text{trace}(A^j))^{(\frac{1}{j})}$$

*est appelé le cycle moyen maximum de la matrice  $A$ . Il s'agit du plus grand poids moyen pour tous les chemins de longueur variant de 1 à  $n$  ( $n$  est la longueur maximale d'un circuit élémentaire).*

**Définition 16 (Vecteur propre, valeur propre)** *Soit une matrice  $A \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{n \times n}$ ,  $\lambda$  un scalaire, et  $x$  un vecteur. On dit que  $\lambda$  est une valeur propre si :*

$$Ax = \lambda x$$

*,  $x$  est appelé vecteur propre.*

**Théorème 7** *Si  $A$  est irréductible, il existe une unique valeur propre. Elle est égale au cycle moyen maximum de la matrice  $A$ .*

**Exemple 14** *Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$  le cycle moyen de cette matrice irréductible*

*est égale à  $\lambda = 8/3$ .*

## Chapitre 3

# Modélisation de systèmes

### 3.1 Equations aux dateurs

C'est au début des années 80 [Cohen et al., 1983], que l'équipe (max,+) de l'INRIA s'est intéressée à la modélisation de graphes d'événements temporisés (sous classe de réseaux de Petri temporisés dont chaque place n'admet qu'une transition amont et qu'une transition aval). Elle a montré que ces systèmes dynamiques, *a priori* non linéaires, pouvaient être représentés par un système d'équations linéaires pour peu que l'on change de structure algébrique et admet un modèle linéaire sous forme canonique dans les algèbres de type (max,+). C'est à dire un modèle sous la forme :

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \quad (3.1a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.1b)$$

La figure 3.1 représente un GET. Les transitions sont étiquetées  $u_1, u_2$  pour les transitions d'entrée,  $x_i, i \in [1, 6]$  pour les transitions internes et  $y$  pour la transition de sortie. A chaque place est associée une temporisation qui caractérise le temps minimum qu'un jeton devra passer dans une place avant de contribuer au franchissement de la transition située en aval de la place. Une transition est franchie par un jeton lorsque chaque place amont contient un jeton actif, c'est à dire un jeton présent depuis au minimum la durée indiquée par la temporisation.

Ce GET peut représenter le comportement d'un atelier d'assemblage, constitué de 3 machines  $M_1, M_2$

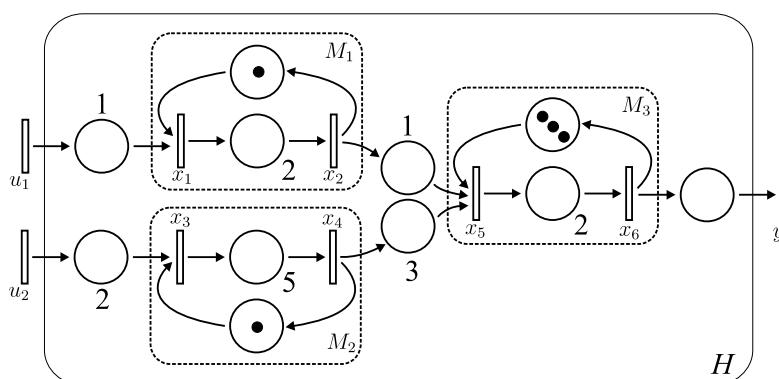


FIG. 3.1 – Exemple d'atelier d'assemblage.

et  $M_3$ . La transition  $u_1$  caractérise l'entrée de matière première dans l'atelier, la transition  $x_1$  représente l'introduction de la matière dans la machine  $M_1$ , pour cela il doit y avoir un jeton dans la place située entre  $x_2$  et  $x_1$  (c'est à dire que la machine doit être libre), et la transition  $u_1$  doit être tirée depuis 1 unité de temps. Après 2 unités de temps la transition  $x_2$  sera franchie (sortie de la machine). La transition  $x_5$  représente l'entrée dans la machine  $M_3$  qui assure l'assemblage de produit provenant des machines  $M_1$  et  $M_2$ .

Le comportement de ce système peut se représenter à l'aide d'équations dynamiques. Pour cela une fonction dateur est associée à chacune des transitions, elle sera chargée de dater l'occurrence du franchissement des transitions (on se place dans le domaine événementiel), formellement pour la transition  $x_j$ ,  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, k \mapsto x_j(k)$  avec  $x_j(k)$  la date de passage du jeton numéroté  $k$ .

Pour le GET de la figure 3.1 nous obtenons :

$$\begin{aligned}
x_1(k) &= \max(1 + u_1(k), x_2(k-1)) \\
x_2(k) &= 2 + x_1(k) \\
x_3(k) &= \max(2 + u_2(k), x_4(k-1)) \\
x_4(k) &= 5 + x_3(k) \\
x_5(k) &= \max(3 + x_4(k), 1 + x_2(k), x_6(k-3)) \\
x_6(k) &= 2 + x_5(k) \\
y(k) &= x_6(k)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Il s'agit en fait d'un ensemble d'équations linéaires dans le semi-anneau idempotent  $\mathbb{Z}_{\max}$  (cf. définition 1), soit :

$$\begin{aligned}
x_1(k) &= 1 \otimes u_1(k) \oplus x_2(k-1) \\
x_2(k) &= 2 \otimes x_1(k) \\
x_3(k) &= 2 \otimes u_2(k) \oplus x_4(k-1) \\
x_4(k) &= 5 \otimes x_3(k) \\
x_5(k) &= 3 \otimes x_4(k) \oplus 1 \otimes x_2(k) \oplus x_6(k-3) \\
x_6(k) &= 2 \otimes x_5(k) \\
y(k) &= x_6(k)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ou encore, en introduisant les vecteurs d'état  $x(k) = (x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k) \ x_5(k) \ x_6(k))^t$ , de commande  $u(k) = (u_1(k) \ u_2(k))^t$  et de sortie  $y(k) = (y(k))$  :

$$\begin{aligned}
x(k) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-2) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-3) \\
&\oplus \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \\
y(k) &= (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 0) x(k)
\end{aligned}$$

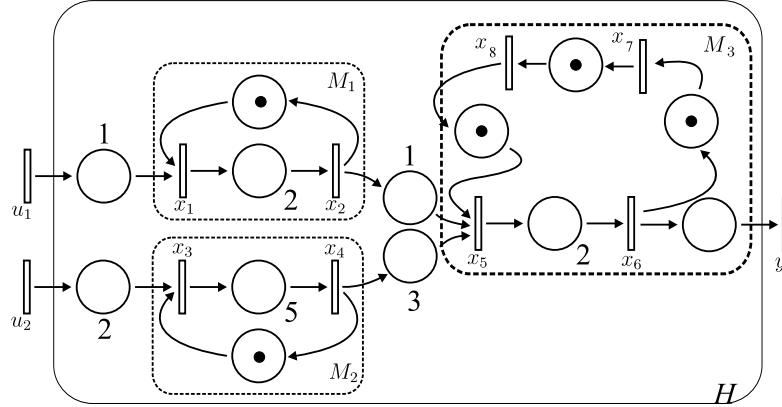


FIG. 3.2 – Exemple d’atelier d’assemblage (extension événementielle).

D’une manière générale, on obtient donc la forme sur  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  :

$$\begin{aligned} x(k) &= \bigoplus_{i=0}^a A_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b B_j u(k-j), \\ y(k) &= \bigoplus_{l=0}^c C_l x(k-l). \end{aligned}$$

Il est possible avec quelques manipulations [Cohen, 1995], de passer à une forme récurrente qui correspond à une forme où le retard est au plus de 1 sur le vecteur d’état et de 0 sur le vecteur de commande. On se ramène alors à un système sous la forme :

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0 x(k) \oplus A_1 x(k-1) \oplus B_0 u(k), \\ y(k) &= C_0 x(k). \end{aligned}$$

Pratiquement il s’agit d’étendre le graphe afin que chaque place ne contienne initialement pas plus d’un jeton, la figure 3.2 donne une extension du GET précédent, soit le modèle :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 0 \ \varepsilon \ \varepsilon) x(k)$$

L’équation (3.3.1) est implicite en  $x(k)$ . En appliquant le Théorème 3, on peut passer à la forme ARMA<sup>1</sup> explicite suivante :

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \quad (3.4)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.5)$$

avec  $A = A_0^* A_1$  et  $B = A_0^* B_0$ . Dans notre exemple nous obtenons :

<sup>1</sup>ARMA pour Auto Regressive - Moving Average



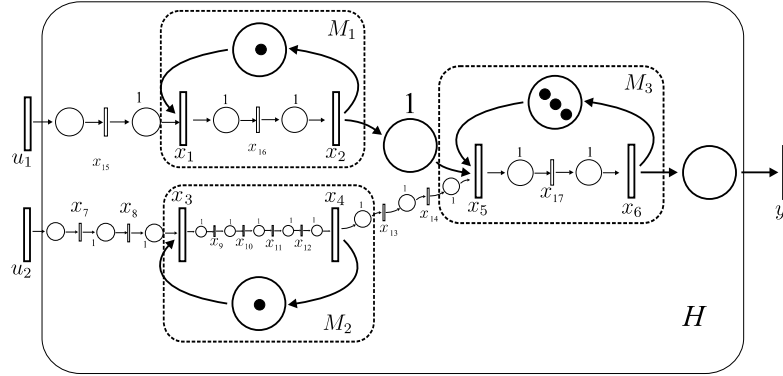


FIG. 3.3 – Exemple d’atelier d’assemblage (extension temporelle).

$$3) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(t-5) \oplus \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(t-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(t-2)$$

$$y(t) = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ e) x(t)$$

D’une manière générale, on obtient donc la forme sur  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  :

$$x(t) = \bigoplus_{i=0}^a A_i x(t-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b B_j u(t-j), \quad (3.8)$$

$$y(t) = \bigoplus_{l=0}^c C_l x(t-l). \quad (3.9)$$

Il est possible avec quelques manipulations [Cohen, 1995], de passer à une forme récurrente qui correspond à une forme où le retard temporel est au plus de 1 sur le vecteur d’état et de 0 sur le vecteur de commande. On se ramène alors à un système sous la forme :

$$x(t) = A_0 x(t) \oplus A_1 x(t-1) \oplus B_0 u(t), \quad (3.10)$$

$$y(t) = C_0 x(t). \quad (3.11)$$

Pratiquement il s’agit d’étendre le graphe afin que la temporisation associée à chaque place soit au plus égale à 1 unité de temps, et égale à 0 au niveau de la matrice d’entrée  $B$ . La figure 3.3 donne une extension du GET précédent, soit les matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$  et  $C$  :

$$\begin{aligned}
A_{0,2} &= 1 \\
A_{0,3,4} &= 1 \\
A_{0,5,6} &= 3 \\
A_{1,1,15} &= e \\
A_{1,2,16} &= e \\
A_{1,3,8} &= e \\
A_{1,4,12} &= e \\
A_{1,5,2} &= e \quad A_{1,5,14} = e \\
A_{1,6,17} &= e \\
A_{1,8,7} &= e \\
A_{1,9,3} &= e \\
A_{1,10,9} &= e \\
A_{1,11,10} &= e \\
A_{1,12,11} &= e \\
A_{1,13,4} &= e \\
A_{1,14,13} &= e \\
A_{1,16,1} &= e \\
A_{1,17,5} &= e \\
B_{7,2} &= e \\
B_{15,1} &= e \\
C_{1,6} &= e
\end{aligned}$$

En appliquant le Théorème 3, on peut naturellement passer à la forme explicite suivante :

$$x(t) = Ax(t-1) \oplus Bu(t) \quad (3.12)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.13)$$

avec  $A = A_0^*A_1$  et  $B = A_0^*B_0$ . Le script Scilab donné en annexe fourni directement :

$$\begin{aligned}
A_{1,15} &= e \quad A_{1,16} = 1 \\
A_{2,16} &= e \\
A_{3,8} &= e \quad A_{3,12} = 1 \\
A_{4,12} &= e \\
A_{5,2} &= e \quad A_{5,14} = e \quad A_{5,17} = 3 \\
A_{6,17} &= e \\
A_{8,7} &= e \\
A_{9,3} &= e \\
A_{10,9} &= e \\
A_{11,10} &= e \\
A_{12,11} &= e \\
A_{13,14} &= e \\
A_{14,13} &= e \\
A_{16,1} &= e \\
A_{17,5} &= e \\
B_{7,2} &= e \\
B_{15,1} &= e \\
C_{1,6} &= e
\end{aligned}$$

### 3.3 Diïdes de séries formelles

Il est également possible de modéliser les GET de manière plus synthétique dans des diïdes de séries formelles, dont le diïde des séries formelles en deux variables commutatives,  $\gamma$  et  $\delta$ , à exposants dans  $\mathbb{Z}$ , noté  $\mathcal{M}_{in}^{\alpha x}[\gamma, \delta]$  (voir [Cohen, 1993]). Ce para graphe à pour objectif de rappeler la construction de ce diïde. Un document intéressant est ([Cohen, 1993] ou [?]) qui est disponible sur la page de l'auteur.

### 3.3.1 Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$

**Définition 17** La transformée en  $\gamma$  d'un signal est définie de la manière suivante :

$$d(\gamma) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} d(k) \otimes \gamma^k$$

**Remarque 4** Ce type de transformée est l'analogie de la transformée en  $z$  de l'automatique classique qui permet de coder une trajectoire discrete sous la forme de série.

**Remarque 5** Puisque  $\gamma \otimes d(\gamma) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} d(k) \otimes \gamma^{k+1} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} d(k-1) \otimes \gamma^k$ , l'opérateur  $\gamma$  peut être vu comme un opérateur de retard, i.e.,  $x(k-1) = \gamma x(k)$ .

**Définition 18 (Dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ )** L'ensemble des séries formelles en  $\gamma$  à exposant dans  $\mathbb{Z}$  et coefficients dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  a une structure de dioïde. L'élément neutre de l'addition est la série  $\varepsilon = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^i$  (où  $\varepsilon = -\infty$  est l'élément neutre de l'addition dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ). L'élément neutre de la multiplication est la série  $e(\gamma) = e \gamma^0$  (où  $e = 0$  est l'élément neutre de la multiplication de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ). La somme et le produit de séries formelles sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} d_1(\gamma) \oplus d_2(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (d_1(k) \oplus d_2(k)) \gamma^k \\ d_1(\gamma) \otimes d_2(\gamma) &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (d_1(j) \oplus d_2(k-j)) \gamma^k \end{aligned}$$

Le système d'équations 3.4 correspond au modèle standard d'un GET dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  et peut se transposer dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$  :

$$\begin{aligned} x(\gamma) &= \gamma Ax(\gamma) \oplus Bu(\gamma) \\ y &= Cx(\gamma) \end{aligned}$$

En appliquant le résultat de l'exemple 3, apparaît une relation de transfert qui caractérise le comportement entrée/sortie du système :

$$y(\gamma) = C(\gamma A)^* Bu(\gamma) = Hu(\gamma)$$

De manière équivalente il est possible de considérer le modèle 3.3.1 dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$  :

$$\begin{aligned} x(\gamma) &= \bigoplus_{i=0}^a \gamma^i A_i x(\gamma) \oplus \bigoplus_{j=0}^b \gamma^j B_j u(\gamma), \\ y(\gamma) &= \bigoplus_{l=0}^c \gamma^l C_l x(\gamma). \end{aligned}$$

qui conduit à un modèle de la forme :

$$\begin{aligned} x(\gamma) &= Ax(\gamma) \oplus Bu(\gamma) \\ y &= Cx(\gamma) \end{aligned}$$

avec  $A = \bigoplus_{i=0}^a \gamma^i A_i$ ,  $B = \bigoplus_{j=0}^b \gamma^j B_j$  et  $C = \bigoplus_{l=0}^c \gamma^l C_l$ . Les éléments des matrices  $A, B$  et  $C$  sont alors des polynômes. Cette formulation n'est pas standard. Le pouvoir de modélisation est cependant équivalent et les composantes du vecteur d'état représentent directement une transition du GET. Ce type de modèle sera systématiquement considéré par la suite.

### Trajectoires monotones

Les trajectoires solutions des systèmes d'équations précédents ne sont pas nécessairement monotones, néanmoins par définition une trajectoire issue d'un GET est nécessairement monotone croissante (la date d'occurrence de  $d(k)$  est nécessairement supérieure à  $d(k-1)$ ). Formellement,

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad d(k) \geq d(k-1) \Leftrightarrow d(k) = d(k) \oplus d(k-1).$$

qui est équivalent à

$$d(\gamma) = d(\gamma) \oplus \gamma d(\gamma) \Leftrightarrow d(\gamma) = \gamma^* d(\gamma).$$

C'est à dire que la transformée en  $\gamma$  d'une trajectoire monotone s'écrit forcément  $\gamma^* d(\gamma)$  et que la multiplication par  $\gamma^*$  d'une trajectoire non monotone donne une trajectoire monotone croissante. Il s'agit d'une sorte de filtre. L'ensemble des trajectoires monotones (*i.e.*, qui s'écrivent  $\gamma^* d(\gamma)$ ) forment un dioïde noté  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ . Pour s'en persuader il faut noter que la somme et le produit d'éléments de cet ensemble sont fermés. Il en découle que l'égalité d'éléments doit s'entendre "modulo  $\gamma^*$ ". Par exemple :

$$3\gamma \oplus 1\gamma^7 \oplus 5\gamma^9 = 3\gamma \oplus 5\gamma^9$$

De façon plus générale les règles de calcul suivantes devront être considérées :

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n, n')}$$

L'élément neutre pour la multiplication de  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  est donc la série  $e(\gamma) = e \oplus e\gamma \oplus e\gamma^2 \oplus \dots \oplus e\gamma^{+\infty}$ . L'élément neutre pour l'addition de  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  est donc  $\varepsilon(\gamma) = \varepsilon \oplus \varepsilon\gamma \oplus \varepsilon\gamma^2 \oplus \dots \oplus \varepsilon\gamma^{+\infty}$ , avec  $\varepsilon = -\infty$  l'élément neutre de l'addition de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ .

**Remarque 6** Dans la suite nous ne manipulerons que des séries monotones. Afin d'alléger les écritures, en l'absence d'ambiguïté,  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  devra être compris comme  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ . Les éléments neutres seront notés  $e$  et  $\varepsilon$ .

### 3.3.2 Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[\delta]$

De manière duale il est possible de définir une transformée pour les séries considérées dans le domaine temporel.

**Définition 19** La transformée en  $\delta$  d'un signal est définie de la manière suivante :

$$d(\delta) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} c(t) \otimes \delta^t$$

**Définition 20 (Dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[\delta]$ )** L'ensemble des séries formelles en  $\delta$  à exposant dans  $\mathbb{Z}$  et coefficients dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  a une structure de dioïde. L'élément neutre de l'addition est la série  $\varepsilon = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k$  (où  $\varepsilon = +\infty$  est l'élément neutre de l'addition dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ ). L'élément neutre de la multiplication est la série  $e(\delta) = e\delta^0$  (où  $e = 0$  est l'élément neutre de la multiplication de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ ). La somme et le produit de séries formelles sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} c_1(\delta) \oplus c_2(\delta) &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} (c_1(t) \oplus c_2(t)) \delta^t \\ c_1(\delta) \otimes c_2(\delta) &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (c_1(j) \oplus c_2(t-j)) \gamma^t \end{aligned}$$

Le système d'équations 3.12 correspond au modèle standard d'un GET dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  et peut se transposer dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$  :

$$\begin{aligned} x(\delta) &= \delta Ax(\delta) \oplus Bu(\delta) \\ y &= Cx(\delta) \end{aligned}$$

En appliquant le résultat de l'exemple 3, apparaît une relation de transfert qui caractérise le comportement entrée/sortie du système :

$$y(\delta) = C(\delta A)^* Bu(\delta) = Hu(\delta)$$

De manière équivalente il est possible de considérer le modèle 3.3.1 dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$  :

$$\begin{aligned} x(\delta) &= \bigoplus_{i=0}^a \delta^i A_i x(\delta) \oplus \bigoplus_{j=0}^b \delta^j B_j u(\delta), \\ y(\delta) &= \bigoplus_{l=0}^c \delta^l C_l x(\delta). \end{aligned}$$

qui conduit à un modèle de la forme :

$$\begin{aligned} x(\delta) &= Ax(\delta) \oplus Bu(\delta) \\ y &= Cx(\delta) \end{aligned}$$

avec  $A = \bigoplus_{i=0}^a \delta^i A_i$ ,  $B = \bigoplus_{j=0}^b \delta^j B_j$  et  $C = \bigoplus_{l=0}^c \delta^l C_l$ . Les éléments des matrices  $A, B$  et  $C$  sont alors des polynômes.

### Trajectoires monotones

Tout comme dans le domaine événementiel les trajectoires associées à un graphe d'événements sont monotones (le nombre d'événements ayant eu lieu à l'instant  $(t+1)$ ,  $c(t+1)$ , est nécessairement supérieur au nombre ayant eu lieu à l'instant  $t$ ,  $c(t)$ ). Formellement,

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad c(t) \succeq c(t+1) \Leftrightarrow c(t) = c(t+1) \oplus c(t).$$

qui est équivalent à

$$c(\delta) = \delta^{-1}c(\delta) \oplus c(\delta) \Leftrightarrow c(\delta) = (\delta^{-1})^*c(\delta).$$

C'est à dire que la transformée en  $\delta$  d'une trajectoire monotone appartient au dioïde  $(\delta^{-1})^*\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$ . Il en découle les règles de calcul suivantes :

$$\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t,t')}$$

L'élément neutre pour la multiplication de  $(\delta^{-1})^*\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$  est la série  $e(\delta) = e \oplus e\delta \oplus e\delta^2 \oplus \dots \oplus e\delta^{+\infty}$ . L'élément neutre pour l'addition  $(\delta^{-1})^*\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$  est la série  $\varepsilon(\delta) = \varepsilon \oplus \varepsilon\delta^1 \oplus \varepsilon\delta^2 \oplus \dots \oplus \varepsilon\delta^{+\infty}$ , avec  $\varepsilon = +\infty$  l'élément neutre de l'addition de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ .

### 3.3.3 Représentation Bi-dimensionnelle, $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Au travers d'un exemple nous allons rappeler comment modéliser un GET dans un dioïde de séries formelles en deux variables commutatives,  $\gamma$  et  $\delta$ , à exposants dans  $\mathbb{Z}$  et à coefficients booléens. Ce dioïde sera systématiquement utilisé dans les illustrations de ce mémoire. Pour l'exemple de la figure 3.1 nous obtenons directement :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \gamma^3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$y = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ e) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la forme standard suivante :

$$\begin{aligned} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

A chaque transition du GET est associée une composante des vecteurs  $x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  (vecteur associé aux transitions internes, ici  $n = 6$ ),  $u \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$  (vecteur associé aux transitions d'entrée, ici  $m = 2$ ) et  $y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^l$  (vecteur associé aux transitions de sortie, ici  $l = 1$ ). Les matrices  $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times m}$ ,  $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times n}$ , représentent l'interaction entre ces transitions. Les composantes des matrices sont des polynômes de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . La composante  $A_{5,6} = \gamma^3$  traduit la présence de 3 jetons dans la place séparant les transitions  $x_6$  et  $x_5$ , de manière duale, la composante  $A_{4,3} = \delta^5$  indique qu'une temporisation de 5 unités de temps est attachée à la place séparant les transitions  $x_3$  et  $x_4$ .

La résolution de l'équation au point fixe permet d'établir un modèle entrée-sortie du système. Dans notre exemple, cette matrice de transfert  $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$  est :

$$H = CA^*B = (\delta^6(\gamma\delta^2)^* \ \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) . \tag{3.15}$$

De manière générale, les éléments de la matrice de transfert représentant un GET sont des séries périodiques et causales de la forme :  $p \oplus qr^*$ , avec  $p$  et  $q$  des polynômes à exposants dans  $\mathbb{N}$  et  $r$  un monôme à exposants dans  $\mathbb{N}$ . Le polynôme  $p$  caractérise le comportement transitoire de la série, le polynôme  $q$  représente un motif qui se répète périodiquement, la périodicité étant fournie par  $r = \gamma^\nu \delta^\tau$  où  $\nu/\tau$  caractérise le taux de production de la série. Un exemple de série périodique est représenté figure 3.4.

Il faut donc retenir ici, qu'un GET admet un modèle dans le sous dioïde des séries périodiques et causales.

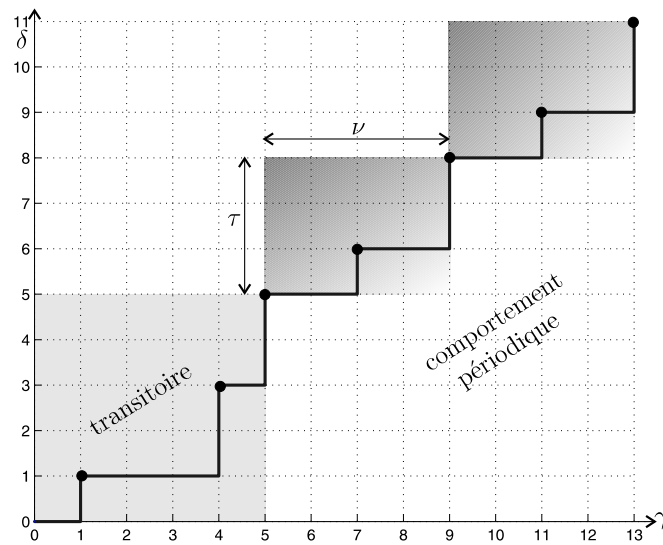


FIG. 3.4 – Représentation graphique de la série  $s = p \oplus qr^* = e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus (\gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^6)(\gamma^4\delta^3)^*$ .

Pour conclure ce paragraphe rappelons que 2 boîtes à outils **Scilab** permettent de simuler ces systèmes (voir <http://www.maxplus.org/>). La première est la contribution officielle de l'équipe (max,+) de l'INRIA, les systèmes sont alors représentés dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ . La seconde permet de se placer dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , elle reprend une partie des algorithmes développés dans la thèse de Stéphane Gaubert [Gaubert, 1992], et ceux proposés dans le DEA de Benoit Gruet [Gruet, 1995] (des raffinements sont également présentés dans la thèse de Bertrand Cottenceau [Cottenceau, 1999], et le DEA de Mehdi Lhommeau [Lhommeau, 2000]) (voir <http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin>).



# Chapitre 4

## Commande de systèmes

### 4.1 Commande Optimale

Les premiers résultats concernant la commande des GET, obtenus par une approche (max,+), apparaissent dans [Cohen et al., 1989], des extensions ont ensuite été proposées par J-L. Boimond et E. Menguy [Menguy, 1997],[Menguy et al., 2000]. La commande optimale proposée est élaborée dans un objectif de *poursuite de trajectoire de sortie connue a priori*. Il s'agit d'une stratégie de type boucle ouverte.

Le problème résolu est le suivant. Partant d'un GET dont on connaît la matrice de transfert  $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$  et un vecteur de sortie désiré  $y_c \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^l$  (consigne de sortie connue *a priori*), il est montré qu'il existe une plus grande entrée  $u_{opt} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$  telle que la sortie résultant de cette entrée ( $y_{opt} = H u_{opt}$ ) soit inférieure à la sortie désirée  $y_c$ <sup>1</sup>. La commande  $u_{opt}$  est alors optimale vis-à-vis du critère de juste-à-temps, c.-à-d. que l'entrée de jetons est la plus tardive tout en satisfaisant la contrainte imposée par la trajectoire de consigne (la sortie  $y_{opt}$  est en juste-à-temps). Formellement, en rappelant que le produit à gauche est une application résiduable (voir 4) la commande  $u_{opt}$  est donnée par :

$$u_{opt} = H \backslash y_c.$$

Cette commande joue naturellement un rôle primordial dans un contexte de planification d'événements. En rappelant que  $H = CA^*B$  est la plus petite solution du système :

$$\begin{aligned} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{4.1}$$

il est possible de donner une représentation interne de la commande optimale (voir le théorème ??) :

$$\begin{aligned} \xi &= A \backslash \xi \wedge C \backslash y_c \\ u &= B \backslash \xi \end{aligned} \tag{4.2}$$

$\xi$  est appelé co-état du système, il s'agit du plus grand vecteur d'état qui satisfait la contrainte.

**Exemple 15 (Commande en Juste à Temps)** *L'atelier de la figure 3.1 doit respecter la consigne  $y_c$  suivante :*

---

<sup>1</sup>Pratiquement le tir des transitions d'entrée sera le plus tardif possible tout en garantissant que le tir des transitions de sortie aura lieu avant celui imposé par la consigne.

|                             |    |    |    |           |
|-----------------------------|----|----|----|-----------|
| numéro de pièces ( $k$ )    | 0  | 1  | 2  | 3         |
| dates désirées ( $y_c(k)$ ) | 10 | 12 | 12 | $+\infty$ |

La trajectoire  $y_c$  peut naturellement se coder dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  :

$$y_c(\gamma, \delta) = \gamma^0 \delta^{10} \oplus \gamma^1 \delta^{12} \oplus \gamma^2 \delta^{12} \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty}$$

Soit le système 4.2 à résoudre. En considérant les résultats sur la manipulation de matrice, ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} \xi_i &= \bigwedge_{k=1}^n (A_{ki} \xi_k) \bigwedge_{k=1}^l (C_{ki} y_{c_k}) \text{ avec } i \in [1, n] \\ u_j &= \bigwedge_{k=1}^n (B_{kj} \xi_k) \text{ avec } j \in [1, m] \\ \xi &= \begin{pmatrix} \delta^{-2} \xi_2 \\ \gamma^{-1} \xi_1 \wedge \delta^{-1} \xi_5 \\ \delta^{-5} \xi_4 \\ \gamma^{-1} \xi_3 \wedge \delta^{-3} \xi_5 \\ \delta^{-2} \xi_6 \\ \gamma^{-3} \xi_5 \end{pmatrix} \wedge y_c \\ u &= \begin{pmatrix} \delta^{-1} \xi_1 \\ \delta^{-2} \xi_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que l'on peut naturellement transcrire dans le domaine des dateurs et qui conduit à l'algorithme suivant (les co-états sont initialisés à  $+\infty$ , i.e.,  $\xi_1(3) = \xi_2(3) = \xi_3(3) = \xi_4(3) = \xi_5(3) = \xi_6(3) = +\infty$ ) :

$$\begin{aligned} \xi(k) &= \begin{pmatrix} -2\xi_2(k) \\ \xi_1(k+1) \wedge -1\xi_5(k) \\ -5\xi_4(k) \\ \xi_3(k+1) \wedge -3\xi_5(k) \\ -2\xi_6(k) \\ \xi_5(k+3) \end{pmatrix} \wedge y_c(k) \\ u(k) &= \begin{pmatrix} -1\xi_1(k) \\ -2\xi_3(k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le script Scilab donne directement le résultat (ici on utilise la librairie `lminmaxgd`) :

```

////////////////////////////////////\
// Backward Equations , Optimal control \
////////////////////////////////////

mode(-1);

A = smatrix(6,6); // state matrix
B = smatrix(6,2); //
C = smatrix(1,6);

mode(7);

//state matrix declaration
A(1,2)=series(eps,[1 0],e); // 1 token and 0 time unit between x_2 and x_1
A(2,1)=series(eps,[0 2],e); // 0 token and 2 time units between x_1 and x_2
A(3,4)=series(eps,[1 0],e); // 1 token and 0 time unit between x_4 and x_3
A(4,3)=series(eps,[0 5],e);
A(5,2)=series(eps,[0 1],e);
A(5,4)=series(eps,[0 3],e);

```

```

A(5,6)=series(eps,[3 0],e);
A(6,5)=series(eps,[0 2],e)

//Input and Output matrices
B(1,1)=series(eps,[0 1],e);
B(3,2)=series(eps,[0 2],e)

C(1,6)=series(eps,[0 0],e);

//Transfer matrix
H = C*stargd(A)*B

//output trajectory desired : z >= y=h*u
z = series(eps,[0 10 ; 1 12 ; 2 12 ; 3 %inf],[0 %inf])

//Optimal command (denoted u_opt) : u_opt = H \z
u_opt = H\z

//Ouput y=h*u_opt
y = H*u_opt
//which is less than or equal to z
disp(z)

```

qui conduit au résultat suivant après exécution :

```

--> //Optimal command (denoted u_opt) : u_opt = H \z
--> u_opt= H\z
u_opt =

[1,1] g^0d^2+g^1d^4+g^2d^6+(g^3d^+*)[g^0d^+]* [2,1]
g^0d^-10+g^1d^-5+g^2d^0+(g^3d^+*)[g^0d^+]*

--> //Ouput y=h*u_opt
--> y = H*u_opt
y =

[1,1] g^0d^8+g^1d^10+g^2d^12+(g^3d^+*)[g^0d^+]*

--> //which is less than or equal to z
z = [1,1] g^0d^10+g^1d^12+(g^3d^+*)[g^0d^+]*

```

*c'est à dire que la sortie optimale (celle qui satisfait la demande et minimise les stocks internes) est la suivante :*

| numéro de pièces ( $k$ )                             | 0 | 1  | 2  | 3         |
|--|---|----|----|-----------|
| dates optimales de sortie ( $y(k) = (Hu_{opt})(k)$ ) | 8 | 10 | 12 | $+\infty$ |

## 4.2 Synthèse d'un correcteur de type précompensateur

La correction de la dynamique d'un système  $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$  (correspondant à un GET) se fait ici par l'action d'un précompensateur  $P \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{m \times m}$  (situé entre la consigne  $v$  et la commande  $u$ ). Il s'agit de modifier de manière structurelle le comportement du système. Ce travail a été initié dans le cadre du DEA de B. Gruet ([Gruet, 1995], [Hardouin et al., 1997]). On le retrouve également dans la thèse de B. Cottenceau [Cottenceau, 1999] et dans la thèse de C.A. Maia [Maia, 2003].

Le problème de commande consiste simplement à choisir le transfert du précompensateur  $P$  de telle sorte que le système contrôlé  $G_P \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$  possède la dynamique décrite par un modèle de

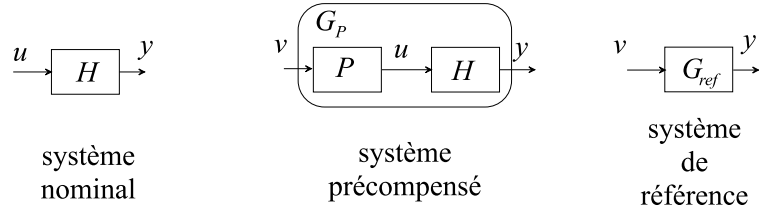


FIG. 4.1 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système  $H$  par un précompensateur  $P$ .

référence  $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$  spécifié sous forme de matrice de transfert. Ce modèle caractérise le comportement structurel voulu pour le système.

Formellement, on cherche :

$$P_{opt} = \sup\{P \mid HP \preceq G_{ref}\}.$$

La solution optimale est immédiate, puisque  $L_H$  est résiduable :

$$P_{opt} = H \setminus G_{ref}. \quad (4.3)$$

**Remarque 7 (Correcteur Neutre)** Notons qu'un modèle de référence intéressant d'un point de vue pratique est  $G_{ref} = H$ , l'objectif est alors de maintenir les performances entrée/sortie du système, tout en augmentant autant que faire se peut la commande. Cette stratégie conduit au précompensateur  $P_{opt} = H \setminus H$ , qualifié de neutre. Il exprime simplement le fait que l'on peut toujours "filtrer" le flux d'entrée d'un système  $H$  par un précompensateur sans dégrader les performances initiales.

#### 4.2.1 Illustration

Cette illustration montre comment filtrer les entrées du système avec un correcteur neutre. Sur la figure 4.2 nous retrouvons un exemple d'atelier d'assemblage. La machine  $M_1$  peut traiter une pièce toutes les 2 unités de temps, la machine  $M_2$  peut traiter une pièce toutes les 3 unités de temps, et la machine  $M_3$ , chargée d'assembler les pièces sortant des deux précédentes, peut traiter une pièce toutes les 2 unités de temps. Le transfert du système  $H$  est décrit par :

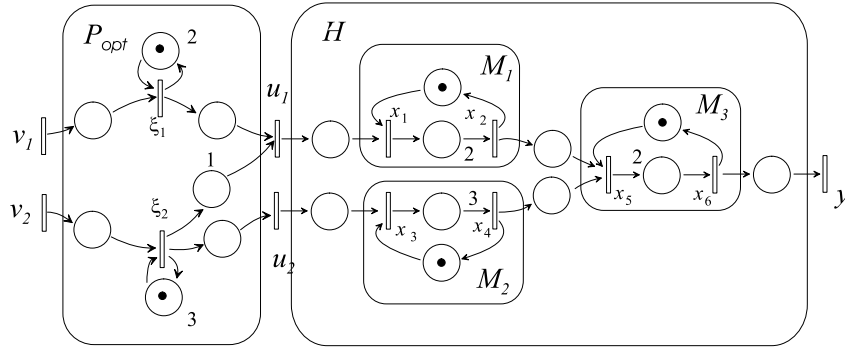
$$H = (\delta^4(\gamma\delta^2)^* \quad \delta^5(\gamma\delta^3)^*).$$

L'objectif est donc ici de laisser le comportement entrée/sortie du système inchangé, tout en retardant au plus les entrées dans le système.

$$G_{ref} = H = (\delta^4(\gamma\delta^2)^* \quad \delta^5(\gamma\delta^3)^*).$$

Le correcteur  $P_{opt} = (H \setminus G_{ref}) = H \setminus H$  est donné ci-dessous et une réalisation de ce correcteur est donné sur la figure 4.2 :

$$P = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & \delta(\gamma\delta^3)^* \\ \varepsilon & (\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}.$$

FIG. 4.2 – Réalisation du précompensateur permettant d'approcher au mieux  $G_{ref}$ .

A parti de la réalisation de la figure 4.2, la loi de commande peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\delta^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma\delta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \delta \\ \varepsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

ou encore dans le domaine temporel (dioïde  $\mathbb{Z}_{\min}$ ) :

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= 1\xi_1(t-2) \oplus v_1(t) \\ \xi_2(t) &= 1\xi_1(t-3) \oplus v_2(t) \\ u_1(t) &= \xi_1(t) \oplus 1\xi_2(t) \\ u_2(t) &= \xi_2(t) \end{aligned}$$

Pour évaluer l'impact de ce précompensateur, la commande suivante est appliquée (3 tirs à l'instant 0 sur chaque entrée) :

|                           |   |   |   |           |
|---------------------------|---|---|---|-----------|
| numéro de pièces ( $k$ )  | 0 | 1 | 2 | 3         |
| dates de tir ( $v_1(k)$ ) | 0 | 0 | 0 | $+\infty$ |
| dates de tir ( $v_2(k)$ ) | 0 | 0 | 0 | $+\infty$ |

soit les trajectoires dans  $\mathcal{M}_{in}^{a,x}[\gamma, \delta]$  :

$$\begin{aligned} v_1(\gamma, \delta) &= e \oplus \gamma \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty} \\ v_2(\gamma, \delta) &= e \oplus \gamma \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty} \end{aligned}$$

En l'absence de correcteur, on a :

$$\begin{aligned} u &= v \\ y &= Hu = \delta^5 \oplus \gamma^1 \delta^8 \oplus \gamma^2 \delta^1 1 \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty} \end{aligned}$$

Avec le correcteur nous obtenons :

$$\begin{aligned} u &= P_{opt}v = \begin{pmatrix} \delta^1 \oplus \gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^2 \delta^7 \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty} \\ e \oplus \gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^6 \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty} \end{pmatrix} \\ y &= Hu = \delta^5 \oplus \gamma^1 \delta^8 \oplus \gamma^2 \delta^1 1 \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty} \end{aligned}$$

Clairement la commande en présence du correcteur est plus grande (plus tardive) et les sorties identiques.

Le script Scilab et le résultat obtenu sont fournis ci-dessous.

```

////////////////////////////////////
// OPTimal Precompensator Synthesis
////////////////////////////////////

mode(-1);

    A = smatrix(6,6); // state matrix
    B = smatrix(6,2); //
    C = smatrix(1,6);
    H= smatrix(1,2); // transfer matrix
    Gref=smatrix(1,2); // reference model
    P_opt=smatrix(2,2); // precompensator transfer
    Hc=smatrix(1,2); // transfer with the precompensator
    v=smatrix(2,1); // input of the controlled system
    u=smatrix(2,1); // control law
    y_u=smatrix(1,1); // output when we apply u
    y_v=smatrix(1,1); // output when we apply v

mode(7);

    //state matrix declaration
        A(1,2)=series(eps,[1 0],e); // 1 token and 0 time unit between x_2 and x_1
        A(2,1)=series(eps,[0 2],e); // 0 token and 2 time units between x_1 and x_2

        A(3,4)=series(eps,[1 0],e); // 1 token and 0 time unit between x_4 a,d x_3
        A(4,3)=series(eps,[0 3],e);

        A(5,2)=series(eps,[0 0],e);
        A(5,4)=series(eps,[0 0],e);
        A(5,6)=series(eps,[1 0],e);
        A(6,5)=series(eps,[0 2],e)

    //Input and Output matrices
    B(1,1)=series(eps,[0 0],e);
    B(3,2)=series(eps,[0 0],e)

    C(1,6)=series(eps,[0 0],e);

    //Transfer matrix
    H = C*stargd(A)*B

    //refrence model

// Gref(1,1)=series(eps,[0,4],[1 2]);
// Gref(1,2)=series(eps,[0,5],[1 3]);

Gref=H

//Optimal precompensator (denoted P_opt) : P_opt = H \Gref
P_opt = H\Gref

//transfer of corrected system Ouput Hc=H*P_opt
Hc = H*P_opt

//which is less than or equal to Gref, but the best than we can do
disp(Gref)

// For a control v (3 tokens on each input at time zero
v(1,1)=series(eps,[0 0 ; 1 0 ; 2 0 ; 3 %inf],[0 %inf]);
v(2,1)=series(eps,[0 0 ; 1 0 ; 2 0 ; 3 %inf],[0 %inf])

// output with control applied without precompensator
y_v=H*v

```

```

// input filtered, it is greater than v
u=P_opt*v
// output with optimal control, it is the same than without
y_u=H*u

```

qui conduit aux résultats suivants :

```

//Optimal precompensator (denoted P_opt) : P_opt = H \Gref
>>
--> P_opt = prcaus(H\Gref)
P_opt =
[1,1] eps+(g^0d^0)[g^1d^2]* [1,2] eps+(g^0d^1)[g^1d^3]* \
[2,1] eps+(eps)[g^0d^0]* [2,2] eps+(g^0d^0)[g^1d^3]*

>>
--> //transfer of corrected system Output Hc=H*P_opt
--> Hc =
H*P_opt;
>>
--> //which is less than or equal to Gref, but the best than we can
do
>>
--> disp(Gref);

[1,1] eps+(g^0d^4)[g^1d^2]* [1,2] eps+(g^0d^5)[g^1d^3]*
--> //
For a control v (3 tokens on each input at time zero)
--> v(1,1)=series(eps,[0 0 ; 1 0 ; 2 0 ; 3 %inf],[0 %inf]);
--> v(2,1)=series(eps,[0 0 ; 1 0 ; 2 0 ; 3 %inf],[0 %inf])
v =
[1,1] g^0d^0+(g^3d^+)[g^0d^+]* \
[2,1] g^0d^0+(g^3d^+)[g^0d^+]*
>>
--> // output with control applied without precompensator -->
Y_v=H*v
Y_v =
[1,1] g^0d^5+g^1d^8+g^2d^11+(g^3d^+)[g^0d^+]*
>>
--> // input filtered, it is greater than v --> u=P_opt*v
u =
[1,1] g^0d^1+g^1d^4+g^2d^7+(g^3d^+)[g^0d^+]* \
[2,1] g^0d^0+g^1d^3+g^2d^6+(g^3d^+)[g^0d^+]*
>> // output with optimal control, it is the same than without

--> y_u=H*u
y_u =
[1,1] g^0d^5+g^1d^8+g^2d^11+(g^3d^+)[g^0d^+]*

```

**Remarque 8** La résiduation doit s'entendre ici comme la résiduée de l'application  $L_H : \mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta] \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta], x \mapsto Hx$ , avec  $\mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta]$  le dioïde des séries causales et périodiques. Il s'agit d'un sous-dioïde (non complet) de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . Sous Scilab, la boîte à outils *Minmaxgd* manipule des séries périodiques (éléments de  $\mathcal{M}_{in}^{axper}[\gamma, \delta]$ ), il faudra donc penser à projeter le résultat dans le sous-dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta]$ , (voir [Cottenceau, 1999], [Lhommeau et al., 2004a] pour des exemples, utilisation du projecteur *prcaus*).

### 4.3 Synthèse d'un correcteur de type retour de sortie

La structure considérée ici est représentée sur la figure 4.3. Il s'agit ici de modifier la dynamique d'un système  $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$  par l'ajout d'un correcteur  $F \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{m \times l}$  (situé entre la sortie et l'entrée de  $H$ ). L'objectif de commande est d'imposer au système bouclé la dynamique décrite par

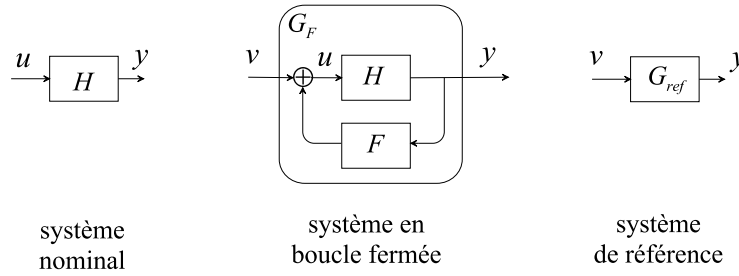


FIG. 4.3 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système  $H$  par un correcteur  $F$  de type retour de sortie.

un modèle de référence  $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m}$  spécifié sous forme de matrice de transfert. En théorie des systèmes linéaires, ce problème de commande est similaire au problème classique de poursuite de modèle (model matching problem [Wang and Desoer, 1972]). Ce travail est détaillé dans la thèse de B. Cottenceau [Cottenceau, 1999] et dans les articles [Cottenceau et al., 1999], [Cottenceau et al., 2001].

La figure 4.3 présente la structure adoptée. Elle conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u = v \oplus Fy \\ y = Hu. \end{cases}$$

Les relations de transfert entre la consigne  $v$  et la commande  $u$ , puis la sortie  $y$  sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} u &= (FH)^*v \\ y &= H(FH)^*v = G_F v. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nous avons montré, dans [Cottenceau et al., 2001], que l'inégalité  $G_F = H(FH)^* \preceq G_{ref}$  admet une plus grande solution

$$F_{opt} = H \setminus G_{ref} \phi H, \quad (4.5)$$

si  $G_{ref} \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ , avec les ensembles  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{G \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m} \mid \exists M \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times l}, G = M^*H\}, \\ \mathcal{G}_2 &= \{G \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times m} \mid \exists N \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{m \times m}, G = HN^*\}. \end{aligned}$$

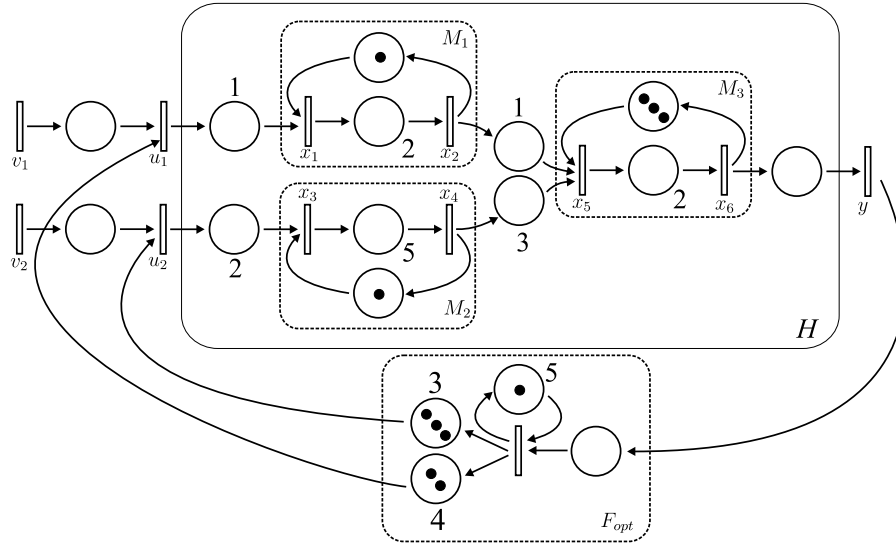
L'inégalité  $H(FH)^* \preceq G_{ref}$  signifie que le système corrigé sera plus rapide que le modèle de référence. Le plus grand correcteur sera celui qui induira la plus grande commande pour atteindre cet objectif, c.-à-d. , celui qui retardera le plus l'entrée des jetons dans le système.

**Remarque 9 (Correcteur Neutre, [Cottenceau et al., 1999])** *Il est naturellement possible de synthétiser un correcteur neutre. Le modèle de référence est alors  $G_{ref} = H \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ , et le correcteur optimal est  $F_{opt} = H \setminus H \phi H$ .*

### 4.3.1 Illustration

Nous considérons ici l'exemple de GET de la figure 3.1. Nous rappelons le modèle entrée/sortie de ce système :

$$H = (\delta^6(\gamma\delta^2)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*).$$

FIG. 4.4 – Réalisation du correcteur retour de sortie  $F_{opt}$ .

Nous choisissons le modèle de référence suivant :  $G_{ref} = (\gamma\delta^5)^*H \in \mathcal{G}_1$ . Il spécifie que les 2 composantes de la matrice de transfert devront avoir le même taux de production.

$$G_{ref} = (\gamma\delta^5)^*H = (\delta^6(\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*).$$

Le correcteur de type retour de sortie optimal est donné par le calcul de

$$\begin{aligned} F_{opt} &= H \setminus G_{ref} \phi H \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta^4 (\gamma\delta^5)^* \\ \gamma^3 \delta^3 (\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où  $F_{opt}$  est le plus grand retour de sortie causal (et réalisable). On peut voir une réalisation de ce correcteur sur la figure 4.4. Il conduit au transfert suivant :

$$\begin{aligned} u &= (F_{opt}H)^*v \\ &= \begin{pmatrix} e \oplus \gamma^2 \delta^{10} (\gamma\delta^5)^* & \gamma^2 \delta^{16} (\gamma\delta^5)^* \\ \gamma^3 \delta^9 (\gamma\delta^5)^* & e \oplus \gamma^3 \delta^{15} (\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix} v, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} y &= H(F_{opt}H)^*v \\ &= (\delta^6 \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^2 \delta^{16} (\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12} (\gamma\delta^5)^*) v. \end{aligned} \quad (4.7)$$

#### 4.4 Synthèse d'un correcteur de type retour d'état

Nous avons proposé dans [Cottenceau et al., 2001] la synthèse de correcteurs de type de retour d'état, la structure est donnée figure 4.5.

On rappelle qu'il est toujours possible d'obtenir la représentation d'état d'un GET sous la forme

$$\begin{cases} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (4.8)$$

avec  $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times m}$  et  $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times n}$ . La commande est donnée par l'expression suivante :

$$u = Kx \oplus v$$

avec  $K \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{m \times n}$ . La représentation du système corrigé par  $K$  devient donc

$$\begin{cases} x = Ax \oplus B(Kx \oplus v) \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (A \oplus BK)x \oplus Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

finalement, le transfert entrée-sortie du système muni du correcteur  $K$  devient

$$\begin{aligned} y &= C(A \oplus BK)^* Bv = G_K v. \\ G_K &= CA^*(A^*BK)^* A^* B \\ &= CA^* B(KA^* B)^*. \end{aligned}$$

L'objectif est de synthétiser le plus grand correcteur  $K$ , tel que  $G_K \preceq G_{ref}$ . Ce correcteur optimal existe si  $G_{ref} \in \mathcal{G}_1$ , il est donné par [Cottenceau et al., 2001] :

$$K_{opt} = (H \setminus G_{ref} \setminus A^* B). \quad (4.9)$$

**Remarque 10** *Il est à noter que les correcteurs de type retour de sortie et de type retour d'état sont liés par la relation suivante :*

$$F_{opt} = K_{opt} \setminus C$$

*c.-à-d. que  $F_{opt}C = (K_{opt} \setminus C)C \preceq K_{opt}$ . Il apparaît donc que  $(F_{opt}H)^* = (F_{opt}CA^*B)^* \preceq (K_{opt}A^*B)^* \Rightarrow CA^*B(F_{opt}CA^*B)^* = G_{F_{opt}} \preceq CA^*B(K_{opt}A^*B)^* = G_{K_{opt}}$ . En d'autres termes, l'utilisation d'un correcteur de type retour d'état améliore les performances, c.-à-d. engendre une commande plus grande et un système corrigé plus proche du modèle de référence. En contrepartie le choix de ce dernier est plus restreint puisque la condition suffisante est  $G_{ref} \in \mathcal{G}_1$ .*

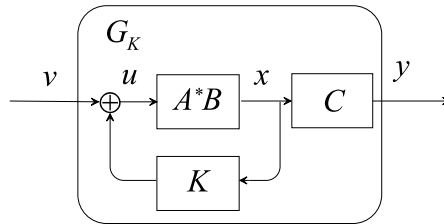


FIG. 4.5 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système par un correcteur de type retour d'état.

## 4.5 Synthèse d'un observateur

Les résultats présentés dans cette partie sont originaux. Ils ont été développés lors du séjour de C.A. Maia en tant que Professeur Invité en Mars 2004. Le paragraphe précédent (remarque 10) a montré qu'un correcteur de type retour d'état permettait d'améliorer les performances du système corrigé. L'hypothèse était que l'état était accessible à la mesure. Afin de lever cette hypothèse on propose ici un reconstruc-teur d'état. La démarche adoptée correspond à celle suggérée lors de la synthèse d'observateur pour les

systèmes continus classiques (voir par exemple [Luenberger, 1971]). La figure 4.6 présente la structure considérée.

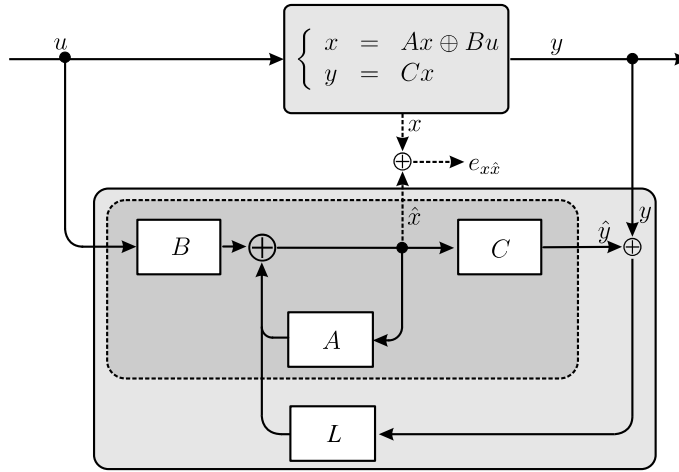


FIG. 4.6 – Structure de l'observateur.

Nous supposons disposer des matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Nous avons l'équation du système :

$$\begin{aligned} x &= Ax \oplus Bu = A^*Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.10)$$

et l'équation de l'observateur :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= A\hat{x} \oplus Bu \oplus L(\hat{y} \oplus y) = A^*Bu \oplus L(\hat{y} \oplus y) \\ \hat{y} &= C\hat{x}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Notre objectif est de calculer la matrice  $L$  pour assurer que la sortie estimée  $\hat{y}$  soit inférieure ou égale à la sortie mesurée  $y$ , soit formellement :

$$\hat{y} \preceq y \Leftrightarrow C\hat{x} \preceq Cx \Leftrightarrow C(x \oplus \hat{x}) \preceq Cx \Leftrightarrow e_{\hat{x}x} \stackrel{\ker C}{\equiv} x. \quad (4.12)$$

C'est-à-dire que l'on recherche une matrice  $L$  telle que  $e_{\hat{x}x}$  soit équivalent à  $x$  modulo  $\ker C$ , c.-à-d. telle que,  $e_{\hat{x}x} \in [x]_C$ .

Les équations (4.10) et (4.11) conduisent à :

$$\begin{aligned} \hat{x} \oplus x &= A\hat{x} \oplus Bu \oplus LC(\hat{x} \oplus x) \oplus Ax \oplus Bu \\ e_{\hat{x}x} &= (A \oplus LC)e_{\hat{x}x} \oplus Bu \\ &= (A \oplus LC)^*Bu. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La condition (4.12), doit être respectée  $\forall u$ , elle peut donc s'écrire :

$$(A \oplus LC)^*B \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*B. \quad (4.14)$$

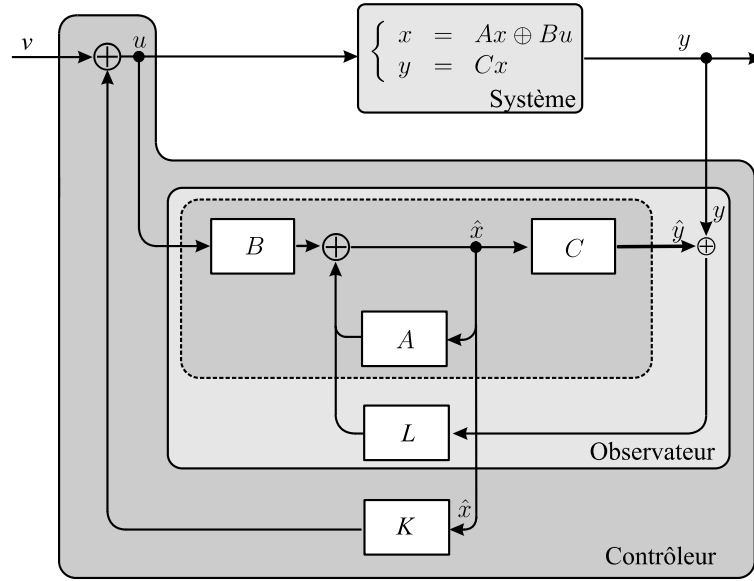


FIG. 4.7 – Contrôle utilisant l'observateur

**Proposition 5** La plus grande matrice  $L$  qui satisfait la condition 4.14 est donnée par :

$$L_{opt} = CA^* \setminus CA^*B / CA^*B. \quad (4.15)$$

**Preuve 1** La relation (4.14) est équivalente à  $C(A \oplus LC)^*B = CA^*B$ .

Notons tout d'abord que  $\forall L$ , nous avons  $C(A \oplus LC)^*B \succeq CA^*B$ .

Inversement nous montrons ci-dessous que  $L_{opt}$  est la plus grande solution de l'inégalité :

$$C(A \oplus LC)^*B \preceq CA^*B.$$

En effet, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} C(A \oplus LC)^*B &\preceq CA^*B \\ \Leftrightarrow CA^*(LCA^*)^*B &\preceq CA^*B && \text{(voir 5.5)} \\ \Leftrightarrow (CA^*L)^*CA^*B &\preceq CA^*B && \text{(voir 5.4)} \\ \Leftrightarrow (CA^*L)^* &\preceq CA^*B / CA^*B \\ \Leftrightarrow (CA^*L) &\preceq CA^*B \setminus CA^*B && \text{(voir 6)} \\ \Leftrightarrow L &\preceq CA^* \setminus CA^*B / CA^*B = L_{opt}. \end{aligned}$$

**Remarque 11** En l'absence de condition initiale, l'équation (4.10) et l'équation de l'observateur (4.11) impliquent que  $\hat{x} \succeq x$ , par conséquent la sortie estimée  $\hat{y}$  sera égale à la sortie du système  $y$ .

#### 4.5.1 Application : contrôle de type retour de sortie avec observateur

Classiquement l'observateur est utilisé pour estimer l'état nécessaire à la mise en place d'un correcteur de type retour d'état 4.4. Bien que seules les sorties soient accessibles à la mesure, nous verrons qu'une telle stratégie est plus performante qu'un contrôle de type retour de sortie tel qu'il est proposé dans le paragraphe 4.3.

La stratégie de contrôle est décrite figure 4.7. Elle conduit aux expressions de l'état estimé  $\hat{x}$  et de l'état du système  $x$  suivantes :

$$\hat{x} = (A \oplus LC)^* Bu \quad (4.16)$$

$$x = A^* Bu. \quad (4.17)$$

La loi de commande est donnée par :

$$u = K\hat{x} \oplus v. \quad (4.18)$$

La commande s'écrit donc :

$$\begin{aligned} u &= K(A \oplus LC)^* Bu \oplus v \\ &= (K(A \oplus LC)^* B)^* v. \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'état estimé (4.16) devient :

$$\hat{x} = (A \oplus LC)^* B(K(A \oplus LC)^* B)^* v.$$

L'état du système devient :

$$\begin{aligned} x &= A^* Bu \\ &= A^* B(K(A \oplus LC)^* B)^* v. \end{aligned} \quad (4.20)$$

De même la sortie du système devient :

$$y = CA^* B(K(A \oplus LC)^* B)^* v. \quad (4.21)$$

**Proposition 6** Si le modèle de référence  $G_{ref} \in \mathcal{G}_1$  (c'est-à-dire s'écrit  $G_{ref} = M^* H$  avec  $H = CA^* B$  la relation de transfert du système), alors il existe un plus grand correcteur  $K$  tel que le transfert en boucle fermée soit inférieur ou égal à  $G_{ref}$ . Ce correcteur s'exprime :

$$K_{opt} = H \backslash_{G_{ref}} \phi((A \oplus LC)^* B). \quad (4.22)$$

**Preuve 2** On recherche le plus grand  $K$  tel que

$$CA^* B(K(A \oplus LC)^* B)^* \preceq G_{ref} = M^* H.$$

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} CA^* B(K(A \oplus LC)^* B)^* &\preceq M^* H = M^* CA^* B \\ \Leftrightarrow (K(A \oplus LC)^* B)^* &\preceq (CA^* B) \backslash (M^* CA^* B) = ((CA^* B) \backslash (M^* CA^* B))^* \quad (\text{voir 5.16}) \\ \Leftrightarrow K(A \oplus LC)^* B &\preceq (CA^* B) \backslash (M^* CA^* B) \quad (\text{voir 6}) \\ \Leftrightarrow K &\preceq (CA^* B) \backslash (M^* CA^* B) \phi((A \oplus LC)^* B) = K_{opt}. \end{aligned}$$

Pour résumer, nous avons l'expression du régulateur :

$$\hat{x} = (A \oplus L_{opt} C \oplus BK_{opt}) \hat{x} \oplus (B \ L_{opt}) \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$u = K_{opt} \hat{x} \oplus v. \quad (4.24)$$

Ci-dessous nous analysons les performances (vis-à-vis du critère de juste à temps) du système contrôlé par ce régulateur. Nous montrons que cette stratégie est plus performante que celle utilisant

un retour de sortie ( $F_{opt}$ , voir équation (4.5)). Nous noterons  $u_{opt}^{\hat{x}}$  la commande calculée à partir de  $K_{opt}$  et  $u_{opt}^y$  celle obtenue à l'aide du correcteur  $F_{opt}$ .

$$u_{opt}^{\hat{x}} = K_{opt}\hat{x} \oplus v \quad (4.25)$$

$$u_{opt}^y = F_{opt}y \oplus v. \quad (4.26)$$

Notre objectif est de montrer que la fonction de transfert entre  $u_{opt}^{\hat{x}}$  et  $v$  est plus grande que celle entre  $u_{opt}^y$  et  $v$ . En considérant les équations (4.19) et (4.4), ces équations deviennent :

$$u_{opt}^{\hat{x}} = (K_{opt}(A \oplus L_{opt}C)^*B)^*v \quad (4.27)$$

$$u_{opt}^y = (F_{opt}CA^*B)^*v. \quad (4.28)$$

D'après la proposition 5, la matrice  $L_{opt}$  est telle que  $C(A \oplus L_{opt}C)^*B = CA^*B$ . Par conséquent l'équation (4.28) peut s'écrire :

$$u_{opt}^y = (F_{opt}C(A \oplus L_{opt}C)^*B)^*v. \quad (4.29)$$

**Proposition 7** Si le modèle de référence  $G_{ref} \in \mathcal{G}_1$ , la commande utilisant un observateur  $L_{opt}$  et un retour d'état  $K_{opt}$  est plus grande que la commande utilisant un retour de sortie  $F_{opt}$ , c.-à-d. :

$$u_{opt}^y \preceq u_{opt}^{\hat{x}}.$$

**Preuve 3** Les équations (4.29) et (4.27) font clairement apparaître qu'il est suffisant d'avoir :

$$F_{opt}C \preceq K_{opt}.$$

Les équations (4.5) et (4.22) donnent :

$$\begin{aligned} F_{opt} &= H \backslash G_{ref} \phi (CA^*B) = H \backslash G_{ref} \phi (C(A \oplus L_{opt}C)^*B) \\ K_{opt} &= H \backslash G_{ref} \phi ((A \oplus L_{opt}C)^*B) \end{aligned}$$

c.-à-d. ,  $F_{opt} = K_{opt} \phi C$ , par conséquent  $F_{opt}C = (K_{opt} \phi C)C \preceq K_{opt}$ , ce qui termine la preuve.

## 4.5.2 Illustration

Nous reprenons l'exemple de la figure (3.1), avec les mêmes objectifs que ceux adoptés au paragraphe (4.3.1). Nous rappelons le modèle entrée/sortie du système :

$$H = (\delta^6(\gamma\delta^2)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*)$$

et le modèle de référence choisi :  $G_{ref} = (\gamma\delta^5)^*H \in \mathcal{G}_1$  :

$$G_{ref} = (\gamma\delta^5)^*H = (\delta^6(\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*).$$

En appliquant les résultats de la proposition (5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} L_{opt} &= CA^* \backslash CA^*B \phi CA^*B \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^3\delta(\gamma\delta^2)^* \\ \gamma^2\delta(\gamma\delta^2)^* \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \gamma(\gamma\delta^2)^* \\ (\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et en appliquant les résultats de la proposition 6, nous avons le correcteur :

$$\begin{aligned} K_{opt} &= H \setminus G_{ref} \setminus ((A \oplus L_{opt}C)^*B) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma\delta^4(\gamma\delta^5)^* & \gamma\delta^2(\gamma\delta^5)^* & \delta^4(\gamma\delta^5)^* & \gamma\delta^4(\gamma\delta^5)^* & \gamma\delta(\gamma\delta^5)^* & \gamma^2\delta^4(\gamma\delta^5)^* \\ \gamma^2\delta^3(\gamma\delta^5)^* & \gamma^2\delta(\gamma\delta^5)^* & \gamma\delta^3(\gamma\delta^5)^* & \gamma^2\delta^3(\gamma\delta^5)^* & \gamma^2(\gamma\delta^5)^* & \gamma^3\delta^3(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui donne les transferts suivants :

$$\begin{aligned} u &= (K_{opt}(A \oplus L_{opt}C)^*B)^*v \\ &= \begin{pmatrix} (\gamma\delta^5)^* & \delta^6(\gamma\delta^5)^* \\ \gamma^2\delta^4(\gamma\delta^5)^* & (\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix} v \\ y &= CA^*B(K_{opt}(A \oplus L_{opt}C)^*B)^*v \\ &= (\delta^6(\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) v, \end{aligned}$$

qui sont clairement plus grands que ceux obtenus par un simple retour de sortie (voir les équations (4.6) et (4.7)).

## 4.6 Commande en présence de perturbations

Dans le cadre de la thèse de M. Lhommeau [Lhommeau, 2003], nous avons considéré le problème standard du rejet de perturbations. En automatique classique ce problème consiste à synthétiser un correcteur permettant de maintenir les trajectoires d'état dans le noyau de la matrice de sortie. A partir de cette définition ce problème peut être transposé aux systèmes  $(\max,+)$  linéaires. Compte tenu de la définition du noyau d'une application dans ces structures algébriques, l'objectif n'est alors pas d'annuler l'effet de la perturbation mais de la prendre en compte au mieux lors de l'élaboration de la commande. De manière analogue à l'algèbre classique, ce problème nous a conduits à introduire la notion de sous ensemble invariant. Nous nous contenterons ici de rappeler les définitions et les résultats importants, nous renvoyons le lecteur au chapitre 5 de la thèse de M. Lhommeau pour une présentation exhaustive.

**Définition 21 (A-invariant)** Soit  $A : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  une application définie sur un dioïde. L'ensemble  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  est dit A-invariant si  $A\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ .

En d'autres termes,  $\mathcal{N}$  est un ensemble A-invariant si toute trajectoire issue de  $\mathcal{N}$  reste dans  $\mathcal{N}$ , c'est-à-dire pour tout  $x \in \mathcal{N}$ ,  $Ax \in \mathcal{N}$ .

**Définition 22 (Idéal principal)** Soit  $\hat{k} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$ , nous définissons par

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq \hat{k} \right\},$$

l'idéal principal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  généré par l'élément  $\hat{k}$  ; clairement  $\sup \mathcal{K} = \hat{k}$ .

**Définition 23 ((A ⊕ BF)-invariant)** Un sous-ensemble non vide  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  est dit (A ⊕ BF)-invariant s'il existe F tel que  $(A \oplus BF)\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ .

**Proposition 8 ([Lhommeau, 2003])** Soit  $\mathcal{K}$  un idéal principal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  généré par un élément  $\hat{k}$ . Le plus grand idéal principal A-invariant inclus dans  $\mathcal{K}$ , noté  $\mathcal{V}^*$ , est donné par

$$\mathcal{V}^* = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq A^* \setminus \hat{k} \right\}.$$

**Proposition 9 ([Lhommeau, 2003])** Soit  $\mathcal{K}$  un idéal principal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^n$  généré par un élément  $\hat{k}$ . Le plus grand idéal principal  $(A \oplus BF)$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}$ , noté  $\hat{\mathcal{V}}$ , est donné par

$$\hat{\mathcal{V}} = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^n \mid x \preceq (A \oplus BF)^* \hat{k} \right\}.$$

**Proposition 10 ([Lhommeau, 2003])** Soit  $\mathcal{K}$  un idéal principal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^n$  généré par un élément  $\hat{k}$ . Le plus grand correcteur  $F$  de type retour d'état tel que  $\hat{\mathcal{V}} = \mathcal{V}^*$  est donné par

$$\hat{F} = B \hat{k} (A^* \hat{k}) \phi (A^* \hat{k}).$$

**Remarque 12** Ce correcteur est le plus grand qui laisse  $\mathcal{V}^*$  (le plus grand idéal principal) inchangé.

#### 4.6.1 Application : contrôle par retour d'état en présence de perturbations

Dans cette section nous considérons le système décrit par la figure 4.8. Le vecteur d'entrée  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^r$  représente les entrées exogènes non contrôlables, ce sont les perturbations qui agissent sur le système au travers d'une matrice  $S \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{n \times r}$ . Ces entrées ont pour effet d'accroître le vecteur d'état<sup>2</sup>.

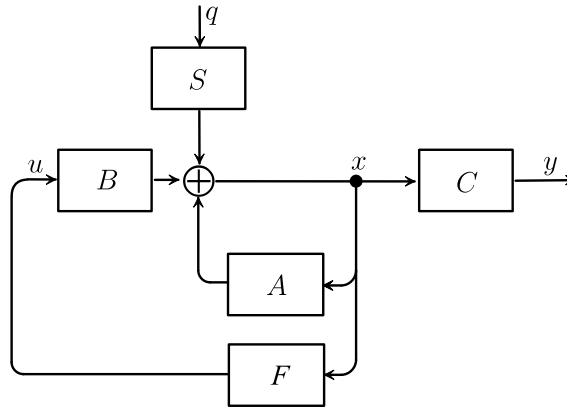


FIG. 4.8 – Schéma de la commande en boucle fermée (retour d'état).

La loi de commande est de type retour d'état :

$$u = Fx \quad (\text{où } F \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{m \times n}).$$

Sous l'action de cette loi de commande, l'équation d'état s'écrit :

$$\begin{aligned} x &= (A \oplus BF)x \oplus Sq \\ &= (A \oplus BF)^* Sq \\ &= (A^* BF)^* A^* Sq \end{aligned} \tag{4.30}$$

où  $(A \oplus BF)^* S$  représente la matrice de transfert liant la perturbation  $q$  à l'état  $x$ . L'équation de sortie est alors donnée par

$$y = C(A \oplus BF)^* Sq.$$

<sup>2</sup>Si le système est un GET, ces entrées ont pour effet d'autoriser ou d'inhiber le tir des transitions, elles retardent donc leur tir. Elles peuvent, dans un contexte manufacturier, modéliser une panne machine, ou une rupture d'approvisionnement.

L'objectif du correcteur  $F$  est de prélever des informations sur l'action de la perturbation au niveau du vecteur d'état afin d'en tenir compte au moment de l'élaboration de la commande  $u = Fx$ .

Le correcteur recherché devra accroître la commande sans modifier le comportement de la sortie. Dans le contexte des GET, il s'agit d'un correcteur qui génère une commande qui retarde l'entrée des jetons sans modifier la trajectoire de sortie, ou, autrement dit, qui retarde sans altérer les performances du système. Il ne fait qu'éviter l'entrée prématurée de jetons. Formellement, nous cherchons un correcteur  $F$  tel que

$$C(A \oplus BF)^*Sq = CA^*Sq$$

pour toute perturbation  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^r$ , soit un correcteur  $F$  tel que :

$$(A \oplus BF)^*S \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*S.$$

Nous rappelons ci-dessous que le plus grand élément de la classe  $[A^*S]_C$  (voir 1) s'exprime de la manière suivante :

$$\Pi^C(A^*S) = C \setminus CA^*S. \quad (4.31)$$

Il génère l'idéal principal suivant

$$\mathcal{K} = \{k \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n} \mid k \preceq \Pi^C(A^*S)\}. \quad (4.32)$$

Naturellement nous avons

$$[A^*S]_C \subset \mathcal{K}. \quad (4.33)$$

Autrement dit la classe d'équivalence modulo  $\ker C$  générée par  $A^*S$  est incluse dans l'idéal principal  $\mathcal{K}$ .

**Proposition 11 ([Lhommeau, 2003])** Soit  $\mathcal{V}^*$  le plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans l'idéal principal  $\mathcal{K}$ . Soit  $\hat{\mathcal{V}}$  le plus grand idéal principal  $(A \oplus BF)$ -invariant inclus dans l'idéal principal  $\mathcal{K}$ . Le correcteur

$$\hat{F} = (B \setminus (A^* \setminus \Pi^C(A^*S))) \setminus (A^* \setminus \Pi^C(A^*S)) = (CA^*B) \setminus (CA^*S) \setminus (CA^* \setminus CA^*S) \quad (4.34)$$

est le plus grand correcteur de type retour d'état tel que  $\mathcal{V}^* = \hat{\mathcal{V}}$ , c'est-à-dire tel que  $(A \oplus B\hat{F})\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* \subset \mathcal{K}$ .

**Proposition 12 ([Lhommeau, 2003])** Le correcteur  $\hat{F} = (CA^*B) \setminus (CA^*S) \setminus (CA^* \setminus CA^*S)$  garantit que  $(A \oplus B\hat{F})^*S \in [A^*S]_C$ .

**Remarque 13** La proposition 11 indique qu'un élément  $k \in \mathcal{V}^*$  reste dans  $\mathcal{V}^*$  lorsqu'on applique la commande  $u = \hat{F}x$ . En outre,  $\hat{F}$  est le plus grand correcteur satisfaisant cette propriété. De plus la proposition 12 indique que l'état obtenu en présence du correcteur appartient à  $[A^*S]_C$ .

**Remarque 14** Notons que la relation de transfert entre la perturbation  $q$  et l'état  $x$  en présence de contrôleur,  $(A \oplus B\hat{F})^*S$ , est supérieure ou égale à celle obtenue en l'absence de contrôleur,  $A^*S$ . C'est-à-dire que l'état  $x$  sera plus grand en présence du contrôleur bien que la sortie soit inchangée.

Dans la thèse de M. Lhommeau est également traitée la synthèse de correcteur de type retour de sortie.

### 4.6.2 Illustration

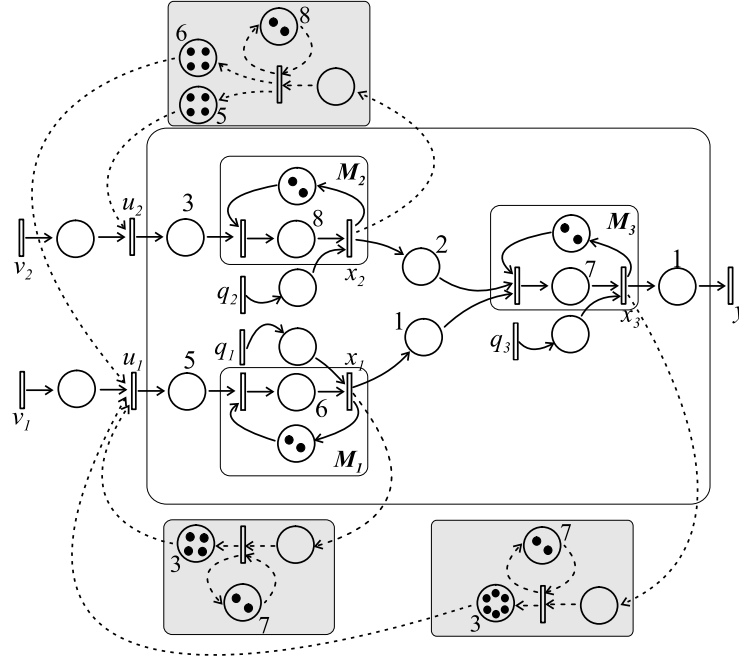


FIG. 4.9 – GET avec des entrées non contrôlables et le correcteur de type retour d'état.

La figure 4.9 représente un GET avec 2 entrées contrôlables ( $u_1, u_2$ ), 1 sortie  $y$  et 3 entrées non contrôlables ( $q_1, q_2, q_3$ ). Les matrices  $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times m}$ ,  $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times n}$ , et  $S \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times r}$  sont données ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta^6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma^2 \delta^8 & \varepsilon \\ \delta^7 & \delta^8 & \gamma^2 \delta^7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \delta^{11} & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^{11} \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, C = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad \delta) \text{ et } S = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}.$$

La proposition 11 nous donne l'expression du correcteur  $\hat{F} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{m \times n}$  qui prend au mieux en compte l'action du vecteur  $q$ , il est représenté en pointillé sur la figure 4.9.

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} \gamma^4 \delta^3 (\gamma^2 \delta^7)^* & \gamma^4 \delta^6 (\gamma^2 \delta^8)^* & \gamma^6 \delta^3 (\gamma^2 \delta^7)^* \\ \varepsilon & \gamma^4 \delta^5 (\gamma^2 \delta^8)^* & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

## 4.7 Synthèse de contrôleurs robustes pour les GET

Dans le cadre de la thèse de M. Lhommeau [Lhommeau, 2003] (voir aussi l'article [Lhommeau et al., 2004a] fourni en annexe), nous nous sommes intéressés à la commande de systèmes (max,+)-linéaires incertains. Plus précisément il s'agit des graphes d'événements temporisés dans lesquels le nombre de jetons initial et/ou la durée des temporisations associées aux places sont incertains, mais supposés appartenir à un intervalle. Il s'agit d'une alternative à l'approche stochastique classiquement adoptée pour l'étude des performances des GET incertains. La seule hypothèse faite ici est que les variations paramétriques sont bornées.

Pour modéliser ce type de système nous avons introduit un dioïde d'intervalles (isomorphe à un dioïde de couples ordonnés), et proposé le calcul de la résiduation des applications  $L_a$  et  $R_a$  définies sur ce dioïde. Nous rappelons ci-dessous quelques notations et les principaux résultats avant de présenter la modélisation et la synthèse de contrôleurs robustes dans ce contexte incertain.

#### 4.7.1 Notation et préliminaires algébriques

**Définition 24 (Intervalle)** *Un intervalle fermé dans un dioïde  $\mathcal{D}$ , noté  $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ , est l'ensemble satisfaisant*

$$\mathbf{x} = \{x \in \mathcal{D} \mid \underline{x} \preceq x \preceq \bar{x}\}, \quad (4.35)$$

où  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathcal{D}$  ( $\underline{x} \preceq \bar{x}$ ) sont appelés, respectivement, la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle  $\mathbf{x}$ .

**Notation 2 (Dioïde  $\mathbf{I}(\mathcal{D})$ )** *Soit  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  un dioïde. L'ensemble des intervalles fermés de  $\mathcal{D}$  muni des opérations  $\oplus$  et  $\otimes$  qui sont définies par*

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}] \quad \text{et} \quad \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}]$$

est un dioïde noté  $\mathbf{I}(\mathcal{D})$ .

**Remarque 15** *L'opération  $\oplus$  engendre une relation d'ordre canonique  $\preceq$  dans  $\mathbf{I}(\mathcal{D})$  :*

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \iff \underline{x} \preceq \underline{y} \quad \text{et} \quad \bar{x} \preceq \bar{y} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}.$$

**Remarque 16** *L'image par  $\Pi$ , une application isotone, d'un intervalle  $\mathbf{x}$  est définie par*

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) = \{\Pi(x) \mid x \in \mathbf{x}\}.$$

Comme la fonction  $\Pi$  est isotone, on peut calculer les valeurs de  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x})$  directement à partir des bornes de l'intervalle  $\mathbf{x}$ , c'est-à-dire  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) = [\Pi(\underline{x}), \Pi(\bar{x})]$ , en particulier  $\mathbf{x}^* = [\underline{x}^*, \bar{x}^*]$ .

**Proposition 13 ([Lhommeau et al., 2004a])** *Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet. L'application  $L_a : \mathbf{I}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{I}(\mathcal{D})$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}$  est résiduable. L'application résiduée  $L_a^\sharp$  est donnée par*

$$L_a^\sharp(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \bar{\otimes} \mathbf{b} = [\underline{a} \bar{\otimes} \underline{b} \wedge \bar{a} \bar{\otimes} \bar{b}, \bar{a} \bar{\otimes} \bar{b}].$$

**Remarque 17** *De la même manière, l'application  $R_a : \mathbf{I}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{I}(\mathcal{D})$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \otimes \mathbf{a}$  est résiduable.*

#### 4.7.2 Modélisation de GET incertains

Pour représenter les incertitudes lors de la modélisation de GET nous supposons que les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  du système peuvent prendre n'importe quelle valeur dans des intervalles. Nous proposons ici une modélisation dans le dioïde d'intervalle  $\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])$ . Le système pourra donc s'écrire :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} \oplus \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (4.37)$$

où  $A \in \mathbf{A} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{B} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{n \times m}$  et  $C \in \mathbf{C} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{l \times n}$ . Autrement dit, les éléments des matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  appartiennent au dioïde des intervalles  $\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])$ , et les bornes de chaque élément appartiennent au dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ .

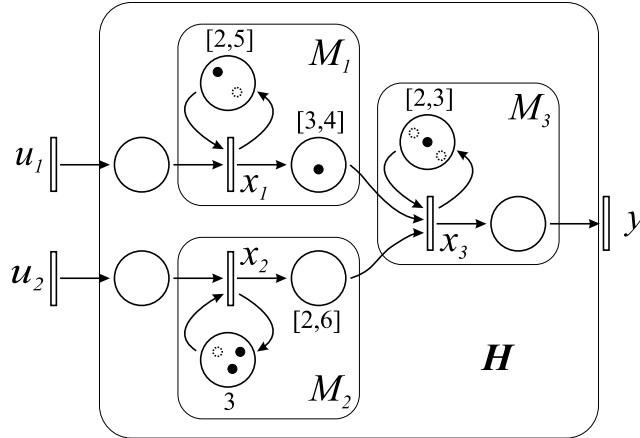


FIG. 4.10 – Modélisation incertaine d'un graphe d'événements temporisé.

A partir de cette représentation d'état, nous pouvons donner l'expression de l'intervalle contenant l'ensemble des transferts entrée-sortie possibles pour le GET incertain. Nous avons  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^* \mathbf{B} \mathbf{u}$  qui est la plus petite solution de (4.36). Cette matrice d'intervalles est la plus petite contenant l'ensemble

$$\{A^*B \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}.$$

De même, nous avons :

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{u}, \quad (4.38)$$

où  $\mathbf{H} = \mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{l \times p}$  représente l'intervalle contenant l'ensemble des relations entrée-sortie du GET incertain :

$$\mathcal{H} = \{C A^* B \mid C \in \mathbf{C}, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}. \quad (4.39)$$

La figure 4.10 représente un exemple de GET incertain.

Les transitions  $u_1$ ,  $u_2$  et  $y$  désignent les entrées et la sortie du système, les jetons en pointillés représentent le fait qu'une ressource peut être présente ou absente, les temporisations entre crochets donnent respectivement le temps de séjour obligé minimal et obligé maximal d'un jeton dans une place avant de pouvoir contribuer au tir de la transition aval.

Par exemple, la machine  $M_2$  a la possibilité de traiter 2 ou 3 pièces en même temps et chaque traitement dure 3 unités de temps. Ensuite chaque jeton traité reste entre 2 et 6 unités de temps dans la place aval avant de contribuer au tir de la transition  $x_3$ . Donc la machine  $M_2$  peut traiter au mieux 3 pièces toutes les 3 unités de temps et au pire 2 pièce toutes les 3 unités de temps. La composante de la matrice  $\mathbf{A}$  associée est par conséquent  $\mathbf{a}_{22} = [\gamma^3 \delta^3, \gamma^2 \delta^3]$  où la borne inférieure de l'intervalle  $\underline{a}_{22} = \gamma^3 \delta^3$  représente le fonctionnement le plus rapide (le plus petit au sens du diode) et  $\bar{a}_{22} = \gamma^2 \delta^3$  représente le fonctionnement le plus lent (le plus grand au sens du diode). De même, l'intervalle  $\mathbf{a}_{32} = [\delta^2, \delta^6]$  représente l'intervalle dans lequel la temporisation associée à la place située entre la transition  $x_2$  et la transition  $x_3$ .

En appliquant la même démarche à l'ensemble du GET, nous obtenons le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} [\gamma^2 \delta^2, \gamma \delta^5] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma^3 \delta^3, \gamma^2 \delta^3] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\gamma \delta^3, \gamma \delta^4] & [\delta^2, \delta^6] & [\gamma^3 \delta^2, \gamma \delta^3] \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [e, e] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [e, e] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= ([\varepsilon, \varepsilon] \quad [\varepsilon, \varepsilon] \quad [e, e]). \end{aligned} \quad (4.40)$$

De cette représentation , il est possible de donner l'intervalle contenant l'ensemble des transferts entrée-sortie du système.

$$\mathbf{H} = \mathbf{CA}^*\mathbf{B} = ([\gamma\delta^3(\gamma^2\delta^2)^*, \gamma\delta^4(\gamma\delta^5)^*] [\delta^2(\gamma^3\delta^3)^*, \delta^6(\gamma\delta^3)^*]). \quad (4.41)$$

### 4.7.3 Synthèse de contrôleurs

L'introduction de ce modèle de GET incertain permet de revisiter les différentes stratégies de contrôle introduites dans le contexte déterministe. Nous résumons ici le problème de la synthèse de correcteurs de type retour de sortie (voir 4.3) dans un contexte incertain. Cette étude est détaillée dans la thèse de M. Lhommeau [Lhommeau, 2003], et dans l'article [Lhommeau et al., 2004a] fourni en annexe. Le problème se formalise de la manière suivante : nous supposons connu un modèle incertain sous la forme d'un intervalle  $\mathbf{H}$ , nous supposons donné  $\mathbf{G}_{ref}$  un intervalle spécifiant l'ensemble des comportements admissibles du système corrigé, et nous cherchons à caractériser l'ensemble des correcteurs déterministes qui assurent que le transfert du système corrigé soit inclus dans l'intervalle de référence de manière garantie, c.-à-d.  $\forall H \in \mathcal{H} \subset \mathbf{H}$ . Formellement, cela revient à s'intéresser à l'ensemble suivant :

$$\mathcal{F} = \{F \mid (\mathbf{H}F)^*\mathbf{H} \subset \mathbf{G}_{ref}\}. \quad (4.42)$$

Si le modèle de référence est inclus dans l'image de l'application,  $M_{\mathbf{H}} : (I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{m \times l} \rightarrow (I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{l \times m}$ ,  $F \mapsto (\mathbf{H}F)^*\mathbf{H}$ , alors il existe un plus grand intervalle de correcteurs (noté  $\hat{\mathbf{F}}$ ) au sens de l'ordre  $\preceq_{(I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))}$  qui est inclus dans l'ensemble  $\mathcal{F}$ . Ce plus grand intervalle  $\hat{\mathbf{F}} \subset \mathcal{F}$  est donné par :

$$\hat{\mathbf{F}} = \bigoplus_{\{F \in (I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{m \times l} \mid (\mathbf{H}F)^*\mathbf{H} \preceq \mathbf{G}_{ref}\}} F = \mathbf{H} \overline{\mathbf{G}_{ref}} \overline{\mathbf{H}}.$$

D'un point de vue pratique, l'intervalle de contrôleur est donné par :

$$\hat{\mathbf{F}} = [\underline{\hat{\mathbf{F}}}, \overline{\hat{\mathbf{F}}}] = \mathbf{H} \overline{\mathbf{G}_{ref}} \overline{\mathbf{H}} = [\underline{\mathbf{H}} \overline{\mathbf{G}_{ref}} \overline{\underline{\mathbf{H}}} \wedge \overline{\mathbf{H}} \overline{\mathbf{G}_{ref}} \overline{\underline{\mathbf{H}}}, \overline{\mathbf{H}} \overline{\mathbf{G}_{ref}} \overline{\underline{\mathbf{H}}}], \quad (4.43)$$

**Remarque 18** Notons qu'ici la théorie de la résiduation offre une solution à un problème d'inclusion d'ensemble, alors qu'elle est habituellement l'outil permettant de résoudre des problèmes d'inégalités. Cette propriété est obtenue au prix d'une restriction sur le choix de l'intervalle de modèle de référence. Il serait sans doute intéressant de lever cette restriction en re-formulant dans le dioïde  $I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])$ , les stratégies de commande proposées dans le paragraphe ??.

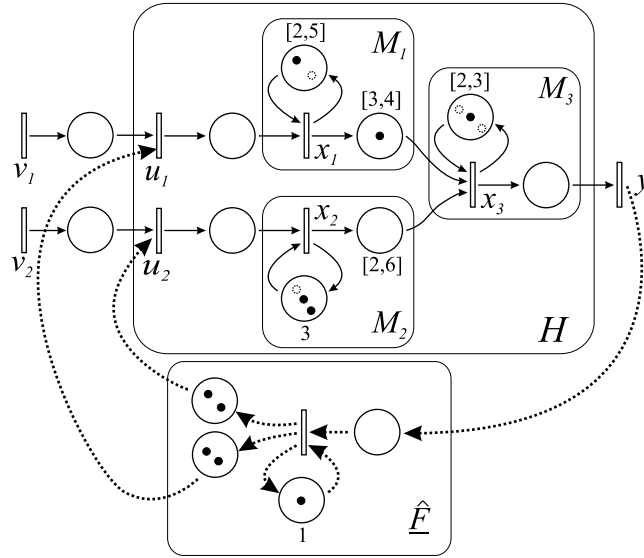


FIG. 4.11 – Un GET incertain avec une réalisation du correcteur  $\hat{F}$  (en pointillé).

L'exemple qui suit est tiré de l'article [Lhommeau et al., 2004a] fourni en annexe. Nous allons synthétiser l'intervalle  $\hat{F}$ , afin que le GET incertain donné figure 4.10, ait son transfert inclus de manière garantie dans l'intervalle de référence suivant :

$$\begin{aligned} G_{ref} &= \left( \mathbf{H} \begin{pmatrix} \gamma^2 \\ \gamma^2 \end{pmatrix} \right)^* \mathbf{H} \\ &= ([\gamma\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^5(\gamma\delta)^*, \gamma\delta^4(\gamma\delta^5)^*] \quad [\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^4(\gamma\delta)^*, \delta^6 \oplus \gamma\delta^9 \oplus \gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^3\delta^{15} \oplus \gamma^4\delta^{18} \oplus \gamma^5\delta^{21} \oplus \gamma^6\delta^{25}(\gamma\delta^5)^*]). \end{aligned}$$

Cette spécification signifie qu'au plus 2 jetons peuvent être introduits dans le GET au même moment. Le plus grand intervalle (au sens de  $I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])$ ) qui assure cet objectif est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \mathbf{H} \bar{\mathbf{G}}_{ref} \bar{\mathbf{H}} \\ &= \left( [\gamma^2(\gamma\delta)^*, \gamma^2(\gamma\delta^5)^*] \right. \\ &\quad \left. [\gamma^2(\gamma\delta)^*, \gamma^2 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^9 \oplus \gamma^6\delta^{13}(\gamma\delta^5)^*] \right). \end{aligned}$$

Tous les correcteurs dont la relation de transfert est incluse dans cet intervalle répondent à notre spécification. La réalisation d'une telle commande nécessite de faire un choix dans cet ensemble  $\hat{F}$ . La borne supérieure  $\bar{\hat{F}}$  garantit que le comportement entrée sortie du système corrigé sera dans l'intervalle  $[(\underline{\hat{F}})^* \underline{H}, (\bar{\hat{F}})^* \bar{H}]$ , *i.e.*, un intervalle qui a la même borne supérieure que l'intervalle de spécification  $\mathbf{G}_{ref}$ . La borne inférieure  $\underline{\hat{F}}$ , garantit que le comportement entrée sortie du système corrigé sera dans l'intervalle  $[(\underline{\hat{F}})^* \underline{H}, (\bar{\hat{F}})^* \bar{H}]$ , *i.e.*, un intervalle qui a la même borne inférieure que l'intervalle de spécification  $\mathbf{G}_{ref}$ .

Ce dernier correcteur ( $\underline{\hat{F}}$ ) semble pratiquement intéressant puisqu'il s'agit du correcteur qui retarde le plus l'entrée des jetons tout en conservant la possibilité de voir le système corrigé se comporter comme  $\underline{\mathbf{G}}_{ref}$ , *c.-à-d.* la possibilité d'atteindre le comportement entrée/sortie le plus rapide de cette spécification (ici  $\underline{\mathbf{G}}_{ref} = (\gamma\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^5(\gamma\delta)^* \quad \delta^2 \oplus \gamma^2\delta^4(\gamma\delta)^*)$ ). La figure 4.11 propose une réalisation de correcteur dont le transfert est :

$$\underline{\hat{F}} = (\gamma^2(\gamma\delta)^* \gamma^2(\gamma\delta)^*).$$

# Chapitre 5

## Annexe A

### 5.1 Propriétés de l'opérateur \*

Ci-dessous nous rappelons quelques propriétés des fonctions  $S : x \mapsto x^* = \bigoplus_{k \geq 0} x^k$  et  $P : x \mapsto x^+ = \bigoplus_{k \geq 1} x^k$  (voir [Gaubert, 1992] et [Cottenceau, 1999] pour les preuves).

Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet.  $\forall a, b \in \mathcal{D}$

$$a^+ \preceq a^* \tag{5.1}$$

$$(a^*)^* = a^* \tag{5.2}$$

$$(a^+)^* = a^* \tag{5.3}$$

$$a(ba)^* = (ab)^*a \tag{5.4}$$

$$(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = b^*(ab^*)^* = (a \oplus b)^*a^* = b^*(a \oplus b)^* \tag{5.5}$$

$$a^*a^* = a^* \tag{5.6}$$

$$(a^*)^+ = a^* \tag{5.7}$$

$$(a^+)^+ = a^+ \tag{5.8}$$

$$(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^* \tag{5.9}$$

$$(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \tag{5.10}$$

En outre, lorsque  $\mathcal{D}$  est commutatif

$$(a \oplus b)^* = a^*b^*. \tag{5.11}$$

### 5.2 Propriétés des résiduées des applications $L_a$ et $R_a$

Le tableau qui suit présente un ensemble de propriétés concernant les résiduées des applications  $L_a$  et  $R_a$ . Nous renvoyons le lecteur à [Baccelli et al., 1992, p. 182-185], et à [Gaubert, 1992, §5.3] pour les preuves.

|   |   |       |
|---|---|-------|
| $a(a\backslash x) \preceq x$                                    | $(x\phi a)a \preceq x$                        | (f.1) |
| $a\backslash(ax) \succeq x$                                     | $(xa)\phi a \succeq x$                        | (f.2) |
| $a(a\backslash(ax)) = ax$                                       | $((xa)\phi a)a = xa$                          | (f.3) |
| $a\backslash(x \wedge y) = a\backslash x \wedge a\backslash y$  | $(x \wedge y)\phi a = x\phi a \wedge y\phi a$ | (f.4) |
| $(a \oplus b)\backslash x = a\backslash x \wedge b\backslash x$ | $x\phi(a \oplus b) = x\phi a \wedge x\phi b$  | (f.5) |
| $(ab)\backslash x = b\backslash(a\backslash x)$                 | $x\phi(ba) = (x\phi a)\phi b$                 | (f.6) |
| $b(a\backslash x) \preceq (a\phi b)\backslash x$                | $(x\phi a)b \preceq x\phi(b\backslash a)$     | (f.7) |
| $(a\backslash x)b \preceq a\backslash(xb)$                      | $b(x\phi a) \preceq (bx)\phi a$               | (f.8) |

**Propriété 1** Soit  $x, a \in \mathcal{D}$  un dioïde complet.

$$a^*\backslash x = a^*\backslash(a^*\backslash x) \qquad x\phi a^* = (x\phi a^*)\phi a^* \qquad (5.12)$$

$$a^*x = a^*\backslash(a^*x) \qquad xa^* = (xa^*)\phi a^* \qquad (5.13)$$

$$a^*\backslash x = a^*(a^*\backslash x) \qquad x\phi a^* = (x\phi a^*)a^* \qquad (5.14)$$

**Propriété 2** ([?], [Cottenceau, 1999]) Soient  $\mathcal{D}$  un dioïde complet et  $A \in \mathcal{D}^{p \times n}$  et  $B \in \mathcal{D}^{n \times p}$  deux matrices. Alors  $A\backslash A$  et  $B\phi B$  sont des matrices dans  $\mathcal{D}^{n \times n}$  vérifiant

$$\begin{aligned} A\backslash A &= (A\backslash A)^*, \\ B\phi B &= (B\phi B)^*. \end{aligned} \qquad (5.15)$$

**Propriété 3** Soient  $\mathcal{D}$  un dioïde complet,  $A \in \mathcal{D}^{p \times n}$ ,  $M \in \mathcal{D}^{p \times p}$  et  $N \in \mathcal{D}^{n \times n}$  trois matrices. Alors  $A\backslash(M^*A)$  et  $A\backslash(AN^*)$  sont des matrices dans  $\mathcal{D}^{n \times n}$  vérifiant

$$\begin{aligned} A\backslash(M^*A) &= (M^*A)\backslash(M^*A) = (A\backslash(M^*A))^* \\ (AN^*)\phi A &= (AN^*)\phi(AN^*) = ((AN^*)\phi A)^*. \end{aligned} \qquad (5.16)$$

# Bibliographie

- [Åstrom, 1980] Åstrom, K. (1980). Robustness of a design method based on assignment of poles and zeros. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 25 :588–591.
- [Åstrom and Wittenmark, 1984] Åstrom, K. and Wittenmark, B. (1984). *Computer Controlled Systems - Theory and Design*. Prentice-Hall.
- [Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. (1992). *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons.
- [Blyth and Janowitz, 1972] Blyth, T. and Janowitz, M. (1972). *Residuation Theory*. Pergamon press.
- [Braker, 1993] Braker, H. (1993). *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*. PhD thesis, Delft University of Technology.
- [Cohen, 1993] Cohen, G. (1993). Two-dimensional domain representation of timed event graphs. In *Summer School on Discrete Event Systems*. Spa, Belgium.
- [Cohen, 1995] Cohen, G. (1995). *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*. Polycopié de cours donné à l'INRIA.
- [Cohen, 1998] Cohen, G. (1998). Residuation and applications. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, Ecole de printemps d'informatique théorique*.
- [Cohen et al., 1983] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J., and Viot, M. (1983). Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioides. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France.
- [Cohen et al., 1985] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J., and Viot, M. (1985). A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-30 :210–220.
- [Cohen et al., 1996] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1996). Kernels, images and projections in dioids. In *Proceedings of WODES'96*, Edinburgh.
- [Cohen et al., 1999] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J.-P. (1999). Max-plus algebra and system theory : Where we are and where to go now. *Annual Reviews in Control*, 23 :207–219.
- [Cohen et al., 1989] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1) :39–58.
- [Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioides*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Cottenceau et al., 1999] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (1999). Synthesis of greatest linear feedback for Timed Event Graphs in dioid. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, n°6 :1258–1262.

- [Cottenceau et al., 2001] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (2001). Model reference control for timed event graphs in dioids. *Automatica*, vol. 37 :1451–1458.
- [Cuninghame-Green, 1979] Cuninghame-Green, R. (1979). *Minimax Algebra*. Number 166 in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer.
- [Davey and Priestley, 1990] Davey, B. and Priestley, H. (1990). *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press.
- [Falb and Wolovich, 1967] Falb, P. and Wolovich, W. (1967). Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12 :651–659.
- [Gaubert, 1992] Gaubert, S. (1992). *Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes*. Thèse, École des Mines de Paris.
- [Gruet, 1995] Gruet, B. (1995). *Structure de commande en boucle fermée des systèmes à événements discrets*. DEA, LISA - Université d'Angers - France.
- [Hardouin et al., 1997] Hardouin, L., Menguy, E., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (1997). SISO Discrete Event Systems Control in Dioids Algebra. *Special issue of Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, vol. 31, n°3 :433–452.
- [Hautus and Heymann, 1983] Hautus, M. and Heymann, M. (1983). Linear feedback decoupling - transfer function analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28 :823–832.
- [Jaulin et al., 2004] Jaulin, L., Ratschan, S., and Hardouin, L. (2004). Set computation for non-linear control. *Reliable Computing*, vol. 10 :1–26.
- [Lagrange, 2002] Lagrange, S. (2002). *Sur le problème du rejet de perturbations dans les dioïdes, application à une ligne de fabrication de sommiers (en collaboration avec le site de production Recticel/Bultex de Noyen sur Sarthe)*. DEA, LISA - Université d'Angers - France.
- [LeBoudec and Thiran, 2002] LeBoudec, J.-Y. and Thiran, P. (2002). *Network Calculus*. Springer Verlag.
- [Lhommeau, 2000] Lhommeau, M. (2000). *Sur l'analyse de la robustesse de correcteurs dans les dioïdes*. DEA, LISA - Université d'Angers - France.
- [Lhommeau, 2003] Lhommeau, M. (2003). *Etude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre  $(\max, +)$  : 1. Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. 2. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Lhommeau et al., 2004a] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B., and Jaulin, L. (2004a). Interval analysis and dioid : Application to robust controller design for timed event graphs. *Automatica*, to appear.
- [Lhommeau et al., 2004b] Lhommeau, M., Hardouin, L., Maia, C., and Santos-Mendes, R. (2004b). Control and Robustness Analysis for  $(\max, +)$  Linear Systems. In *International Workshop on Discrete Event Systems, WODES 2004*, Reims, France.
- [Lotito et al., 2001] Lotito, P., Mancinelli, E., and Quadrat, J.-P. (2001). A minplus derivation of the fundamental car-traffic law. Report 324, INRIA.
- [Luenberger, 1971] Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 16(6) :596–602.
- [Maia, 2003] Maia, C. (2003). *Identification et Commande de systèmes à événements discrets dans l'algèbre  $(\max, +)$* . Thèse, LISA - Université d'Angers - France, Université de Campinas - Brésil.
- [Maia et al., 2003a] Maia, C., Hardouin, L., Santos-Mendes, R., and Cottenceau, B. (2003a). Optimal closed-loop control of Timed Event Graphs in Dioid. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, n°12 :2284–2287.

- [Maia et al., 2003b] Maia, C., Santos-Mendes, R., and Hardouin, L. (2003b). Some Results on Identification of Timed Event Graphs in Dioid. In *11th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'2003*, Rhodes, Grèce.
- [Menguy, 1997] Menguy, E. (1997). *Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Menguy et al., 2000] Menguy, E., Boimond, J.-L., Hardouin, L., and Ferrier, J.-L. (2000). Just in time control of timed event graphs : update of reference input, presence of uncontrollable input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, n°11 :2155–2159.
- [Moller, 1988] Moller, P. (1988). *Théorie algébrique des Systèmes à Événements Discrets*. Thèse, École des Mines de Paris.
- [Olsder, 1998] Olsder, G. (1998). Course notes : Max algebra approach to discrete event systems. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, Ecole de printemps d'informatique théorique*.
- [Olsder et al., 1998] Olsder, G., Subiono, and Gettrick, M. M. (1998). Course notes : On large scale max-plus algebra model in railway systems. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, Ecole de printemps d'informatique théorique*.
- [Schutter and van den Boom, 2001] Schutter, B. D. and van den Boom, T. (2001). Model predictive control for max-plus-linear discrete event systems. *Automatica*, vol. 37(7).
- [Wang and Desoer, 1972] Wang, S. and Desoer, C. (1972). The exact model matching of linear multivariable systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 17(3) :347–349.
- [Wonham and Morse, 1970] Wonham, W. and Morse, A. (1970). Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems : A geometric approach. *SIAM J.Control*, 8(1).

