

**MASTER RECHERCHE**  
**Systemes Dynamiques et Signaux**

**MODULE MO2**

**LA MODELISATION DES SYSTEMES DE PRODUCTION et LE SEQUENCEMENT  
PAR RESEAUX DE PETRI**

Marc Bourcerie-2007/2008

## **I LES RESEAUX DE PETRI GENERALISES**

- 1.1 Rappel des définitions de base
- 1.2 Les outils mathématiques
- 1.3 Les invariants
- 1.4 La signification des invariants
- 1.5 Les P et T-Expansions
- 1.6 Invariants et chaînes de RdP

## **II LES RESEAUX DE PETRI COLORES (RdPC)**

- 2.1 Présentation des RdPC
- 2.2 Fonctions arcs aval, fonctions arcs amont.
- 2.3 Les fonctions courantes
- 2.4 Ecriture algébrique
- 2.5 Détermination d'invariants de RdP Colorés
- 2.6 Expansion de RdPC
- 2.7 Invariants et chaînes de RdPC

## **III LE SEQUENCEMENT ET LA CONSTRUCTION D'UN SEQUENCEUR**

- 3.1 Le séquencement
- 3.2 Complexité d'une séquence périodique
- 3.3 Notion de séquenceur
- 3.4 Première approche du séquencement par RdP
- 3.5 Construction de la matrice d'incidence du RdP de séquencement

## **IV LES SYSTEMES DE PRODUCTION**

- 4.1 Traçabilité, modélisation de suivi d'objets
- 4.2 Modélisation de système de production

# I LES RESEAUXDE PETRI GENERALISES

## 1.1 Rappel des définitions de base

Un Réseau de Petri (RdP) généralisé est un ensemble de places et de transitions, reliées par des arcs orientés porteurs de poids. Dans cette structure se déplacent des jetons (ou marques) qui sont susceptibles de franchir les transitions selon certains critères de franchissement et de franchissabilité. Ces critères seront explicités ultérieurement.

Un tel réseau sera à même de modéliser un automatisme. La figure 1 représente un tel réseau, des plus élémentaires, pouvant modéliser tout processus à deux états ( Arrêt-Marche, par exemple).

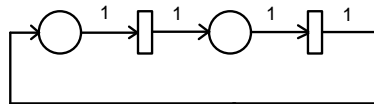


Figure 1.1

### 1.1.1 Définition

Un RdP généralisé est un quadruplet  $Q = \langle P, T, \text{Pré}, \text{Post} \rangle$  tel que :

$P = \{P_i\}, i \in \{1, \dots, n\}$  est appelé ensemble de places

$T = \{T_j\}, j \in \{1, \dots, m\}$  est appelé ensemble de transitions avec  $P \cap T = \emptyset$

Pré est une application de  $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  dite d'incidence avant. Post est une application de  $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  dite d'incidence arrière. Pré  $(P_i, T_j)$  est appelé poids de l'arc reliant  $P_i$  et  $T_j$ . Post  $(P_i, T_j)$  est appelé poids de l'arc reliant  $T_j$  et  $P_i$ .

Cette définition permet d'aborder le problème algébriquement et de transcrire chaque RdP sous forme de matrice  $W$ , dite d'incidence. L'évolution du marquage du RdP pourra être observé. L'algèbre matricielle est l'outil idéal pour gérer cette évolution. Chaque marquage et chaque séquence de franchissement sera représenté par un vecteur (de marquage, ou de franchissement). Avant d'aborder cette écriture, nous allons livrer quelques définitions élémentaires.

### 1.1.2 Franchissabilité

P(1) Pour qu'une transition soit franchissable, il faut et il suffit que l'on trouve dans toutes les places immédiatement amont à cette transition, le nombre de marques correspondant au poids des arcs reliant respectivement chacune de ces places à cette transition.

*Ici la distinction n'est pas faite entre RdP généralisé (Poids des arcs appartenant à l'ensemble  $\mathbb{N}$ ), et RdP non généralisé (Poids des arcs appartenant à l'ensemble  $\{0,1\}$ ).*

### 1.1.3 Franchissement

P(2) Toute transition franchissable est immédiatement franchie.

P(3) La transition franchie distribue dans chacune des places immédiatement avales, un nombre de marques égal au poids de l'arc qui relie cette transition à chaque place avale respectivement.

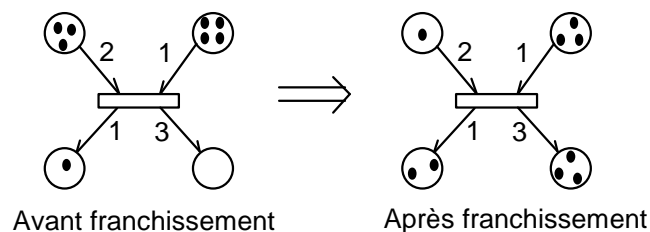


Figure 1.2

*Remarques:*

R(1) Le franchissement d'une transition ne garantit pas la conservation de la quantité de marques globale.

On parlera de transition "Consommatrice", "Génératrice" ou "Conservatrice" de marques, selon les poids attribués aux arcs correspondants.

Soit une transition T reliée à un ensemble de places par n arc amont et m arcs aval.  
 Soit Pré(i) le poids d'un arc amont i de la transition T.  
 Soit Post(j) le poids d'un arc aval j de la transition T.

- Si  $\sum_n \text{pré}(i) < \sum_m \text{post}(j)$ , alors T est génératrice.  
 Si  $\sum_n \text{pré}(i) > \sum_m \text{post}(j)$ , alors T est consommatrice.  
 Si  $\sum_n \text{pré}(i) = \sum_m \text{post}(j)$ , T est conservatrice.

R(2) Les propositions P(1) et P(3) ne posent aucun problème, si ce n'est qu'elles sous-entendent les notions de transition génératrice ou consommatrice. Il apparaîtra alors que la notion de marquage pourra s'attacher à des "objets" concrets ou abstraits.

R(3) La proposition P(2) est plus critique, puisqu'il s'agit de conférer à une transition un temps de franchissement nul, ce qui n'est acceptable que du point de vue purement mathématique.

R(4) Dans le principe initial des RdP, rien n'interdit le franchissement simultané de deux transitions du même réseau. Là encore, la concordance absolue de deux événements n'est pas acceptable pour le physicien.

#### 1.1.4 L'adaptation aux problèmes pratiques

Les protocoles de franchissement et les conditions de franchissabilité décrites précédemment n'utilisent pas la notion de temps. En effet, on fait évoluer de cette manière le marquage d'un RdP sans se soucier ni de la chronologie ni de la durée des événements. Il a donc fallu fixer un certain nombre de règles qui vont être décrites plus loin. Ces règles sont issues des contraintes temporelles imposées par les systèmes physiques. Elles sont issues des deux considérations suivantes :

- Tout événement a une durée non nulle.
- Deux événements indépendants ne peuvent être simultanés.

#### 1.1.5 Les règles complémentaires

Les occurrences externes

On a la possibilité de conditionner le franchissement d'une transition à un événement externe (occurrence). Le nom de l'occurrence sera alors spécifié en regard de la transition considérée. Il faudra alors proposer un chronogramme sur lequel figureront toutes les occurrences du RdP proposé (Figure 1.3).

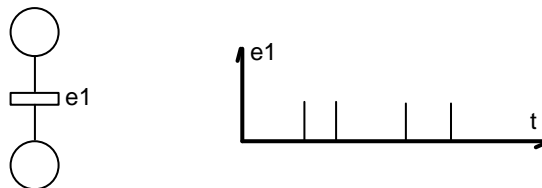


Figure 1.3

Les temporisations

Il est possible aussi d'adjoindre une temporisation à une place, une transition ou un arc du RdP. Ainsi les marques seront maintenues dans une place pendant un certain temps  $\tau$  avant tout franchissement de transition amont. On parle de RdP P-Temporisé, T-Temporisé, Arcs-Temporisés. Il faut noter que tout RdP T-Temporisé peut se traduire en RdP P-Temporisé et réciproquement.

La temporisation est indiquée en regard de l'élément temporisé. On ne pourra pas trouver, au sein du même RdP, des places et des transitions temporisées.

#### 1.1.6 Problèmes conflictuels, comment s'affranchir d'un conflit?

Ce problème est directement issu de la structure même des RdP. On doit faire la distinction entre conflit structurel et conflit effectif.

Soient deux transitions T1 et T2 ayant la même place amont (Figure 1.4) Si une marque est placée en P, elle valide immédiatement les deux transitions T1 et T2, qui doivent être franchies instantanément, d'après la proposition P(2). La même marque doit donc franchir simultanément T1 et T2, ce qui n'est pas acceptable. Il y a

ici conflit structurel, tant qu'aucune marque n'a été placée en P, puis conflit effectif lors de l'apparition de cette marque en P.

#### Utilisation d'une temporisation

L'utilisation d'une T-Temporisation peut permettre de lever un tel conflit. On affecte alors à chaque transition en conflit, une temporisation différente ( on se rapprochera alors d'une description physique du système, où l'une des deux transitions sera effectivement franchie au détriment de l'autre).

La figure 1.5 donne l'exemple d'un conflit levé par temporisation sur les transitions. Il faudra veiller à ce que les temporisations n'entraînent pas la non vivacité du réseau.

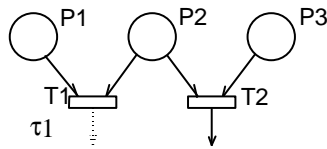


Figure 1.5

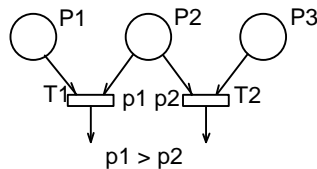


Figure 1.6

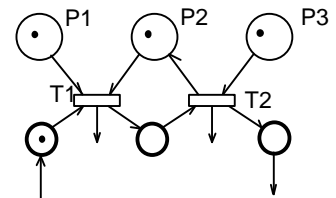


Figure 1.7

Dans ce RdP, la franchissabilité de T1 (Resp T2) dépend du marquage de P1 et P2 (Resp P2 et P3). Le franchissement éventuel de T1 interviendra lorsqu'un temps  $\tau_1$  se sera écoulé après l'apparition d'une marque en P1 et P2.

#### Règles de priorité

Si l'on fixe à présent un ordre de priorités sur les transitions en conflit, on s'affranchit définitivement du problème. Il faudra ici prendre garde, lors de la conception du RdP, à ne pas aboutir à la non vivacité d'une transition. Dans l'exemple précédent, en cas de conflit effectif, c'est à dire si chaque place est occupée par une marque, la priorité sera donnée par exemple à la transition T1.

Il convient alors de spécifier sur le graphe cet ordre de priorité. Par exemple, on indiquera "p1" (Priorité de niveau 1) en regard de T1, et "p2" en regard de T2. Il faudra spécifier par ailleurs en annexe l'ordre de ces priorités (Figure 1.6).

Le principe de priorité peut s'exprimer beaucoup plus explicitement par l'insertion d'une marque circulante (Figure 1.7).

#### Marquage

Le conflit structurel peut ne pas être effectif. Dans l'exemple précédent, on s'assurera que l'on n'aura jamais :  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ , où  $m_i$  représente le marquage de la place  $P_i$ . L'étude de l'inaccessibilité de certains marquages indésirables présente alors un grand intérêt.

La situation représentée par la figure 1.7 suivante n'est pas non plus conflictuelle, à la condition de s'imposer une loi de partage proportionnel de marques entre diverses transitions en conflit structurel.

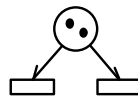


Figure 1.7

La solution consiste alors à s'assurer qu'il y a toujours dans une place, un nombre de marques multiples du nombre de transitions en conflit ( Si toutefois les arcs sont pondérés à 1).

*Les sous RdP précédents se retrouveront insérés dans des RdP plus étendus. Les figures suivantes représentent de tels RdP. Ici les conflits structurels ne sont pas effectifs et s'inscrivent chacun dans une des rubriques précédentes.*

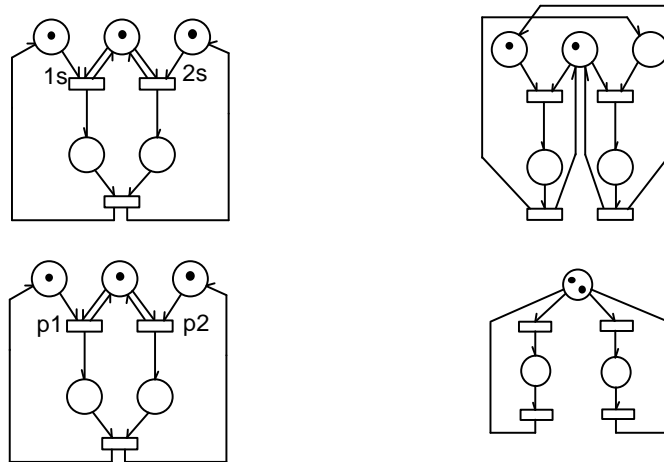


Figure 1.8

## 1.2 Les outils mathématiques

Nous abordons maintenant la transcription algébrique du RdP par l'intermédiaire de l'écriture de la matrice d'incidence. Le RdP de la figure 1.9 sert de support à la suite de la présentation.

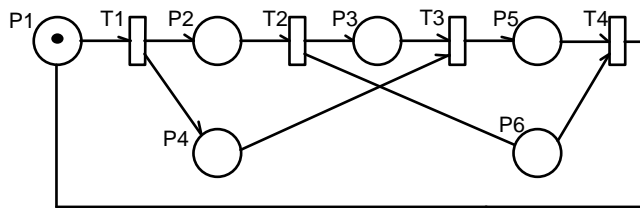


Figure 1.9

### 1.2.1 La matrice d'incidence

On appelle matrice d'incidence avant la matrice:

$$W^- = [w_{ij}^-] \text{ où } w_{ij}^- = \text{pré}(P_i, T_j)$$

matrice d'incidence arrière la matrice:

$$W^+ = [w_{ij}^+] \text{ où } w_{ij}^+ = \text{post}(P_i, T_j)$$

Ainsi la matrice  $W^-$  fait le bilan des liaisons amont aux transitions, et la matrice  $W^+$  fait le bilan des liaisons aval aux transitions. Ces deux matrices sont en général des matrices rectangulaires, dont le nombre de colonnes est égal au nombre de transitions, et le nombre de lignes est égal au nombre de places. Ainsi, pour le RdP précédent, si tous les arcs sont de poids 1, on a:

$$W^- = \begin{matrix} & \begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$W^+ = \begin{matrix} & \begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

On appelle matrice d'incidence  $W$ , la matrice:

$$W = W^+ - W^- = [w_{ij}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Cette matrice fait le bilan de toutes les liaisons du RdP. Il faut cependant noter que les termes issus des matrices d'incidence avant et arrière ne doivent pas se compenser. Si tel est le cas, il y a perte d'information lors de la transcription du modèle sous la forme matricielle. Pour s'en affranchir, on devra exclure d'une telle analyse les RdP tels qu'une place et une transition soient reliés par deux arcs, l'un amont et l'autre aval à cette transition. Si cette condition est respectée, on a un RdP dit "pur".

### 1.2.2 Vectorisation des marquages et des séquences de franchissement.

Cette écriture mathématique va nous permettre de pouvoir suivre une évolution de marquage. Grâce à cet outil, la prédiction de l'état d'un système va être possible. Afin de compléter l'outil, nous allons écrire le marquage de manière vectorielle, ainsi que la séquence de franchissement. Pour le RdP précédent, le marquage proposé, que nous appellerons "Marquage initial" se note:  $M_0 = (1,0,0,0,0,0)$

Une séquence de franchissement s'écrit par exemple:  $S = T_1, T_2, T_3, T_4$  et signifie que l'on valide le franchissement de ces quatre transitions dans cet ordre.

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Chaque coordonnée de ce vecteur étant représentative du nombre de fois où la transition a été tirée. Il faut noter qu'alors, la notion d'ordre des franchissements est perdue.

Les propositions précédentes vont nous permettre de décrire l'évolution du marquage, on écrit:

$$M_f = M_o + \delta M$$

où  $M_0$  est le marquage initial proposé,  $M_f$  est le marquage final et  $\delta M$  est la variation de marquage.

Soit:  $M_f = M_0 + WS \quad (1)$

En reprenant l'exemple précédent, à partir d'un marquage initial  $M_0 = (1,0,0,0,0,0)$  et par exemple une séquence de franchissement  $S = (1,1,0,0)$ , on a:

$$\delta M = (-1,0,1,0,1,1) \quad \text{d'où} \quad M_f = (0,0,1,0,1,1).$$

On appréhende mieux à présent, la signification de la matrice  $W$ . Ainsi le -1 situé au croisement de la colonne  $T_i$  et de la ligne  $P_j$  signifie: "On enlève une marque dans la place  $P_j$  lors du franchissement de la transition  $T_i$ ". De même, un 1 en cette position signifie: "On ajoute une marque dans la place  $P_j$  lors du franchissement de la transition  $T_i$ ".

### 1.2.3 Caractérisation du RdP

#### Vivacité du réseau

A partir du marquage initial, qui symbolise l'état de départ d'un processus, on va devoir déterminer si toutes les places du réseau sont accessibles au marquage, quelle que soit l'évolution du système. Si tel n'est pas le cas, cela signifie qu'un sous-RdP du modèle proposé est inaccessible au marquage à partir d'un certain point d'évolution du système, donc non vivant. Dans la majeure partie des cas, on estime alors que le modèle a été mal conçu, puisqu'il devient en partie inutile à partir d'un certain stade d'évolution du système. Seule une réinitialisation de ce système permettra alors d'alimenter éventuellement ce sous-RdP.

#### Bornitude du réseau

Un RdP est dit borné si le nombre de marques de toutes ses places a une limite finie. Ceci confirmera par exemple qu'il n'y a pas accroissement pléthorique du nombre de pièces dans un stock. Cette étude est abordée lors de la détermination de ce que l'on appelle P-invariant ou invariant liés aux places.

### Exclusion mutuelle

Le modèle peut révéler l'existence d'exclusion mutuelle de plusieurs éléments dans divers endroits d' un système, ou l' exclusion mutuelle de deux ou de plusieurs situations (etat de marche /arrêt d' un équipement).

### Reinitialisation

On peut vouloir s'assurer que le système est réinitialisable. Cette caractéristique est très souvent essentielle, puisqu'elle garantit la possibilité de retour aux conditions initiales d'un équipement, quelle que soit l'évolution de l'état de celui-ci. Ce problème est abordé grâce à l'étude des T-invariants ou invariants de "transitions".

## 1.3 Les invariants

### 1.3.1 Les T-invariants

Soit un marquage initial  $M_0$  et un marquage final  $M_f$  issu de  $M_0$  après déroulement d'une séquence  $S$ . Nous notons:

$$M_0 \ominus S \rightarrow M_f$$

Nous dirons que  $S$  est un T-invariant si et seulement si :  $M_0 \equiv M_f$

Donc, d'après (1) pour une telle séquence  $S$  :  $WS = 0$

Autrement dit,  $S \in \text{Ker } W$  à droite. Il est alors clair que  $\lambda S$  est un T-invariant ( en se limitant ici aux valeurs de  $\lambda \in \mathbb{N}$ ).

Pour certains RdP, on pourra déterminer plusieurs T-invariants linéairement indépendants. Nous allons approfondir ce point à travers l'étude des P-invariants. C'est en effet une étude duale de la première que nous allons aborder plus précisément.

### 1.3.2 Les P-invariants

Il va s'agir de déterminer maintenant une pondération des places qui nous permettra d'étudier certaines caractéristiques, telles que la bornitude des systèmes. Effectuons sur l'équation (1) un produit vectoriel à gauche. Nous obtenons :

$$P^T M_f = P^T M_0 + P^T WS$$

$P^T$  est choisi tel que:

$$P^T M_f = P^T M_0$$

Autrement dit quelle que soit la séquence  $S$ , on veut conserver le marquage pondéré par  $P^T$ . La relation précédente est réalisable si et seulement si :

$$P^T WS = 0 \quad \forall S$$

Ce qui implique que:  $P^T W = 0$

autrement dit

$$P^T \in \text{Ker } W \text{ à gauche.}$$

Il n'est ici question que des RdP dits discrets, par opposition aux RdP continus. Ceci signifie que tous les marquages sont discrets, donc à coordonnées dans  $\mathbb{N}$ . Déterminer les P-invariants du RdP, c'est déterminer le noyau de la matrice  $W$  à gauche.

L'ensemble du noyau  $\text{Ker } W$  à gauche est un  $\mathbb{Z}$ -module. L' étude des RdP ne s'intéresse qu'aux éléments à coordonnées toutes positives ou nulles de ce  $\mathbb{Z}$ -module (le marquage ne peut être négatif). C'est donc par abus de langage que l'on dira que l'ensemble des solutions à notre problème représente un espace vectoriel dont il s'agit de déterminer une base. La base de cet "espace vectoriel"  $\text{Ker } W$  est un ensemble de " vecteurs" indépendants appelés P-invariants.

Le but est donc de déterminer une base de  $\text{Ker } W$ , à coordonnées toutes positives ou nulles, et la dimension de  $\text{Ker } W$ . Il est nécessaire de connaître alors le rang  $r$  de la matrice  $W$  à  $p$  lignes (Le RdP possède alors  $P$  places). On a :

$$\text{Dim Ker } W = p-r$$

Nous établirons ultérieurement des méthodes pratiques pour, dans certains cas, déterminer la dimension du noyau de  $W$  sans avoir à développer systématiquement l'outil mathématique. On aura alors moyen de déterminer l'existence de tels P-invariants, de visu, ce qui facilitera considérablement la tâche du concepteur.

Soit  $P_1^T, P_2^T, \dots, P_n^T$  une base de  $\text{Ker } W$  à gauche, tout P-invariant du RdP s'écrit comme une combinaison linéaire de ces vecteurs.

### 1.3.3 Exemple

A travers un exemple très simple, nous allons pouvoir aborder la signification plus pratique de ces invariants. Soit le RdP de la figure suivante, dont les poids d'arcs sont fixés à 1. C'est un RdP composé de ce que l'on appellera deux boucles. Il est sans conflit et s'apparente en fait au graphes d'événements, puisque chaque place n'a qu'une transition amont et une transition aval.

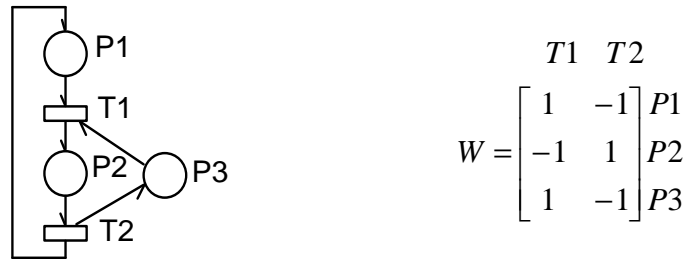


Figure 1.10

Nous exprimons par ailleurs sa matrice d'incidence  $W$ . Certains algorithmes mathématiques permettent de calculer ces invariants. Pour des cas très simples, comme celui-ci, les invariants peuvent être facilement calculés.

#### T-invariants du RdP:

Le vecteur  $S1 = (1,1)$  répond au problème puisque  $WS = 0$ . Ceci se traduit par: Le tir successif de T1, puis T2, remplace le système dans sa configuration initiale. D'autre part, la dimension du noyau à droite  $\text{DimKer } W_D = 1$ , ce qui signifie que tous les T-invariants de ce système s'écrivent  $S = \lambda S1$ .

#### P-invariants du RdP:

Les pondérations  $P_1^T = (1,1,0)$  et  $P_2^T = (0,1,1)$  répondent au problème, en effet, on a:  $P_1^T W = 0$  et  $P_2^T W = 0$ . Les deux vecteurs  $P_1^T, P_2^T$  forment une base de  $\text{Ker } W$  à gauche, dont la dimension  $\text{DimKer } W_G = 2$ . Ceci signifie que tout P-invariant de ce RdP s'exprime comme combinaison linéaire des deux précédents vecteurs indépendants.

Il reste alors à exprimer l'invariance de marquage sous la forme de deux expressions:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= K_1 \\ m_2 + m_3 &= K_2 \end{aligned} \quad \text{Où } m_1, m_2, m_3 \text{ sont les marquages des places } P_1, P_2, P_3 \text{ et } K_1, K_2 \text{ sont des constantes dépendantes du marquage initial.}$$

Il apparaît ici que la dimension du noyau à gauche de la matrice  $W$  est égale au nombre de boucles du RdP. Ce point de vue sera à nouveau abordé un peu plus loin. Ceci signifie que, pour des configurations bien spécifiques, mais cependant plus élaborées que la précédente, le concepteur peut déterminer visuellement, et donc aisément cette dimension. Ceci lui permet alors de connaître a priori le nombre d'invariants de bases qui caractérisent son système.

Il semble aussi intéressant de noter que l'écriture de la base d'invariants ne dépend pas du marquage du réseau, contrairement aux expressions de marquage qui en découlent. L'écriture algébrique caractérise donc bien la structure sans aborder le fonctionnement du système.

Les conditions initiales, liées au marquage devront donc être choisies en considération des caractéristiques du modèle. Nous rencontrerons plus loin des structures dont le comportement variera selon la quantité de marques initiales.

## 1.4 La signification des invariants

### 1.4.1 Notion de flux de marquage

Dans un RdP se déplacent des marques. Il est important de dissocier les notions de marquage et l'existence ou non d'invariants, ceux-ci étant propres à la structure. Les invariants vont traduire le devenir d'un système à partir de conditions initiales imposées par le marquage initial. Les notions, telles que blocage du système et bornitude vont dépendre du marquage initial. L'exemple de la figure 1.11 nous permet d'aborder les diverses possibilités d'évolution d'un système, selon le marquage initial, pour un même RdP possédant un P-invariant. Nous représentons alors le graphe des marquages obtenus à partir de plusieurs conditions initiales:

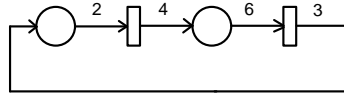


Figure 1.11

$(m_1, m_2) = (1, 0) \rightarrow$  Le système est bloqué.

$(m_1, m_2) = (2, 2) \rightarrow (0, 6) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (1, 4) \rightarrow$  Le système est bloqué.

$(m_1, m_2) = (4, 0) \rightarrow (2, 4) \rightarrow (0, 8) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (1, 6)$  Le système oscille indéfiniment.



Dans tous les cas les calculs fournissent l'invariant:  $2m_1 + m_2 = K$ , avec les valeurs successives de K: 2,6,8.

Nous pouvons maintenant introduire la notion de flux de marquage. Ainsi, il apparaît que, pour un tel RdP, possédant un P-invariant (Le vecteur (2,1)), il y a une périodicité du marquage, donc un flux moyen constant de celui-ci, après une éventuelle phase transitoire. Lorsque le coefficient K est trop petit, le système a tendance à répartir les marques de manière à bloquer les deux transitions. Dans le dernier exemple, il y a toujours assez de marques en réserve pour valider les transitions.

C'est sur cette dernière configuration que nous allons nous attarder. Au cours d'une période de marquage, chaque transitions a vu passer le même nombre de marques. Ecrivons la matrice d'incidence de ce modèle:

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} T_1 & T_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{On trouve le P-invariant } P^T = (2,1) \text{ et le T-invariant } S = (3,2). \text{ Ce dernier}$$

signifie que la séquence  $(T_1, T_1, T_2, T_1, T_2)$  par exemple, laisse le marquage invariant.

Dans l'exemple de la figure 1.12, nous constatons en revanche, que le nombre total de marques contenu dans la structure, à partir du marquage initial (1,0), ne cesse de croître. Le système est non borné. Le flux moyen n'est pas constant, mais croît indéfiniment. Si nous observons la matrice d'incidence de ce système, nous constatons l'inexistence d'invariants. Ces notions de flux de marquage et d'invariants sont intimement liées. Dans l'exemple de la figure 1.13, le système conduit nécessairement à un état de blocage, quel que soit le marquage initial. Le nombre de jetons ne fait que diminuer au fil de l'évolution. Il n'y a pas de P-invariant.

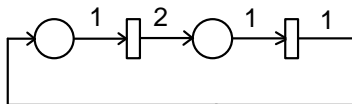


Figure 1.12

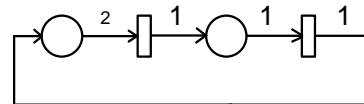
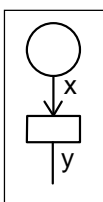


Figure 1.13

### Cellule génératrice et cellule consommatrice.

Nous appelons cellule, un ensemble constitué d'une place et d'une transition, reliées par un arc, comme le représente la figure suivante. Les arcs amont et aval portent les poids respectifs x et y.



Définition : On appelle gain G d'une telle cellule, le rapport  $G = x/y$ .

On dira qu'une cellule est consommatrice si son gain  $G < 1$

génératrice si son gain  $G > 1$

conservatrice si son gain  $G = 1$

Une telle cellule peut être alors vue comme un "amplificateur de quantité de marques".

Ceci va nous permettre d'étudier certains ensembles sous la forme d'assemblage de cellules de ce type.

#### 1.4.2 P-invariants et boucles de RdP généralisé.

Nous allons voir maintenant comment se traduit pratiquement l'existence d'un P-invariant. Nous allons partir d'un modèle très simple: Un RdP à une seule boucle constitué de n places et n transitions (Figure 1.14):

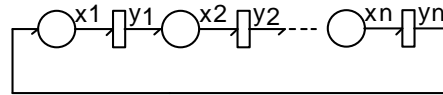


Figure 1.14

Nous posons la question de l'existence de P-invariant:

*Condition d'existence d'un P-invariant dans une boucle.*

*Proposition:* Dans un RdP à une boucle, il existe au plus un P-invariant de base (DimKerWG= 1).

#### Démonstration de la condition d'existence:

La matrice d'incidence de ce RdP s'écrit:

$$W_n = \begin{matrix} & P_1 & P_2 & & P_n \\ \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} -x_1 & & & & y_n \\ y_1 & -x_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & y_{n-1} & -x_n \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Chaque P-invariant du système est une combinaison linéaire d'une base de P-invariants obtenue par la résolution de l'équation  $P^T W_n = 0$ . L'existence même de ces P-invariants est liée à la condition  $\dim \text{Ker} W \neq 0$

D'autre part on a:

$$\dim \text{Ker} W = n - r$$

où « n » est le nombre de lignes de la matrice d'incidence (et le nombre de places du RdP) et « r » le rang de la matrice. Pour réaliser la condition  $\dim \text{Ker} W \neq 0$ , il est nécessaire que:

$$\text{Det } W_n = 0$$

Le déterminant de cette matrice s'écrit:

$$\text{Det } W_n = -x_n \text{Det } X_{n-1} - (-1)^n y_n \text{Det } Y_{n-1}$$

avec:

$$Y_{n-1} = \begin{bmatrix} y_1 & -x_2 & & & \\ & y_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & y_{n-1} & -x_n \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_{n-1} = \begin{bmatrix} -x_1 & & & & \\ y_1 & -x_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & y_{n-2} & -x_{n-1} \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Les deux matrices  $Y_{n-1}$  et  $X_{n-1}$  étant diagonales, on écrit:

$$\det Y_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} y_k \quad \text{et} \quad \det X_{n-1} = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} x_k \quad \text{d'où:} \quad \det W_n = -(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} x_k - (-1)^n \prod_{k=1}^{n-1} y_k$$

La condition d'existence de P-invariants s'écrit:

$$\prod_n x_k = \prod_n y_k$$

**Démonstration de l'unicité de la solution:**

Soit la matrice  $X_{n-1}$  précédemment définie; on a:

$$\det X_{n-1} = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} x_{n-1}$$

Si les  $x_i$  sont tous non nuls, ceci signifie que  $\det X_{n-1} \neq 0$  donc, la matrice  $W$  est de rang  $n-1$ , on en déduit:

$$\dim \text{Ker} W_G = n - (n-1) = 1$$

un seul vecteur suffit à définir une base de cet espace.

**Observation du flux de marques :**

Nous pouvons maintenant considérer que ce RdP est constitué de  $n$  cellules de gain  $G_k = y_k/x_k$ . Nous pouvons exprimer le gain total de la boucle comme étant le produit:

$$G = \prod_{k=1}^n G_k$$

Ce gain apparaît comme l'amplification de marques dans la boucle. Nous traduisons maintenant la conservation de flux de marques en écrivant:

$$\prod_{k=1}^n G_k = 1$$

Ceci montre que les notions de conservation de flux et d'existence de P-invariants sont intimement liées.

1.5 Les P et T-Expansions

Les constatations que nous venons de faire présentent une première approche concernant l'étude de la signification pratique des invariants. Il apparaît que deux cheminements sont envisageables pour déterminer les P-invariants. Soit l'on développe l'outil algébrique classique, soit l'on observe le flux de marques en en déterminant les conditions de conservation.

Nous allons généraliser le propos, dans le but de l'appliquer à des structures de Petri plus complexes. Nous allons observer des RdP obtenus par "expansion" et analyser les conditions de conservation d'invariants.

1.5.1 Expansion par les transitions ou T-expansion

Définition: Soit  $RdP_1$ , un RdP composé de  $n$  places et de  $m$  transitions. On appelle T-expansion de  $RdP_1$ , un ensemble  $RdP_e$  de places  $\{P_{n+1}, \dots, P_q\}$  et de transitions  $\{T_{m+1}, \dots, T_r\}$  tel que tout élément de  $RdP_e$  n'est relié à  $RdP_1$  que par des arcs attachés aux transitions de  $RdP_1$ .

Soit  $W_1$  la matrice d' incidence de  $RdP_1$  et  $RdP_2$  le RdP obtenu après cette T-expansion. Sa matrice  $W_2$  s'écrit:

$$W_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T_1 & T_m & T_{m+1} & T_r \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cc|cc} & & & \\ & W_1 & & 0 \\ \hline & A & & B \\ & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ P_{n+1} \\ \vdots \\ P_q \end{array} \end{array}$$

où  $A$  et  $B$  sont des sous-matrices de  $W_2$  et  $0$ , la matrice nulle résultant de l'inexistence de liaisons entre les ensembles  $\{T_{m+1}, T_r\}$  et  $\{P_1, P_n\}$ .

Nous pouvons facilement montrer qu'une T-expansion conserve les P-invariants de  $RdP_1$ :

Soit  $P_1^T = (p_1, \dots, p_n)$ , un P-invariant de  $RdP_1$ ; on a:  $P_1^T \in \text{Ker} W_1 \Rightarrow P_1^T W_1 = 0$

Soit  $P_2^T = (p_1, \dots, p_n, 0, \dots, 0) \in Z^q$ , alors on a:  $P_2^T W_2 = 0$

Ceci signifie que  $P_2^T$  est un P-invariant de  $W_2$ .  
 C' est en ce sens que nous dirons que le P-invariant a été conservé après la T-expansion du RdP initial.

### 1.5.2 Expansion par les places, ou P-expansion

Définition: Soit RdP1, un RdP composé de n places et de m transitions. On appelle P-expansion de RdP1, un ensemble RdPe de places  $\{P_{n+1}, \dots, P_q\}$  et de transitions  $\{T_{m+1}, \dots, T_r\}$  tel que tout élément de RdPe n'est relié à RdP1 que par des arcs attachés aux places de RdP1.

Soit  $W_1$  la matrice d'incidence de RdP1. Soit RdP2 le RdP obtenu après cette P-expansion. Sa matrice  $W_2$  s'écrit:

$$W_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} & T_1 & T_m & T_{m+1} & T_r \\ \hline & & & & \\ \hline & W_1 & & A & \\ \hline & 0 & & B & \\ \hline & & & & \end{array} \begin{array}{l} P_1 \\ \dots \\ P_n \\ P_{n+1} \\ \dots \\ P_q \end{array} \end{array}$$

où A et B sont des sous-matrices de  $W_2$  et 0, la matrice nulle résultant de l'inexistence de liaisons entre les ensembles  $\{T_1, T_m\}$  et  $\{P_{n+1}, P_q\}$ .

En suivant un raisonnement similaire au précédent, on établit facilement qu'une P-expansion conserve les T-invariants du RdP initial.

### 1.6 Comptage des P-invariants

A l'aide des résultats précédents, on peut établir, pour certaines structures simples, une méthode permettant de répertorier un ensemble de P-invariants formant une base de  $\text{Ker}W$ .

Soit le RdP suivant, constitué de deux boucles B1 et B2:

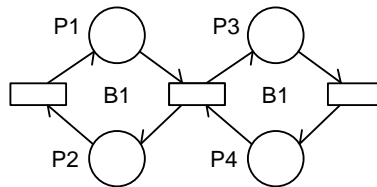


Figure 1.15

La boucle B1 peut être considérée comme une T-expansion de B2, inversement, la boucle B2 peut être considérée comme une T-expansion de B1.

D'après ce que nous avons antérieurement établi, Le P-invariant éventuellement lié à la boucle B1 (Resp B2) seule n'est pas "perturbé" par l'existence de la boucle B2 (Resp B1).

Un tel RdP possède au plus 2 P-invariants indépendants qui s'écrivent:

$$P_1^T = (p_1, p_2, 0, 0) \text{ et } P_2^T = (0, 0, p_3, p_4)$$

On peut de même imaginer un RdP formant une chaîne de n boucles identiques à celles-ci, on aurait alors la possibilité d'avoir n P-invariants indépendants, ce qui nous permettrait de décrire très aisément le système.

Malheureusement, dès que l'expansion n'est pas une T-expansion, le comptage des P-invariants devient bien plus complexe. Il s'agit ici de RdP qui présentent, après expansion, des places desquelles sont issues plusieurs arcs amont à plusieurs transitions. Ce sont des RdP à conflits structurels.

Cependant, de nombreux exemples subsistent où les P-invariants de base d'un RdP, sont facilement dénombrables par cette méthode. Ceci constitue les prémisses d'une simplification du problème, en même temps qu'une ouverture vers une meilleure compréhension ou appréhension de la signification de cet objet algébrique qu'est le P-invariant.



$$p_n = y_n/x_n = G_n \quad \text{Puis:} \quad P_{n-1} = P_n G_n = G_n G_{n-1}$$

Par récurrence, on obtient: 
$$P_1 = \prod_{k=1}^n G_k$$

Le P-invariant s'écrit:

$$P^T = \left( \prod_{k=1}^n G_k, \prod_{k=2}^n G_k, \dots, \prod_{k=n-1}^n G_k, G_n, 1 \right)$$

Un tel RdP ne présente pas de T-invariant.

Un raisonnement dual nous permettrait d'étudier la chaîne suivante. Cette fois, Ce RdP présente systématiquement un T-invariant, et ne présente pas de P-invariant (Figure 1.18).

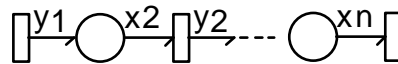


Figure 1.18

### Etudes d'assemblages

Pour résumer cette brève étude concernant la conservation de P-invariants, nous présentons quelques exemples d'assemblage de RdP.

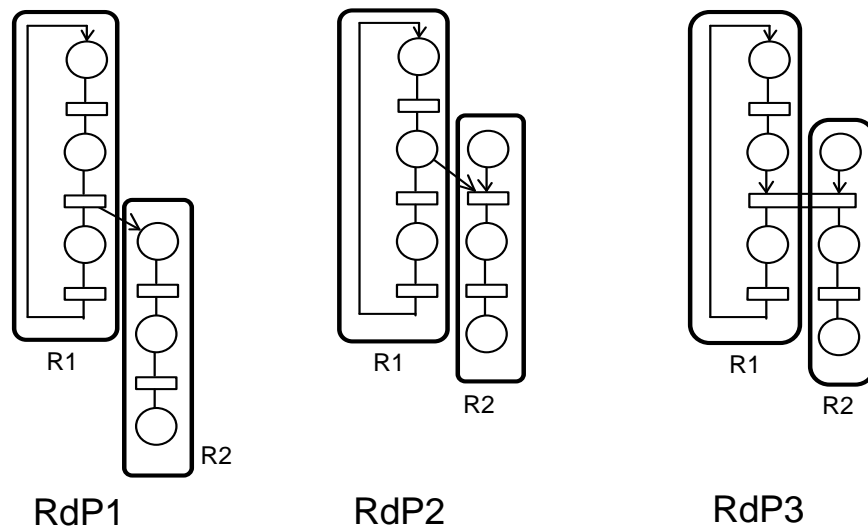


Figure 1.19

Dans le RdP1, le sous-ensemble R2 est une T-expansion de R1, et le sous-ensemble R1 est une P-expansion de R2. La présence de ce lien ne perturbe donc pas l'existence du P-invariant éventuel de R1, alors que ce même lien perturbe l'existence du P-invariant de R2. Dans le RdP2, le sous-ensemble R2 est une P-expansion de R1, et le sous-ensemble R1 est une T-expansion de R2. La présence de ce lien perturbe l'existence du P-invariant éventuel de R1, alors qu'il ne perturbe pas l'existence du P-invariant de R2.

Dans le RdP3, les sous-ensembles R1 et R2 sont des T-expansions l'une de l'autre, l'ensemble des P-invariants de chaque structure est donc conservé.

On pourrait tenir les propos duaux de ceux-ci, concernant les T-invariants.

## 1.7 P-Fusions et T-Fusions

### 1.7.1 P-Fusions

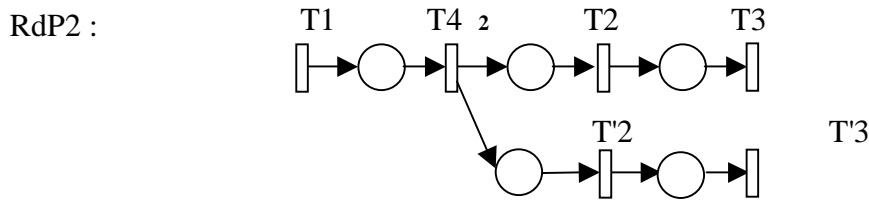
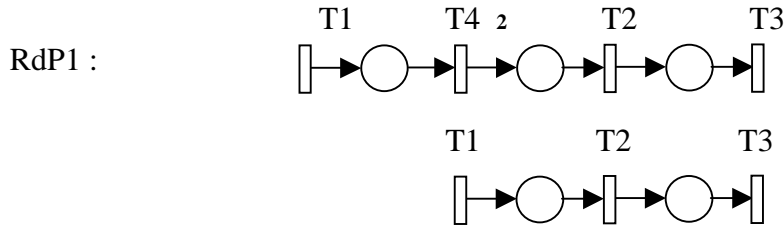
Nous étudions maintenant les invariants de RdP obtenus en fusionnant une place ou une transition de deux autres RdP qui ont été caractérisés.



$$P_{2e}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \quad P = P_1^T + \frac{2}{1} P_2^T = (2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2)$$

### 1.7.2 T-Fusions

On peut facilement tenir des propos duaux des précédents en ce qui concerne les T fusions. Soient deux RdP caractérisés chacun par un T-invariant.  $T_1 = (\alpha_1 \quad \alpha_n)$  et  $T_2 = (\beta_1 \quad \beta_n)$ . On réalise une T-fusion par  $T_n$  de RdP1 et  $T_1$  de RdP2, on définit :  $T_{1e} = (\alpha_1 \quad \alpha_{n-0} \ 0)$  et  $T_2 = (0 \ 0\beta_1 \quad \beta_n)$ , deux vecteurs à  $n+m-1$  dimensions. On a alors  $WT=0$ , où  $W$  est la matrice d'incidence du nouveau RdP et  $T$  un T-invariant de celui-ci tel que :  $T=\lambda(T_{1e}+\alpha_n/\beta_1 T_{2e})$

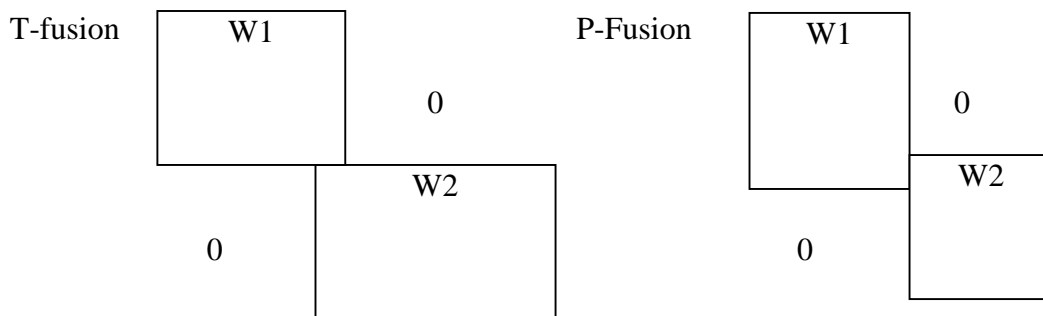


$$T_1 = (1 \ 2 \ 2 \ 1) \quad T_{1e} = (1 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0) \quad T_2 = (1 \ 1 \ 1) \quad T_{2e} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1) \quad T = (1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1)$$

### 1.8 Quelques conjectures:

#### P-T = P-T

- Une T-expansion préserve les P-invariants
- Une P-expansion préserve les T-invariants
- Une T-Fusion entre deux RdP ayant chacun un T invariant crée un nouveau T-invariant
- Une P-Fusion entre deux RdP ayant chacun un P invariant crée un nouveau P-invariant
- Une T-Fusion entre deux RdP dont l'un n'a pas de T invariant n'a pas de T-invariant
- Une P-Fusion entre deux RdP dont l'un n'a pas de P invariant n'a pas de P-invariant
- Une T-Fusion préserve les P-invariants
- Une P-Fusion préserve les T-invariants
- Une T-Fusion entre deux RdP sans P-invariant peut générer un P-invariant
- Une P-Fusion entre deux RdP sans T-invariant peut générer un T-invariant



## II LES RESEAUX DE PETRI COLORES (RdPC)

### 2.1 Présentation des RdPC

Lorsque les modèles deviennent complexes et qu'ils contiennent des sous-modèles répétitifs, il devient nécessaire d'utiliser le principe de coloration.

Le RdP de la figure 2.1 représente la modélisation du fonctionnement de 3 machines identiques usinant tour à tour les pièces  $C1$  et  $C2$ . Ce RdP généralisé se présente sous la forme de 3 boucles totalement indépendantes. Le principe des RdPC va être de traduire l'idée suivante: En fait le même modèle est utilisé, dupliqué 3 fois, et pourrait se présenter sous la forme d'un seul RdP, dit coloré (figure 2.2).

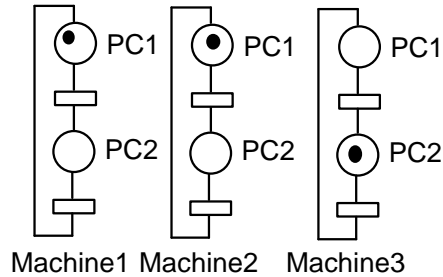


Figure 2.1

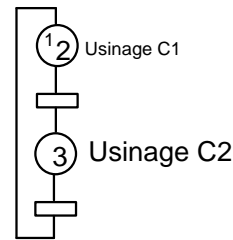


Figure 2.2

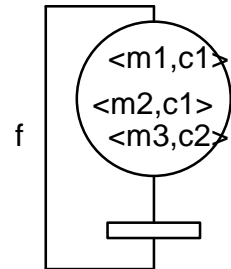


Figure 2.3

Les deux premières machines dont les phases de travail sont symbolisés par les couleurs  $\langle 1 \rangle$  et  $\langle 2 \rangle$ , sont entrain d'usiner des pièces de type  $C1$ . La machine 3 usine une pièce de type  $C2$ . Les transitions représentent, pour chaque machine le passage d'un type d'usinage à l'autre. Ces franchissements sont indépendants pour chaque couleur. Le RdPC est plus synthétique, mais les marques contiennent plus d'information puisqu'elles possèdent une identité. Nous avons ici des couleurs dites à une dimension, couleur de chaque machine.

Il est alors possible de colorer encore davantage ce RdPC, en redonnant une dimension supplémentaire à l'espace des couleurs". On colore à nouveau ce RdPC en le repliant et obtenant le RdPC de la figure 2.3:

Les marques, colorées à deux dimensions, possèdent alors toute l'information concernant la phase de fonctionnement de chaque machine. La quantité d'information contenue dans chaque marque s'est accrue. Le franchissement de la transition entraîne cette fois un changement de couleur, tout au moins sur l'une de ses dimensions, la "dimension pièce". Aux arcs devront donc maintenant être liées des fonctions de transformation des couleurs. Ainsi nous aurons:

$$f\langle m_i, C_1 \rangle = \langle m_i, C_2 \rangle \quad \text{et} \quad f\langle m_i, C_2 \rangle = \langle m_i, C_1 \rangle \quad \forall i \in \{1,2,3\}$$

Lorsque l'on dessine un RdPC, il faut également spécifier pour quelle couleur chaque transition est franchissable. Cette spécification peut être portée sur le graphe, en regard de chaque transition concernée. Ainsi pour cet exemple, la transition est franchissable pour toute couleur de type  $\langle m_i, C_j \rangle$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ ,  $j \in \{1,2\}$ .

### 2.2 Fonctions arcs aval, fonctions arcs amont.

Nous venons de voir comment définir une fonction sur un arc aval à une transition. C'est la fonction qui transforme une couleur "après franchissement de cette transition". Il apparaîtra plus tard que cette définition est encore insuffisante, et qu'il est nécessaire d'introduire la notion de fonction attachée à un arc amont aux transitions. La figure 2.4 représente quelques exemples de franchissement d'une transition par plusieurs couleurs. Les arcs amont et aval à la transition portent des fonctions.

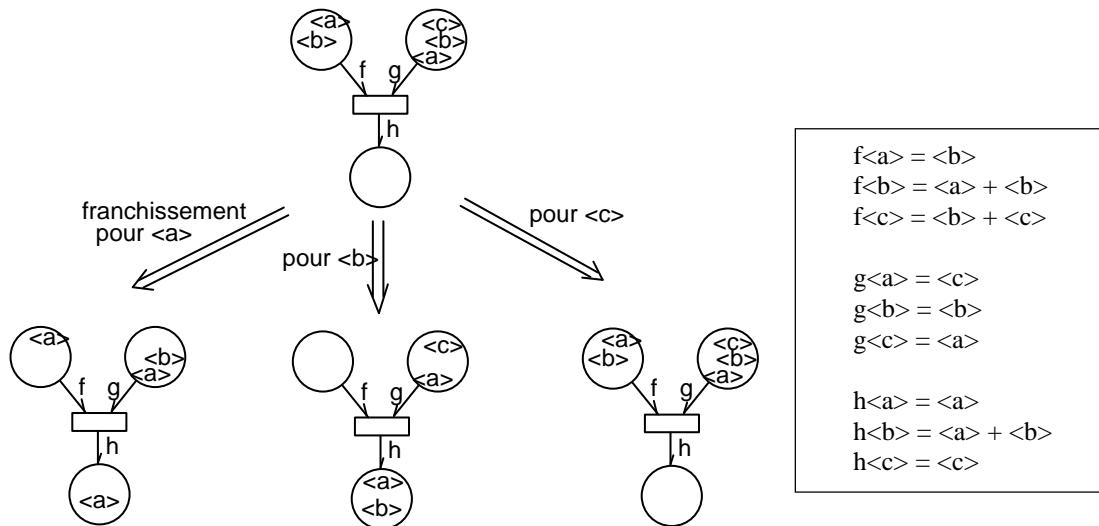


Figure 2.4

### Conditions de franchissabilité de la transition

Pour qu'une transition  $T$  soit franchissable pour une couleur  $\langle c \rangle$ , il faut trouver dans chaque place  $P_i$  amont à  $T$ , un ensemble de couleurs  $\{C\}_i$  tel que  $f_i \langle c \rangle = \{C\}_i$ ; où  $f_i$  est la fonction portée par l'arc amont reliant la place  $P_i$  à la transition  $T$ . Dans l'exemple précédent, les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont définies sur les trois couleurs  $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle$ .

La figure représente la situation après le franchissement de la transition pour chaque couleur indépendamment. Ici la transition est franchissable pour les deux couleurs  $\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$ , mais non pour la couleur  $\langle c \rangle$ .

Plus généralement, lors du franchissement d'une transition  $T$  par une couleur  $\langle c \rangle$ , on fournit dans chaque place aval  $P_j$  l'ensemble de couleurs  $\{C\}_j$  telle que  $g_j \langle c \rangle = \{C\}_j$ , où  $g_j$  est la fonction attachée à l'arc aval reliant  $T$  à  $P_j$ .

#### Remarque

La symbolique empruntée aux opérations d'addition et de multiplication est en fait une notation ensembliste, puisqu'il n'y a pas de structure algébrique de l'ensemble des couleurs. De même, parler d'espace des couleurs est un abus de langage.

Quelques fonctions standard sont définies, permettant ainsi d'éviter les lourdeurs d'écriture des définitions de fonctions spécifiques. Ces fonctions standard, qui sont peu nombreuses permettent de modéliser les situations les plus simples.

## 2.3 Les fonctions courantes

### 2.3.1 Fonctions appliquées sur un ensemble de couleurs "unidimensionnelles"

Identité	Id:	$\text{Id} \langle c_i \rangle = \langle c_i \rangle$
Décoloration	Dec:	$\text{Dec} \langle c_i \rangle = \langle \bullet \rangle$ où $\langle \bullet \rangle$ représente la "marque décolorée"
Successeur	Succ:	$\text{Succ} \langle c_i \rangle = \langle c_{i+1} \rangle / n$
Prédécesseur	Prec:	$\text{Prec} \langle c_i \rangle = \langle c_{i-1} \rangle / n$

Ces deux dernières fonctions sont définies modulo  $n$ , pour un nombre  $n$  de couleurs.

### 2.3.2 Fonction appliquées sur un ensemble de couleurs "bidimensionnelles"

Successeur	Succ1:	$\text{Succ1} \langle c_i, c_j \rangle = \langle c_{i+1}, c_j \rangle / n$
Successeur	Succ2:	$\text{Succ2} \langle c_i, c_j \rangle = \langle c_i, c_{j+1} \rangle / m$
Prédécesseur	Prec1:	$\text{Prec1} \langle c_i, c_j \rangle = \langle c_{i-1}, c_j \rangle / n$
Prédécesseur	Prec2:	$\text{Prec2} \langle c_i, c_j \rangle = \langle c_i, c_{j-1} \rangle / m$
Projection	Proj1:	$\text{Proj1} \langle c_i, c_j \rangle = \langle c_j \rangle$



$$\{p_k \circ f_k = p_{k+1} \circ g_k [n]\} \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \text{Ici } [n] \text{ signifie "modulo } n\text{".}$$

Cette série d'égalités établissent l'existence de P-invariant pour cette structure. Par récurrence, nous obtenons:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \circ g_1 \circ f_1^{-1} \\ p_1 &= p_3 \circ g_2 \circ f_2^{-1} \circ g_1 \circ f_1^{-1} \\ &\vdots \\ p_1 &= p_n \circ g_{n-1} \circ f_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ g_1 \circ f_1^{-1} \end{aligned}$$

Avec d'autre part:  $p_1 \circ g_n = p_n \circ f_n$ . d'où nous tirons:  $p_1 = p_1 \circ g_n \circ f_n^{-1} \circ \dots \circ g_1 \circ f_1^{-1}$

La condition d'existence de P-invariant s'écrit alors:  $g_n \circ f_n^{-1} \circ \dots \circ g_1 \circ f_1^{-1} = \text{Id}$

Ce que l'on peut écrire symboliquement:  $\prod_k^0 g_k \circ f_k^{-1} = \text{Id}$

Où les termes  $k$  appartiennent à  $\mathbb{N}$  et sont ordonnés de  $n$  à 1.

### Exemples

A travers deux exemples, nous allons voir ce que signifient de tels résultats.

Soit le RdP de la figure 2.7:

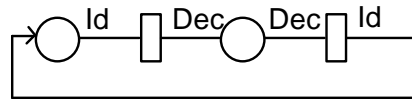


Figure 2.7

On a ici:  $\prod_k^0 g_k \circ f_k^{-1} = \text{Id} \circ \text{Dec}^{-1} \circ \text{Dec} \circ \text{Id}^{-1} = \text{Id}$

Le système possède donc un P-invariant. Soit le RdPC de la figure 2.8:

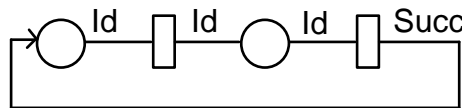


Figure 2.8

On a maintenant:  $\prod_k^0 g_k \circ f_k^{-1} = \text{Id} \circ \text{Succ}^{-1} \circ \text{Id} \circ \text{Id}^{-1} \neq \text{Id}$

Ce RdPC ne possède pas de P-invariant. Nous pouvons le décolorer et obtenir un RdP généralisé qui, lui, possède un P-invariant, étant constitué d'une seule boucle dont les arcs ont tous un poids de 1:

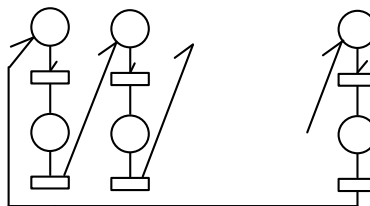


Figure 2.9

On peut noter que la longueur de cette boucle nous est fournie par la récurrence de la fonction Succ, donc le nombre de couleurs. On peut cependant noter, en ce qui concerne le RdPC, que la séquence

$S = T_1, T_2, T_1, T_2, \dots, T_1, T_2$  répétant  $n$  fois les termes  $T_1$  et  $T_2$  est conservatrice du marquage, donc réinitialise le système. Le nombre  $n$  représente le nombre des couleurs. En effet, le vecteur  $(n, n)$  est un T-invariant si l'on se réfère au fait que  $\text{Succ}^n = \text{Id}$ .

## 2.6 Expansion de RdPC

Comme pour les RdP généralisés, on appellera P-expansion une expansion par les places uniquement (tout arc reliant le RdPC et son expansion est issue, ou parvient à l'une de ses places). De même, on appellera T-expansion, toute expansion par les transitions uniquement (tout arc reliant le RdPC et son expansion est issue, ou parvient à l'une des transitions du RdPC considéré). Soit  $W_1$  la matrice d'incidence du RdPC initial. La matrice d'incidence du nouveau RdPC obtenu s'écrit, pour une T-expansion:

$$W_2 = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ A & B \end{bmatrix}$$

Si  $P^T = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  est un P-invariant du RdP initial, alors  $P^T = (p_1, p_2, \dots, p_n, 0, \dots, 0)$  qui est le prolongement du P-invariant dans l'expansion, est un P-invariant du nouveau RdP.

De même si l'on considère une P-expansion d'un RdP initial de matrice d'incidence  $W_1$ , la matrice d'incidence du nouveau RdPC s'écrit:

$$W_2 = \begin{bmatrix} W_1 & A \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

et l'on montre alors qu'il y a conservation, au même titre, des T-invariants de la structure initiale dans la structure finale.

D'autre part, puisque pour de telles matrices  $\text{Det}W_2 = \text{Det}W_1\text{Det}B$ , l'existence d'invariant pour un RdPC de matrice  $W_1$  entraîne l'existence d'invariant de même type pour le RdPC étendu.

## Exemples

*Le partage de ressources* : On considère le RdPC de la figure suivante:

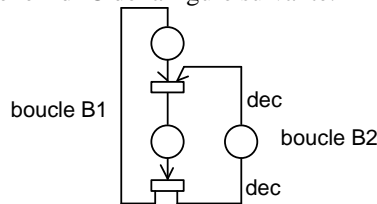


Figure 2.10

D'après ce qui vient d'être dit en ce qui concerne la boucle B1 (qui est une T-expansion de B2), On a:

$$\prod_k^0 g_k \circ f_k^{-1} = \text{Id} \circ \text{Id}^{-1} \circ \text{Id} \circ \text{Id}^{-1} = \text{Id}$$

ce qui implique que cette boucle génère 1 P-invariant, et un seul. Ce P-invariant ne concerne pas la place P3. D'autre part, les arcs de cette boucle ne portent que des fonctions identité, il convient de pondérer chaque place P1 et P2 par des fonctions Id pour déterminer l'invariant:

$$P^T = (\text{Id}, \text{Id}, 0)$$

Pour étudier la boucle B2, on remarque que l'on a :  $\prod_k^0 g_k \circ f_k^{-1} = \text{Id} \circ \text{Dec}^{-1} \circ \text{Dec} \circ \text{Id}^{-1} = \text{Id}$

Le P-invariant lié à cette boucle existe et ne concerne pas la place P1. L'invariant concerne cette fois les places P2 et P3. Toute marque décolorée de P3 est l'image d'une marque colorée issue de P2, ou retournant en P2. Le P-invariant s'écrit:

$$P^T = (0, \text{dec}, \text{Id})$$

*Etude du RdP généralisé correspondant*

Ici, les résultats précédents ne sont pas directement applicables. En effet, le sous-RdP représenté par la place ressource est bien une T-expansion des trois boucles, mais la réciproque n'est pas vraie.

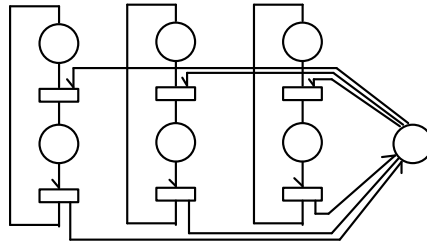


Figure 2.11

Il s'ensuit que les trois P-invariants générés par les boucles de consommateurs sont bien conservés, mais que, par ailleurs, un nouveau P-invariant va être lié à l'existence de la place ressource. Le RdPC correspondant est en fait plus aisé à analyser de ce point de vue.

*Usinage successif de n pièces de couleur <cn>*

Soit le RdPC de la figure suivante modélisant un tel problème:

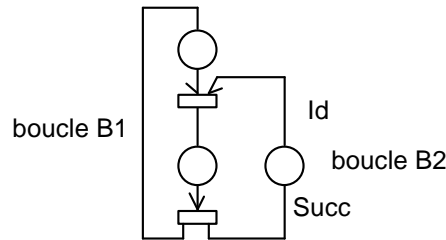


Figure 2.12

Comme jusqu'ici, les arcs où la fonction a été omise portent la fonction *Id*. La boucle B1 génère un P-invariant car

$$\prod_{\circlearrowleft} g_k \circ f_k^{-1} = Id$$

en revanche, la boucle B2 n'en génère pas puisque

$$\prod_{\circlearrowleft} g_k \circ f_k^{-1} = Succ^{-1} \neq Id$$

2.7 Invariants et chaînes de RdPC

Soit une chaîne de RdPC composée de n cellules:

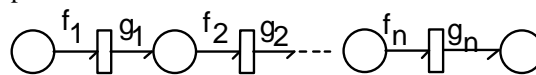


Figure 2.13

Soit  $P^T = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$  un P-invariant de cette structure, on a alors:

$$p_1 \circ f_1 = p_2 \circ g_1$$

.

$$p_n \circ f_n = p_{n+1} \circ g_n$$

Soit  $p_{n+1} = Id$ , ceci entraîne:

$$p_n = g_n \circ f_n^{-1} \Rightarrow p_{n-1} = g_n \circ f_n^{-1} \circ g_{n-1} \circ f_{n-1}^{-1}$$

et par récurrence on obtient:

$$p_1 = \overset{o}{\prod}_n g_k \circ f_k^{-1}$$

où  $\overset{o}{\prod}$  signifie la composition ordonnée des fonctions par la loi "o".

Le P-invariant s'écrit:

$$P^T = \left( \overset{o}{\prod}_{k=1} g_k \circ f_k^{-1}, \overset{o}{\prod}_{k=2} g_k \circ f_k^{-1}, \dots, \overset{o}{\prod}_{k=n-1} g_k \circ f_k^{-1}, g_n \circ f_n^{-1}, \text{Id} \right)$$

Si la loi "o" est commutative pour les fonctions considérées, il existe un P-invariant pour une telle chaîne, quelles que soient ces fonctions.

Cette dernière expression est utile lorsque n est petit (2 ou 3). En effet les structures ainsi constituées sont très fréquentes. Les matrices d'incidence des deux réseaux suivants sont W1 et W2.

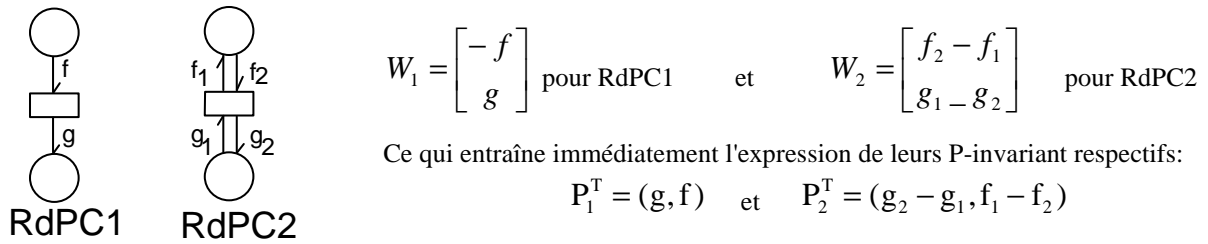


Figure 2.14

En généralisant la notion de liaison à des liaisons bidirectionnelles entre places et transitions, on affirme que RdPC2 possède nécessairement un P-invariant (RdPC2 est alors constitué d'une chaîne).

Nous allons pouvoir appliquer le résultat précédent. Il va en effet être possible de déterminer le P-invariant du RdP convoyeur FIFO. Une remarque est cependant nécessaire pour permettre le raisonnement:

*Remarque:*

Soient n RdPC tels que ceux qui sont représentés sur la figure 2.15 :

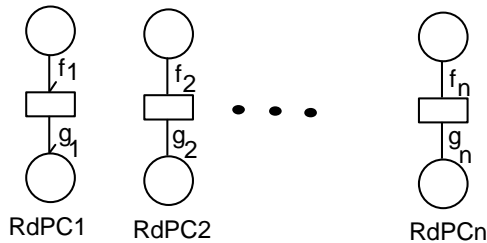


Figure 2.15

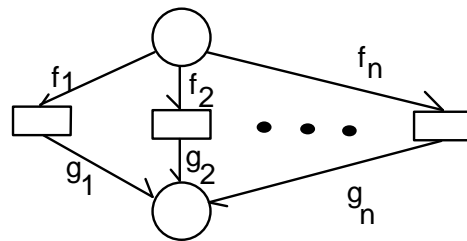


Figure 2.16

Soit  $P^T = (p_1, p_2)$  un P-invariant commun à tous ces RdPC. Alors  $P^T$  est un P-invariant du RdPC de la figure 2.16 obtenu par fusion de places:

*Démonstration:*

Soit  $W_i$  la matrice d'incidence de RdPCi, on a:

$$W_i = \begin{bmatrix} -f_i \\ g_i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^T W_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Si  $P^T$  est annulateur à gauche de toutes les matrices  $W_i$ , alors il est annulateur à gauche de la matrice  $W$  obtenue par concaténation de toutes ces matrices:

$$W = [W_1] \overset{o}{\circ} [W_2] \overset{o}{\circ} \dots \overset{o}{\circ} [W_n] = \begin{bmatrix} -f_1 & -f_2 & \dots & -f_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n \end{bmatrix}$$

Cette matrice est la matrice d'incidence du RdPC de la figure 2.16. Ceci entraîne que  $P^T$  est P-invariant de ce RdPC. En revenant à l'exemple proposé, on étudie les trois sous-structures qui le composent:

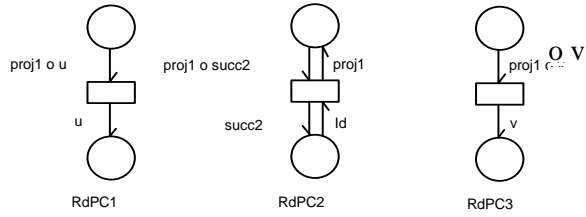


Figure 2.17

En appliquant les résultats précédents, il vient immédiatement:  $P_2^T = (\text{succ2} - \text{Id}, \text{proj1} \circ \text{succ2} - \text{proj1})$

On remarque que ce "vecteur" est « colinéaire » du suivant:  $P_2^T = (\text{Id}, \text{proj1})$

Qui est donc un P-invariant de RdPC2.

En appliquant les règles précédentes à RdPC1 et RdPC3, on obtient les P-invariants respectifs

$$P_1^T = (u, \text{proj1} \circ u) \quad \text{et} \quad P_3^T = (v, \text{proj1} \circ v)$$

Ces deux "vecteurs" sont linéairement dépendants de  $P_2^T$ , qui est donc un P-invariant commun aux trois RdPC.  $P_2^T$  est un P-invariant du RdPC obtenu par concaténation, c'est à dire, celui qui modélise le convoyeur FIFO. On retrouve bien le résultat classique obtenu par développement mathématique.

### III LE SEQUENCEMENT ET LA CONSTRUCTION D'UN SEQUENCEUR

#### 3.1 Le séquencement

##### 3.1.1 La problématique, le partage de ressource

Dans de nombreux domaines du monde industriel (informatique et production pour ce qui nous concerne ici), le partage de ressource commune représente un point tout à fait essentiel. Ainsi, en quelques exemples, le thème peut être abordé : Processeur partagé pour l'exécution de plusieurs tâches concurrentes, robot ou machine se partageant entre plusieurs chaînes d'assemblage.

Le problème peut aller du très simple (partage alternatif d'un robot entre deux sites, sans autre protocole) ou plus compliqué (partage d'une ou plusieurs ressources entre plusieurs utilisateurs en respectant certains critères, tels que le temps d'exécution global d'une application). On peut alors adjoindre au cahier des charges, des contraintes (précédence, préemptions autorisées ou non), influant sur le séquencement à choisir. Les perturbations, dues aux impondérables peuvent également amener à modifier en dynamique le séquencement choisi initialement. On passe alors d'une approche dite « hors ligne » à une approche « en ligne ». La recherche du meilleur séquencement est loin d'être simple en considérant tous ces points de vue et l'apport d'un outil de modélisation solide est alors indispensable.

Pour notre part, nous considérerons dans un premier temps des séquences périodiques pouvant d'ailleurs être perturbées pour figurer un dysfonctionnement. Nous évoquerons aussi les séquences binaires pseudo-aléatoires (donc périodiques).

##### 3.1.2 Définition et classement des séquences

La modélisation de processus industriels (au sens large) se heurte bien souvent à la représentation de phénomènes séquentiels (par nature discrets). On représente alors une succession d'opérations, selon un principe souvent répétitif, générant par exemple ainsi une séquence plus ou moins longue. Ces problèmes peuvent à la fois se retrouver dans le domaine de l'électronique, par l'étude de séquences binaires plus ou moins complexes, dans le domaine de la production, par l'étude de la modélisation de gammes de production ou encore, dans des domaines plus variés, par l'étude de séquences pseudo-aléatoires.

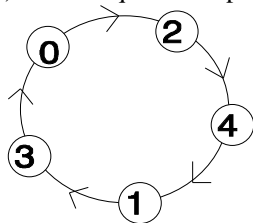
Nous avons répertorié, de manière très générale, quel que soit le domaine d'application, situé même éventuellement en dehors des domaines précités, divers comportements assez distincts dans le domaine du séquencement.

Il s'agit alors des séquencements dits :

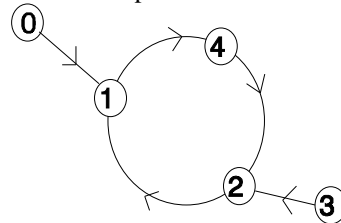
- simples,
- simples avec "attracteurs",
- complexes
- pseudo-aléatoires.

De manière générale, on appelle séquence, une succession périodique de nombres. L'ensemble de ces nombres appartient à une structure de corps fini de caractéristique  $p$  précisée où  $p$  est un nombre premier.

On appelle séquence simple, une séquence pour laquelle chaque nombre ne se retrouve qu'une seule fois par période (diagramme 1). Cette séquence de période 5 se note dans cet exemple  $S = \langle 02413 \rangle$ .



**Diagramme 1.** Séquence simple



**Diagramme 2** Séquence simple avec attracteur

On appelle séquence simple avec attracteur, une séquence simple pour laquelle certains éléments peuvent être l'aboutissement d'une succession d'autres éléments appartenant au même corps (diagramme 2). Chaque élément n'apparaît qu'une seule fois dans le diagramme. La séquence évoquée diagramme 2 se notera par convention :  $S = \langle 124 \rangle, 3 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 1$

On appelle séquence complexe, une séquence dans laquelle apparaît plusieurs fois un ou plusieurs nombres au cours d'une période. On peut par exemple avoir  $S = \langle 0124213040 \rangle$ .

On dénommera pseudo-aléatoire, une séquence de ce type de période suffisamment longue pour permettre, en fonction de l'application, la simulation de séquence aléatoire de nombres. En particulier, si la caractéristique du corps est  $p = 2$ , on étudie particulièrement les séquences binaires pseudo-aléatoires, très exploitées dans le domaine de l'électronique ou lors d'un choix exclusif binaire. On a alors par exemple  $S = \langle 00111010001 \rangle$ .

Par ailleurs, une séquence pseudo-aléatoire doit être vue comme le régime permanent d'une séquence simple avec attracteur. Le régime transitoire, de durée plus ou moins longue, est la succession d'états rencontrés depuis l'état d'initialisation jusqu'à l'arrivée à un état du régime permanent (attracteur). On retrouve bien ici les notions très classiques de « régime transitoire » et « régime permanent ».

### 3.2 Complexité d'une séquence périodique

On dit qu'une séquence est simple lorsque chaque consommateur n'utilise la ressource qu'une seule fois par cycle. Dès qu'un consommateur utilise plus d'une fois une ressource dans cette séquence, on dit que la séquence est complexe.

On appelle conflit le fait qu'un consommateur apparaisse plusieurs fois dans une séquence. On dit que le conflit est multiple si le consommateur apparaît plus de deux fois dans la séquence.

Le degré "k" du conflit est le nombre de fois où le consommateur apparaît dans la séquence. Ainsi, le premier degré de conflit est le degré 2, par définition.

On définit le niveau de complexité C de la séquence comme suit :

Le niveau de complexité est égal au nombre de conflits (simples ou multiples). Ainsi une séquence simple a un niveau de complexité  $C = 0$ .

A titre d'exemple on a :  $S = \langle 123 \rangle, C = 0$        $S = \langle 1213 \rangle, k_1 = 2, C = 1$   
 $S = \langle 12123 \rangle, k_1 = 2, k_2 = 2, C = 2$        $S = \langle 121213 \rangle, k_1 = 3, k_2 = 2, C = 2$

### 3.3 Notion de séquenceur

Un séquenceur, dans le modèle, va être un sous-ensemble spécifiquement dédié à la gestion de la séquence. Il sera plus élégant et plus aisé, pour la création du modèle, de séparer l'élaboration du séquenceur en développant une technique spécifique. On peut alors avoir un RdP constitué de deux sous-ensembles :

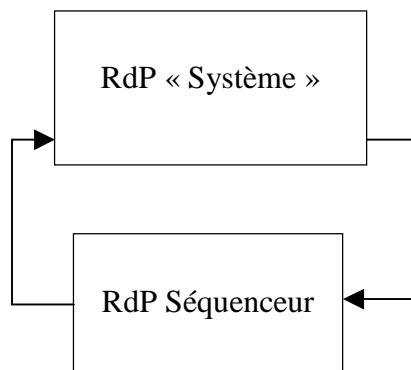


Figure 3.1

### 3.4 Première approche du séquençement par réseau de Petri

Le modèle suivant (figure 3.2) représente le partage d'une ressource entre "n" utilisateurs. Ainsi, chaque utilisateur potentiel peut, ou non disposer d'une ressource commune. (place R). Lorsque l'un de ces utilisateurs possède la ressource, il apparaît un jeton dans la place Ca correspondante (Consommateur Actif), la place Ci (Consommateur Inactif) correspondante étant alors vide. Ce RdP est bien entendu conflictuel, puisqu'il y a un conflit effectif entre tous les consommateurs dans la recherche de la ressource, sans protocole de partage.

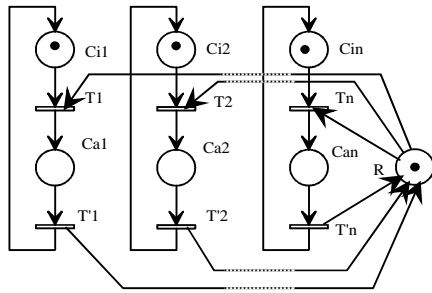


Figure 3.2

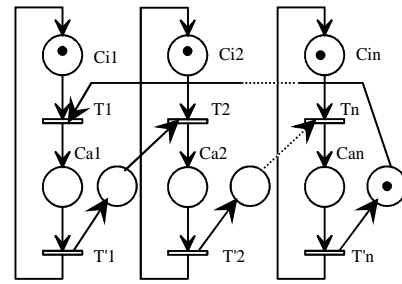


Figure 3.3

L'idée élémentaire de séquençement, à ce niveau de modélisation, consiste à établir un premier protocole de partage de ressource entre ces "n" utilisateurs. Nous parvenons très rapidement à obtenir le modèle de la figure 3.3 si nous voulons représenter la répartition périodique et équilibrée de la ressource sur les utilisateurs. Ainsi, le premier utilisateur de la ressource est l'utilisateur 1, puis l'utilisateur 2 lui succède. L'utilisateur "n" exploite la ressource avant de la restituer au premier et ainsi de suite. On a alors la séquence simple  $\langle 1\ 2\ 3\ \dots\ n \rangle$ .

Ces deux modèles sont analysables et l'outil algébrique classique est utilisé pour caractériser ces modèles (déterminer les invariants).

Ainsi pour le premier, d'après tout ce qui précède, on a :

- $N+1$  P-Invariants, signifiant que les  $N$  utilisateurs peuvent être soit actifs, soit inactifs et que la ressource est, soit libre, soit utilisée par un utilisateur.
- $N$  T-Invariants, signifiant que lorsqu'un utilisateur restitue la ressource, on est revenu à la situation initiale avant qu'elle soit récupérée par un autre utilisateur.

Pour le deuxième modèle, toujours suivant tout ce qui précède, on a :

- $N+1$  P-Invariants, signifiant que les  $N$  utilisateurs peuvent être soit actifs, soit inactifs et que la ressource est, soit libre, soit utilisée par un utilisateur.
- 1 seul T-Invariant, signifiant que la ressource a été restituée à son premier utilisateur après une séquence complète.

L'inconvénient majeur du modèle de la figure 3.3 est que l'on ne parvient pas aisément à extraire l'aspect séquençement du modèle global. Nous lui préférons le modèle suivant (figure 3) où c'est à nouveau le premier modèle (figure 3.2) qui est exploité. Sur ce premier modèle est alors greffée une boucle de séquençement (en gras) qui lève le conflit et qui donne le même comportement, vu de l'extérieur, que le modèle de la figure 3.3.

L'avantage de ce modèle est qu'il modélise la notion de jeton partagé entre tous les utilisateurs. Par ailleurs, la notion de séquenceur apparaît au travers de l'existence de ce jeton. La ressource est entièrement tributaire de la position du jeton partagé. Ce modèle est également analysable, et l'on obtient :

- $N+2$  P-Invariants, signifiant que les  $N$  utilisateurs peuvent être soit actifs, soit inactifs et que la ressource est, soit libre, soit utilisée par un utilisateur et que le jeton est capturé par un utilisateur.
- 1 seul T-Invariant, signifiant que la ressource a été restituée à son premier utilisateur après une séquence complète.

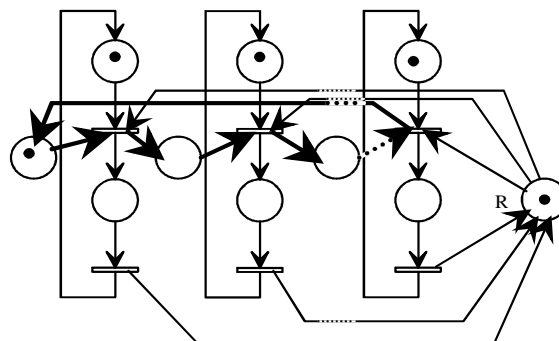


Figure 3.4

Contrairement au modèle de la figure 3.3, on peut alors avoir une vision du système où se distinguent de manière différenciée, d'une part la modélisation des consommateurs de ressource, sous la forme du modèle de la figure 3.2, d'autre part la modélisation du séquençement sous la forme d'un second RdP, dit "de séquençement" qui vient "commander" le premier.

Le précédent modèle prend alors la structure de la figure 3.5 où se dégage un sous-modèle relatif au séquençement pour trois consommateurs (utilisateurs représentés par des "macro-transitions"  $T_i$ , avec  $i \in \{1,2,3\}$ ).

Ce sous-modèle doit être vu comme un système d'entrée sortie (l'entrée du séquenceur est à droite sur la figure 3.5) pour lequel, le vecteur marquage de sortie est recopié systématiquement sur l'entrée tout au long du cycle de la séquence par le tir des transitions  $T_i$ .

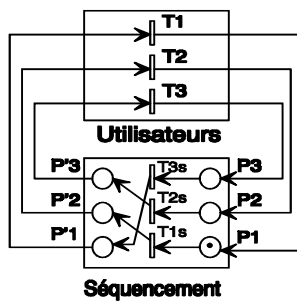


Figure 3.5

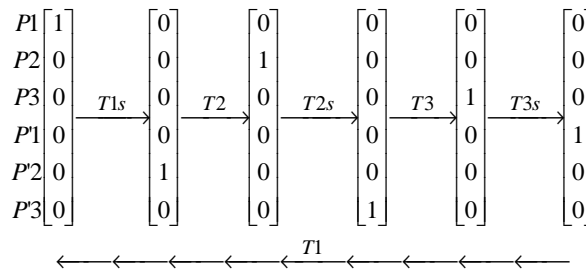


Diagramme 3

Ainsi, l'observation de l'évolution du marquage des trois places d'entrée évoque à lui seul la séquence modélisée. Le marquage des places de sortie ne fait qu'anticiper le marquage des places d'entrée à travers le modèle "utilisateurs". La séquence <123> suggérée figures 3.3 et 3.4 peut alors se traduire sous la forme de l'évolution du vecteur de marquage des places ( $P_1, P_2, P_3$ ) (ou  $P'_1, P'_2, P'_3$  avec une simple avance) :

$$M = (1,0,0) \rightarrow (0,1,0) \rightarrow (0,0,1)$$

On peut alors noter que le vecteur de variation de marquage prend les valeurs suivantes :

$$\Delta M = (-1,1,0) \rightarrow (0,-1,1) \rightarrow (1,0,-1)$$

Pour ce premier exemple de séquençement simple, ainsi que pour toute séquence simple, la matrice d'incidence du RdP de séquençement est déterminée aisément.

Soient trois consommateurs utilisant tour à tour la ressource selon la séquence simple <123>, on peut observer l'évolution de marquage suivant sur les places  $P_1, P_2, P_3, P'_1, P'_2, P'_3$  (Diagramme 3).

Cette évolution de marquage nous permet de déterminer la matrice d'incidence  $M_1$  du réseau de Petri de séquençement :

$$\begin{array}{c}
 T_{1s} \quad T_{2s} \quad T_{3s} \\
 P_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 P_2 \\
 P_3 \\
 P'_1 \\
 P'_2 \\
 P'_3
 \end{array}$$

Matrice M1

$$\begin{array}{c}
 T_{1s} \quad T_{2s} \quad T_{3s} \\
 P_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 P_2 \\
 P_3
 \end{array}$$

Matrice M2

D'après ce qui précède, on constate donc que les places  $P_i$  et  $P'_i$  peuvent être fusionnées afin de parvenir à une matrice d'incidence plus compacte, plus exploitable par la suite et qui peut se déterminer immédiatement en fonction des vecteurs  $\Delta M$ .

La matrice rectangulaire  $M_1$  peut donc être ramenée à une matrice carrée en fusionnant les places  $P_i$  et  $P'_i$ . On obtient alors la matrice  $M_2$ , où chaque colonne est en fait le vecteur  $\Delta M$  de variation de marquage entre deux marquages consécutifs dans la séquence.

### 3.5 Construction de la matrice d'incidence du RdP de séquençement

#### 3.5.1 Pour une séquence simple de longueur L

Le cas des séquences simples est facile à traiter. On peut d'ailleurs se référer à l'exemple précédent de trois consommateurs pour illustrer le propos :

Soient les "L" vecteurs de marquage des places du RdP de séquençement (en ayant fusionné les places  $P_i$  et  $P'_i$ , conformément à la proposition précédente).

On peut nommer  $M_i = (m_{1i}, m_{2i}, \dots, m_{Li})$  l'un de ces vecteurs et construire le vecteur de variation de marquage conséquent au passage des marquages  $M_i$  à  $M_{i+1}$ :

$$\Delta M_i = (\delta_{m1i}, \delta_{m2i}, \dots, \delta_{mLi}) = M_{i+1} - M_i$$

On relève alors que, parmi les  $\delta_{mij}$  : Il existe un et un seul  $\delta_{mij} = 1$  et un seul  $\delta_{mij} = -1$ , les autres  $\delta_{mij}$  étant nuls.

On peut ensuite construire la matrice :  $W = \begin{pmatrix} \delta_{m11} & \delta_{m12} & \dots & \delta_{m1L} \\ \delta_{m21} & & & : \\ & & & : \\ \delta_{mL1} & & & \delta_{mLL} \end{pmatrix}$

W est alors la matrice d'incidence  $W_s$  (matrice carrée) du RdP de séquençement aux places  $P_i$  et  $P'_i$  fusionnées.

#### 3.5.2 Pour une séquence complexe

##### Dimensionnement de la matrice d'incidence $W_s$

Notre objectif est de réaliser un modèle optimal. Ainsi, nous considérons que l'on doit parvenir à un modèle où le passage d'un consommateur au suivant peut se faire par la validation d'une seule transition. Il apparaît donc clairement que la modélisation d'une séquence de longueur L se modélisera alors à l'aide de L transitions et qu'il ne sera pas possible de mieux faire.

Par définition même du T-invariant, on doit parvenir, de manière optimale, à élaborer un réseau de Petri à un seul T-invariant étant donné que la séquence de réinitialisation de notre réseau est justement la séquence à modéliser.

Par ailleurs, la modélisation d'une séquence simple se fera par un réseau de Petri de complexité nulle. Le jeton représentant le partage de ressource se situera une fois et une seule dans chaque place représentant les consommateurs au cours de la séquence. Le réseau aura ainsi un seul P-invariant. Chaque conflit sera ensuite géré par un jeton circulant dans une boucle, engendrant ainsi un P-invariant. Ceci va nous permettre d'écrire le nombre total de P-invariants en fonction de la complexité.

Les remarques précédentes nous permettent d'écrire :

Le nombre  $T_s$  de transitions de la matrice est égal à la longueur L de la séquence complexe.

Le nombre T de T-invariants du RdP de séquençement est égal à 1.

Le nombre P de P-invariants du RdP de séquençement est égal à C+1.

Sachant que l'on a, pour tout réseau de Petri de ce type :  $P_s = P - T + T_s$

Le nombre  $P_s$  de places du RdP de séquençement s'exprime :

$$P_s = (C+1) - (1) + L = C + L$$

Pour récapituler, on a donc:  $T_s = L$   $P_s = C + L$

##### Construction de la matrice d'incidence $W_s$

Chaque changement de consommateur se traduit par le franchissement d'une transition spécifique (ainsi une séquence de longueur L nécessite exactement L transitions).

Les places du RdP de séquençement sont de deux types:



$$M_{cj} = \left( \overset{\leftarrow n \text{ nombres } 0}{0, 0, \dots, 0}, \dots, \overset{\leftarrow k \text{ nombres } 1}{0, \dots, 1, 1, 1, 1, \dots, 0} \right)$$

Les "k" places concernées par cet invariant sont en exclusion mutuelle. Seulement une de ces places devra comporter un jeton. Les "j" jetons (un par "invariant Mcj") seront à positionner en fonction de l'initialisation souhaitée de la séquence. Une mauvaise distribution de ces jetons se traduit par l'apparition d'un phénomène transitoire avant de parvenir à l'évolution cyclique attendue (régime permanent).

### 3.5.2 Exemple

Soit à modéliser la séquence complexe <12123>. On isole la représentation de la séquence de la représentation des consommateurs.

On trouve, pour le séquenceur :

$$C = 2 ; T = L = 5 ; P = 5 + 2 = 7 \quad T = 1 ; P = 3$$

on établit en suivant le principe précédent la matrice d'incidence et le RdP de la figure 3.6.

$$W_s = \begin{matrix} & T_{s1} & T_{s2} & T_{s3} & T_{s4} & T_{s5} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & P1 \\ & P2 \\ & P3 \\ & P4 \\ & P5 \\ & P6 \\ & P7 \end{matrix}$$

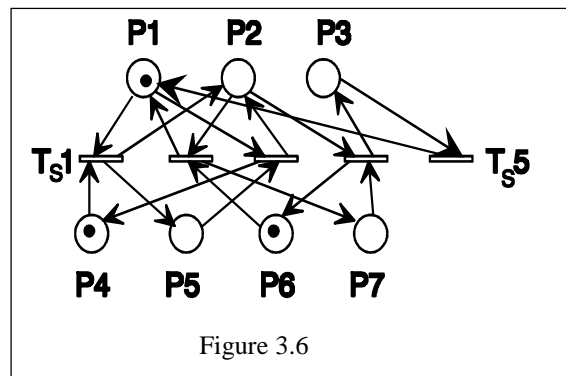


Figure 3.6

Afin de rendre conforme le modèle du séquenceur avec la définition initiale, on est amené à dédoubler les places externes, formant ainsi deux ensembles de places : 3 Places d'entrées P1, P2, P3, 3 Places de sorties P'1, P'2, P'3. On obtient alors le réseau de Petri de séquençage de la figure 3.7. Le marquage initial a été choisi selon les critères précédemment définis. Ce marquage permet de simuler la séquence proposée <12123> en commençant par "2".

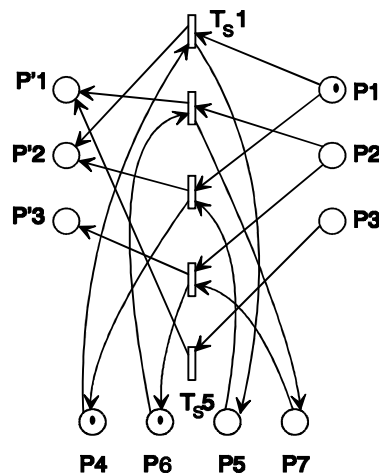


Figure 3.7

## IV LES SYSTEMES DE PRODUCTION

### 4.1 Traçabilité, modélisation de suivi d'objets

Notre étude a pour l'instant porté uniquement sur l'étude du séquençage et donc de l'aiguillage d'une ressource dans le modèle. Nous nous intéressons à présent à un autre volet de la représentation d'un système de production qui est le suivi d'objet. Jusqu'à présent, l'objet n'avait pas d'identité, ce qui interdit son suivi spécifique.

Pour assurer la traçabilité, nous sommes donc amenés à colorer les jetons représentant les objets en optant ici pour un repérage par code binaire.

Afin d'adapter au mieux le modèle au problème posé, nous proposons une définition originale de couleurs de jetons, propres à représenter par exemple le code barre courant apposé sur divers objets. Il s'agit donc d'affecter à un jeton un code binaire sur le nombre de bits nécessaire au codage. On définit alors un étiquetage (*coloration*) des jetons, un protocole de franchissement des transitions par la lecture de l'attribut au niveau de la transition et une transformation éventuelle de la couleur (ici un code binaire) par lecture de l'attribut au niveau de l'arc de sortie.

Afin d'étayer le raisonnement, nous allons considérer un système de production pour lequel un repérage de l'objet par un mot de deux bits est nécessaire. Cela signifie que l'objet peut prendre quatre identités différentes (entre 00 et 11) selon sa situation dans le système. Bien entendu, le jeton peut changer d'identité au fur et à mesure des traitements, des modifications que subit l'objet qu'il représente.

### Etiquetage : Coloration d'un jeton

La représentation proposée de l'étiquetage nécessite la définition d'une coloration de jetons de RdP. L'état de l'objet est étiqueté par un mot de deux bits **XX**. Chacun de ces bits est représentatif de l'état de la pièce à chacune des étapes de la fabrication.

### Franchissement de Transition : Aiguillage des jetons

Chaque transition laisse passer un type d'objet selon son étiquetage. Chaque transition est étiquetée selon le type de jeton qui doit la franchir. Ainsi, on oriente les objets dans la structure selon leur état (usinage, retouche, défektivité, type de pièce...).

Par exemple, un jeton dont le code binaire commence par un 1 pourra franchir toute transition marquée « 1X ». A l'inverse, cette transition ne sera pas franchissable par les jetons dont le code commence par un « 0 » (figure 4.1).

### Changement de couleur d'un jeton : changement d'état d'un objet

Selon l'aiguillage, l'étiquetage des pièces peut être modifié en fonction des indications portées par les arcs (figure 4.2). Un arc marqué 0X transforme le premier bit en 0 sans intervenir sur l'autre qui est donc inchangé.

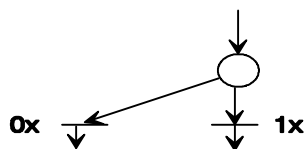


Figure 4.1

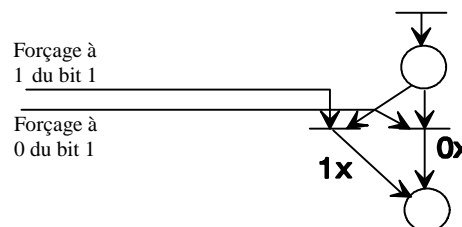


Figure 4.2

Le modèle qui va être développé maintenant pourra être intégré dans un modèle global de site de production.

### Construction d'une cellule de base

La figure 4.3 représente une cellule élémentaire de chaîne de fabrication. On y trouve un ensemble de places représentant les sites occupés par les pièces. En sortie, on garde la mémoire de l'état d'usage de la pièce.

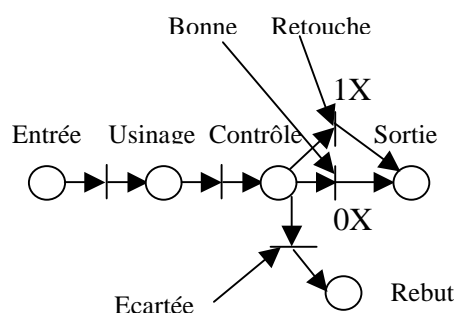


Figure 4.3

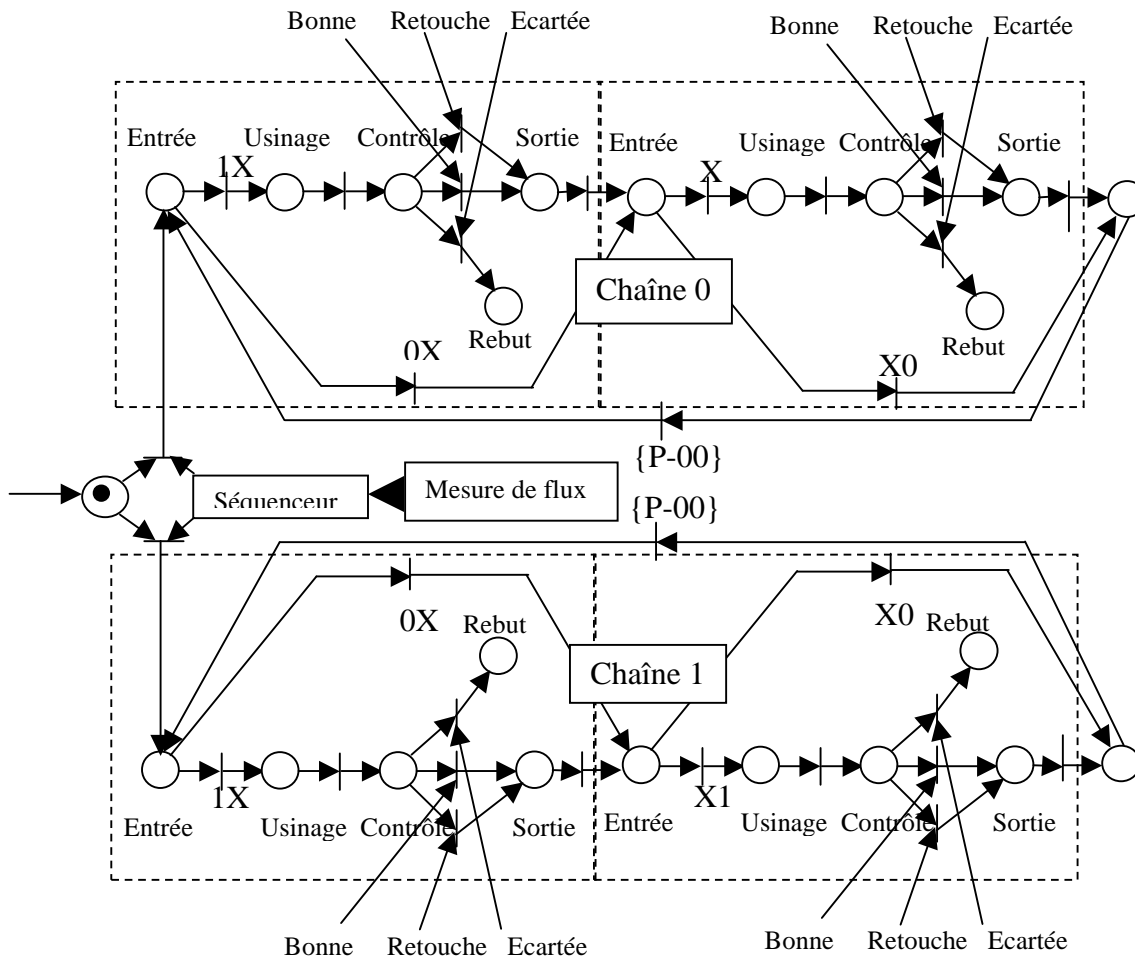
Cette cellule évoque le traitement d'une pièce comprenant son contrôle et son aiguillage en fonction du résultat d'un test décrétant qu'elle est, soit bonne (0,X), soit à retoucher (1,X), soit à écarter.

#### 4.2 Modélisation générale d'un site de production par RDP, suivi d'objet et séquençement

Nous considérons à présent un site de production à deux étages (nous avons choisi délibérément cette limitation du nombre afin d'alléger au plus la taille du modèle pour une meilleure lecture). Nous allons de plus proposer qu'il y ait deux chaînes de fabrication concurrentes (chaîne 0 et 1) dont la charge sera gérée par un séquenceur. Ce séquenceur binaire pourra évoluer dynamiquement selon l'état des flux sur chacune des chaînes.

Par ailleurs, le suivi des objets sera considéré (coloration binaire des jetons) afin d'identifier sur chaque site, l'état de celui-ci (Pièce Bonne, à Retoucher). Ceci nous conduit au modèle complet de la figure 4.4.

Dans cette architecture, les pièces arrivées sur la place P1 sont orientées par le séquenceur vers l'une des deux chaînes. Elles sont affectées d'un code binaire <11> qui signifie qu'elles n'ont pas encore été traitées. Elles sont prises tour à tour en charge sur l'étage 1, puis sur le deux. Si le traitement a abouti, le bit correspondant est mis à 0. Il est maintenu à 1 si la pièce a besoin d'une retouche. Toute pièce ayant subi positivement un traitement sera dérivée de l'étage qui est chargé de l'effectuer.



Toute pièce qui parvient en sortie du deuxième étage, différente de « 00 » est retournée au départ pour une ou deux retouches.

#### 4.3 Modélisation de séquenceurs binaires

Les deux séquenceurs suivants produisent les séquences S1=<01> et S2=<001>. Il peuvent être intégrés dans le modèle précédent.

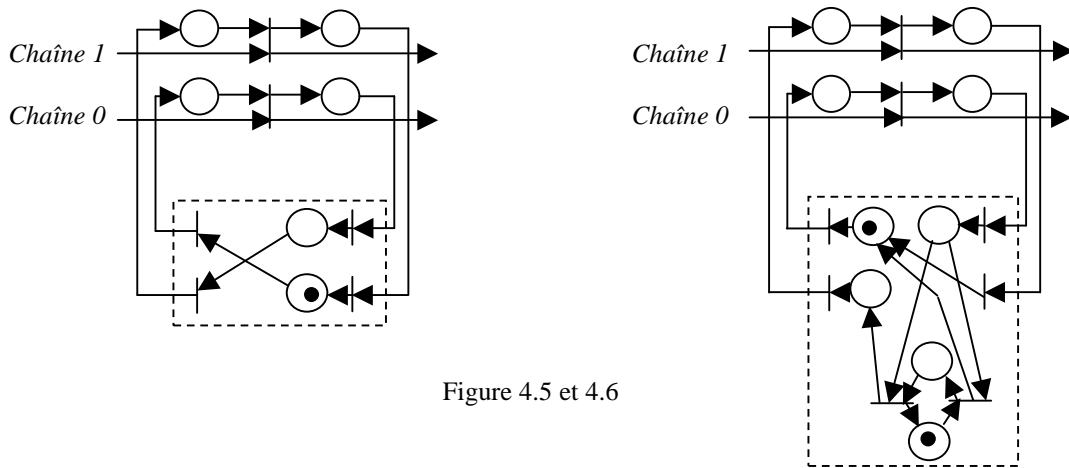


Figure 4.5 et 4.6

#### 4.4 Surveillance et contrôle de flux

On peut surveiller et contrôler un flux de jetons par diverses méthodes, en RdP généralisés ou colorés. Il s'agit, par exemple pour la surveillance, de comptabiliser les jetons circulant dans une branche de RdP et de détecter un seuil du nombre de jetons. Le contrôle du flux peut être réalisé par une branche de retour entre la sortie et l'entrée bloquant l'entrée tant qu'un certain nombre de jetons séjournent encore sur le site considéré.

##### 4.4.1 Contrôle de flux

Le principe en est très simple. Il s'agit de limiter le nombre de jetons sur un certain nombre de places. Il existe un P-invariant tel que :  $M(P2) + M(P3) + M(P4) + M(Pf) = Cste$

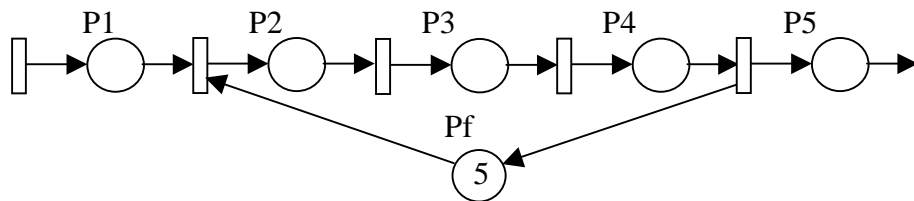


Figure 4.7

Dans cette boucle, le nombre de jetons est constant. Si le marquage initial est celui qui est indiqué sur la figure, alors le nombre de jetons introduits dans l'ensemble P1,P2,P3,P4 ne dépassera jamais 5, quel que soit le flux d'entrée.

On pourra généraliser cette méthode de contrôle sur des problèmes plus complexes où il s'agit de limiter le nombre total d'objets dans deux branches parallèles (figure 4.8). Ainsi, dans ce exemple, le nombre d'objets comptabilisé globalement dans les deux branches du RdP n'excédera jamais 5.

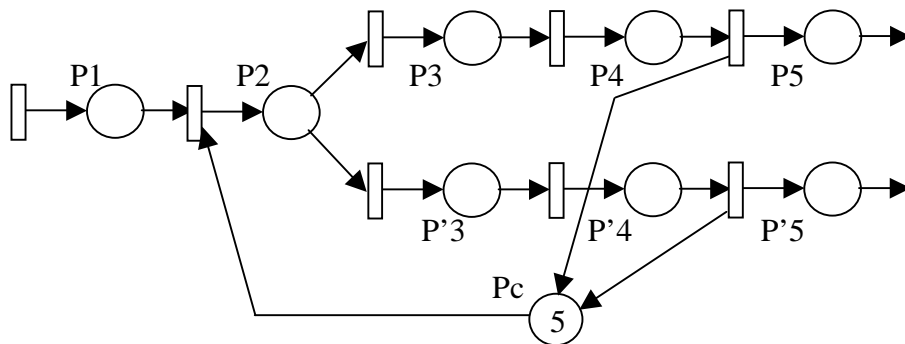


Figure 4.8

Ainsi, on a :  $M(P2) + M(P3) + M(P4) + M(P'3) + M(P'4) = Cste = 5$

A titre d'exemple, on peut également obtenir des contrôles de flux « enchevêtrés » (figure 4.9) :

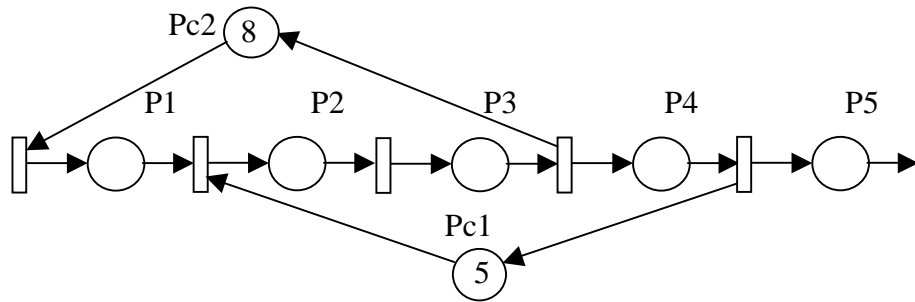


Figure 4.9

Ce RdP possède deux P-invariants :

$$M(P1) + M(P2) + M(P3) + M(Pf2) = 8$$

$$M(P2) + M(P3) + M(P4) + M(Pf1) = 5$$

Ainsi, on a une double limitation des quantités de jetons : Au plus, 8 jetons sur les places P1, P2, P3 et au plus 5 jetons sur les places P2, P3, P4.

#### 4.4.2 Surveillance de flux

Il s'agit de comptabiliser le nombre de jetons dans une branche de RdP. Le RdP de la figure 4.10 est tel que le nombre de jetons dans la place Ps est égal au nombre total de jetons dans l'ensemble des places P2, P3, P4. Nous n'avons pas ici de contrôle de flux.

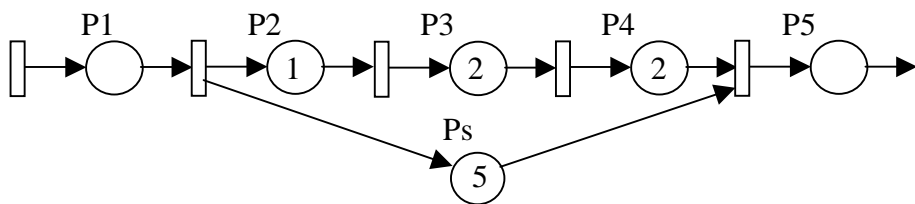


Figure 4.10

Comme précédemment, le propos peut être généralisé pour des modèles plus complexes (figure 4.11 et 4.12) où sont comptabilisés les nombres d'objets dans certains sous-ensembles du réseau si le marquage initial est nul.

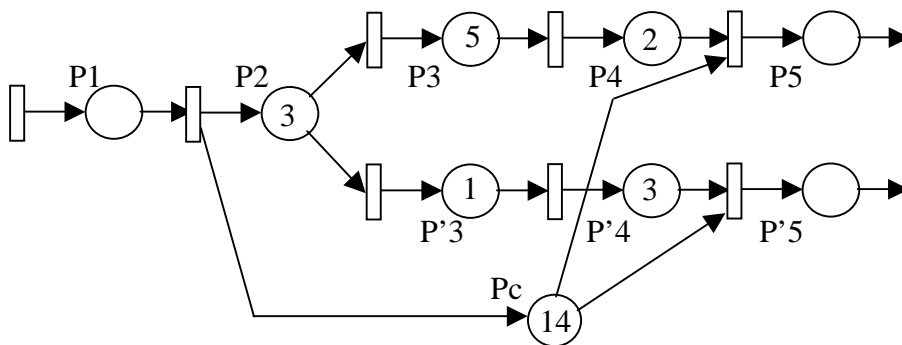


Figure 4.11

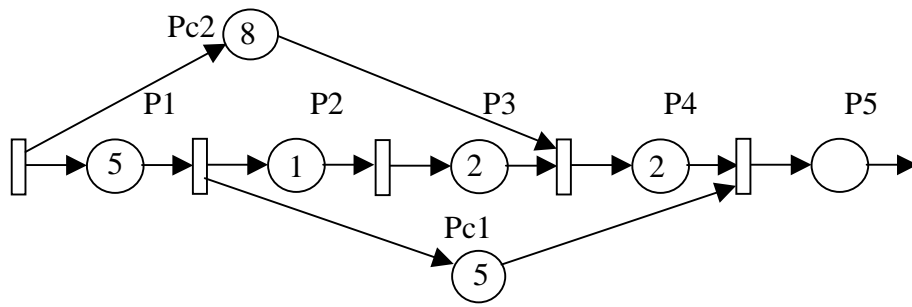


Figure 4.12