

Intervalles et propagation de contraintes • applications en automatique et en robotique

Luc Jaulin, Xavier Baguenard, Massa Dao, Pau Herrero

LISA-Angers
séminaire du thème SPC

Les méthodes intervalles permettent la résolution numérique et garantie de problèmes non-linéaires comme par exemple

- l'optimisation globale de critères non convexes,
- la résolution de systèmes d'égalités et/ou inégalités,
- intégration d'équations différentielles.
- preuve de théorème, . . .

Elles ont été utilisées en automatique et en robotique

- estimation de paramètres et d'états,
- path planning,
- commande robuste, . . .

Calcul par intervalles

Si $\diamond \in \{+, -, \times, /, \max, \min\}$

$$[x] \diamond [y] \triangleq [\{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}].$$

Par exemple,

$$[x^-, x^+] + [y^-, y^+] = [x^- + y^-, x^+ + y^+]$$

$$[x^-, x^+] \cdot [y^-, y^+] = [\min(x^-y^-, x^+y^-, x^-y^+, x^+y^+), \max(x^-y^-, x^+y^-, x^-y^+, x^+y^+)]$$

$$\max([x^-, x^+], [y^-, y^+]) = [\max(x^-, y^-), \max(x^+, y^+)]$$

Si $f \in \{\cos, \sin, \text{sqr}, \text{sqrt}, \log, \exp, \dots\}$

$$f([x]) \triangleq [\{f(x) \mid x \in [x]\}].$$

Par exemple,

$$\sin([0, \pi]) = [0, 1]$$

$$\text{sqr}([-1, 3]) = [-1, 3]^2 = [0, 9]$$

$$\text{abs}([-7, 1]) = [0, 7]$$

$$\text{sqrt}([-10, 4]) = \sqrt{[-10, 4]} = [0, 2]$$

$$\log([-2, -1]) = \emptyset$$

Projection de contraintes

Soient 3 variables x, y, z telles que

$$x \in [1, 5]$$

$$y \in [2, 4]$$

$$z \in [6, 10]$$

$$z = x + y$$

Les valeurs 1 pour x et 10 pour y sont dites inconsistantes.

Projeter une contrainte (ici, $z = x + y$), c'est calculer les plus intervalles qui ne contiennent que des valeurs consistantes.

Méthode de projection

$$\begin{aligned}z = x + y \Rightarrow z \in [6, 10] \cap ([1, 5] + [2, 4]) \\ = [6, 10] \cap [3, 9] = [6, 9]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x = z - y \Rightarrow x \in [1, 5] \cap ([6, 10] - [2, 4]) \\ = [1, 5] \cap [2, 8] = [2, 5]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = z - x \Rightarrow y \in [2, 4] \cap ([6, 10] - [1, 5]) \\ = [2, 4] \cap ([1, 9] - [1, 5]) = [2, 4]\end{aligned}$$

Propagation de contraintes

Soient les trois contraintes suivantes

$$(C_1) : y = x^2$$

$$(C_2) : xy = 1$$

$$(C_3) : y = -2x + 1$$

A chaque variable on effectue le domaine $] - \infty, \infty[$.

Une propagation de contrainte consiste à projeter les contraintes jusqu'au blocage.

$$(C_1) \Rightarrow y \in] - \infty, \infty[^2 = [0, \infty[$$

$$(C_2) \Rightarrow x \in 1/[0, \infty[= [0, \infty[$$

$$(C_3) \Rightarrow y \in [0, \infty[\cap ((-2) \cdot [0, \infty[+ 1) \\ = [0, \infty[\cap (] - \infty, 1]) = [0, 1]$$

$$x \in [0, \infty[\cap (-[0, 1]/2 + 1/2) \\ = [0, 1/2]$$

$$(C_1) \Rightarrow y \in [0, 1] \cap [0, 1/2]^2 = [0, 1/4]$$

$$(C_2) \Rightarrow x \in [0, 1/2] \cap 1/[0, 1/4] = \emptyset$$

$$y \in [0, 1/4] \cap 1/\emptyset = \emptyset$$

Décomposition en contraintes primitives

Pour les contraintes plus complexes, il nous faut effectuer une décomposition. Par exemple,

$$x + \sin(y) - xz \leq 0,$$

$$x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], z \in [-1, 1]$$

se décompose en

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \sin(y) \\ b = x + a \\ c = xz \\ b - c = d \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} x \in [-1, 1] \quad a \in] - \infty, \infty[\\ y \in [-1, 1] \quad b \in] - \infty, \infty[\\ z \in [-1, 1] \quad c \in] - \infty, \infty[\\ d \in] - \infty, 0] \end{array}$$

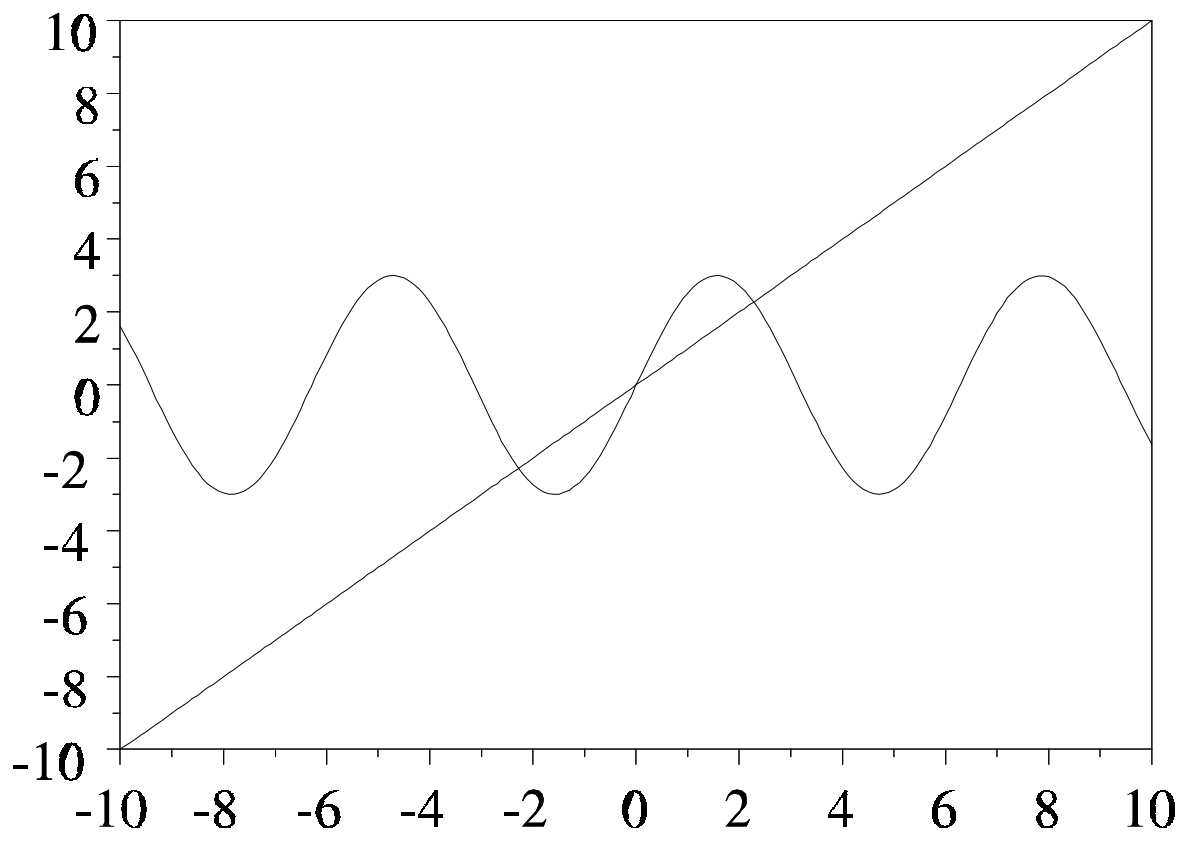
Résolution d'équations nonlinéaires

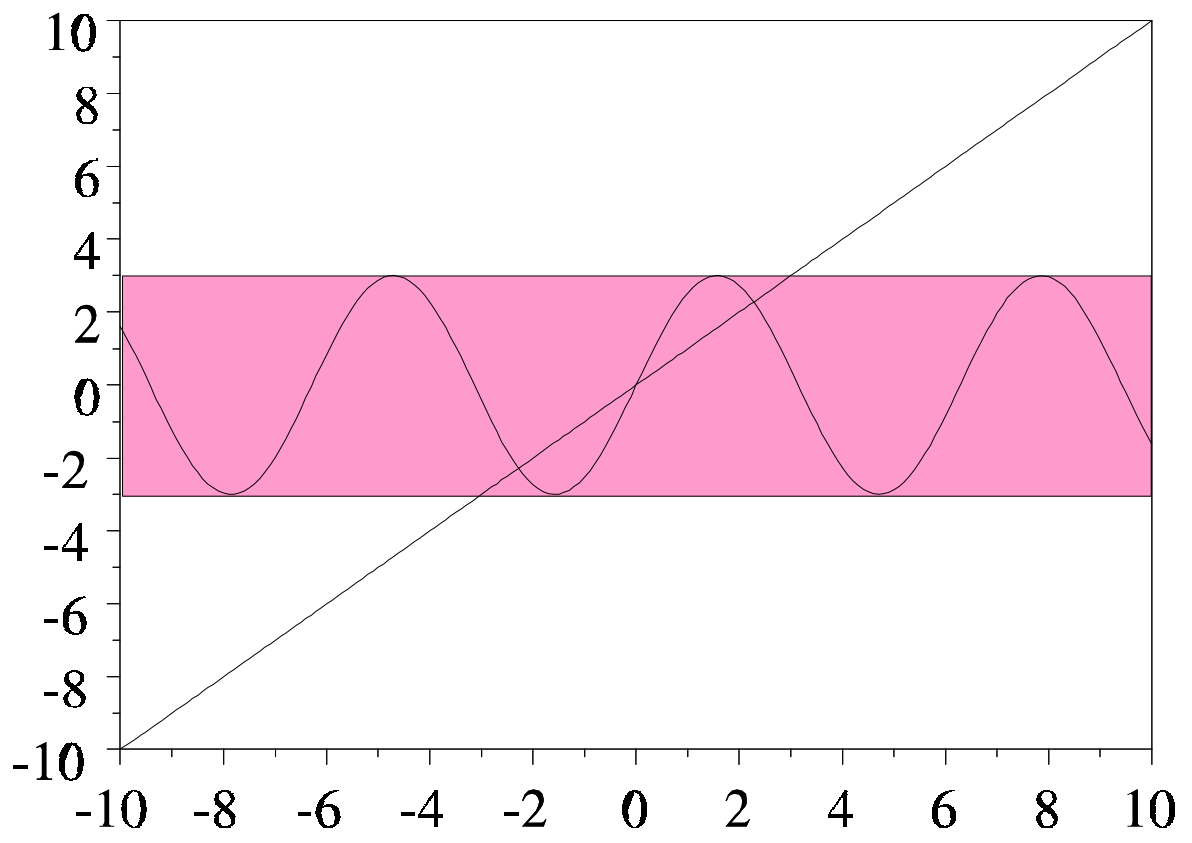
Cherchons par exemple à résoudre

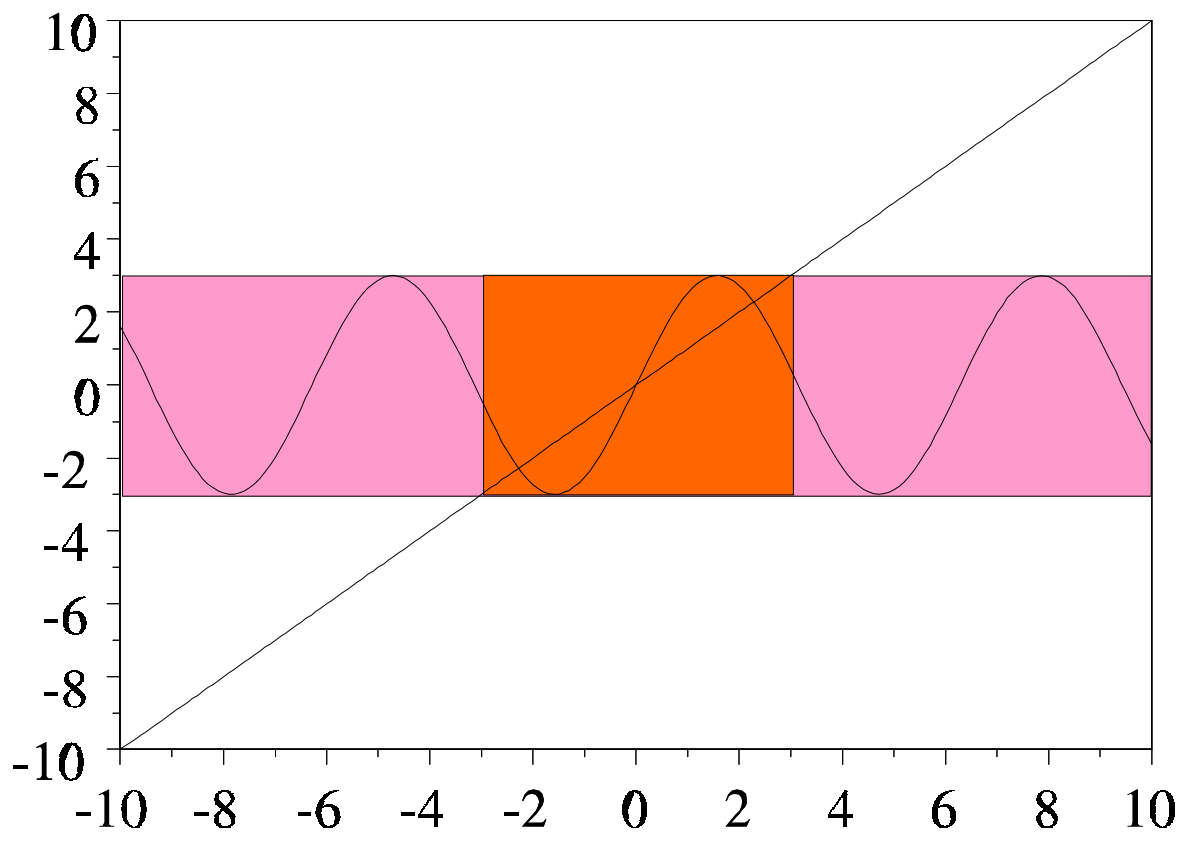
$$3 \sin(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

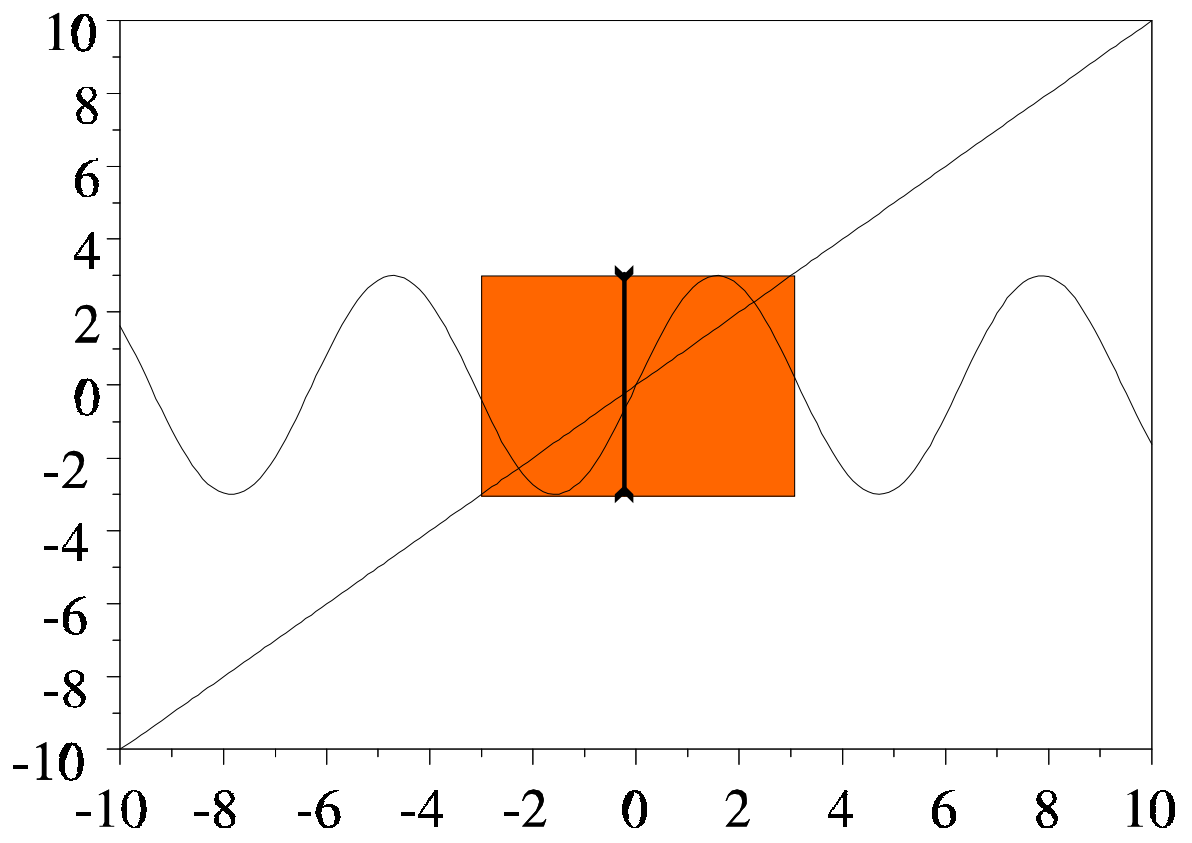
Cette équation se décompose en

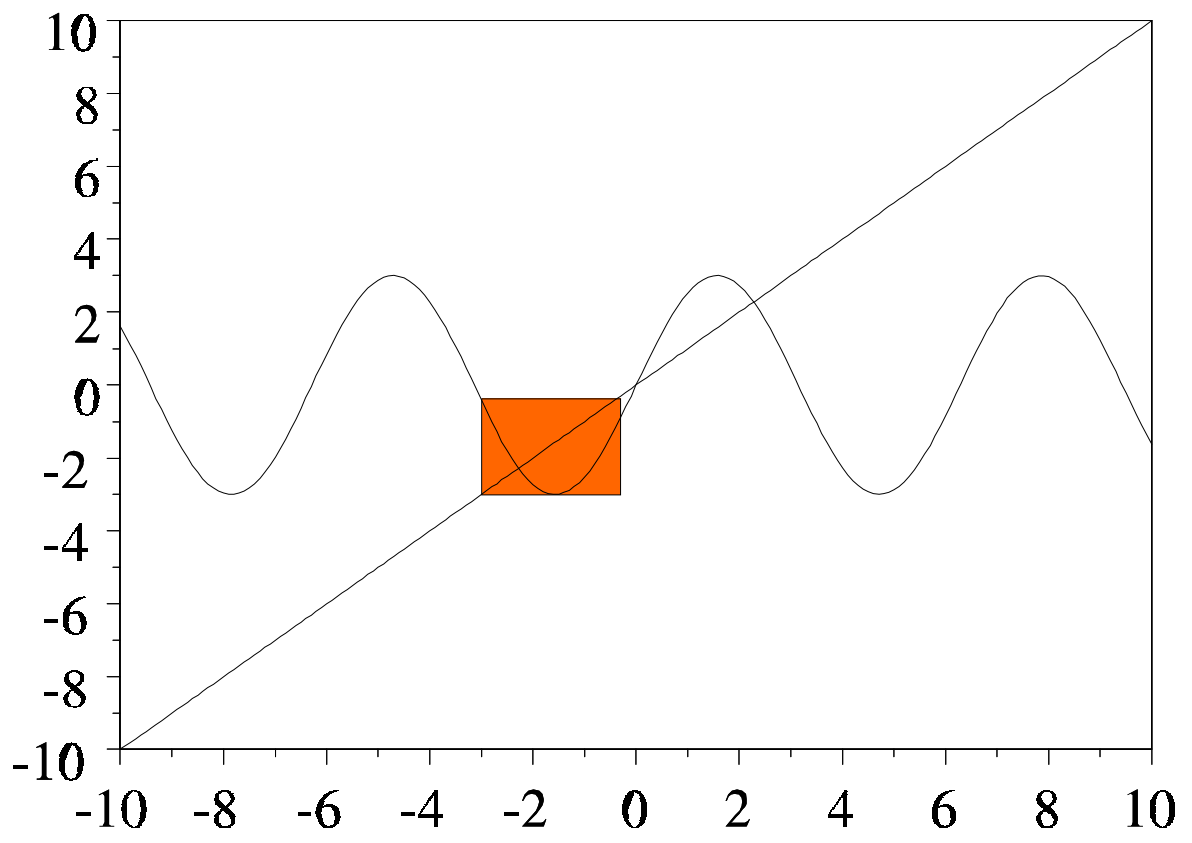
$$\begin{cases} y = 3 \sin(x) \\ y = x \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

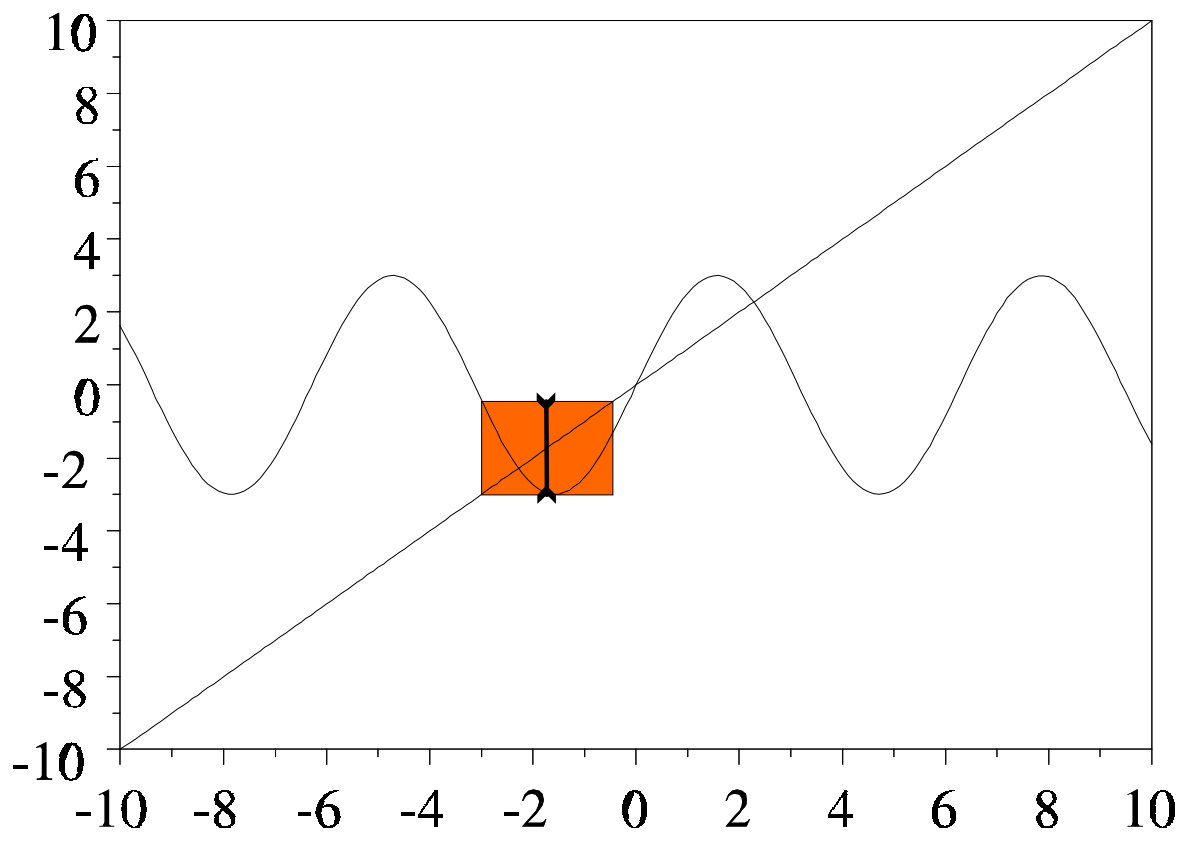


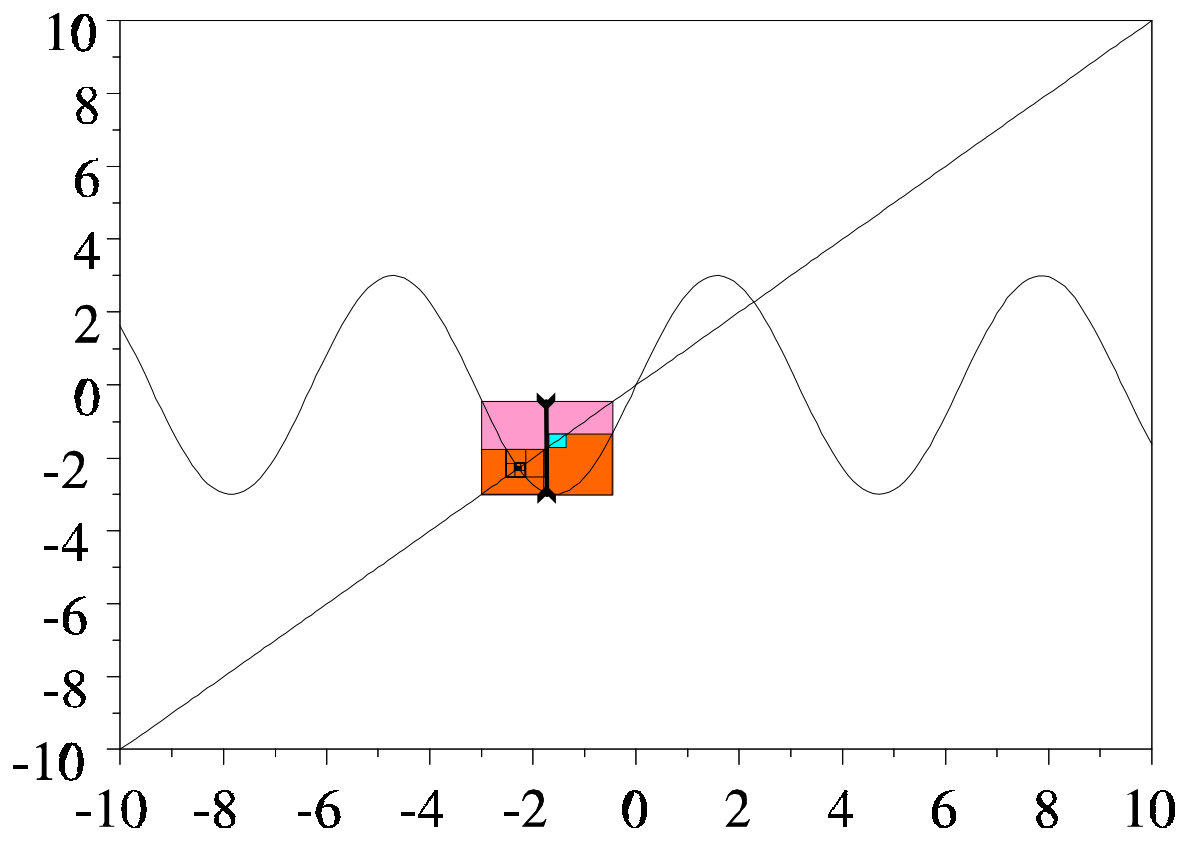












Objectifs

- 1) Développer des solveurs pour les automaticiens et les roboticiens,
- 2) Résoudre des problèmes reconnus comme durs par ces derniers.

Présentation du solveur Chloé

Présentation du solveur Proj2D

- 1) Exemple de la résolution de $3 \sin x = x$;
- 2) Exemple d'un problème d'estimation à erreurs bornées.

Localisation d'un satellite

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = x_1(k) + 0.5 x_3(k) + w_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + 0.5 x_4(k) + w_2(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) - 0.5 \frac{x_1(k)}{\sqrt{x_1^2(k)+x_2^2(k)}^3} + w_3(k) \\ x_4(k+1) = x_4(k) - 0.5 \frac{x_2(k)}{\sqrt{x_1^2(k)+x_2^2(k)}^3} + w_4(k) \\ y_1(k) = x_2(k)/x_1(k) \\ y_2(k) = x_1(k)x_3(k) + x_2(k)x_4(k) \\ y_3(k) = x_1^2(k) + x_2^2(k) \end{array} \right.$$

Fichier en entrée dans le solveur (Realpaver)

```
x1_0 in [-oo,oo],  
x2_0 in [-oo,oo],  
x3_0 in [-oo,oo],  
x4_0 in [-oo,oo],  
w1_0 in [-0.01,0.01],  
w2_0 in [-0.01,0.01],  
w3_0 in [-0.01,0.01],  
w4_0 in [-0.01,0.01],  
y1_0 in [0.107,0.307],  
y2_0 in [-0.710,-0.510],  
y3_0 in [16.117,16.317],  
...
```

Constraints

```
x1_1=x1_0+0.5*x3_0+ w1_0,  
x2_1=x2_0+0.5*x4_0+ w2_0,  
x3_1=x3_0-0.5*x1_0/  
      (sqrt(x1_0^2+x2_0^2))^3+w3_0,  
...
```

Fichier en sortie du solveur

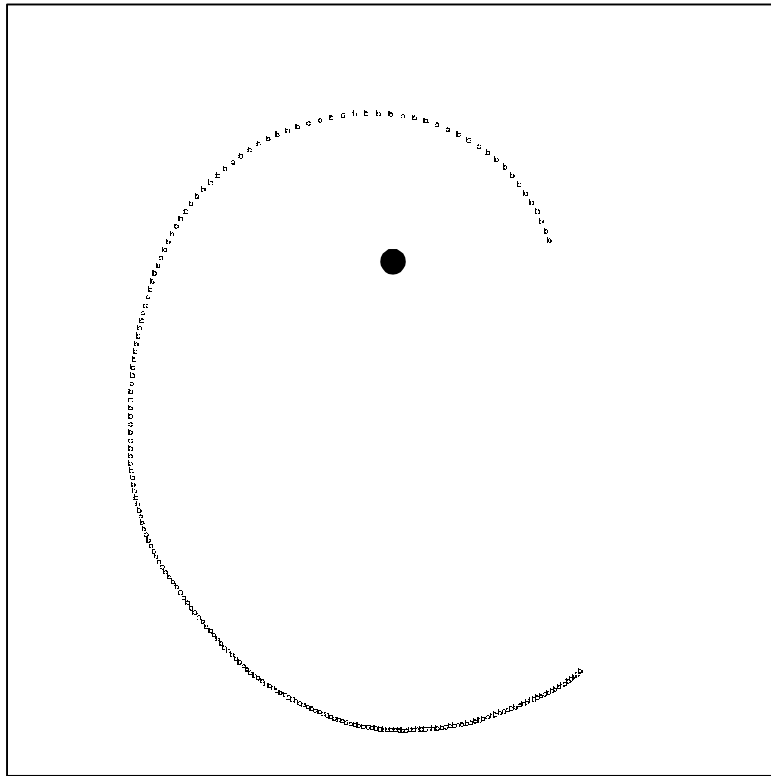
x1_0 in [3.89 , 4.01]
x2_0 in [0.41 , 0.95]
x3_0 in [-0.41 , -0.14]
x4_0 in [0.20 , 0.93]
y1_0 in [0.10 , 0.25]
y2_0 in [-0.71 , -0.51]
y3_0 in [16.11 , 16.31]

...

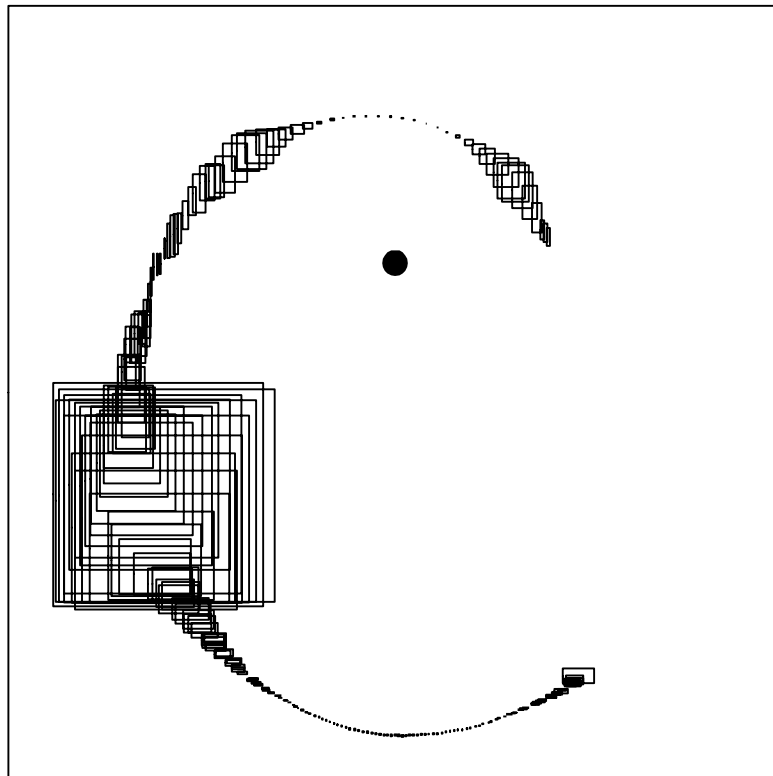
x1_200 in [4.38 , 4.88]
x2_200 in [-10.84 , -10.61]
x3_200 in [-0.14 , 0.54]
x4_200 in [-0.00 , 0.32]
y1_200 in [-2.42 , -2.22]
y2_200 in [-0.92 , -0.72]
y3_200 in [136.61 , 136.81]

...

Elapsed time: 810 ms



Positions du satellite générées par simulation
pour k allant de 0 à 200



Pavés générés par Realpaver

Ce problème est un CSP (constraint satisfaction problem) contenant 8815 variables et 5607 contraintes.

Path planning

