

Synthèse d'observateurs intervalles pour des systèmes LPV

Rihab El Houda THABET¹ Tarek Raïssi² Christophe
Combastel³ Ali Zolghadri¹

¹IMS, Université de Bordeaux 1, France

²CNAM, Paris, France

³ECS-Lab, ENSEA, Cergy, France

GT MEA'13



- 1 Introduction
- 2 Problématique
- 3 Observateur intervalle
 - Changement de variables variant dans le temps
 - Cas où le vecteur de scheduling est non mesuré (borné)
 - Cas où le vecteur de scheduling est mesuré
- 4 Exemple Numérique
- 5 Conclusion

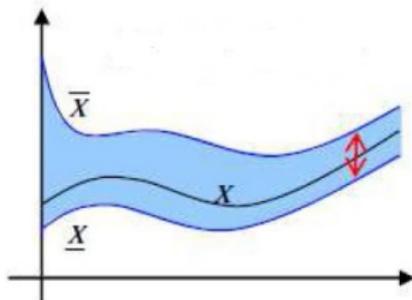
- Projet ANR MAGIC–SPS (Méthodes et Algorithmes Garantis pour le Contrôle d'Intégrité et la Surveillance Préventive des Systèmes)
- Le développement des algorithmes garantis \Rightarrow Surveillance des systèmes continus à incertitudes bornées
- Le problème d'estimation d'état
- Des bornes sur les états estimés pour les systèmes NL en présence d'incertitudes

Introduction

- Les observateurs par intervalle représentent une alternative

$$\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0) \Rightarrow \underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \forall t \geq 0 \quad (1)$$

$$x^c = \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2}, x^r = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2}$$



Introduction

- Les techniques développées (O. Bernard, J.L. Gouzé, 2004 ; L. Jaulin, 2002) pour le cas linéaire (F. Mazenc, O. Bernard, 2010 ; F. Mazenc, O. Bernard, 2011 ; C. Combastel, 2013) et le non-linéaire (M. Moisan, O. Bernard, J.-L. Gouzé, 2009 ; T. Raïssi, D. Efimov, A. Zolghadri, 2012 ; T. Raïssi, N. Ramdani, Y. Candau, 2006)
- Observateur Intervalle pour des systèmes partiellement linéaires :

Soit un système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi \\ y = Cx \end{cases} \quad (2)$$

où φ est bornée et la paire (A, C) est détectable.

- Une structure d'observateur intervalle :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{\varphi} + L(y - C\underline{x}) \\ \dot{\overline{x}} = A\overline{x} + \overline{\varphi} + L(y - C\overline{x}) \end{cases} \quad (3)$$

- Transformation de systèmes NL en systèmes LPV (Linéaires à Paramètres variables) qui est une classe intermédiaire entre les SL et les SNL)
- Il existe différentes techniques de transformation de SNL en SLPV ($\dot{x} = f(x, u) \Rightarrow \dot{x} = A(\theta(t))x + B(\theta(t))u$) :
 - Linéarisation Jacobienne (R. Tòth, 2010 ; A. Marcos, G. J. Balas, 2004)
 - Transformation d'état (J. S. Shamma, J. R. Cloutier, 1993)
 - Fonction de substitution (J. Y. Shin, 2007)
 - Approche polytopique (A. M. Nagy Kiss, 2010)(exacte + garantie d'inclusion des trajectoires du modèle NL)

Introduction

- Observateurs intervalles pour les systèmes LPV
- La synthèse des observateurs est basée sur la propriété de monotonie (coopérativité) du système
- Un système $\dot{x} = Ax + \varphi$ est dit coopératif si sa matrice d'état est Metzler ($\forall i \neq j, A_{ij} \geq 0$) et φ est non négative
- En partant des conditions initiales ($\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$), la monotonie de l'erreur d'observation garantit que, $\forall t > 0, \underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$
- La propriété de monotonie est difficile à satisfaire

- Pour relaxer l'hypothèse de coopérativité → Changement de variables pour les systèmes LPV
- Observateur par intervalle pour des systèmes LPV sous la forme centre/rayon
- Diagnostic de systèmes NL en passant par des transformations en systèmes LPV et en utilisant des observateurs intervalles (aide à la prise de décision pour détecter les défauts)

Soit un système LPV décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) + E(t)d(t) \\ y(t) = Cx(t) + Fw(t) \\ x(0) \in [x^-(0), x^+(0)] \\ \forall t, d(t) \in [-1, +1]^p, w(t) \in [-1, +1]^r \\ \forall t, \rho(t) \in [-1, +1]^q \end{array} \right. \quad (4)$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^s$, $\rho(t) \in \mathbb{R}^q$, $d(t) \in \mathbb{R}^p$,
 $E(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $F \in \mathbb{R}^{s \times r}$ and $w(t) \in \mathbb{R}^r$

- **Hypothèses :**

- $u(t)$ et $E(t)$ connues et bornées
- Les perturbations ainsi que l'état initial sont inconnus mais bornés

Décomposition des matrices A et B

$$\begin{aligned} A(\rho(t)) &= A_0 + \sum_{i=1}^q A_i \rho_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B(\rho(t)) &= B_0 + \sum_{i=1}^q B_i \rho_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times m} \end{aligned} \quad (5)$$

A_i et B_i ($i = 1, \dots, q$) sont constantes. $\rho(t) = (\rho_1(t), \dots, \rho_q(t))^T$ vecteur de scheduling. $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ peut être Hurwitz stable ou instable.

- (A_0, C) est détectable

Problématique

- Introduire un gain d'observateur L / $\tilde{A}_0 = A_0 - LC$ est stable (se baser sur une dynamique LTI)
- Changement de variables variant dans le temps pour lever l'hypothèse Metzler sur la dynamique centrale LTI (\tilde{A}_0)
- Étendre le changement aux systèmes LPV où les ρ_j interviennent de manière affine dans la matrice d'état
- On distingue deux cas :
 - cas où ρ est inconnu mais borné
 - cas où ρ est connu
- Étude de stabilité (conditions de non divergence des bornes)

Plan

- 1 Introduction
- 2 Problématique
- 3 Observateur intervalle**
 - **Changement de variables variant dans le temps**
 - Cas où le vecteur de scheduling est non mesuré (borné)
 - Cas où le vecteur de scheduling est mesuré
- 4 Exemple Numérique
- 5 Conclusion

Changement de variables variant dans le temps

13

Transformation du modèle LPV

En se basant sur la décomposition (5), le système (4) se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + E(t)d(t) + \\ \quad (\sum_{i=1}^q A_i x(t)\rho_i(t)) + (\sum_{i=1}^q B_i u(t)\rho_i(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Fw(t) \end{cases} \quad (6)$$

- Calculer le gain L telque $(A_0 - LC)$ soit stable

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = (A_0 - LC)x(t) + \tilde{B}_0\tilde{U}(t) + \check{E}(t)\check{d}(t) \\ + (\sum_{i=1}^q A_i x(t)\rho_i(t)) + (\sum_{i=1}^q B_i u(t)\rho_i(t)) \end{aligned} \quad (7)$$

avec $\tilde{B}_0 = [B_0, L]$, $\tilde{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $\check{E}(t) = [E(t), -LF]$ and $\check{d}(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \in [-1, 1]^{p+r}$

Changement de variables variant dans le temps

Transformation du modèle LPV

En se basant sur la décomposition de Jordan de $\tilde{A}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donnée par (8), on propose un changement de variables $z(t) = \Omega(t)x(t)$ avec $\Omega(t) = \text{diag}(e^{-i\omega t})\nu$.

$$\tilde{A}_0 = \nu^{-1} J \nu, \nu \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (8)$$

$$J = \theta + \eta, \theta = \text{diag}(\xi + i\omega), \eta \text{ matrice nilpotente}, \xi \in \mathbb{R}^n, \omega \in \mathbb{R}^n$$

En utilisant ce changement de variables, le système (7) se réécrit sous la forme :

$$\dot{z}(t) = (\text{diag}(\xi) + \eta)z(t) + \Omega(t)\phi(t), \text{ avec} \quad (9)$$

$$\phi(t) = \tilde{B}_0 \tilde{U}(t) + \check{E}(t)\check{d}(t) + (\sum_{i=1}^q A_i x(t)\rho_i(t)) + (\sum_{i=1}^q B_i u(t)\rho_i(t))$$

Plan

- 1 Introduction
- 2 Problématique
- 3 Observateur intervalle**
 - Changement de variables variant dans le temps
 - Cas où le vecteur de scheduling est non mesuré (borné)**
 - Cas où le vecteur de scheduling est mesuré
- 4 Exemple Numérique
- 5 Conclusion

Observateur intervalle (ρ borné)

16

Transformation du modèle LPV

En partant du système (9) (obtenu après le changement de variables) et en utilisant la proposition 1,

Proposition 1 : Soit $z : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^n$, $z^c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^n$ et $z^r : \mathbb{R}^+ \rightarrow (\mathbb{C}^+)^n$ trois fonctions continues. Si $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $z(t) \in z^c(t) \pm z^r(t)$ avec $z^r(t) > 0$, il existe une fonction $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow [-1, +1]^{2n}$ qui satisfait (10) où l'opérateur $\Delta(\cdot)$ est définie dans (11) :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, z(t) = z^c(t) + \Delta(z^r(t))\sigma(t) \quad (10)$$

$$\forall v \in \mathbb{C}^n, \Delta(v) = [\text{diag}(v^R), i.\text{diag}(v^I)] \in \mathbb{C}^{n \times 2n} \quad (11)$$

Observateur intervalle (ρ borné)

17

Transformation du modèle LPV

Le système (9) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\dot{z}(t) = (\text{diag}(\xi) + \eta)z(t) + \Omega(t)(B_0(t) + \hat{E}(t)\hat{d}(t)), \text{ avec} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}(t, z^r(t), z^c(t)) &= [\check{E}(t) | \dots A_i \Omega^{-1}(t) z^c(t) + B_i u(t) \dots | \dots A_i \Xi(t) \dots] \\ \Xi(t) &= \Omega^{-1}(t) \Delta(z^r(t)), \quad \Delta(z^r) = [\text{diag}(z^r)^R, i.\text{diag}(z^r)^I] \\ \hat{d}(t) &= [\check{d}(t); \rho(t); \zeta(t)], \quad \zeta(t) = \sigma(t)\rho(t) \end{aligned}$$

En fait, $\mu_j = A_i x(t) \rho_j(t) = \Gamma_j(t) z(t) \rho_j(t)$ avec $\Gamma_j(t) = A_i \Omega^{-1}(t)$ et $z(t) = z^c(t) + \Delta(z^r(t))\sigma(t)$

Hypothèses :

18

- **hypothèse 1** : $x(0) \in x^c(0) \pm x^r(0)$, $z(0) \in z^c(0) \pm z^r(0)$
- **Hypothèse 2** : $u(t)$, $E(t)$, $d(t) \in [-1, +1]^p$, $w(t) \in [-1, +1]^r$ et $\rho(t) \in [-1, 1]^q$ sont continus par rapport au temps
- **Hypothèse 3** : $u(t)$ et $E(t)$ sont connues et bornées, $x^c(0)$ et $x^r(0)$ sont connus

Structure de l'observateur par intervalle (ρ borné)

19

Théorème

L'observateur intervalle pour le système (7) est donné par ses dynamiques

$$\begin{cases} \dot{z}^c(t) = (\text{diag}(\xi) + \eta)z^c(t) + \Omega(t)\tilde{B}_0\tilde{U}(t) \\ \dot{z}^r(t) = (\text{diag}(\xi) + \eta)z^r(t) + |\Omega(t)\hat{E}(t, z^r(t), z^c(t))|\mathbf{1} \end{cases} \quad (13)$$

dans la nouvelle base ($z(t)$) avec

$$\Omega(t) = \text{diag}(e^{-i\omega t})\nu, \quad \Omega^{-1}(t) = \nu^{-1}\text{diag}(e^{i\omega t}) \quad (14)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, z(t) \in z^c(t) \pm z^r(t) \subset \mathbb{C}^n \quad (15)$$

Structure de l'observateur par intervalle (ρ borné)

20

Corollaire

Dans la base d'origine, l'observateur par intervalle est décrit par :

$$x^c(t) = \Omega^{-1}(t)z^c(t)$$

$$x^r(t) = \Omega^{-1}(t) \diamond z^r(t) = |\Omega^{-1}(t)|z^r(t) + 2|(\Omega^{-1}(t))'| |(z^r(t))'| \quad (16)$$

et vérifiant la propriété d'inclusion :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, x(t) \in x^c(t) \pm x^r(t) \subset \mathbb{C}^n \quad (17)$$

Stabilité de l'observateur intervalle (ρ borné)

21

- Non divergence de la dynamique de rayon $z^r(t)$:

Proposition

Soit $S = \sum_{i=1}^q \|v A_i v^{-1}\| \in (\mathbb{R}^+)^{n \times n}$ avec $\rho(t) \in [-1, 1]^q$ et $\|\cdot\|$ désigne le module élément par élément des arguments d'une matrice complexe. Si $\xi < 0$ (\tilde{A}_0 est stable) et si la matrice Metzler $[(\text{diag}(\xi) + \eta + S), S; S, (\text{diag}(\xi) + \eta + S)]$ est stable, alors $\forall t, 0 \leq z^r(t) \leq \bar{z}^r(t)$ et $\bar{z}^r(t)$ suivent une dynamique stable.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Problématique
- 3 Observateur intervalle**
 - Changement de variables variant dans le temps
 - Cas où le vecteur de scheduling est non mesuré (borné)
 - Cas où le vecteur de scheduling est mesuré**
- 4 Exemple Numérique
- 5 Conclusion

Observateur intervalle (ρ connu)

23

En se basant sur le modèle (9) et en utilisant le fait que $x(t) = \Omega^{-1}(t)z(t)$, le système de départ peut se réécrire dans la nouvelle base sous la forme :

$$\dot{z}(t) = (\text{diag}(\xi) + \eta + \sum_{i=1}^q \Omega(t)A_i\rho_i(t)\Omega^{-1}(t))z(t) + \Omega(t)(\tilde{B}_0 + [\sum_{i=1}^q B_i\rho_i(t), 0])\tilde{U}(t) + \Omega(t)\check{E}(t)\check{d}(t) \quad (18)$$

avec $\tilde{B}_0 = [B_0, L]$, $\tilde{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $\check{E}(t) = [E(t), -LF]$ and $\check{d}(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$

Structure de l'observateur par intervalle (ρ connu)

24

Théorème

Soit le système décrit par (7), le système

$$\begin{cases} \dot{z}^c(t) = (\text{diag}(\xi) + \eta + \Omega(t)(\sum_{i=1}^q A_i \rho_i(t))\Omega^{-1}(t)) \\ \quad z^c(t) + \Omega(t)(\tilde{B}_0 + [\sum_{i=1}^q B_i \rho_i(t), 0])\tilde{U}(t) \\ \dot{z}^r(t) = (\text{diag}(\xi) + \eta)z^r(t) + |\Omega(t)\hat{E}(t, z^r(t))| \mathbf{1} \end{cases} \quad (19)$$

est un observateur par intervalle pour ce système décrit par son dynamique du centre ($z^c(t)$) et du rayon ($z^r(t)$) dans la nouvelle base ($z(t)$) avec

$$\begin{cases} \Omega(t) = \text{diag}(e^{-i\omega t})\nu, \quad \Omega^{-1}(t) = \nu^{-1} \text{diag}(e^{i\omega t}) \\ \hat{E}(t, z^r(t)) = [\check{E}(t) | \dots A_i \rho_i(t) \Xi(t) \dots] \\ \Xi(t) = \Omega^{-1}(t)\Delta(z^r(t)) \end{cases} \quad (20)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, z(t) \in z^c(t) \pm z^r(t) \subset \mathbb{C}^n \quad (21)$$

Stabilité de l'observateur intervalle (ρ connu)

25

- Stabilité de la dynamique du centre $x^c(t)$:

Corollaire

La dynamique du centre de l'observateur, dans la base $(x(t))$ est décrite par (22) :

$$\dot{x}^c(t) = (A_0 - LC + \sum_{i=1}^q A_i \rho_i(t)) x^c(t) + (\tilde{B}_0 + [\sum_{i=1}^q B_i \rho_i(t), 0]) \tilde{U}(t) \quad (22)$$

Lemme

Les déclarations suivantes sont équivalentes :

$$S_1 : \exists \rho(t) \in [-1, 1]^q, A(t) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i \rho_i(t)$$

$$S_2 : \exists \alpha(t) \in (\mathbb{R}^+)^N, A(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \hat{A}_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) = 1$$

où $\hat{A} = \{A_0 + \sum_{i=1}^q A_i \eta_i, \eta \in \{-1, 1\}^q\}$, $N = 2^q$ et \hat{A}_j désigne le j^{me} élément de \hat{A} , $j = 1, \dots, N$.

Stabilité de l'observateur intervalle (ρ connu)

26

Proposition

Le système décrit par la première équation dans (19) ou, par équivalence, par (22) est stable s'il existe deux matrices $P = P^T \succ 0$ et X telque $\hat{A}_j^T P + P \hat{A}_j - C^T X^T - X C \prec 0, \forall j = 1, \dots, N$ où \hat{A}_j est définie dans Lemme et $L = P^{-1} X$.

- Non divergence de la dynamique de rayon $z^r(t)$:

Condition similaire à celle où ρ est inconnu.

Exemple Numérique : Cas de ρ inconnu mais borné 27

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + E(t)d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (23)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^5$ est l'état, $d(t) \in [-1, +1]$ est la perturbation,
 $E(t) = \mathbf{1}/10 = [1, 1, 1, 1, 1]^T/10$, $F = 0$,
 $C = [1, 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0, 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$.

$$\begin{bmatrix} -1 + \alpha_1 & -4 + \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 - \alpha_2 & -1 + \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 + \alpha_3 & 1 + \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \alpha_4 & -3 + \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 + \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (24)$$

où $\forall i = 1 \dots 5$, $\alpha_i = \rho_i/10$ et $\forall i$, $\alpha_i \in [-0.1, +0.1]$

Exemple Numérique : Cas de ρ inconnu mais borné 28

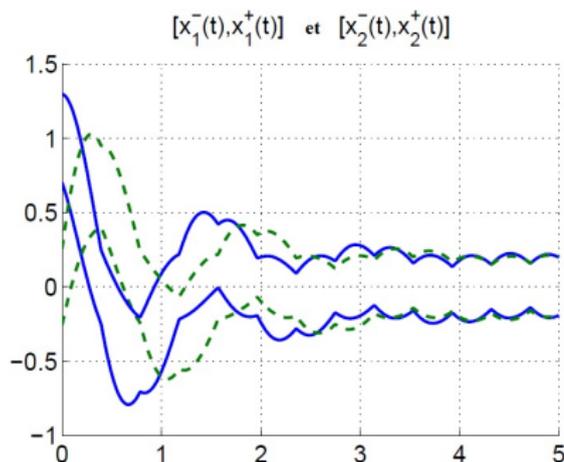


FIGURE : Résultats de simulation : système LPV et observateur intervalle englobant l'ensemble de valeurs possible des états (cas ρ_i inconnus)

Exemple Numérique : Cas de ρ connu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) + E(t)d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (25)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^2$ est l'état, $u(t)$ est l'entrée ($u(t) = 1$), $d(t) \in [-1, +1]^2$ est la perturbation, $E(t) = [0.2, 0; 0, 0.5] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,
 $B(\rho(t)) = B_0 = [0.1; 0.1] \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $C = [0, 1] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. Pour la simulation, $A(\rho(t))$ est choisi telque :

$$\begin{aligned} A(\rho(t)) &= \begin{bmatrix} -0.632 - 0.16\sin(t) & 0.1\cos(3t) \\ -0.14\cos(2t) & 0.06\sin(t) \end{bmatrix} \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i \rho_i(t) \end{aligned}$$

où $\rho(t) = [\rho_1(t); \rho_2(t); \rho_3(t)] = [\sin(t); \cos(3t); \cos(2t)]$,
 $A_0 = [-0.632, 0; 0, 0]$, $A_1 = [-0.16, 0; 0, 0.06]$, $A_2 = [0, 0.1; 0, 0]$ et
 $A_3 = [0, 0; -0.14, 0]$

Exemple Numérique : Cas de ρ connu

30

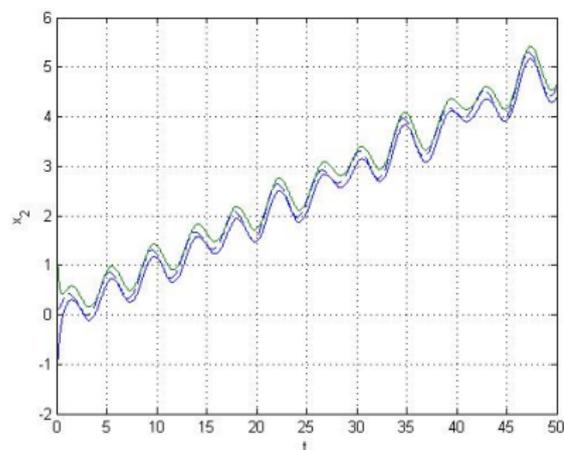
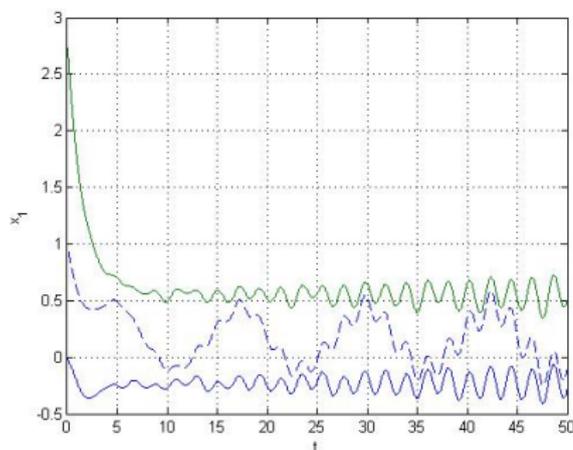


FIGURE : Résultats de simulation : système LPV et observateur intervalle englobant l'ensemble de valeurs possible des états (cas ρ_i connus)

Conclusion

- Synthèse de gain d'observateur
- Changement des coordonnées variable dans le temps
- Observateur par intervalle pour les systèmes LPV en présence des perturbations
- Calcul des bornes se ramène à un simple calcul numérique pour la résolution de deux EDOs
- Garantie d'inclusion et étude de stabilité

Perspectives

- Systèmes NL via des transformations en LPV
- Détection des défauts