
Modèles et consensus en fusion : influence sur la décision et la complexité du processus

Christophe OSSWALD

Séminaire E³I²

Contexte

- Dans un monde idéal, les classes sont *disjointes*.
- Face à un objet inconnu, le but d'un classifieur – humain ou automatique – est de lui *affecter une classe*.
- Mais, même si le monde est parfait, la perception que nous en avons est *imparfaite*, et la classification peut être faussée.
- Le classifieur étant reconnu imparfait, nous allons lui permettre d'exprimer son imperfection : il aura droit au *doute* et à l'*indifférence*. Et lorsqu'un *conflit* apparaîtra entre deux classifieurs, nous saurons l'exploiter.

Un expert sûr

- Le premier expert dit “B”.

A	B	C
0	1	0

Un expert sûr

- Le premier expert dit “B”.
- Le second expert dit “C”.

<i>A</i>		<i>B</i>		<i>C</i>	
0	0	1	0	0	1

Un expert sûr

- Le premier expert dit “B”.
- Le second expert dit “C”.
- La conjonction ne nous aide pas à décider.

A

B

C

0

0

0

Un expert sûr

- Le premier expert dit “B”.
- Le second expert dit “C”.
- La conjonction ne nous aide pas à décider.
- L’union assez peu.

A	B	C
0	1	1

Un expert sûr

- Le premier expert dit “B”.
- Le second expert dit “C”.
- La conjonction ne nous aide pas à décider.
- L’union assez peu.
- Et si les classes de Θ ont une sémantique...

15 ans

12 ans

18 ans

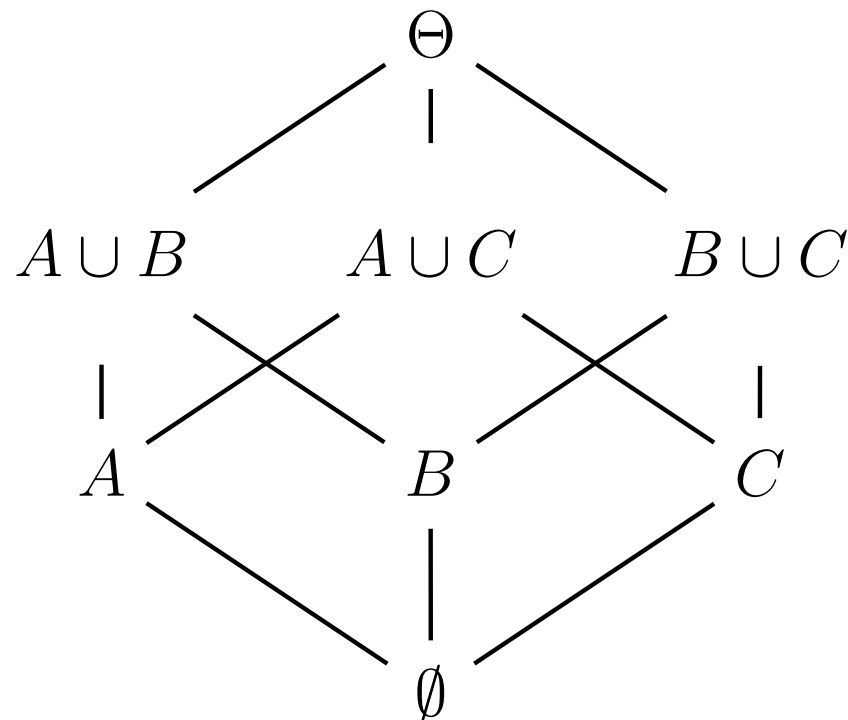
0

1

1

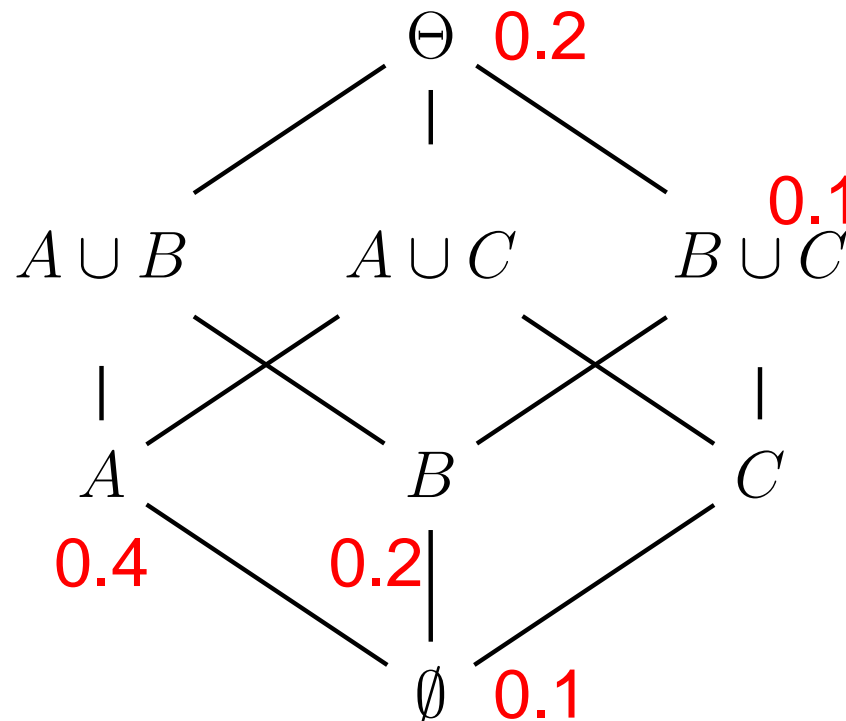
De la liberté pour les experts : DST

- L'expert a accès à tous les sous-ensembles de $\Theta = A \cup B \cup C : 2^\Theta$.
- Θ est l'indifférence, et
- \emptyset représente l'ouverture au monde hors Θ .



De la liberté pour les experts : DST

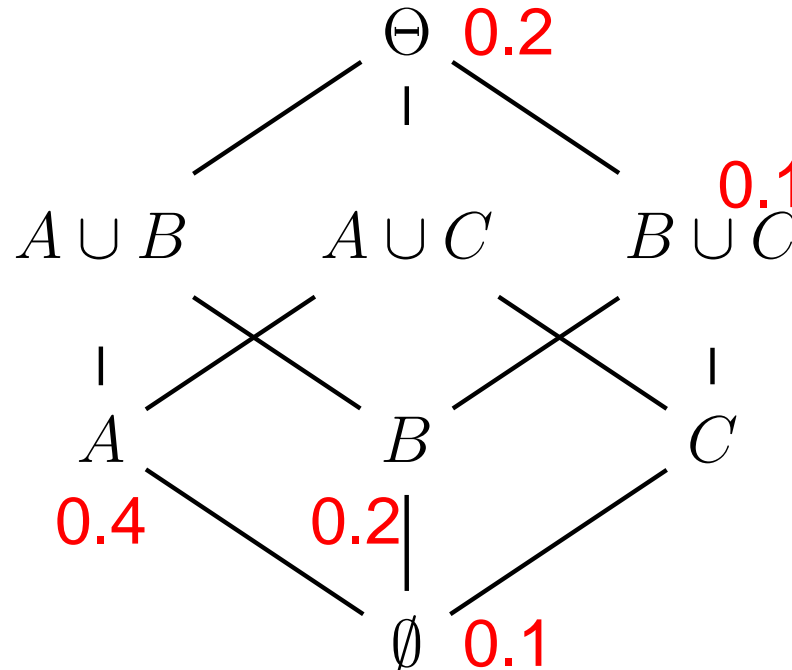
- L'expert donne librement une fonction de masse m sur 2^Θ .
- Pour les éléments focaux X , $m(X) > 0$.
- Pour $Y \in 2^\Theta$, on a $m(Y) \geq 0$, et $\sum_{Y \in 2^\Theta} m(Y) = 1$.



Fonction de croyance

- La croyance regroupe les masses incluses.

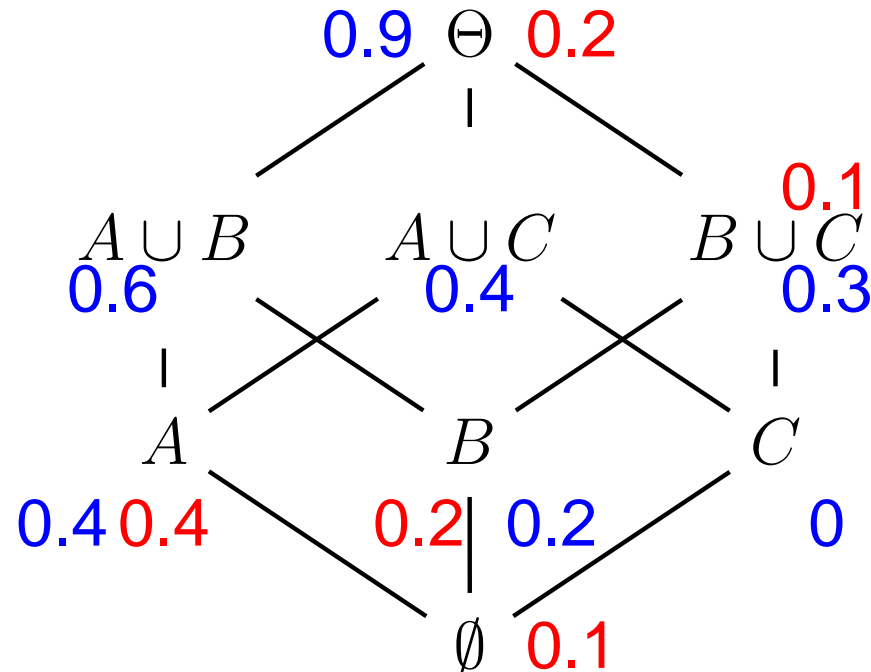
$$\text{bel}(X) = \sum_{Y \in 2^X, Y \neq \emptyset} m(Y)$$



Fonction de croyance

- La croyance regroupe les masses incluses.

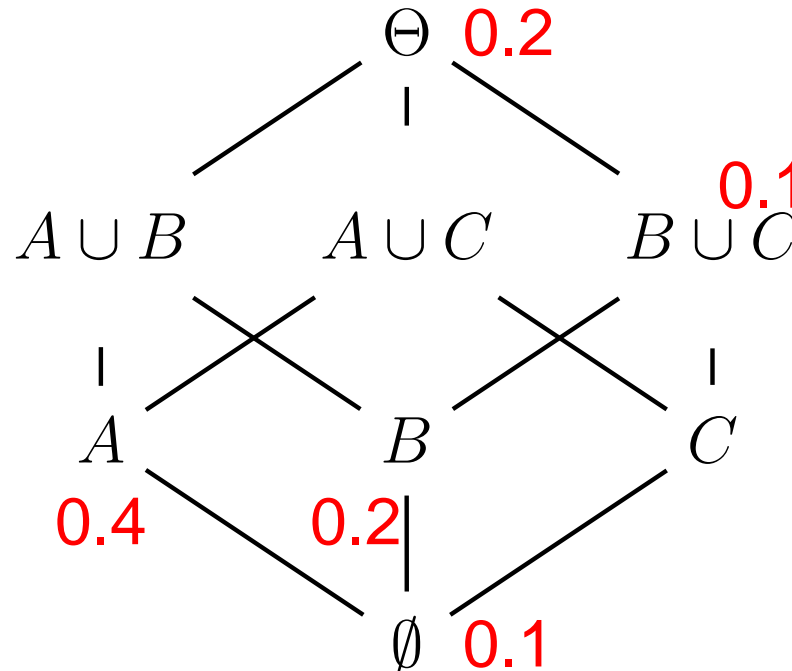
$$\text{bel}(X) = \sum_{Y \in 2^X, Y \neq \emptyset} m(Y)$$



Fonction de plausibilité

- La plausibilité regroupe les masses intersectées.

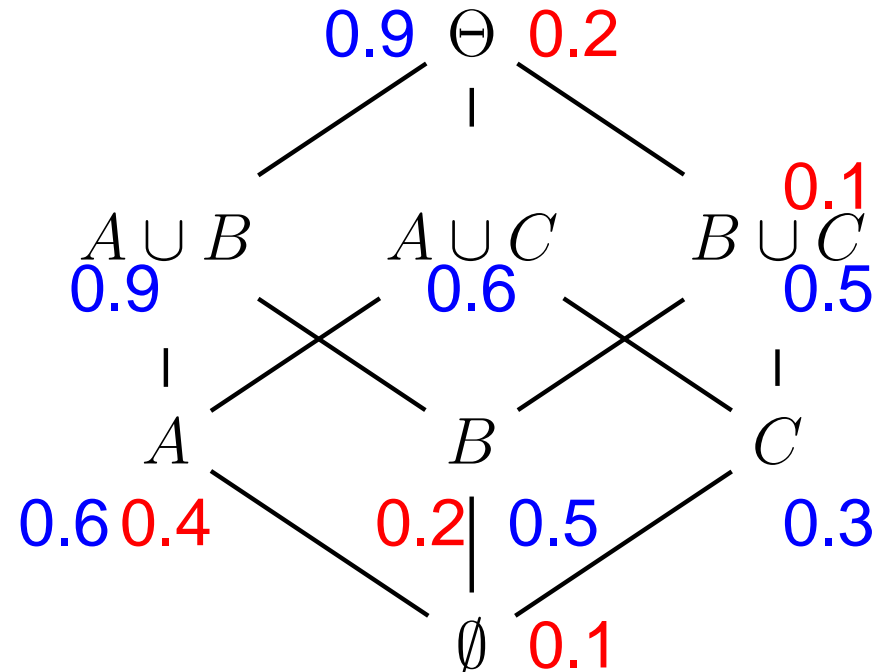
$$\text{pl}(X) = \sum_{Y \in 2^\Theta, Y \cap X \neq \emptyset} m(Y)$$



Fonction de plausibilité

- La plausibilité regroupe les masses intersectées.

$$\text{pl}(X) = \sum_{Y \in 2^\Theta, Y \cap X \neq \emptyset} m(Y)$$



Relations entre toutes ces fonctions

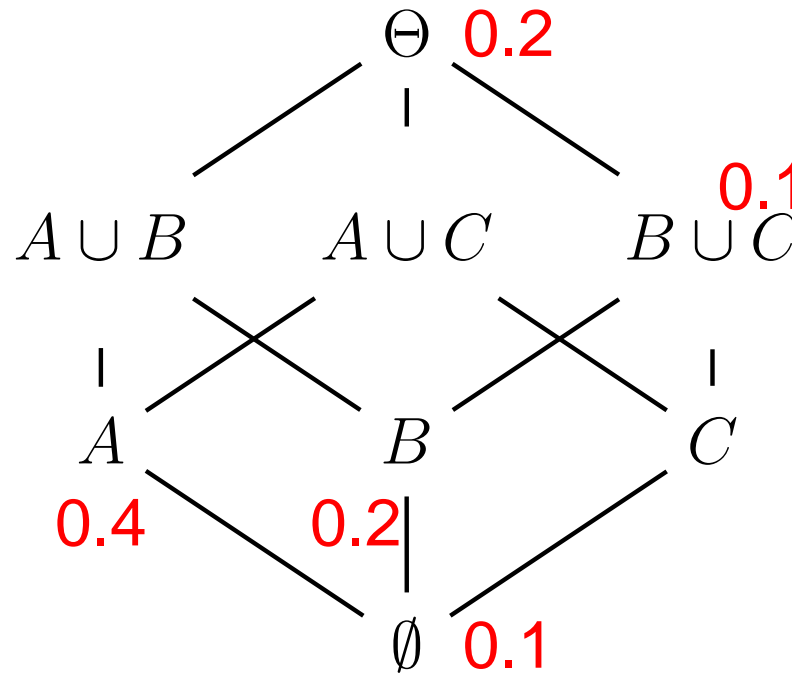
- $pl(\Theta) = bel(\Theta) = 1 - m(\emptyset)$
- $bel(X) \leq pl(X)$
- $X \subseteq Y \Rightarrow bel(X) \leq bel(Y)$
- $X \subseteq Y \Rightarrow pl(X) \leq pl(Y)$
- $bel(X) + bel(\bar{X}) \leq 1$
- $pl(X) + pl(\bar{X}) \geq 1$

On appelle intervalle de confiance de X l'intervalle $[bel(X), pl(X)]$.

Probabilité pignistique

La probabilité pignistique permet de projeter les masses définies sur le power-set 2^Θ sur les singletons.

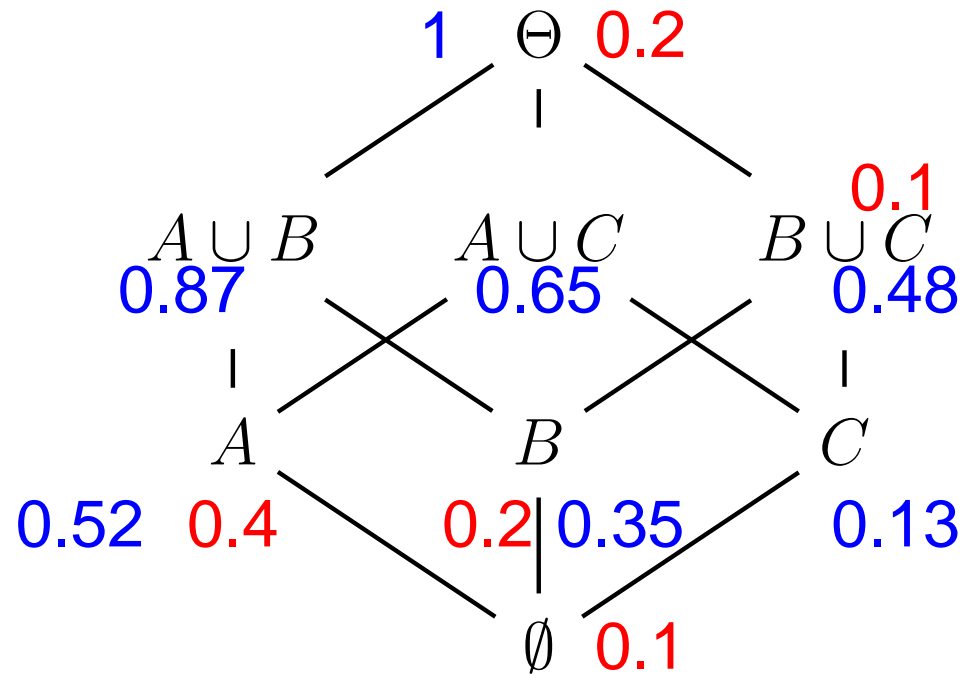
$$\text{betP}(X) = \sum_{Y \in 2^\Theta, Y \neq \emptyset} \frac{|X \cap Y|}{|Y|} \frac{m(Y)}{1 - m(\emptyset)}$$



Probabilité pignistique

La probabilité pignistique permet de projeter les masses définies sur le power-set 2^Θ sur les singletons.

$$\text{betP}(X) = \sum_{Y \in 2^\Theta, Y \neq \emptyset} \frac{|X \cap Y|}{|Y|} \frac{m(Y)}{1 - m(\emptyset)}$$



Prendre une décision

- Une option pessimiste est le maximum du crédibilité $\max_{X \in \Theta}(\text{bel}(X))$.
- Une option optimiste est le maximum du plausibilité $\max_{X \in \Theta}(\text{pl}(X))$.
- Un compromis habituel est le maximum de probabilité pignistique $\max_{X \in \Theta}(\text{betP}(X))$.

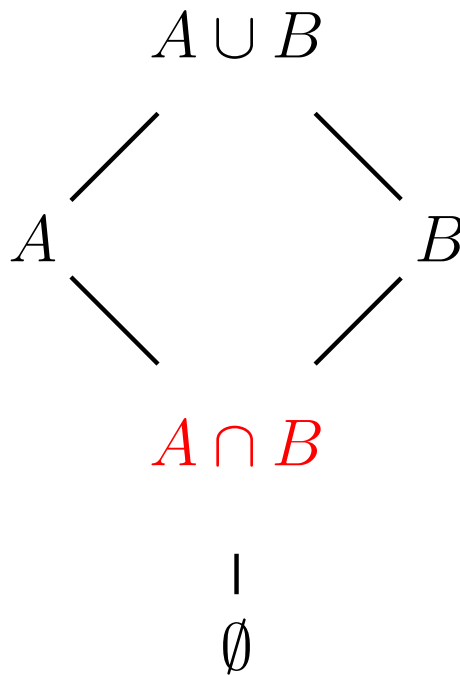
Ces méthodes ne permettent pas d'utiliser 2^Θ comme espace de choix possibles.

Si tous les éléments sont focaux, calculer $\text{bel}(X)$, $\text{pl}(X)$ ou $\text{betP}(X)$ coûte $\mathcal{O}(n2^n)$ opérations. On se limite à $\mathcal{O}(nm)$ s'il n'y a que m éléments focaux pour l'expert.

Etendre l'espace de description

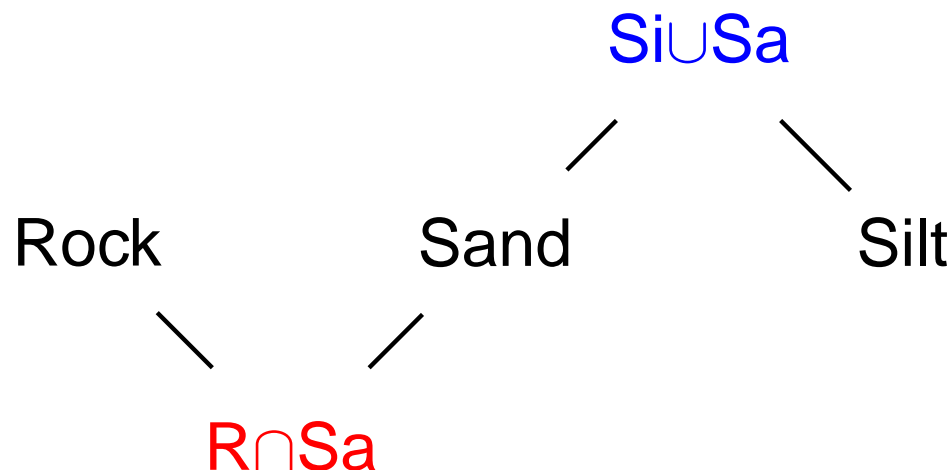
Il est possible d'étendre 2^Θ en l'hyper-powerset D^Θ , pour avoir un ensemble fermé pour l'intersection, et pas seulement l'union.

Il faut limiter les éléments focaux : la taille de D^Θ est en $\mathcal{O}(2^{2^n})$



Sémantique de D^\ominus : Théorie DSmT

- Le **premier** expert affirme que l'objet contient du Sable et de la Roche.
- Le **second** expert affirme que l'objet est constitué de Vase ou de Sable.
- Ce modèle permet de gérer un espace de discernement dont les classes ne sont pas exclusives.



Théorie DSmT : généralisation de DST

- Les fonctions de crédibilité, plausibilité et probabilité pignistique s'étendent de 2^Θ à D^Θ , et se généralisent en $\text{Bel}(X)$, $\text{Pl}(X)$ et $\text{GPT}(X)$.
- La propriété $X \subseteq Y \Rightarrow \text{Bel}(X) \leq \text{Bel}(Y)$, $\text{Pl}(X) \leq \text{Pl}(Y)$, $\text{GPT}(X) \leq \text{GPT}(Y)$ reste vraie.
- Il peut être plus intéressant de regarder directement les masses, plutôt que ces fonctions, pour pouvoir choisir des classes hors de Θ .

Fusion entre deux experts : règle de Dempster

Deux experts définissent des jeux de masses différents, m_1 et m_2 , pour classifier un objet. On peut les combiner par une combinaison conjonctive :

$$m'(A) = \sum_{B_1 \cap B_2 = A} m_1(B_1)m_2(B_2)$$

Ainsi :

	\emptyset	A	B	C	Θ
m_1	0	0.5	0.1	0	0.4
m_2	0	0.2	0	0.5	0.3
m'	0.32	0.33	0.03	0.2	0.12

Fusion entre deux experts : DSmT

Deux experts définissent des jeux de masses différents pour classer un objet dans D^Θ . La même règle du consensus s'applique, en notant que $(A \cap B) \cap A = A \cap B$:

	\emptyset	A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
m_1	0	0.6	0	0	0.4
m_2	0	0	0	0.5	0.5
m'	0	0.3	0	0.5	0.2

Fusion entre deux experts : redistribution du conflit

Le conflit induit par $m_1(A)$ et $m_2(B)$ est $m_1(A)m_2(B)$. Par le consensus, ce conflit grossit la masse de \emptyset , et n'est pas pris en compte lors de la décision, qui se fait souvent en monde clos.

En redistribuant le conflit selon la règle PCR5, on ajoute $m_1^2(A)m_2(B)/(m_1(A) + m_2(B))$ à $m(A)$, et $m_1^2(A)m_2(B)/(m_1(A) + m_2(B))$ à $m(B)$.

	\emptyset	A	B	$A \cup B$
m_1	0	0.6	0	0.4
m_2	0	0.3	0.2	0.5
m_c	0.12	0.6	0.08	0.2
m_{PCR5}	0	0.69	0.11	0.2

Décision : influence du modèle

- La probabilité pignistique redistribue le conflit $m(\emptyset)$ proportionnellement à m : normalisation par $\frac{1}{1-m(\emptyset)}$.
- Si le conflit partiel entre A et B est placé sur $m(A \cap B)$, celui-ci est distribué équitablement entre A et B lors de l'évaluation de $\text{Bel}(A)$, $\text{Pl}(A)$, $\text{Bel}(B)$, $\text{Pl}(B)$ (intégralement à chaque fois) ou de $\text{GPT}(A)$ et $\text{GPT}(B)$ (une moitié pour chacun) : il ne peut modifier la décision.
- Seule la redistribution par la PCR5, qui gère chaque conflit local, peut permettre une modification de décision par rapport à une modélisation dans 2^Θ et un consensus conjonctif.

Décision : une décision stable

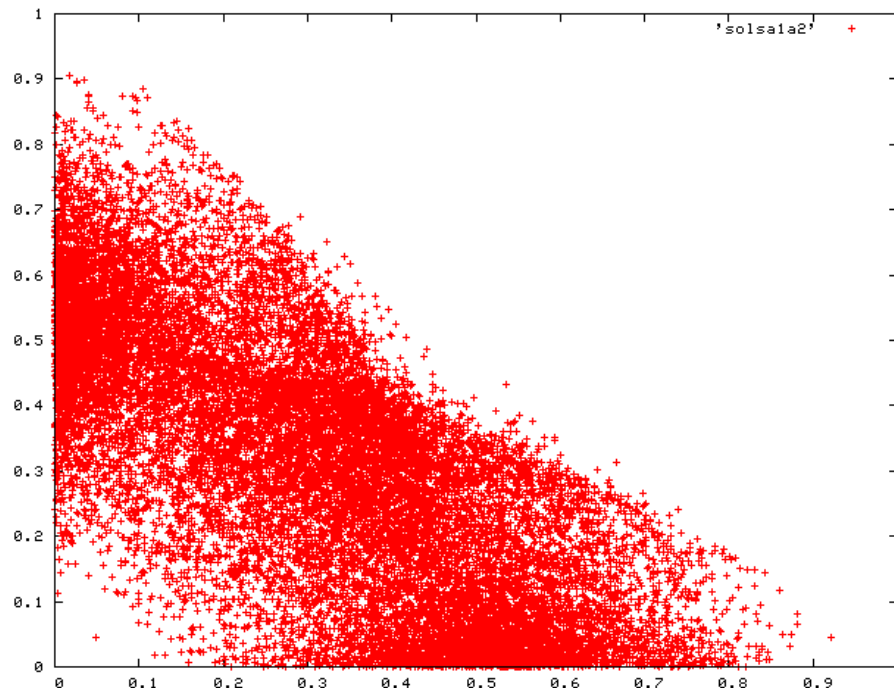
Dans le cas d'experts qui placent leurs poids au hasard sur les éléments de Θ , la décision prise au final après la fusion de deux experts s'exprimant sur n classes est souvent la même avec ou sans redistribution par PCR5 :

classes	2	3	4	5	6	7
changement	0.6%	5.5%	9.1%	12.1%	14.6%	16.4%

Décision : des changements éparpillés

Nous nous intéressons aux changements de décision pour deux experts s'exprimant sur deux classes. Nous avons quatre données, $a_1 = m_1(A)$, $a_2 = m_2(A)$, $b_1 = m_1(B)$ et $b_2 = m_2(B)$.

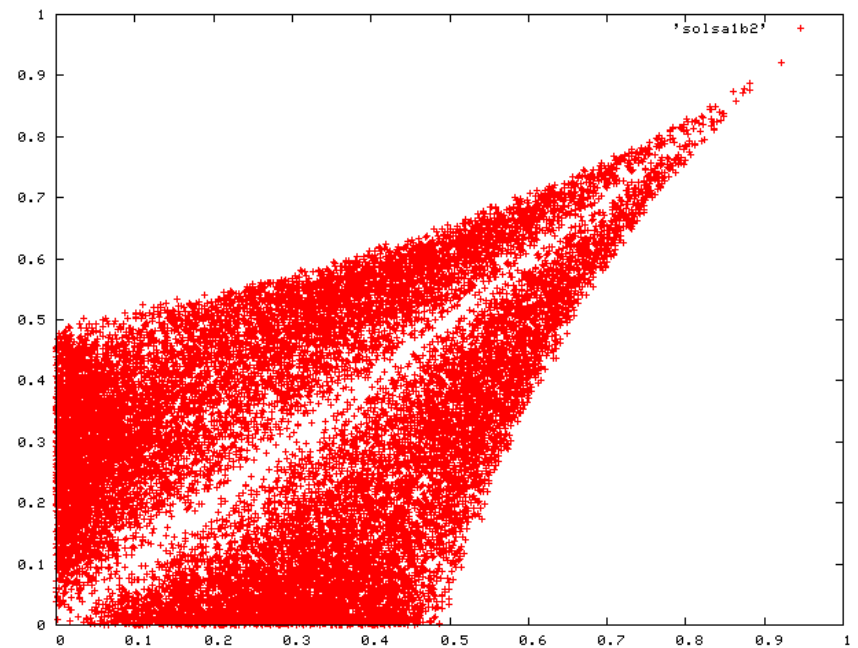
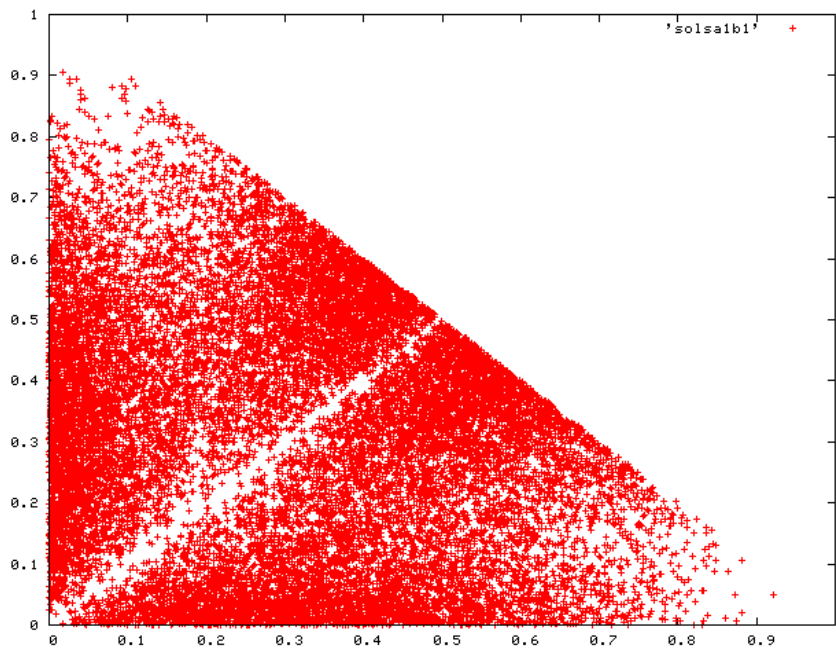
Le plan (a_1, a_2) nous montre que la seule zone épargnée est celle qui vérifie $a_1 + a_2 \geq 1$.



Décision : des zones de stabilité

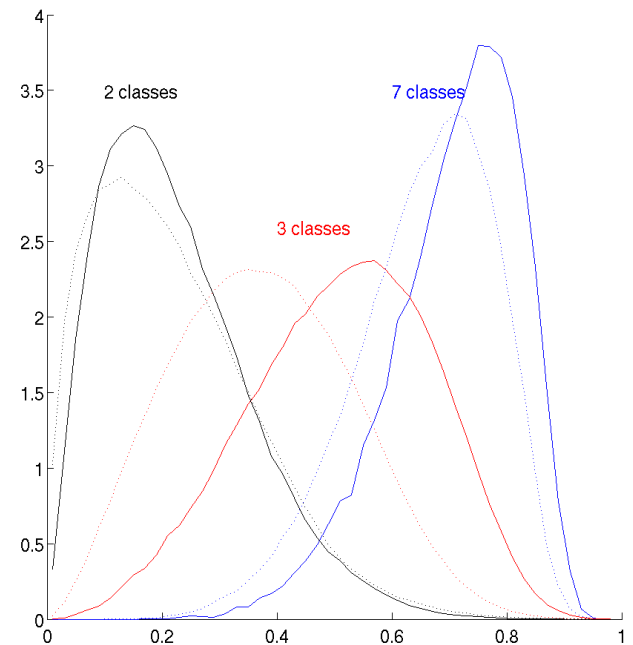
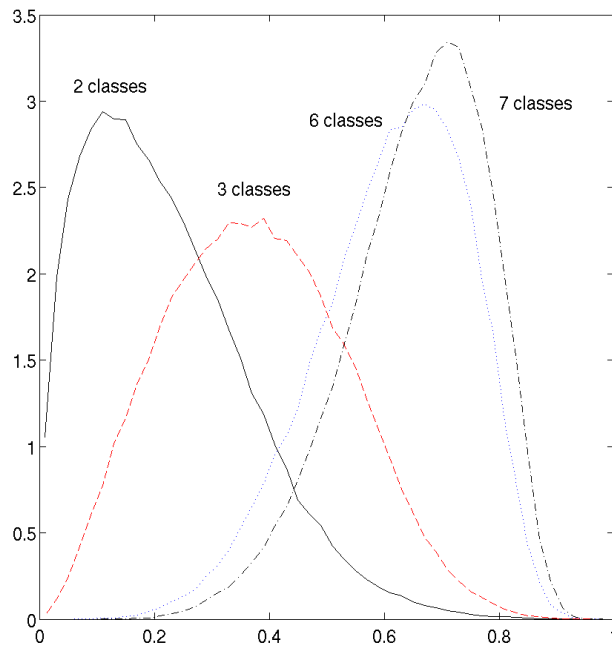
Lorsque $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_1 = b_2$ ou $a_2 = b_1$, toutes les méthodes se comportent de la même manière.

Les zones de stabilité en-dehors de la première diagonale proviennent, plus ou moins directement, des conditions de normalisation $\sum_X m(X) = 1$.



Une vision du conflit

- Le conflit, pour les experts aléatoires, augmente naturellement avec le nombre de classes.
- Le conflit est plus important dans les cas de changement de décision : il est plus important lorsque les masses sur A et sur B sont semblables, et donc que la décision peut être instable.



Une réalité sympathique

- Une base d'image(s) sonar est étiquetée avec 7 classes (roc, cailloutis, sable, ride, vase, ombre, autre), par deux experts du domaine.
- le nombre d'éléments focaux par imagerie est de l'ordre de 1.1, hormis l'indifférence \ominus , au lieu de 7 dans le cas aléatoire.
- Le conflit moyen est de 0.0524, au lieu de 0.6556.
- Le nombre de retournements constaté est de l'ordre de 0.3%, au lieu de 16.4%.

Plus d'experts, moins de classes

- Les modèles ont été testés dans le cas de deux experts et deux classes. Le passage à plus de deux classes se fait assez facilement.
- Le passage à plus de deux experts nécessite de faire très attention au codage interne des experts, pour limiter l'explosion combinatoire. Pour n experts à p éléments focaux sur un espace de discernement à m classes, la complexité atteint vite $\mathcal{O}(2^{2^m})$ pour le stockage, et $\mathcal{O}(p^n)$ pour les calculs.
- Nombre de formules ne s'étendent pas de façon naturelle : un travail théorique reste à mener.

Bien choisir un espace des décisions admissible

- Les fonctions considérées sont croissantes sur le treillis d'inclusion : les classes de l'espace des décisions admissibles doivent être incomparables.
- Une manière d'enrichir l'espace est de ne pas considérer les mêmes fonctions partout. Par exemple la plausibilité sur les singletons, et la crédibilité sur les unions de deux singletons.
- Une fonction d'évaluation qui compense la monotonie des $bel()$, $pl()$ et $betP()$ par la prise en compte du cardinal des classes (par exemple selon leurs subdivisions dans un diagramme de Venn) et qui ne comporte pas (trop) d'effets de bord reste à construire.

De la lecture

- DEZERT J., SMARANDACHE F., DANIEL M., *The Generalized Pignistic Transformation* (2004)
- MARTIN, A., *Comparative study of information fusion methods for sonar images classification* (2005)
- SHAFER G., *A mathematical theory of evidence* (1976).
- SMARANDACHE F., DEZERT J., *Applications and advances of DSMT for Information Fusion* (2004)
- SMARANDACHE F., DEZERT J., *Information Fusion Based on New Proportionnal Conflict Redistribution Rules* (2005)
- SMET P., *The Combination of Evidence in the Transferable Belief Model* (1990)